# МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ С ДРОБНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Э.И. ВЕЛИЕВ**
*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*
*ул. Ак. Проскуры 12, Харьков, 61085, Украина*

**Т.М. АХМЕДОВ**
*Институт математики НАН Азербайджана*
*ул. Ф. Агаева 9, Баку, 1141, Азербайджан*

В данной работе предложен метод решения интегро-дифференциального уравнения специального вида, к решению которого сводятся задачи дифракции на плоских экранах, описываемых дробными граничными условиями (ДГУ), когда порядок дробной производной $\alpha$ меняется в интервале (0, 1). Метод рассмотрен на модельных двумерных задачах дифракции – ленте и полуплоскости с ДГУ. ДГУ обобщают идеальные границы – идеально электрически и идеально магнитно проводящие границы, которые получаются как частный случай при $\alpha=0$ и $\alpha=1$, соответственно. Метод основан на применении ортогональных полиномов. При этом для ленты применяются полиномы Гегенбауэра, ортогональные на интервале (1,1), а для полуплоскости имеем дело с полиномами Лагерра, ортогональными на интервале $(0,\infty)$. Отмечена важная особенность: данный метод позволяет получить решение задачи дифракции в явном виде для одного частного случая $\alpha=0,5$.

В последнее время дробные операторы находят применения в различных задачах электродинамики. Дробные операторы определяются как фрактализованные от известных операторов. Например, дробные производные и интегралы являются обобщением обычных производных и интегралов. Также находится применение оператору дробного ротора, который определяется как фрактализованный оператор от обычного оператора ротора [1].

В данной работе рассматриваются двумерные задачи дифракции на границах, которые описываются граничными условиями (ГУ), содержащими дробную производную:

$$D_n^{\alpha} U(\vec{r})\,|_S = 0, \qquad (1)$$

Дробная производная берется по нормали к поверхности. Функция $U$ описывает тангенциальную компоненту электрического или магнитного поля. Дробная производная определяется через интеграл Римана-Лиувилля на полубесконечном интервале [2]. Будем использовать один символ $D_y^{\alpha}$, подразумевая дробную производную по переменной $y$ на полуоси: $D_y^{\alpha} \equiv {}_{-\infty}D_y^{\alpha}$. ГУ (1) будем называть дробными граничными условиями (ДГУ).

Введение новых ГУ должны, с одной стороны, описывать физические реалии, а с другой - позволять построить эффективный численный алгоритм получения решения с заданной точностью. Построение простых и адекватных математических моделей для описания рассеивающих свойств поверхностей является одной из общих задач в теории дифракции.

Для ДГУ (1) рассматриваются значения дробного порядка $\alpha$ между 0 и 1. Крайние значения дробного порядка $\alpha=0$ и $\alpha=1$ приводят к хорошо известным идеально электрически (ИЭП) и идеально магнитно проводящим (ИМП) границам, соответственно. ДГУ обобщают идеальные границы, такие как ИЭП и ИМП. ДГУ рассматривались в задачах отражения в работах Э. И. Велиева, N. Engheta [3-5] в 2003 г., где были приведены коэффициенты отражения от границ, описываемых ДГУ. Показано, что граница имеет коэффициент отражения равный по модулю 1, т. е. соответствует идеально отражающей границе. При этом фаза коэффициента отражения определяется дробным порядком.

ДГУ можно сопоставить с известными импедансными ГУ (ИГУ) [6, 7], которые достаточно хорошо изучены многими авторами и широко применяются для моделирования различных объектов. ИГУ задаются уравнением

$$\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r}) = \eta\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{r})),\ \vec{r}\in S, \qquad (2)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности $S$. ИГУ являются промежуточным состоянием между ИЭП и ИМП границами [5, 6]: значение импеданса меняется от 0 для ИЭП до $i\infty$ для ИМП.

