РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Ш.М. НАГИЕВ[1], С.И.ГУЛИЕВА[2]
[1] Институт Физики им. академика Г.М. Абдуллаева
НАН Азербайджана
AZ-1143 Баку, пр. Г. Джавида 33,
[2]Азерб.Университет Кооперации

Bircins $V(x) = -Fx$ sahəsində relyativistik kvant zərrəciyi modeli təklif olunmuşdur. Bu model birölçülü relyativistik konfiqurasiya x- fəzasında reallaşmışdır və sonlu-fərq tənliyi ilə təsvir olunur. x-ə kanonik olan p- impuls birölçülü Lobaçevski fəzası əmələ gətirir. Həm x -, həm də p- təsvirlərində həmin model üçün dalğa funksiyalarının aşkar şəkli və propaqator tapılmışdır. Onların qeyri-relyativistik $(c \to \infty)$ və sərbəst zərrəcik $(F \to 0)$ limitləri hesablanmışdır.

Предложена модель релятивистской квантовой частицы в однородном поле $V(x) = -Fx$. Данная модель реализована в одномерном релятивистском конфигурационном x- представлении и описывается конечно- разностным уравнением. Канонически сопряженный к x-, импульс p- является одномерном пространством Лобачевского. Для данной модели мы нашли явный вид волновых функций и пропагатора как в x-, так и в p- представлениях. Мы вычислили их нерелятивистский $(c \to \infty)$ и свободночастичный пределы $(F \to 0)$.

The model of the relativistic quantum particle in a homogeneous field $V(x) = -Fx$ is proposed. This model is realized in the one-dimensional relativistic configurational x- representation and is described by the finite difference equation. The momentum p canonically conjugate to the x is the one-dimensional Lobachevsky space. We have found the wave functions and propagator for the model under study in both x- and p- representations. We examine their non – relativistic $(c \to \infty)$ and free particle $(F \to 0)$ limits.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–17] была построена и развита конечно-разностная релятивистская квантовая механика. Основой ее построения явилось понятие релятивистского конфигурационного $\vec{r}$ – пространства [1]. Преобразование между $\vec{r}$ – пространством и канонически-сопряженным ему импульсным $\vec{p}$ – пространством осуществляется с помощью релятивистской плоской волны

$$\xi(\vec{p},\vec{r}) = \left(\frac{p_0 - \vec{p}\vec{n}}{mc}\right)^{-1-ir/ƛ}, \qquad (1.1)$$

вместо обычной плоской волны $\exp(i\,\vec{p}\,\vec{r}/\hbar\ )$ в нерелятивистском случае. Здесь $ƛ = \hbar / mc$ - комптоновская длина волны частицы, а

$$\vec{r} = r\vec{n},$$
$$0 < r < \infty$$
$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$
$$p_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2c^2}\ . \qquad (1.2)$$

Импульсы частицы в релятивистской области принадлежат трехмерному пространству Лобачевского, реализованного на верхней поле массового гиперболоида $p_0^2 - \vec{p} = mc^2, p_0 > 0$. Группа движения импульсного пространства Лобачевского есть группа Лоренца $SO(3,1)$. Функции (1.1) реализуют бесконечномерные унитарные неправодимые представление группы Лоренца.

В релятивистском конфигурационном $\vec{r}$ – представлении волновая функция относительного движения двух бесспиновых частиц равной массы в случаее локальных потенциалов взаимодействия $V(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\hat{H}_o + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \qquad (1.3)$$

Здесь конечно-разностной оператор $\hat{H}_0$ с шагом, равным комптоновской длине волны частицы, является свободным гамильтонианом:

$$\hat{H}_0 = mc^2\left[ch(iƛ\partial_r) + \frac{iƛ}{r}sh(iƛ\partial_r) + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2(mcr)^2}e^{iƛ\partial_r}\right], \qquad (1.4)$$

$\hat{\vec{L}}^2$ – квадрат оператора углового момента, $\partial_r = \partial / \partial r$, а действие конечно-разностного оператора задается формулой $\exp(\alpha\partial_r)f(r) = f(r+\alpha)$.

