УДК 539.12; 530.145

К ПОСТРОЕНИЮ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ОДНОЙ СВОБОДНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Л.А. ДАДАШЕВ
Институт Физики АН Азербайджана,
Баку-143, пр.Г.Джавида 33
(Поступило 03.02.95)

В данной работе рассматривается старая проблема построения релятивистской квантовой механики. Предложена традиционная формулировка в пространстве векторнозначных функций, заданных на пространстве Минковского. Исходя из аналогий с релятивистской квантовой теорией поля (R Q F T), определено пространство состояний и представление группы симметрии. Показано, что они унитарно-эквивалентны однополевому пространству в (R Q F T) и сужению представления группы Пуанкаре на то пространство. Наличие этих двух основных квантовомеханических величин даст возможность поставить вопрос о том, какие частицы описывает волновая функция.

1.Введение

Этой статьей мы начинаем небольшой цикл работ, посвященных двум вопросам:

1. какой квантовомеханический смысл имеют невторичноквантованные решения уравнений Гельфанда-Яглома;
2. как следует вторично квантовать эти решения, и какие частицы они будут после этого описывать.

Хотя указанные вопросы и обсуждаются в литературе довольно давно, результаты получены слабые и касаются они только ответа на второй вопрос в двух случаях, а именно, уравнения Клейна-Гордона и уравнения Дирака. Этот скромный успех связан в первую очередь с отсутствием четкой постановки задачи. Задачу пытались решать по аналогии с нерелятивистским случаем, но никто не описал соответствующего Гильбертова пространства, что с квантовомеханической точки зрения делало все дальнейшие усилия бессмысленными.

В данной статье за основу принята R Q F T [1], в которой одночастичная проблема полностью сформулирована. Затем строится унитарное отображение этого пространства и алгебры, наблюдаемых в нем, в некоторое Гильбертово пространство функций от четырех переменных и в некоторое представление группы Пуанкаре в этом пространстве.

2. Одночастичное пространство

Пусть $(H,U(g),\Psi(x),\Omega)$- четыре основные величины аксиоматики Вайтмана [1]. H - Гильбертово пространство состояний, $U(g)$ - унитарное представление группы Пуанкаре P в H, $\Psi(x)$- многокомпонентный оператор поля, $\Omega \in H$ - вакуумный вектор. Для этой четверки, в частности, справедливы соотношения

$$(a,\Lambda) = g \in P, \quad U(g)\Psi(x)U(g)^{*} = T(g)\Psi(g^{-1}x) \tag{1}$$

$$U(g)\Omega = \Omega$$

где $T(\cdot) \in R_{f}(SL(2c),c^{k})$, k - число компонент $\Psi(x)$. Свободный характер полей выделяется условием

$$\left(L_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + i\chi\right)\Psi(x) = 0 \tag{2}$$

$$L_{\mu} \in Mat\,(C^{k}), \quad \chi \in R^{1}$$

В рамках (R Q F T) одночастичная проблема решается с помощью усиленного постулата спектральности. В пространстве H существует набор пространств H_{1}, инвариантных относительно представления $U(g)$ и сужение $U(g)$ на H_{1} является неприводимым представлением группы P, соответствующее массе m_{1} и спину σ_{1}, которое обозначили $\tau_{1} = (m_{1}\sigma_{1})$. Основным методом построения, упомянутого во введении квантомеханического пространства, является некоторая билинейная форма. Определим сейчас эту форму и опишем построение указанного пространства. Пусть $\varphi,\chi \in S\,(R^{4},C^{k})$. Рассмотрим выражение

$$\beta(\varphi,\chi) = \left\langle \Omega, \Psi(\varphi)^{*}\Psi(\chi)\Omega \right\rangle$$

где

$$\Psi(\varphi) = \int \Psi_{i}(x)\varphi_{i}(x)\, d^{4}(x) \tag{3}$$

Тогда очевидно, β- билинейная форма на $S\times S$, где $S=S(R^l,C^k)$ и $\beta(\varphi,\varphi)\geq 0$. Мы надеемся после соответствующих преобразований из пары (S,β) сделать Гильбертово пространство. Для этого надо позаботиться о строгой положительности скаляаного произведения и о полноте Гильбертова пространства. С этой желью введен ряд определений и сформулируем одну теорему.

Определение 1. Обозначим через σ^* обычную слабую топологию на пространстве S'. Положительную билинейную форму γ назовем замкнутой, если для любой последовательности $\varphi_n\in S$, такой, что

$$\left\{\gamma(\varphi_n-\varphi_m,\varphi_n-\varphi_m)\to 0 \quad и \quad \varphi_n\overset{\sigma^*}{\to} f\right\}$$
$$n,m\to\infty$$

следует, что

$$f\in D(\gamma) \quad и \quad \lim_{n\to\infty}\gamma(\varphi_n-f,\varphi_n-f)=0$$

Последовательность $\{\varphi_n\}$ назовем γ- сходящейся.