Задачам дифракции на импедансных границах посвящено большое количество работ. ИГУ успешно использовались для моделирования отражающих свойств хороших проводников, а также решеток и др. В каждом случае существуют формулы для получения значения импеданса как функции проводимости металла, параметров решетки и др. ИГУ являются приближенными ГУ, имеют ограничения для их применения и не могут описать отражающих свойств всего многообразия поверхностей.

Сравнение рассеивающих свойств границы с ДГУ и ИГУ было проведено в работе [8].

Дальнейшее уточнение ИГУ может быть выполнено с использованием производных более высокого (целого) порядка или обобщенных ГУ [7, 9, 10]. Общая методология получения точных импедансных ГУ высокого порядка в спектральной области представлена в монографии D.J. Hoppe и Y. Rahmat-Samii [9]. Как было показано, в спектральной области можно получить точные ИГУ, чисто в аналитической форме. Однако не всегда удается получить ИГУ в пространственной области в явном виде, поэтому необходимо аппроксимировать ИГУ в спектральном области, чтобы можно было применить обратное преобразование Фурье.

ДГУ являются примером нелокальных ГУ. Это означает, что значение функции на границе зависит от значений поля в точках на конечном расстоянии от границы, в отличие от классических ГУ (ИЭП, ИМП, ИГУ), когда значение на границе определяется только значениями поля в точках, бесконечно близких к границе. Это связано с применением производных нецелого порядка вместо обычных производных.

В задачах рассеяния нелокальные ГУ широко применяются в численных алгоритмах, основанных на методе конечных элементов или методе конечных разностей [11, 12]. Процедура основана на рассмотрении конечной области, ограничивающей рассеивающий объект для усечения рассчитываемого региона; при этом, на границе новой области требуется выполнение новых ГУ, которые обычно имеют нелокальный характер. Нелокальные ГУ находят применение для волнового уравнения в параболическом приближении [12]. Нелокальные ГУ являются эффективной альтернативой традиционному использованию поглощающих слоев [12].

Целью данной работы является разработка эффективного численно-аналитического метода решения двумерных задач дифракции на границах, описываемых ДГУ. Предложенный метод рассматривается на модельных задачах рассеяния – на ленте и на полуплоскости. Метод основан на представлении рассеянного поля с помощью дробной производной от функции Ханкеля первого рода нулевого порядка. Это представление является следствием применения дробной теоремы Грина, рассмотренной в работах [13, 14].

Предлагается метод решения дробного интегро-дифференциального уравнения (ДИДУ), к решению которого сводится ряд граничных задач теории дифракции. Степень дробности характеризуется параметром $\alpha$, который меняется в пределах $\alpha\in[0,1]$. При значениях дробного порядка $\alpha=0$ и 1 эти уравнения сводятся к известным интегральным уравнениям. В данной работе предложен более общий метод решения ДИДУ для любых значений порядка $\alpha\in[0,1]$, который, как частный случай, содержит ранее известные решения. Суть метода заключается в том, что искомая функция ищется в виде ряда по ортогональным полиномам (полиномам Гегенбауэра для ленты и полиномам Лагерра для полуплоскости) с весовой функцией, позволяющей удовлетворять условию на ребрах. Степень весовой функции и степень ортогональных полиномов зависят от порядка дробности $\alpha$. Переписывая ДИДУ относительно образов Фурье искомой функции в виде парных интегральных уравнений (ПИУ) и используя свойства разрывных интегралов Вебера-Шафхейтлина (в случае ленты), а также Фурье-представление для полиномов Лагерра для задачи на полуплоскости, ПИУ сводятся к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения. Последние позволяют определить искомые коэффициенты с любой наперед заданной точностью на основе метода редукции.

На основе предложенного метода были решены задачи дифракции плоской волны на ленте с ДГУ, а также полуплоскости с ДГУ.

