Beynəlxalq Konfrans “Fizika-2005”
International Conference “Fizika-2005”
Международная Конференция “Fizika-2005”

7 - 9 İyun / June / Июнь 2005 №11 səhifə / page / стр. 58-62

Bakı, Azərbaycan Baku, Azerbaijan Баку, Азербайджан

# О ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ q-ДЕФОРМИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**АТАКИШИЕВ Н.М.**

*Национальный Автономный Университет Мексики,*
*Институт Прикладной Математики, Куернавака, Мексика*

**НАГИЕВ Ш.М., ДЖАФАРОВ Э.И.**

*Институт Физики, Национальная Академия Наук Азербайджана,*
*Пр. Джавида 33, AZ1143, Баку, Азербайджан*

**ИМАНОВ Р.М.**

*Гянджинский Государственный Университет, факультет физики,*
*А. Джамил 1, 374700, Гянджа, Азербайджан*

Построено представление Вигнера для q-деформированной модели линейного гармонического осциллятора, описываемой конечно-разностным уравнением. Для этой модели, мы получили явное выражение функции Вигнера как для стационарных состояний, так и для состояний термодинамического равновесия.

A q-deformed model of the linear harmonic oscillator in the Wigner phase-space is studied. We derive an explicit expression for the Wigner probability distribution function, as well as the Wigner distribution function of a thermodynamic equilibrium, for this model.

Viqner faza fəzasında xətti harmonik ossilyatorun q-deformasiya olunmuş modeli öyrənilmişdir. Bu model çərçivəsində, həm stasionar hallar, həm də termodinamik tarazlıq halı üçün Viqner paylanma funksiyasının aşkar ifadəsi alınmışdır.

1. Уже более 10 лет большое внимание уделяется к новым математическим структурам – квантовым алгебрам [1-5], которые являются деформированными аналогами обычных алгебр Ли с параметром деформации $q$. Существует тесная связь между квантовыми алгебрами и разностными специальными функциями [6] $q$-анализа [7,8].

Квантовые алгебры находят широкое применение в различных областях теоретической физики – статистической механике, квантовой механике, конформной квантовой теории поля и т.д. [9-11]. Например, в работе [10] алгебра $so_q(4)$ была применена к описанию $q$-аналога атома водорода, а в работе [11] к описанию $q$-аналога релятивистской кулоновской задачи.

В связи с развитием квантовых алгебр во многих работах [12-19] исследовался вопрос о построении моделей $q$-деформированного квантового осциллятора ($q$-осциллятора). Отметим, что отправными пунктами построения $q$-моделей осциллятора работ [14,15] являлись конечно-разностное обобщение метода факторизации.

$q$-осциллятор описывается $q$-алгеброй с единицей, порождаемую тремя образующими генераторами $q$-рождения $b^+$, $q$-уничтожения $b^-$ и оператором числа частиц $N$. Они подчиняются коммутационным соотношениям

$$\left[b^-, b^+\right]_q \equiv b^- b^+ - q b^+ b^- = 1, \quad \left[N, b^\pm\right] = \pm b^\pm, \qquad (1)$$

где $q$ - вещественный параметр деформации. Все известные модели $q$-осциллятора связаны с $q$-ортогональными полиномами. Например, волновые функции модели $q$-осциллятора рассмотренной в [20] выражаются через полиномы $q^{-1}$-Эрмита $h_n(x \mid q)$. Эта модель реализована в искривленном пространстве. В данной работе мы хотим обсудить возможность применения к ее исследованию квантовой функции распределения Вигнера. Отметим, что построению представления Вигнера для релятивистской модели линейного гармонического осциллятора, описываемой конечно-разностным уравнением [21] посвящена работа [22]. Там же найдены функции Вигнера для стационарных состояний, состояний термодинамического равновесия и исследованы их нерелятивистские пределы.