В нерелятивистсном пределе имеем:

$$\lim_{c\to\infty}\xi(\vec{p},\vec{r}) = e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar},$$

$$\lim_{c\to\infty}\left(H_0 - mc^2\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right) \quad (1.5)$$

В рамках конечно-разностной релятивистской квантовой механики были рассмотрены релятивистские обобщения некоторых точно решаемых задач (потенциальная яма [6, 18], кулоновский потенциал [4,11,13], гармонический осциллятор [5,9,10] , $q-$ осциллятор [14, 15], сингулярный осциллятор [16,17] и т.д.) квантовой механики.

В настоящей работе мы рассматриваем обобщение на релятивистский случай точно решаемой одномерной квантово-механической задачи о движении частицы в однородном поле .

В одномерном случае релятивистская плоская волна имеет вид [9]

$$\xi(p,x) = \left(\frac{p_0 - p}{mc}\right)^{-ix/\lambda} = \left(\frac{p_0 + p}{mc}\right)^{ix/\lambda} \quad (1.6)$$

или, в полярных координатах $p_0 = mc\,ch\chi,\ p = mc\,sh\chi$ имеем

$$\xi(p,x) = e^{ix\chi/\lambda} \quad (1.7)$$

где $\chi = \ln\left(\frac{p_0 + p}{mc}\right) -$ есть быстрота.

Одномерные плоские волны (1.6) подчиняются условиям полноты и ортогональности

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(p,x)\xi^*(p,x')d\Omega_p = \delta(x-x'), \quad (1.8a)$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(p,x)\xi^*(p',x)dx =$$

$$= \sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}\delta(p-p') \equiv \delta(p(-)p') = \delta(\chi-\chi')$$

(1.8b)

Здесь $d\Omega_p = mc\frac{dp}{p_0} = mcd\chi -$ инвариантный элемент интегрирования в одномерном пространстве Лобачевского, реализованном в виде положительной ветви массовой гиперболы $p_0^2 - p^2 = m^2c^2,\ \mathrm{p}_0 > 0$.

В релятивистском конфигурационном $x-$ представлении операторы свободного гамильтониана и импульса являются конечно-разностными операторами вида

$$\hat{H}_0 = mc^2 ch i\lambda\partial_x,\quad \hat{\mathrm{p}} = -mc\,sh i\lambda\partial_{\mathrm{x}} \quad (1.9)$$

Плоская волна (1.6) является их общей собственной функцией, т.е.

$$\left(\hat{H}_0 - E_p\right)\xi(p,x) = 0 \qquad \hat{p}\xi(p,x) = p\xi(p,x) \quad (1.10)$$

В разделе 2 мы рассматриваем одномерное движение релятивистской квантовой частицы в однородном поле $V(x) = -Fx$ [19]. Раздел 3 посвящен вычислению пропагатора релятивистской квантовой частицы как в *p*-, так и в *x*- представлениях. Здесь показано также, что полученные выражения имеют правильный нерелятивистский предел.

2. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ $V(x) = -Fx$

В конфигурационном $x-$ представлении релятивистская квантовая частица в однородном поле описывается следующим конечно-разностным уравнением [19]

$$\hat{H}\Psi(x) \equiv \left(\hat{H}_0 - Fx\right)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.1)$$

где $F-$ постоянная сила, действующая в поле на частицу.

Это уравнение удобно решать в импульсном p – представлении. Переход от координатных волновых функций к импульсным задается соотношением [1, 9]

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(p,x)\Psi(x)dx \quad (2.1\,a)$$

Обратный переход

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(p,x)\Phi(p)d\Omega_p \quad (2.2\,b)$$

Уравнение (2.1) в импульсном представлении принимает вид дифференциального уравнения

$$\left(i\lambda F\frac{d}{d\chi} + mc^2 ch\chi\right)\Phi(p) = E\Phi(p). \quad (2.3)$$

При $c\to\infty$ это уравнение переходит в соответствующее нерелятивистское уравнение

$$\left(i\lambda F\frac{d}{dp} + \frac{p^2}{2m}\right)\Phi_N(p) = E_N\Phi_N(p),$$

где $E_N = \lim_{c\to\infty}\left(E - mc^2\right)$.