## 1. ДИФРАКЦИЯ НА ЛЕНТЕ С ДГУ

Рассмотрим двумерную задачу дифракции E - поляризованной плоской волны на ленте с ДГУ в виде

$$D^{\alpha}_{ky}E_z(x,y)=0,\ y\to\pm 0. \qquad (3)$$

Бесконечно тонкая лента шириной $2a$ расположена в плоскости $y=0$ и бесконечна вдоль оси $z$. Падающее поле $\vec{E}^i=\vec{z}E^i_z(x,y)$ описывается выражением $E^i_z(x,y)=e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}$, где $\theta$ – угол падения, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число. Зависимость от времени предполагается $e^{-i\omega t}$ и опускается во всех формулах. Рассеянное поле обозначим функцией $\vec{E}^s=\vec{z}E^s_z(x,y)$. Полное поле $\vec{E}=\vec{z}E_z(x,y)$ является суммой падающего поля и рассеянного поля:

$$E_z(x,y)=E^i_z(x,y)+E^s_z(x,y).$$

Решение задачи, т.е. функция $E_z(x,y)$, должно удовлетворять: 1) уравнению Гельмгольца во всем пространстве, кроме поверхности ленты; 2) условию излучения Зоммерфельда на бесконечности для рассеянного поля $E^s_z(x,y)$; 3) условию Мейкснера на ребрах ленты ($y=0,\ x\to\pm a$) [15, 16]; 4) ДГУ (3) на поверхности ленты $-a<x<a$. Для удобства дробная производная берется по безразмерной величине *ky*.

Используя дробную теорему Грина [13,14, 17], представим функцию $E^s_z(x,y)$ через дробную функцию Грина

$$E^s_z(x,y)\equiv\int_{-a}^{a}f^{1-\alpha}(x')G^{\alpha}(x-x',y)dx' \qquad (4)$$

где $f^{1-\alpha}(x)$ – неизвестная функция, которую мы будем называть плотностью дробного потенциала.

В двумерном случае дробная функция Грина $G^{\alpha}$ в (5) выражается как дробная производная классической функции Грина:

$$G^{\alpha}(x-x',y)=-\frac{i}{4}D^{\alpha}_{ky}H^{(1)}_0(k\sqrt{(x-x')^2+y^2}),$$

где $H^{(1)}_0(x)$– функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Для частных случаев значений дробного порядка (ДП) $\alpha=0$ и $\alpha=1$ представление (4) приводит к известным представлениям потенциалов простого и двойного слоя, используемых для решения задач дифракции с ГУ Дирихле и Неймана, соответственно [16, 18].

Подчиняя функцию $E_z(x,y)$ ДГУ в виде (3), получаем ДИДУ вида

$$\lim_{y\to 0} D_{ky}^{\alpha}\int_{-a}^{a} f^{1-\alpha}(x')G^{\alpha}(x-x',y)dx' = -\lim_{y\to 0} D_{ky}^{\alpha}E_z^i(x,y), \qquad (5)$$

где правая часть уравнения – известная функция, а $f^{1-\alpha}(x)$ – неизвестная функция.

Введем безразмерную величину $\xi = x/a \in [-1,1]$ и новую функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) \equiv af^{1-\alpha}(a\xi)$. Продолжим функцию $f^{1-\alpha}(x)$ нулем вне интервала $[-a,a]$. Приходим к образам Фурье искомой функции:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = \frac{ka}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^{1-\alpha}(\beta)e^{ika\xi\beta}d\beta,\ \ F^{1-\alpha}(\beta) = \int_{-1}^{1}\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)e^{-ika\xi\beta}d\xi. \qquad (6)$$

Используя выражения для дробной функции Грина, получим представление для рассеянного поля через образ Фурье $F^{1-\alpha}(\beta)$

$$E_z^s = -i\frac{e^{\pm i\pi\alpha/2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik[\beta x+|y|\sqrt{1-\beta^2}\,]}}{(1-\beta^2)^{(1-\alpha)/2}}d\beta. \qquad (7)$$