Определение 2. Билинейная форма γ называется замыкаемой, если она имеет замкнутое расширение $\overline{\gamma}$.

Теорема 1. Пусть γ-замкнутая строго положительная билинейная форма, такая, что множество $B=\{f\in D(\gamma)\,;\ \gamma(f,f)\leq 1\}$ является σ^*-компактным и $D(\gamma)\subset S'$. Тогда линейное множество $D(\gamma)$, снабженное билинейной формой $\gamma(\cdot,*)$ является полным Гильбертовым пространством. Доказательство этого предложения является небольшой модификацией доказательства теоремы 1.11 [2]. Эта теорема к нашему случаю непосредственно неприменима, так как наша билинейная форма имеет ядро. Чтобы избавиться от этого недостатка перейдем к фактор пространству. В дальнейшем будем всюду предпологать, что β - замыкаемая форма и обозначим ее замыкание $\overline{\beta}$, а область определения $\overline{\beta}$ обозначим F. $D(\overline{\beta})=F$.

Очевидно, что F- линейное пространство

$$S\subset F\subset S' \tag{4}$$

и пусть

$$F_0=\{f\in F;\ \beta(f,f)=0\} \tag{5}$$

Очевидно, что F_0- линейное замкнутое подпространство в F. Введем фактор пространства.

$$\hat{F} = F/F_0 \qquad \hat{S}' = S'/F_0 \tag{5}$$

и обозначим $\hat{\sigma}^*$ фактор топологию на $\hat{S}'$, π: $S' \to \hat{S}'$ есть каноническое отображение, тогда, как известно [3], π - непрерывное открытое отображение.

Обозначим через γ какое-либо правило выбора представителя в фактор пространстве S', т.е.

$$\gamma: \hat{S}' \to S \tag{6}$$

такое, что γ - линейное отображение и

$$\gamma(\hat{0}) = 0 \tag{6'}$$

Определим теперь на $\hat{F}$ билинейную форму равенством

$$\hat{\beta}(\hat{f}, \hat{g}) = \bar{\beta}\left(\gamma(\hat{f}), \gamma(\hat{g})\right) \tag{7}$$

С помощью определения (5) и свойств (6') можно проверить, что $Ker\,\hat{\beta} = 0$, $\hat{\beta}$- замкнутая форма и множество $\hat{f} \in \hat{S}'$: $\hat{\beta}(\hat{f}, \hat{f}) \le 1$, $\hat{\sigma}^*$- компактно, т.е. выполнены условия теоремы 1. Тогда заключаем, что линейное пространство $\hat{F}$, снабженное скалярным произведением $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{\beta}(\hat{f}, \hat{g})$ есть полное Гильбертово пространство

$$H = \left(F, [\cdot, *]\right) \tag{8}$$

В дальнейшем пространство H будем называть квантовомеханическим пространством состояний. А множество операторов действующих в H назовем множеством квантовомеханических наблюдаемых.

3. Формулировка принципа релятивистской инвариантности в квантовомеханическом случае.

Обозначим $D_1 = \{\Psi(\varphi)\Omega\}_{\varphi \in S}$. Очевидно, D_1- линейное подмножество в H. Пусть $H_1 = \overline{D}_1$, назовем H_1 однополевым пространством. Введем оператор C соотношением

$$C\varphi = \Psi(\varphi)\Omega \tag{9}$$

$$C \in L(S,H_1) \tag{9'}$$

и перенесем его на фактор пространство $\hat{F}$ соотношением

$$\hat{C} = C\gamma \tag{10}$$

тогда

$$\hat{C}\hat{\varphi} = \Psi(\gamma(\hat{\varphi}))\Omega \tag{10'}$$

$$\hat{C}: F \to H_1$$

Возьмем скалярное произведение от обеих частей равенства (10'), получим

$$(\hat{C}\hat{\varphi}, \hat{C}\hat{\chi}) = \hat{\beta}(\hat{\varphi}, \hat{\chi}) = [\hat{\varphi}, \hat{\chi}]$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} \hat{C}^{*}\hat{C} &= 1_{\hat{F}} \\ \hat{C}\hat{C}^{*} &= 1_{H_1} \end{aligned} \tag{11}$$

т.е. оператор $\hat{C}$ осуществляет унитарный изоморфизм между однополевым пространством H_1 и квантовомеханическим пространством H. Перейдем теперь к описанию симметрии относительно группы P в квантовомеханическом пространстве.