Решив это уравнение (2.3), получим волновые функции в импульсном представлении, описывающие движение релятивистской квантовой частицы в однородном поле

$$\Phi_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\exp\left\{\frac{i}{\lambda F}\left(E\chi - mc^2 sh\chi\right)\right\}. \quad (2.4)$$

Эти функции нормированы условием

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E^*(p)\Phi_E\ (p)d\Omega_p=\delta\left(E-E'\right) \qquad (2.5)$$

и имеют правильный нерелятивистский предел

$$\lim_{c\to\infty}\Phi_E(p)=\Phi_{NE}(p)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\exp\left\{\frac{i}{ƛF}\left(E_N p-\frac{p^3}{6m}\right)\right\}, \qquad (2.6)$$

Можно также легко установить полноту системы функций $\Phi_E(p)$ (2.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E^*(p)\Phi_E(p')dE=\frac{p_0}{mc}\delta\left(p-p'\right). \qquad (2.7)$$

Используя теперь интегральную формулу [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iashx-px}dx=2e^{-\frac{p\pi i}{2}}K_p(a) \quad \left(\left|\mathrm{Re}p\right|<1, a>0\right),$$

где $K_p(a)$ - функция Макдональда, мы можем найти явный вид волновых функций в релятивистском конфигурационном $x-$представлении:

$$\Psi_E(x)=\frac{1}{\pi\hbar\sqrt{F}}\exp\left\{\frac{\pi}{2ƛ}\left(x+\frac{E}{F}\right)\right\}K_{\frac{i}{ƛ}\left(x+E/F\right)}\left(\frac{mc^2}{ƛF}\right). \qquad (2.8)$$

Можно легко проверить, что уравнение (2.1) эквивалентно рекуррентному соотношению

$$K_{\nu+1}(z)-K_{\nu-1}(z)=\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),$$

Для функции Макдональда, где

$$\nu=\frac{i}{ƛ}\left(x+\frac{E}{F}\right),\ \mathrm{z}=\frac{mc^2}{ƛF}.$$

Координатные волновые функции (2.8) удовлетворяют условиям ортогональности и полноты:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_E^*(x)\Psi_{E'}(x)dx=\delta\left(E-E'\right),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_E^*(x)\Psi_E(x')dE=\delta\left(x-x'\right) \qquad (2.9)$$

При выводе (2.9) мы учли, что справедлива следующая предельная формула (доказательство приведено в приложении):

$$\lim_{z\to 0}K_{ix}(z)=\pi\delta(x). \qquad (2.10).$$

3. ПРОПАГАТОР ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Как известно [21, 22], пропагатор в x-представлении $K(x_2,t_2;x_1t_1)$ представляет собой амплитуду вероятности перехода частицы из точки x_1, в момент времени t_1 в точку x_2 в момент времени t_2. Если задана волновая функция $\psi\left(x_1,t_1\right)$ в момент времени t_1, то использование пропагатора позволяет найти значение волновой функции в более поздний момент времени t_2:

$$\psi(x_2,t_2)=\int K(x_2,t_2;x_1,t_1)\Psi(x_1,t_1)dx_1 \qquad (3.1)$$

Зная явный вид волновых функций (2.4) в импульсном представлении можно легко найти явное выражение пропагатора для рассматриваемой задачи в импульсном представлении по формуле

$$K(p_2,t_2;p_1t_1)=\int\phi_E(p_2)\phi_p^*(p_1)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_2-t_1)}dE. \qquad (3.2)$$

Вычисление интеграла приводит к выражению вида

$$K(p_2,t_2;p_1t_1)=$$
$$=e^{-i\frac{mc^2}{2ƛ}(sh\chi_1-sh\chi_2)}\delta\left(mc\left(\chi_2-\chi_1\right)-F\left(t_2-t_1\right)\right) \qquad (3.3)$$

Можно показать, что оно имеет правильный нерелятивистский предел

$$\lim_{c\to\infty}K(p_2,t_2;p_1t_1)=e^{-\frac{imc^2}{2ƛ}(t_2-_1)}K_N\left(p_2,t_2;p_1,t_1\right) \qquad (3.4)$$

где [23]

$$K_N(p_2,t_2;p_1t_1)=e^{-\frac{i\left(p_2^3-p_1^3\right)}{6m\hbar}}\delta\left(p_2-p_1-F\left(t_2-t_1\right)\right).$$