2. Функция распределения Вигнера $W^{nonrel}(p,x)$ волновой функции $\psi$ широко используется в нерелятивистской квантовой механике (см. например, [23] и литературу там). Она зависит от импульса $p$ и координаты $x$ и является квантовым аналогом классической статистической функции распределения $\rho(p,x)$ в фазовом пространстве: $\lim\limits_{\hbar\to 0} W^{nonrel}(p,x) = \rho(p,x)$. Поэтому, вигнеровское представление квантовой механики можно использовать для вычисления квантовых поправок к классическим результатам (см. например, [24] и литературу там).

Функцию Вигнера для стационарных состояний можно получить из волновых функций, как в координатном, так и в импульсном представлении известным преобразованием

$$W_n^{nonrel}(p,x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*\left(x - \tfrac{1}{2}x'\right)\psi_n\left(x + \tfrac{1}{2}x'\right)e^{-ipx'/\hbar}dx', \tag{2}$$

$$W_n^{nonrel}(p,x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_n^*\left(p - \tfrac{1}{2}p'\right)\tilde{\psi}_n\left(p + \tfrac{1}{2}p'\right)e^{ixp'/\hbar}dp'. \tag{3}$$

Она позволяет вычислить квантовое среднее физической величины $f(\hat{p},\hat{x})$ по формуле

$$\bar{f}_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(p,x)W_n^{nonrel}(p,x)dpdx, \tag{4}$$

где $f(p,x)$ - вейлевский символ оператора $f(\hat{p},\hat{x})$.

Приводим здесь явный вид функции Вигнера для стационарных состояний нерелятивистского линейного осциллятора [25]:

$$W_n^{nonrel}(p,x) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar}e^{-\left(\eta^2+\xi^2\right)}L_n\left(2\eta^2 + 2\xi^2\right), \tag{5}$$

где $\eta = p/\sqrt{m\omega\hbar}$ и $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ - безразмерные переменные, а $L_n(x)$ - полиномы Лагерра.

Равновесная функция распределения Вигнера нерелятивистской системы, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T$ определяется формулой [25-27]:

$$W^{nonrel}(p,x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{nonrel}W_n^{nonrel}(p,x) \tag{6}$$

Коэффициенты $w_n^{nonrel}$ этого разложения выражаются через энергетические спектры $E_n^{nonrel}$ и статистической суммой $Z^{nonrel}(\beta)$ системы:

$$w_n^{nonrel} = e^{-\beta E_n^{nonrel}}/Z^{nonrel}(\beta), \quad \beta = 1/kT. \tag{7}$$

В случае нерелятивистского осциллятора, т.е. при

$$E_n^{nonrel} = \hbar\omega(n+1/2),$$
$$Z^{nonrel}(\beta) = 1/2\sinh(\beta\hbar\omega/2),$$

ряд (6) просуммируется и для функции Вигнера приводит к выражению

$$W^{nonrel}(p,x) = \frac{1}{\pi\hbar}\tanh(\beta\hbar\omega/2)\exp\left[-\left(\eta^2+\xi^2\right)\tanh(\beta\hbar\omega/2)\right]. \tag{8}$$

3. В координатном $x$-представлении обсуждаемая модель $q$-осциллятора описывается конечно-разностным гамильтонианом [20]

$$H = H_0 + V(x) \equiv -m(c^*)^2\cosh h\partial_x + V(x), \tag{9}$$

где $H_0$ - свободный гамильтониан, $V(x)$ - потенциал взаимодействия, $h$ - шаг разностного дифференцирования, а $c^* = \dfrac{\hbar}{mh}$ - «скорость света».