Теперь ДИДУ (5) в образах Фурье сводится к системе ПИУ относительно неизвестной функции $F^{1-\alpha}(\beta)$:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} F^{1-\alpha}(\beta)e^{ika\xi\beta}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta = -4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^{\alpha}\theta e^{-ika\xi\cos\theta},\ \ \xi\in[-1,1],\\ \int_{-\infty}^{\infty} F^{1-\alpha}(\beta)e^{ika\xi\beta}d\beta = 0, \qquad |\xi|>1.\end{cases} \qquad (8)$$

Заметим, что ПИУ (8) для *α=0* приводит к ПИУ для задачи дифракции Е-поляризованной плоской волны на ИЭП бесконечно тонкой ленте, а при *α=1* ПИУ описывают задачу дифракции на ИМП ленте. ПИУ (8) являются более общими и включает как частные случаи ПИУ, рассмотренные ранее.

Исследуем частный случай *α=0,5*, при котором уравнение (8) имеет аналитическое решение при любом значении частотного параметра $ka$. Действительно, из (8) легко получить решение в явном виде:

$$\tilde{f}^{0,5}(\xi) = -2ika\sin^{1/2}\theta e^{-ika\xi\cos\theta + i\pi/4},$$

$$F^{0,5}(\beta) = -4i\sin^{1/2}\theta e^{i\pi/4}\frac{\sin ka(\beta+\cos\theta)}{\beta+\cos\theta}.$$

Перейдем к рассмотрению СИУ (8) для общего случая 0<*α*<*1*. Функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ должна удовлетворять условиям на ребре при $\xi\to\pm 1$. Подчиним функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ условию на ребре вида

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = O\left((1-\xi^2)^{\alpha-1/2}\right)\ \xi\to\pm 1 \qquad (9)$$

Для частных случаев *α=0* и *α=1* условия на ребре имеют вид:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = \begin{cases} O\left((1-\xi^2)^{-1/2}\right),\ \alpha=0\\ O\left((1-\xi^2)^{1/2}\right),\ \alpha=1\end{cases}\ \ \xi\to\pm 1 \qquad (10)$$

Условия (10) – известные условия Мейкснера на ребре в задачах теории дифракции [16].

Будем искать функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ в виде равномерно сходящегося ряда по полиномам Гегенбауэра, ортогональным на интервале [-1,1]:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = (1-\xi^2)^{\alpha-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha}\frac{1}{\alpha}C_n^{\alpha}(\xi) \qquad (11)$$

где $f_n^{\alpha}$ – неизвестные коэффициенты. В этом случае функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ удовлетворяет условиям на ребре (9). Заметим, что полиномы Гегенбауэра $C_n^{\alpha}(\xi)$ в частных случаях *α=0* и *α=1* сводятся к полиномам Чебышева первого и второго рода $T_n(\xi)$, $U_n(\xi)$ [20] соответственно

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{C_n^{\alpha}(\xi)}{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{2}{n}T_n(\xi), & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases},$$

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{C_n^{\alpha}(\xi)}{\alpha}=C_n^1(\xi)=U_n(\xi). \qquad (12)$$

Применяя преобразование Фурье к ряду (11), получим представление для функции $F^{1-\alpha}(\beta)$ в виде ряда по функциям Бесселя:

$$F^{1-\alpha}(\beta)=\frac{2\pi}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n f_n^{\alpha}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)}\frac{J_{n+\alpha}(ka\beta)}{(2ka\beta)^{\alpha}}. \qquad (13)$$

Преобразуем первое уравнение в (8): умножим обе части уравнения на $e^{-ika\xi\tau}$ и проинтегрируем по $\xi$ от -1 до 1. В итоге, получим уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)\frac{\sin ka(\beta-\tau)}{\beta-\tau}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta=-4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^{\alpha}\theta\frac{\sin ka(\tau+\cos\theta)}{\tau+\cos\theta} \qquad (14)$$