При $F\to 0$ (3.3) переходит в пропагатор релятивистской свободной частицы:

$$\lim_{F\to 0}K(p_2,t_2;p_1t_1)=e^{\frac{imc^2}{\hbar}ch\chi_1\cdot(t_2-t_1)}\delta\left(mc\left(\chi_2-\chi_1\right)\right) \qquad (3.5)$$

Пропагатор в x-представлении

$$K(x_2,t_2;x_1t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_E\left(x_2\right)\psi_E^*\left(x_1\right)e^{\frac{iE}{\hbar}(t_2t_1)}dE \qquad (3.6)$$

связан с пропагатором (3.3) релятивистским преобразованием Фурье, т.е

$$K(x_2,t_2;x_1t_1)= \\ =\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(p_2,x_2)K(p_2,x_2;p_1,t_1)\xi^*(p_1,x1)d\Omega_{p1}d\Omega_{p_2} \tag{3.7}$$

Используя теперь δ -функцию, входящую в (3.3), можно здесь проинтегрировать по χ_2, а затем с помощью интегральной формулы [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iachx-px}dx=-i\pi e^{-\frac{p\pi i}{2}}H_p^{(2)}(a), \\ \mathrm{Re}(ia)>0,$$

можно найти явный вид пропагатора (3,6)

$$K(x_2,t_2;x_1t_1)=\frac{1}{2i\lambda}e^{\frac{\pi}{2\lambda}(x_2-x_1)}e^{\frac{iF(x_2+x_1)(t_2-t_1)}{2\hbar}}\times \\ \times H^{(2)}_{i(x_2-x_1)/\lambda}\left(\frac{2mc^2}{\lambda F}sh\frac{F(t_2-t_1)}{2mc}\right). \tag{3.8}$$

Здесь $H_\nu^{(2)}(z)$ -функция Ганкеля второго рода.

При $F\to 0$ это выражение должно совпадать, с выражением для пропагатора релятивистской свободной частицы в конфигурационном представлении:

$$K(x_2,t_2;x_1t_1)=\frac{1}{2i\lambda}e^{\frac{\pi}{2\lambda}(x_2-x_1)}H^{(2)}_{i(x_2-x_1)/\lambda}\left(\frac{mc^2}{\hbar}(t_2-t_1)\right) \tag{3.9}$$

Найдем теперь нерелятивистский предел пропагатора (3.8). Для этого будем исходить из соотношении $H_\nu^{(2)}(z)=\overline{H_{\bar\nu}^{(1)}(\bar z)}$ между функциями Ганкеля первого и второго родов и асимптотической формулы для функции Ганкеля первого рода [24]
:

$$H_{ip}^{(1)}(z)=\frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt[4]{p^2+z^2}}\times \\ \times\exp\left(i\sqrt{p^2+z^2}-iparcsh\frac{p}{z}\right)e^{(2p-i)\pi/4},$$

которая справедлива при $p,z>0$ и $p\to\infty$.
В результате получим

$$\lim_{c\to 0}K(x_2,t_2;x_1t_1)=e^{\frac{imc^2}{\hbar}(t_2-t_1)}K_N(x_2,t_2;x_1t_1), \tag{3.10}$$

где

$$K_N(x_2,t_2;x_1t_1)= \\ =\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}+\frac{F(x_2+x_1)(t_2-t_1)}{2}-\frac{F^2(t_2-t_1)^3}{24m}\right]}. \tag{3.11}$$

Таким образом, (3.8) является релятивистским обобщением пропагатора для квантово-механической частицы в однородном поле (см., например [21]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы применить конечно-разностную релятивистскую квантувую механику к различным физическим задачам необходимо обобщить на релятивистской случай точно-решаемые модели релятивистской квантовой механики.

В данной работе мы обобщили задачу о движении квантовой частицы в однородном поле на релятивистский случай. Наша модель описывается конечно-разностным уравнением и точно решается. Мы нашли явный вид волновых функций и пропагатора как в *x*-, так и в *p*- представлениях. Полученные выражения имеют правильные нерелятивистские пределы.