Оператор импульса, соответствующий $H_0$, равен

$$\widehat{p} = -imc^*\sinh h\partial_x.$$

Операторы $H_0$ и $\widehat{p}$ удовлетворяют «псевдорелятивистскому» соотношению

$$H_0^2 + (c^*)^2\widehat{p}^2 = m^2(c^*)^4. \tag{10}$$

Их общая собственная функция есть плоская волна $\eta(p,x) = \exp(ix\chi / h)$, $-\infty < \chi < \infty$, т.е.

$$H_0\eta(p,x) = E\eta(p,x), \quad E = -m(c^*)^2 \cos\chi,$$
$$\widehat{p}\eta(p,x) = p\eta(p,x), \quad p = mc^* \sin\chi.$$

В данном случае операторы $q$-рождения и уничтожения имеют следующую явную реализацию

$$b^{\pm} = \mp \frac{q}{\sqrt{1-q}} (\cosh \lambda hx)^{-1} e^{\pm\rho(x)} \sinh \tfrac{h}{2}\partial_x e^{\mp\rho(x)}, \quad (11)$$

где $\lambda = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$, $\rho(x) = \lambda x^2$, $q = e^{-\lambda h^2} = e^{-\kappa}$.

Выразим гамильтониан (9) через операторы (11):

$$H = \hbar\omega\left(\sqrt{q}b^+b^- + \left[\tfrac{1}{2}\right]\right), \quad (12)$$

где число $[a] = \dfrac{1-q^a}{1-q}$ является $q$-аналогом числа $a$. Собственные функции $H$ имеют вид [20]:

$$\psi_n(x) = c_n h_n(\sinh \lambda hx \mid q) e^{-\lambda x^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$h_n(\sinh \lambda hx \mid q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{(n-2k)\lambda hx} \quad (14)$$

являются $q^{-1}$-полиномами Эрмита,

$$c_n = c_0 q^{\frac{n(n+1)}{4}} \left[(q;q)_n\right]^{-1/2}, \quad c_0 = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{16}},$$

а $q$-биномиальный коэффициент равен

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad (q;q)_n = \prod_{j=1}^{n} (1-q^j). \quad (15)$$

Имеет место условие ортонормированности для волновых функций (13)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_m(x) \cosh(\lambda hx) dx = \delta_{nm}. \quad (16)$$

Уровни энергии для модели (12) имеют следующий вид

$$E_n = \hbar\omega\left(\left[n + \tfrac{1}{2}\right]\right), \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad (17)$$

Канонически-сопряженным к координате $x$ является импульс $p$, принадлежащий одномерному пространству постоянной кривизны, реализованному в виде окружности $p_0{}^2 + p^2 = m^2(c^*)^2$ в плоскости $(p_0, p)$.

Преобразование, связывающее координатные и импульсные волновые функции задается соотношением [20] (ср. с [21])

$$\widetilde{\psi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^*(p,x) \psi_n(x) dx. \quad (18)$$

Обратное к (18) преобразование имеет вид

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \eta(p,x) \widetilde{\psi}_n(p) d\Omega_p, \quad (19)$$

где $d\Omega_p = mc^* \dfrac{dp}{p_0} = mc^* d\chi$ является инвариантным элементом объема в одномерном пространстве постоянной кривизны.

Связь между преобразованиями (18) и (19) осуществляется с помощью свойств плоской волны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^*(p,x)\eta(p',x)dx = 2\pi p_0 \delta(p-p') = 2\pi h\delta(\chi - \chi'),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^*(p,x)\eta(p,x')dx = 2\pi\hbar\delta(x-x').$$

Импульсные волновые функции [20]

$$\widetilde{\psi}_n(p) = c_n{}' H_n\left(\sin\tfrac{\chi}{2} \mid q\right) e^{-\frac{\chi^2}{4\kappa}}, \quad p = mc^* \sin\chi, \quad (20)$$

выражаются через $q$-полиномы Эрмита

$$H_n(\sin \alpha x \mid q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q e^{i(n-2k)\alpha x}. \quad (21)$$