Подставляя представление (13) в ИУ (14) получим БСЛАУ для определения коэффициентов $f_n^{\alpha}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)}f_n^{\alpha}C_{kn}^{\alpha}=\gamma_k^{\alpha},\ k=0,1,2,.. \qquad (15)$$

с матричными коэффициентами

$$C_{kn}^{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}J_{n+\alpha}(ka\beta)J_{k+\alpha}(ka\beta)(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}\frac{d\beta}{\beta^{2\alpha}},$$

$$\gamma_k^{\alpha}=-2\Gamma(\alpha+1)(2ka)^{\alpha}i^{1-\alpha}\sin^{\alpha}\theta\frac{J_{k+\nu}(ka\cos\theta)}{\cos\theta}.$$

После нахождения коэффициентов $f_n^{\alpha}$ функция плотности потенциала $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ и ее преобразование Фурье $F^{1-\alpha}(\beta)$ могут быть найдены из выражений (11) и (13), соответственно. Можно показать, что БСЛАУ (15) является СЛАУ типа Фредгольма второго рода, и неизвестные коэффициенты $f_n^{\alpha}$ могут быть найдены с любой наперед заданной точностью, используя метод редукции. Численные результаты рассмотренной задачи для случая *E*-поляризации представлены в работе [17], где были приведены численные расчеты рассеивающих характеристик ленты с ДГУ: диаграмма направленности, поперечник обратного рассеяния, плотность распределения поверхностных токов.

Случай *H*-поляризации для задачи дифракции на ленте с ДГУ был рассмотрен в работе [19].

## 2. ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ С ДГУ

В данном разделе впервые рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на полуплоскости с ДГУ. Метод решения ИУ для ограниченных областей, развитый в предыдущем разделе, будет обобщен для ИУ в полубесконечных областях, к решению которых сводится рассматриваемая задача.

Решению задачи дифракции волн на полуплоскости посвящено много работ. Метод решения задачи дифракции на полуплоскости с идеально проводящей границей рассматривался в [16]. Задача дифракции на полуплоскости обычно решается с помощью метода Винера-Хопфа. Первое применение метода к идеально проводящей полуплоскости можно отнести к работе Copson [21] в 1946г., и независимо Carlson и Heins в 1947г. [22]. Senior в 1952г. впервые применил метод Винера-Хопфа к решению задачи дифракции на импедансной полуплоскости [23] и позже рассмотрел наклонное падение [24]. Задачи дифракции на резистивной и проводящей полуплоскости, а также различных соединенных полуплоскостях подробно описаны в [7].

Для строгого решения рассматриваемой задачи предлагается подход, который обобщает результаты работы [25] для идеально проводящих границ и содержит их, как частный случай. Предложенный метод позволил получить БСЛАУ для отыскания неизвестных коэффициентов в разложении рассеянного поля в виде бесконечного ряда.

Пусть на полуплоскость ($x>0$), бесконечную вдоль оси $Oz$ со стороны $y>0$ падает плоская *E*-поляризованная волна $E_z^i(x,y)=e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}$, где $\theta$ – угол падения. Полное поле $E_z=E_z^i+E_z^s$ должно удовлетворять ДГУ вида

$$D_{ky}^{\alpha}E_z(x,y)=0\ ,\ y\to\pm 0\ ,\ x>0 \qquad (16)$$

а также условию Мейкснера на ребре при $x\to 0$ [15,16].

Будем искать рассеянное поле в виде потенциала

$$E_z^s(x,y)\equiv\int_0^{\infty}f^{1-\alpha}(x')G^{\alpha}(x-x',y)dx' \qquad (17)$$

где $f^{1-\alpha}(x)$ – неизвестная функция, $G^{\alpha}$ – дробная функция Грина, введенная ранее.