Из соотношения (1) следует

$$U(g)\Psi(\varphi)\Omega = \Psi(\varphi_g)\Omega, \quad \varphi_g(x) = T(g)\varphi(g^{-1}x) \tag{12}$$

Если обозначить , $(R(g)\varphi)(x) = \varphi_g(x)$, то легко видеть, что

$$R(\cdot) \in Rp(P,S), \quad \|R(g)\varphi\|_F = \|\varphi\|_F \tag{13}$$

Из этих равенств следедует

$$\overline{R}(\cdot) \in Rp^{(u)}(P,F) \tag{13'}$$

Теперь надо перенести это семейство операторов на пространство $\hat{F}$. С этой целью определим операторы

$$\hat{R}(g) = \pi R(g)\gamma \tag{14}$$

и докажем, что они задают унитарное представление группы Пуанкаре на пространстве $\hat{F}$. Заметим, прежде всего, что из определения π и γ следуют соотношения

$$\pi\gamma(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} \quad \gamma\pi(\varphi) = \varphi + l(\varphi), \quad l(\varphi) \in F_0$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\hat{R}(g_1)\hat{R}(g_2)\hat{\varphi} = \pi R(g_1)\gamma\big(\pi R(g_2)\gamma(\hat{\varphi})\big) = \\
&= \pi R(g_1)\big(R(g_2)\gamma(\hat{\varphi}) + l(\hat{\varphi}, g_2)\big) = \\
&= \pi R(g_1)R(g_2)\gamma(\hat{\varphi}) + \pi\big(R(g_1)l(\hat{\varphi}, g_2)\big) = \\
&= \pi R(g_1 g_2)\gamma(\hat{\varphi}) = \hat{R}(g_1 g_2)\hat{\varphi}
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\hat{R}(e) = \pi\gamma = I_{\hat{F}}$$

Далее

$$\|\pi R(g)\gamma(\hat{\varphi})\|_{\hat{F}} = \|R(g)\gamma(\hat{\varphi})\|_F = \|\gamma(\hat{\varphi})\|_F = \|\hat{\varphi}\|_{\hat{F}}$$

В результате

$$\hat{R}(\cdot) \in Rp^{(u)}(P, \hat{F}) \tag{15}$$

Чтобы определить физическую значимость представления $\hat{R}(g)$, найдем как она связана с квантовополевым представлением $U(g)$. Имеет место следующее соотношение.

$$\hat{C}\hat{R}(g)\hat{C}^{*} = U_1(g) \tag{16}$$

Действительно, из (10') и (11) следует равенство

$$\hat{C}^{*}\Psi(\gamma(\hat{\varphi}))\Omega = \hat{\varphi},$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\hat{C}\hat{R}(g)\,\hat{C}^{*}\Psi(\gamma(\hat{\varphi}))\Omega = \hat{C}\hat{R}(g)\hat{\varphi} = C\gamma(\pi R(g)\gamma(\hat{\varphi})) = \\
&= C(R(g)\gamma(\hat{\varphi}) + e) = CR(g)(\gamma(\hat{\varphi}) + e') = \\
&= U(g)\Psi(\gamma(\varphi) + e')\Omega = \\
&= U(g)[\Psi(\gamma(\hat{\varphi}))\Omega + \Psi(e')\Omega] = U(g)\Psi(\gamma(\hat{\varphi}))\Omega
\end{aligned}$$

так как

$$e, e' \in F_0 \quad \Psi(e')\Omega = 0, \quad \forall e \in F_0$$

Сравнивая начало и конец этой цепи равенств, получим (16).

Следующей нашей задачей будет разложение $\hat{R}(g)$ на неприводимые компоненты.

Литература

1. *Н.Н. Боголюбов и др.* Общие принципы квантовой теории поля. "Наука", Москва 1987.
2. *Т.Като* Теория возмущения линейных операторов, "Мир", Москва, 1972.
3. *У. Рудин* Функциональный анализ, "Мир", Москва 1975.

L.A. Dadaşov

BİR SƏRBƏST RELYATİVİSTİK ZƏRRƏCİKLİ KVANT MEXANİKASININ YARADILMASINA DAİR

İşdə relyativistik kvant mexanikasının yaradılması probleminə baxılır. Minkovski fəzasında verilmiş vektor mahiyyətli funksiyalar fəzasının adi tə`rifi təklif olunmuşdur. Sahənin relyativistik kvant nəzəriyyəsinə (S.R.K.N.) oxşar olaraq kvant halları fəzası və simmetriya qrupları təsviri tə`yin olunmuşdur. Onların birsahəli fəzaya (S.R.K.N.) unitar ekvivalent olduğu və Puankare qrupunun həmin o fəzaya daralması göstərilmişdir. Bu iki əsas kvant mexaniki kəmiyyətin varlığı dalğa funksiyanın hansı zərrəcikləri təsvir edə bildiyi məsələsini həll etməyə imkan verər.

L.A. Dadashev

ON THE CONSTRUCTION OF QUANTUM MECHANICS OF ONE RELATIVISTIC TREE PARTICLE

In the given paper the old problem of construction of relativistic quantum mechanics is considered. We propose here the traditional approach in the space of vector valued functions defined on Minkovskie space. By analogy with relativistic quantum field theory (R Q F T) state space and representation of Poincare qroup is defined. It is shown that they are unitary equivalent to one field a subspace and restriction of representation Poincare group on this subspace. The existanse of these two basic quantum mechanical values let us ask what particles are described by given wave function.