Нормировочные множители в (20) равны

$$c_n{}' = (-i)^n q^{-n^2/4} \frac{c_n}{\sqrt{2\lambda h}}.$$

4. Функцию Вигнера для волновых функций стационарных состояний $q$-осциллятора соответственно в координатном $\psi_n(x)$ и в импульсном $\phi_n(\chi) = \widetilde{\psi}_n(p)$ представлениях определим по аналогии с (2) и (3) в виде

$$W_{qn}(p,x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x - \tfrac{1}{2}x') e^{-\frac{i\chi x'}{h}} \psi_n(x + \tfrac{1}{2}x') dx' \quad (22)$$

$$W_{qn}(p,x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(\chi - \tfrac{1}{2}\chi') e^{\frac{ix\chi'}{h}} \phi_n(\chi + \tfrac{1}{2}\chi') d\chi' \quad (23)$$

Тогда пользуясь интегралом [28]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 - qx} dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{p}} e^{\frac{q^2}{4p}},$$

легко получить из (22) для функции Вигнера основного состояния $\psi_0(x)$ $q$-осциллятора (12) следующее выражение

$$W_{q0}(p,x) = \frac{1}{\pi\hbar} q^{\frac{1}{8}} e^{-2\lambda x^2 - \frac{\chi^2}{2\kappa}}. \quad (24)$$

Для возбужденных состояний аналогичным образом получаем, что

$$W_{qn}(p,x)=\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n}h_n\left(\sinh\lambda h\left(x-\tfrac{1}{2}i\hbar\partial_\chi\right)|\,q\right)h_n\left(\sinh\lambda h\left(x+\tfrac{1}{2}i\hbar\partial_\chi\right)|\,q\right)W_{q0}(p,x)\,. \quad (25)$$

Воспользовавшись теперь явным видом полиномов $q^{-1}$-Эрмита (14) и формулы (24) находим для $W_{qn}(p,x)$ следующее представление

$$W_{qn}(p,x)=\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n}e^{2n\lambda hx}W_{q0}(p,x)\cdot \sum_{k,s=0}^{n}(-1)^{k+s}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\s\end{bmatrix}_q q^{k\left(\frac{k}{2}-n\right)+s\left(\frac{s}{2}-n\right)+ks}e^{-ka^*-sa}, \quad (26)$$

где $a=i\chi+2\lambda hx$.

Функцию Вигнера (26) можно выразить через полиномы Уолла [29]

$$p_n(x;b\,|\,q)=(-1)^n(b;q)_n q^{\binom{n+1}{2}}\cdot \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\frac{q^{\binom{j}{2}}(-q^n x)^j}{(b;q)_j},$$

т.е.

$$W_{qn}(p,x)=\frac{(-1)^n}{(q;q)_n}e^{2n\lambda hx}W_{q0}(p,x)\cdot \sum_{s=0}^{n}(-1)^s q^{s\left(\frac{s}{2}-n\right)}e^{-sa}p_n\left(e^{-a^*}q^{s+\frac{1}{2}};0\,|\,q\right). \quad (27)$$

5. Чтобы построить равновесную функцию распределения Вигнера по формуле

$$W_{q\beta}(p,x)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n^q W_n(p,x), \quad (28)$$

аналогичной нерелятивистскому случаю (6), определим сначала временную зависимость волновых функций $q$-осциллятора (12).

Напишем следующее нестационарное разностное уравнение Шредингера для $q$-осциллятора

$$\widehat{H}\psi_n(x,t)=\hbar\omega\left[n+\tfrac{1}{2}\right]\psi_n(x,t)=\widehat{D}_t\psi_n(x,t), \quad (29)$$

где $\psi_n(x,t)=\psi_n(x)\varphi_n(t)$, причем разностный оператор дифференцирования по времени $\widehat{D}_t$ удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{h\to 0}\widehat{D}_t=i\hbar\partial_t$. Тогда получим уравнение

$$\widehat{D}_t\varphi_n(t)=\hbar\omega\left[n+\tfrac{1}{2}\right]\varphi_n(t). \quad (30)$$

Явная зависимость $\varphi_n(t)$ от $t$ определяется выбором вида $\widehat{D}_t$. При $\widehat{D}_t=\hbar\omega\dfrac{1-q^{\frac{i}{\omega}\partial_t}}{1-q}$, $q=e^{-\lambda h^2}=e^{-\frac{m\omega h^2}{2\hbar}}$ имеем

$$\varphi_n(t)=e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}, \quad (31)$$

т.е. волновые функции $q$-осциллятора зависят от $t$ таким же образом, как и волновые функции нерелятивистского осциллятора (ср. с [30]).