Подчиняя полное поле ДГУ (16), получим ДИДУ относительно функции $f^{1-\alpha}(x)$ при $x>0$:

$$\frac{-i}{4}\lim_{y\to 0}\ {}_{-\infty}D_{ky}^{2\alpha}\int_0^{\infty} f^{1-\alpha}(x')H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x')^2+y^2})dx' = -\lim_{y\to 0}\ {}_{-\infty}D_{ky}^{\alpha}E_z^i(x,y), \quad (18)$$

Продолжим функцию $f^{1-\alpha}(x)$ нулем вне интервала $[0,\infty]$ и перейдем к образу Фурье:

$$F^{1-\alpha}(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)e^{-ik\beta\xi}d\xi=\int_0^{\infty}f^{1-\alpha}(x)e^{-ik\beta x}dx$$

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\beta\xi}d\beta,$$

где $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)\equiv f^{1-\alpha}(\xi)$ ($\xi>0$), $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)\equiv 0$ ($\xi<0$).

Следуя предложенному методу, ДИДУ сводится к системе ПИУ относительно неизвестной функции $F^{1-\alpha}(\beta)$:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\xi\beta}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta=-4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^{\alpha}\theta e^{-ik\xi\cos\theta}, & \xi>0,\\ \int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\xi\beta}d\beta=0, & \xi<0.\end{cases} \quad (19)$$

В частном случае *α=0,5* решение ПИУ (19) имеет следующий аналитический вид:

$$f^{1/2}(x)=-2\sin^{1/2}\theta e^{i\pi/4}e^{-ikx\cos\theta},$$

$$F^{1/2}(\beta)=-2\sin^{1/2}\theta e^{i\pi/4}\frac{\pi}{k}\delta(\beta+\cos\theta). \quad (20)$$

При этом для рассеянного поля (17) можно получить представление в явном виде

$$E_z^s(x,y)=\frac{i}{2k}e^{\pm i\pi\alpha/2}e^{i\pi/4}\sin^{\alpha-1/2}\theta e^{ik(-\cos\theta x+|y|\sin\theta)}.$$

Перейдем к рассмотрению ПИУ (19) для общего случая 0<*α*<*1*. Функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ должна удовлетворять условию на ребре при $\xi\to 0$. Подчиним функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ условию на ребре вида

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)=O\left(\xi^{\alpha-1/2}\right),\ \xi\to 0 \quad (21)$$

Для частных случаев *α=0* и *α=1* условия на ребре принимают известный вид [15,16] для идеально проводящих границ.

Будем искать функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}$ в виде равномерно сходящегося ряда по полиномам Лагерра с неизвестными коэффициентами $f_n^{\alpha}$ [25]:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(x)=e^{-x}x^{\alpha-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{\alpha}L_n^{\alpha-1/2}(2x) \quad (22)$$

В этом случае функция $\tilde{f}^{1-\alpha}$ удовлетворяет условию на ребре (21). Подставляя ряд (22) в первое уравнение (19), получим ИУ

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1/2}L_n^{\alpha-1/2}(2t)e^{-ik\beta t}dt\right]\times e^{ik\xi\beta}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta=R(\xi), \quad (23)$$

где $R(\xi) = -4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)} \sin^{\alpha}\theta e^{-ik\xi\cos\theta}$ – известная функция.

Используя формулу для преобразования Фурье полиномов Лагерра [26, стр. 462], получим выражение для интеграла по $dt$. В итоге ИУ (23) примет вид ($\xi > 0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik\beta-1)^n}{(ik\beta+1)^{n+\alpha+1/2}} (1-\beta^2)^{\alpha-1/2} e^{ik\xi\beta} d\beta = R(\xi). \qquad (24)$$

Для дискретизации уравнения (24), проинтегрируем обе части как $\int_0^{\infty} (.) e^{-\xi} \xi^{\alpha-1/2} L_m^{\alpha-1/2}(2\xi) d\xi$. После преобразований имеем БСЛАУ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha} C_{mn}^{\alpha} = B_m^{\alpha}, \quad m = 0,1,2,..,\infty \qquad (25)$$

