УДК621.319

О ВАРИАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ МОНОХРОМНЫХ ТОКАХ

ЛАЗИМОВ Т.М.

Азербайджанский НИИ Энергетики и Энергопроект

На основе вариационных уравнений вводится понятие комплексной индуктивности.

Известно, что лагранжиан $\mathcal{L}$ электрической цепи, содержащей катушку с индуктивностью L и конденсатор емкостью С, определяется как [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} L I^2 - \frac{1}{C} Q^2 + Qe(t), \tag{1}$$

где I – ток в цепи;

Q – заряд на обкладках конденсатора;

$e(t)$ – э.д.с. (внешнее воздействие), приложенная к цепи.

При этом, в соотношении (1) заряд Q выступает в качестве обобщенной координаты, а скорость изменения заряда $dQ/dt=I$ (ток) – в качестве обобщенной скорости.

Уравнение движения для лагранжиана (1) последовательной LC цепи (в рассматриваемом случае это – закон Кирхгофа для напряжений) имеет вид [1].

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = e(t), \tag{2}$$

или

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = e(t). \tag{3}$$

Импеданс Z последовательной LC цепи для монохромных токов определяется в соответствии с [1] как

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L \quad j\frac{1}{\omega C}, \tag{4}$$

где ω – циклическая частота приложенного напряжения.

Поскольку лагранжиан, как и в целом принцип наименьшего действия, определяется лишь для консервативных систем, в рассматриваемом случае – колебательного контура без потерь, то формально он не может использоваться для открытых (диссипативных) систем. Очевидно, что это ограничивает возможности вариационного рассмотрения процессов в электрических цепях с потерями активной энергии.

Вместе с тем, лагранжиан (1) может использоваться формально для диссипативной цепи, если положить

$$\dot{L} = L_o - R/\omega = L_o + R/j\omega, \qquad (5)$$

где L_o – собственно индуктивность (консервативной цепи);
R_o - активное сопротивление цепи;
$\dot{L}$ - комплексная индуктивность.

Покажем получение соотношения (5) другим способом.

Рассмотрим двухполюсник LR. Полагаем, что через его элементы течет монохромный ток I, равный

$$I = I_m \sin \omega t, \qquad (6)$$

где I_m – амплитуда тока.

Поскольку начальная фаза тока в (6) равна нулю, то можем принять [2]

$$I_m = \dot{I}_{km} \qquad (7)$$

где $\dot{I}_{km}$ - комплексная амплитуда тока.

Скорость изменения тока dI/dt в RL двухполюснике

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_m \cos \omega t = \omega I_m \sin(\pi/2 - \omega t) = j\omega \dot{I}_{km} \exp((-j\omega t)) = \dot{V} \exp((-j\omega t)) \qquad (8)$$

где $\dot{V} = j\omega \dot{I}_{km}$ – комплексная амплитуда (максимальное значение) скорости изменения тока в индуктивности L_o, пропорциональная магнитному потоку катушки.

Напряжение на зажимах RL двухполюсника равно

$$U = L_o \frac{dI}{dt} + RI = \omega L_o I_m \cos \omega t + R I_m \sin \omega t, \qquad (9)$$

а его комплексная амплитуда

$$\dot{U} = (j\omega L + R)\dot{I}_{km}\ . \qquad (10)$$

Известен подход Неймана [3] ко введению комплексной магнитной проницаемости, определяемой как отношение комплексных амплитуд магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Определяя комплексную индуктивность как отношение комплексных амплитуд напряжения и скорости его изменения, т.е. как

$$\dot{L} = \dot{U}/\dot{V}, \qquad (11)$$

получим

$$\dot{L} = \frac{(j\omega L_o + R)\dot{I}_{km}}{j\omega \dot{I}_{km}} = L_o - j\frac{R}{\omega}\ . \qquad (12)$$

Т.о., выражение для комплексной индуктивности $\dot{L}$ (12), полученное из соотношений (6) – (11) с использованием известного подхода [3] ко введению комплексного параметра тождественно, таковому-же (5), полученному из условия использования лагранжиана (1) для диссипативных электрических цепей.

Рассмотрим теперь некоторые вариационные соотношения.

Запишем лагранжиан (1) в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[L\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c}Q^2 \right] + Qe(t). \tag{13}$$

Уравнение Эйлера [4] применительно к лагранжиану (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'_t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0, \tag{14}$$

где Q'_t - производная заряда по времени.

При этом, поскольку диссипативный фактор не может быть непосредственно включен в лагранжиан (1), то в [1] для уравнения последовательного *RLC* контура

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{RI} + \frac{1}{\mathrm{C}} \quad \mathrm{Idt} = 0 \tag{15}$$

он учитывается опосредованно в уравнении Эйлера, имеющем для диссипативной цепи вид [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'_t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial Q'_t}. \tag{16}$$

Здесь P – диссипативная функция, определяемая в [1] как

$$P = \frac{1}{2}RI^2 = \frac{1}{2}R(\frac{dQ}{dt})^2. \tag{17}$$

Покажем, что использование комплексной индуктивности позволяет непосредственно учесть диссипативный фактор в лагранжиане (1).

Перепишем выражения (13), (2) и (3) соответственно в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{L}\frac{dQ^2}{dt} - \frac{1}{2}Q^2 + Qe(t), \tag{18}$$

$$\dot{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = e(t), \tag{19}$$

$$\dot{L}\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = e(t). \tag{20}$$

Выражения (19) и (15) для цепей монохромного тока легко трансформируются друг в друга благодаря использованию операционного соотношения, заменяющего интегрирование делением на $j\omega$.

Рассмотрим лагранжиан (13). Можем последовательно записать

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'_t} = \dot{L}\frac{dQ}{dt} = \dot{L}I, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'_t} = \dot{L}\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt} + RI, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -\frac{1}{C}Q + e(t) \tag{23}$$

Отметим, что член RI уравнения (22) является производной диссипативной функции (17) по току, т.е.

$$RI = -\frac{P}{Q_t}. \tag{24}$$

Становится ясным, что подставляя соотношения (22) и (23), с учетом (24), получим выражение, удовлетворяющее, с одной стороны, лагранжиану с комплексной индуктивностью (18), с другой – известному лагранжиану в формах (1) и (13) с вещественной индуктивностью.

Таким образом, использование понятия комплексной индуктивности позволяет учесть в лагранжиане диссипативный фактор.

---

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, 624 с.
2. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964, 772 с.
3. *Нейман Л.Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Л.-М.: Госэнергоиздат, 1949, 190 с.
4. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио, 1977, 368 с.

ELEKTRİK DÖVRƏSİNİN MONOXROM CƏRƏYANLAR ÜÇÜN VARİASİYA TƏNLİKLƏRİ HAQQINDA.

LAZİMOV T.M.

Dissipativ elektrik dövrəsi üçün təklif edilən kompleks induktivlik məfhumu əsasında Laqranj funksiyası tədqiq edilmişdir.

ON VARIATIONAL EQUATIONS OF ELECTRICAL CIRCUIT WITH MONOCHROM CURRENTS.

LAZIMOV T.M.

Definition of complex inductivity was considered and used in Lagrange function of electrical circuit with monochrom currents.