Поэтому будем предполагать, что и коэффициенты $w_n^q$ в (28) совпадают с аналогичными коэффициентами для нерелятивистского осциллятора

$$w_n^q=w_n^{nonrel}=e^{-\beta E_n^{nonrel}}/Z_{nonrel}(\beta). \quad (32)$$

Подставив (32) и (13) в (28), и изменив порядок суммирования и интегрирования получим

$$\begin{aligned}W_\beta(p,x)&=\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{2\pi m h\omega}c_0{}^2e^{-p^2/m\omega h}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\, e^{-\eta^2/4m\omega h-ix\eta/\hbar}\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^{1/2}e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n}{(q;q)_n}H_n\left(\sin\tfrac{1}{2}\tfrac{h}{\hbar}(p+\eta/2)\,|\,q\right)H_n\left(\sin\tfrac{1}{2}\tfrac{h}{\hbar}(p-\eta/2)\,|\,q\right)\end{aligned} \quad (33)$$

Используя в (33) известную билинейную производящую функцию [31]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(q;q)_n}H_n(\cos\theta\,|\,q)H_n(\cos\phi\,|\,q)= =(t^2;q)_\infty\left(te^{i(\theta+\phi)},te^{i(\theta-\phi)},te^{-i(\theta+\phi)},te^{-i(\theta-\phi)}\right)_\infty^{-1}$$

и соотношение $\sin x = \cos(x-\pi/2)$ мы получим

$$W_\beta(p,x) = \frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{2\pi m h\omega} c_0{}^2 e^{-p^2/m\omega\hbar}\left[e_q\left(qe^{-2\beta\hbar\omega}\right)E_q\left(q^{1/2}e^{-\beta\hbar\omega+ix}\right)E_q\left(q^{1/2}e^{-\beta\hbar\omega-ix}\right)\right]^{-1}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-\eta^2/4m\omega\hbar-ix\eta/\hbar} e_q\left(q^{1/2}e^{-\beta\hbar\omega+ih\eta/2\hbar}\right)e_q\left(q^{1/2}e^{-\beta\hbar\omega-ih\eta/2\hbar}\right), \tag{34}$$

где $e_q(x)$ и $E_q(x)$ являются $q$-экспоненциальными функциями вида

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty{}^{-1},$$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q;q)_n}x^n = (-x;q)_\infty .$$

Интеграл в правой части (34) является хорошо известным интегралом Раманужана [32]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_q\left(\alpha e^{2ikx}\right)e_q\left(\beta e^{-2ikx}\right)e^{-x^2+2yx}dx =$$
$$= \sqrt{\pi}e^{y^2}e_q(\alpha\beta)E_q\left(\alpha q^{1/2}e^{2iky}\right)E_q\left(\beta q^{1/2}e^{-2iky}\right), \tag{35}$$

где $q = e^{-2k^2}$.

Подставив (35) в (34) мы получим окончательное выражение для функции распределения Вигнера $q$-осциллятора в состоянии термодинамического равновесия:

$$W_\beta(p,x) = \frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{\pi\hbar} q^{1/8} e^{-\frac{2}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)} \frac{E_q\left(e^{-\beta\hbar\omega}q^{1+2x/h}\right)E_q\left(e^{-\beta\hbar\omega}q^{1-2x/h}\right)}{E_q\left(e^{-\beta\hbar\omega}q^{\frac{1}{2}+i\frac{2p}{m\omega h}}\right)E_q\left(e^{-\beta\hbar\omega}q^{\frac{1}{2}-i\frac{2p}{m\omega h}}\right)}. \tag{36}$$