где элементы матрицы имеют вид

$$C_{mn}^{\alpha} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik\beta+1)^{m-n-\alpha-1/2}}{(ik\beta-1)^{n-m-\alpha-1/2}} (1-\beta^2)^{\alpha-1/2} d\beta,$$

$$B_m^{\alpha} = -4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)} (-1)^{\alpha+1/2} \frac{\sin^{\alpha}\theta (1-ik\cos\theta)^m}{(1+ik\cos\theta)^{\alpha+m+1/2}}.$$

Можно показать, что решая БСЛАУ (25) на основе метода редукции, неизвестные коэффициенты $f_n^{\alpha}$ могут быть найдены с любой наперед заданной точностью.

Неизвестная функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(x)$ определяется из (22), что позволяет и определить рассеянное поле на основе представления (17).

## ВЫВОДЫ

В данной работе предложен метод решения интегро-дифференциального уравнения специального вида, к решению которого сводятся задачи дифракции на границах, описываемых ДГУ, когда порядок дробной производной $\alpha$ рассматривается между 0 и 1. Метод рассматривается на модельных двумерных задачах дифракции – ленте и полуплоскости с ДГУ. ДГУ обобщают идеальные границы – ИЭП и ИМП, которые получаются как частный случай при $\alpha=0$ и $\alpha=1$, соответственно. Метод основан на применении ортогональных Полиномов. При этом для ленты применяются полиномы Гегенбауэра, ортогональные на интервале (1,1), а для полуплоскости имеем дело с полиномами Лагерра, ортогональными на интервале (0,∞). Отмечена важная особенность – данный метод позволяет получить решение задачи дифракции в явном виде для одного частного случая $\alpha=0,5$.


[1]. *N. Engheta* Microwave and Optical Technology Letters., 1998, 17, N 2, p.86-91.

[2]. *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987, 688 с.

[3]. *M.V. Ivakhnychenko, E. Veliev, T.M. Ahmedov* Journal of electromagnetic waves and applications. 2007, 21, N 13, p.1787-1802.

[4]. *E.Veliev, N. Engheta* Mathematical methods in electromagnetic theory: 10th international conference: conf. proc. Dnieperpetrovsk, 2004, p. 228–230.

[5]. *N.Engheta* Mathematical methods in electromagnetic theory: conf. proc. Kharkiv, 2000. p.34–40.

[6]. *M.A. Leontovich* Investigations on radiowave propagation. Academy of Sciences. 1948. Part 2. p. .5–12.

[7]. *T.B. Senior, J.L. Volakis* Approximate boundary conditions in electromagnetics. London: The institution of electrical engineers, 1995. – 353 p.

[8]. *M.V.Ivakhnychenko, E.I.Veliev, T.M. Ahmedov* Progress in electromagnetics research C. 2008, 2, p.189–205.

[9]. *D.J.Hope, Y.Rahmat-Samii* Impedance boundary conditions in electromagnetics. Washington, DC: Taylor and Francis, 1995. 196 p.

[10]. *M. Idemen* J. Phys. Soc. Jpn.,1990, 59, N1, p.71–80.

[11]. *S.P. Marin* IEEE Transactions on antennas and propagation. 1982, 30, N 6, p. 1045–1049.

[12]. *Z.L. Hyaric* IEEE Transactions on antennas and propagation. 2001, 49, N 6, p.916-922.

[13]. *E.Veliev, N.Engheta* IEEE AP-S international symposium & USNC/URSI National radio science meeting : 22–27 June 2003 : conf. proc. Ohio, USA, 2003. P. 228.

[14]. *Э.И.Велиев, Т.М.Ахмедов* Доклады НАН Азербайджана. 2005, Т. 41, № 4, с. 20–27.