Мы надеемся, что, как и в нерелятивистском случае (см., например [25]), рассматриваемая релятивистская модель может быть найти применения в квантовой физике, а так же в физике элементарных частиц.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем формулу (2.10). Для этого достаточно проверить, что во-первых,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ix}(z)dx=1, \tag{A.1}$$

во-вторых, для произвольной бесконечно-дифференцируемой функции

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \tag{A.2}$$

выполняется равентво

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)K_{ix}(z)dx=F(0) \tag{A.3}$$

(A.1) следует из интеграла [25]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ix}(z)dx=e^{-z}, \tag{A.4}$$

а (A.3) - из

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}K_{ix}(z)dx=(-1)^n\left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}}e^{-zch\alpha}\right]_{\alpha=0} \tag{A. 5}$$

Действительно, имеем

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)K_{ix}(z)dx =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}F_{(0)}^{(n)}\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}x^{n}K_{ix}(z)dx =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}F_{(0)}^{(2n)}\frac{1}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty}x^{n}K_{ix}(z)dx =$$

$$= \lim_{z\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}F^{(2n)}(0)\frac{1}{(2n)!}\left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}}e^{-zch\alpha}\right]_{\alpha=0}.$$

В эту сумму дает вклад только первый член, что совпадает с $F(0)$.

---

[1]. *V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov,* Nuovo Cimento **55A**(1968)223.

[2]. *В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков*, ЯФ **9**(1969) 212.

[3]. *В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман*, ЯФ **9**(1969) 646.

[4]. *M.Freeman M.D., Mateev, R.M.Mir-Kasimov*, Nucl. Phys. **B12** (1969) 197

[5]. *А.А.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов*, ТМФ **8** (1971) 61.

[6]. *В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков*, ЭЧАЯ **2**(1972) 636.

[7]. *K.S.Jung, K.N.Chung, R.S.Willey*, Phys. Rev. **D12** (1975) 1999.

[8]. *И.В.Амирханов, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов,* ЭЧАЯ **12**(1981) 651.

[9]. *Н.М.Атакишиев, Р.М.Мир-Касимов, Ш.М.Нагиев*, ТМФ **44**(1980) 47.

[10]. *N.M.Atakishiyev, R.M.Mir-Kasimov, Sh.M.Nagiyev,* Ann.Phys.Lpz. **42**(1985) 25.

[11]. *Sh.M. Nagiyev*. J.Phys.A.: Math.Gen. **21** (1988) 2559.

[12]. *E.D.Kagramanov, R.M.Mir-Kasimov, Sh.M.Nagiyev,* Phys. Lett. **A 140** (1989) 1.

[13]. *Ш.М. Нагиев*., ТМФ **80** (1989) 40.

[14]. *Ш.М. Нагиев*., ТМФ **102**(1995) 247.

[15]. *E.D. Kagramanov, R.M. Mir-Kasimov, Sh.M. Nagiyev*., J.Math..Phys. **31**(1990) 1733.

[16]. *Sh.M. Nagiyev., E.I. Jafarov, R.M. .Imanov* , A. J.Phys. Math.Gen. **36**(2003) 7813.

[17]. *Sh.M . Nagiyev., E.I. Jafarov, R.M. Imanov, L. Homorodean*, Phys. Lett. 334 (2005) 260.

[18]. *Ш.М. Нагиев*, Изв.АН Аз. ССР, сер. физ.-техн. и мат. наук, 1984, №4, стр. 60.

[19]. *Ш.М. Нагиев*, *Н.Г. Джафаров С.Н. Гулиева*. Труды конференции “Актуальные проблемы физики” 2008 г, БГУ,Баку.

[20]. *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*., Интегралы и ряды. Элементарные функции, М. «Наука», 1981.

[21]. *Р. Фейнман, А . Хиббс*., Квантовая механика и интегралы по траекториям, М.: “Мир”, 1968.

[22]. *Л. Райдер*, Квантовая теория поля, М.: “Мир”, 1987.

[23]. *В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.Н. Коган*, Задачи по квантовой механике. М.: “Наука”, 1980.

[24]. *Г. Бейтмен, А. Эрдейн*, Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: “Наука”, 1974.

[25]. *А.П. .Прудников, Ю.А.. Брычков, О.И. Маричев*, Интегралы и ряды. Специальные функции, М. «Наука», 1983.