[1]. V.G. Drinfeld, in *Proceedings of the International Congress of the Mathematicians* (Berkeley 1986), ed. A.M. Gleason (American Mathematical Society, Providence, RI, 1987), p.798

[2]. M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, 11, 247 (1986)

[3]. M. Jimbo, *Yang Baxter Equation in Integrable Systems,* Adv. Series in Math. Phys. 10, World Scientific, Singapore, 1990

[4]. П.П. Кулиш, Н.Ю. Решетихин, *Записки Семинаров ЛОМИ,* 101, 101 (1981)

[5]. E.K. Sklyanin, *Funct. Anal. Appl.*, 16, 262 (1982)

[6]. А.Ф. Никифоров, С.К. Суслов, В.Б. Уваров. *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, М.: Наука 1985

[7]. Дж. Гаспер, М. Рахман. *Базисные гипергеометрические ряды*, “Мир”, М., 1993

[8]. R. Koekoek, R.F. Swarttouw. Report 94-05, Delft University of Technology, 294 p.

[9]. M. Kibler, T. Negadi. *J. Phys. A: Math. Gen.* 24, 5283 (1991)

[10]. Q. Yang, B. Xu. *J. Phys. A: Math. Gen.* 26, L365 (1993)

[11]. Sh.M. Nagiyev, E.I. Jafarov. *Fizika* 2, 15 (1996)

[12]. A.J. Macfarlane. *J. Phys. A: Math. Gen.* 22, 4581 (1989)

[13]. L.C. Biedenharn. *J. Phys. A: Math. Gen.* 22, L873 (1989)

[14]. Э.Д. Каграманов, Р.М. Мир-Касимов, Ш.М. Нагиев. *Тр. VIII Международного Совещания по Проблемам Квантовой Теории Поля, Алушта, 1987*. Дубна: ОИЯИ, 1988, с.256

[15]. E.J. Kagramanov, R.M. Mir-Kasimov, Sh.M. Nagiyev. *J. Math. Phys.* 31, 1733 (1990)

[16]. R.M. Mir-Kasimov. *J. Phys. A: Math. Gen.* 24, 4283 (1991)

[17]. Е.В. Дамаскинский, П.П. Кулиш. *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ* 189, 81 (1990)

[18]. Н.М. Атакишиев, С.К. Суслов. *ТМФ* 85, 64 (1990)

[19]. Н.М. Атакишиев, С.К. Суслов. *ТМФ* 87, 154 (1991)

[20]. Ш.М. Нагиев. *ТМФ* 102, 247 (1995)

[21]. Н.М. Атакишиев, Р.М. Мир-Касимов, Ш.М. Нагиев. *ТМФ* 44, 47 (1980)

[22]. Н.М. Атакишиев, Ш.М. Нагиев, К.Б. Вольф. *ТМФ* 114, 410 (1998)

[23]. В.И. Татарский. *УФН* 139, 587 (1983)

[24]. Ю.М. Широков. *ТМФ* 38, 313 (1979)

[25]. Ю.Л. Климонтович. *Доклады АН СССР* 108, 1033 (1956)

[26]. H.-W. Lee, M.O. Scully. *Found. Phys.* 13, 61 (1983)

[27]. R.W. Davies, K.T.R. Davies. *Ann. Phys.* 89, 261 (1975)

[28]. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и Ряды: Элементарные функции.* М.: Наука, 1983

[29]. H.S. Wall. *Am. Math. Monthly.* 48, 102 (1941)

[30]. H. Ahmedov, I.H. Duru. *J. Math. Phys.* 38, 3889 (1997)

[31]. D.M. Bressoud. *Indiana Univ. Math. J.* 29, 577 (1980)

[32]. N.M. Atakishiyev. *J. Phys. A: Math. Gen.* 29, 329 (1996)