[15]. *Р.Миттра, С.Ли* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327с.

[16]. *Х.Хенл, А.Мауэ, К.Вестпфаль* Теория дифракции; [пер. с нем. под ред. Г.Д.Малюжинца]. М.: Мир, 1964. 428с.

[17]. *E.I. Veliev, M.V.Ivakhnychenko, T.M. Ahmedov* Progress in electromagnetics research, 2008, 79, p. 443–462.

[18]. *Д. Колтон, Р.Кресс* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.

[19]. *Т.М.Ахмедов* Доклады НАН Азербайджана. 2006, T. L X11, № 5-6, с. 8-18.

[20]. *Г.Бейтмен, А. Эрдейи* Высшие трансцендентные функции, Т.2, М.: Наука, 1974. 297 с.

[21]. *E.T. Copson* Quart. J. Math. 1946, 17, p. 19-34.

[22]. *J.F.Carlson, A.E.Heins* Quart. Appl. Math., 4. 1947, p. 313-329.

[23]. *T.B.A. Senior* Proc. Roy. Soc. London, Seria A. 1952, 213, p. 436-458.

[24]. *T.B.A. Senior* Appl. Sci. Res., B8, 1959, p. 35-61.

[25]. *E.I. Veliev* Journal of electromagnetic waves and applications. 1999, 13, N 10, p. 1439-1453.

[26]. *А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И. Маричев* Интегралы и ряды. М.:Наука, 1981, 798 с.

**E. İ. Vəliyev, T.M. Əhmədov**

## KƏSİRLİ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ MALİK MÜSTƏVİ EKRANDA DALĞALARIN DİFRAKSIYASI MƏSƏLƏLƏRİNIN HƏLLİ ÜSULU

İşdə xüsusi inteqro-differensial tənliyin həllinin müstəvi ekranda difraksiya olunan kəsrinin törəmə tərtibi $\alpha$ (0, 1)-da dəyişən kəsirli sərhəd şərti (KSŞ) daxilində verilən məsələlərin həllinə gətirmək təklif olunur. Üsul KSŞ daxilində zolaq və yarımmüstəvidə ikiölçülü difraksiya məsələlərinin modeli üzərində baxılmışdır. $\alpha$*=0* və $\alpha$*=1* xüsusi hallarında KSŞ ideal elektrik, ideal maqnit keçirici sərhədlərini özündə birləşdirir. Üsul ortoqanal polinomların tətbiqinə əsaslanıb. Bu halda (-1,1) intervalında zolaq üçün Qeqenbauer polinomu yarımmüstəvi halı üçün (0,8) intervalında ortoqanal olan Laqerra polinomu tətbiq olunur. İşdə əsas xüsusiyyət ondan ibarətdir ki, bu üsul difraksiya məsələlərinin $\alpha$*=0,5* xüsusi halı üçün həllinə aşkar şəkildə nail olmağa imkan verir.

**E.I. Veliev, T.M. Ahmedov**

## ONE METHOD TO SOLVE ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION PROBLEMS ON PLANE SCREENS WITH FRACTIONAL BOUNDARY CONDITIONS

The method to solve a differential-integral equation of a special kind is proposed in this paper, that diffraction problems on plane screens described with fractional boundary conditions (FBC) are reduced to when the fractional order $\alpha$ varies from 0 to 1. The method is considered on test two-dimensional diffraction problems – a strip and a half-plane with FBC. FBC generalize ideal boundaries or more exactly electric and magnetic conducting boundaries which are obtained as a special case when $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$, respectively. The method is based on application of orthogonal polynomials. Gegenbauer polynomials orthogonal on the interval $(-1,1)$ are used in case of a strip, while Laguerre polynomials orthogonal on the interval $(0,\infty)$ are used for a half-plane. One important fact is noted: this method allows us to obtain a solution of a diffraction problem in an explicit form in one special case $\alpha$*=0,5*.

*Received: 14.10.09*