УДК 621.019

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИЗНОСА ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОУСТАНОВОК

ФАРХАДЗАДЕ Э.М., МУРАДАЛИЕВ А.З., НИКДЖУ А.А.*

Азербайджанский НИИ Энергетики и Энергопроектирования
**Институт энергетического и водного ресурса (Иран)*

Реферат
Разработан метод оценки параметров распределения экстремальных значений показателей износа однотипных элементов. На примере распределения Вейбулла иллюстрируется повышение точности оценок параметров.

При измерении показателей, характеризующих техническое состояние элементов электроустановок, часто наблюдается случайная неравномерность их значений по длине элемента (например, сопротивление изоляции обмоток, коррозионный износ трубопроводов и пр.), по поверхности (например, эрозия контактов, степень загрязнения, механический и коррозионный износ), по окружности (например, механический износ подшипников) и другим характеризующим геометрические размеры элемента параметрам. Техническое состояние элемента при этом оценивается максимальным (или минимальным) значением этих показателей. Если представить элемент как совокупность подэлементов, имеющих протяженность, равную единице измерения протяженности элемента, то элемент может быть рассмотрен как система из последовательно соединенных подэлементов, каждому из которых соответствует некоторая случайная величина износа τ_i^* с i=1,n. Максимальное значение износа равно

$$\tau_{\max} = \max(\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*, ..., \tau_n^*), \tag{1}$$

а минимальное значение остаточного ресурса

$$\tau_{\min} = \min\left[(\tau_{dop} - \tau_1^*), (\tau_{dop} - \tau_2^*), ..., (\tau_{dop} - \tau_n^*)\right] = \tau_{dop} - \tau_{\max}, \tag{2}$$

где τ_{dop} - допустимое значение износа.

Фишер и Типпет в своей известной работе [1] показали, что для нормального распределения F(t), распределение наименьшего значения случайной выборки соответствует распределению Вейбулла, а с ростом числа членов вариационного ряда выборки (n) двойному экспоненциальному закону. Поскольку при профилактических испытаниях число измерений износа, как правило, не превышает 10÷15, то при случайном различии свойств материала

$$P(\tau \le \tau_{\min}) = F_1(\tau_{\min}) = 1 - e^{-\frac{\tau_{\min}^{\gamma}}{\beta}}, \tag{3}$$

а согласно [2]

$$P(\tau \le \tau_{\max}) = F_2(\tau_{\max}) = 1 - F_1(\tau_{dop} - \tau_{\max}) = e^{-\frac{(\tau_{dop} - \tau_{\max})^{\gamma}}{\beta}} \tag{4}$$

Но, поскольку на практике необходимо знать не $P(\tau \le \tau_{\max})$, а $P(\tau > \tau_{\max}) = 1 - P(\tau \le \tau_{\max})$, то

$$P(\tau > \tau_{\max}) = 1 - e^{-\frac{(\tau_{dop} - \tau_{\max})^{\gamma}}{\beta}} \quad (5)$$

В частном случае, когда γ=1, распределения экстремальных значений (3) и (5) соответствуют экспоненциальному закону, а при γ=2– распределению Релея. Характер распределения $F_1(\tau_{\min})$ и $F_2(\tau_{\max})$ имеет принципиальное значение при оценке остаточного срока службы (ΔT_d), т.к. $F(\Delta T_d)$ зависит от закона распределения износа $F(\tau,t)$, где t– срок службы и закономерности изменения износа во времени $\tau(t)$.

Аппроксимация статистической функции распределения $F^*(\tau,t)$, построенной по результатам измерения износа однотипных элементов (ОЭ), работающих в сходных условиях с одинаковым сроком службы t, распределением Вейбулла связана с необходимостью оценки постоянных коэффициентов γ^* и β^*.

В практических расчетах γ и β наибольшее распространение получили методы [3]: графический, весовых коэффициентов, приравнивания моментов, метод квантилей и максимального правдоподобия.

Графический метод, основанный на применении вероятностной бумаги Вейбулла, также как и метод весовых коэффициентов, требующий применения громоздких таблиц, характеризуется субъективным характером оценок γ^* и β^* при малом числе ОЭ, трудоемкий при автоматизированных многократных расчетах.

Суть метода приравнивания моментов состоит в том, что статистические оценки моментов вариационного ряда (размещенные в порядке возрастания реализации случайной величины) приравниваются к аналогичным моментам действительного распределения случайной величины. Чтобы определить γ^* и β^* по известным формулам вычисляются оценки математического ожидания $M^*(\tau)$, среднего квадратичного отклонения $G^*(\tau)$ и коэффициента вариации $V^*(\tau)$. Поскольку $V^*(\tau) = f(\gamma^*)$, вычисляется γ^* и далее β^*. Известно, что оценки γ^* и β^*, полученные этим методом, не являются наилучшими с точки зрения их эффективности [3].

Метод квантилей, названный в [4] при фиксированной $F^*(t)$ методом разделяющих разбиений (РР), предусматривает разбиение вариационного ряда $\{\tau\}_n$ на группы, число которых на единицу больше числа параметров (r) функции распределения $F(\tau)$. Границы разбиения при r=2 выбираются так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} 0.1 < F^*(\tau_{1,j}) < 0.3 \\ 0.5 < F^*(\tau_{2,J}) < 0.9, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau_{1,j}$ - j –ая реализация τ , выбранная как первая граница разбиения; j=1,n; j<i, n – число измерений

При r=3 (распределение Вейбулла с параметрами смещения) границы разбиения выбираются в соответствии со следующими соотношениями;

$$\begin{aligned} 0.1 < F^*(\tau_{1,j}) < 0.2 \\ F^*(\tau_{2,J}) = 0.5 \\ 0.8 < F^*(\tau_{3,J}) < 1.0 \end{aligned} \quad (7)$$

Исходя из независимости квантилей конкретного распределения $F^*(\tau)$ от параметров γ^* и β^*, составляются уравнения, позволяющие определить эти параметры

$$\begin{aligned} F^*(\tau_{1,j}) = f(\tau_{1,j}, \gamma^*, \beta^*) \\ F^*(\tau_{2,J}) = f(\tau_{2,j}, \gamma^*, \beta^*) \end{aligned} \quad (8)$$

Погрешность этого метода тем больше, чем больше статистические оценки $F^*(\tau_{1,j}) = j/n$ и $F^*(\tau_{2,j}) = i/n$ отличаются от действительных значений $F(\tau_{1,j})$ и $F(\tau_{2,j})$.

Метод максимального правдоподобия основан на подборе параметров распределения заданного типа, при котором получение анализируемой выборки наиболее вероятно. Рассмотрим уравнения правдоподобия для случая распределения Вейбулла. В соответствии с [5], начальное приближение γ^* для нецензурированных выборок вычисляется по формуле:

$$\gamma^* = \frac{n+1}{(A - \ln T_m)(0.23n + 3.75)}, \tag{9}$$

где

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln T_i}{n} \tag{10}$$

$$T_m = \min(T_1, T_2, T_3, ..., T_n)$$

Последующие приближения параметра γ^* находят по рекуррентной формуле

$$\gamma^*_{k+1} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} [\ln T_i] \cdot T_i^{\gamma_k}}{\sum_{i=1}^{n} T_i^{\gamma_k}} - A \right]^{-1} \tag{11}$$

Итеративный процесс вычисления (к=0,1,2,..) продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Для практических расчетов достаточно выполнение следующего условия

$$\left| \frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{\gamma_k} \right| < 0{,}1 \tag{12}$$

Значение γ_{K+1} в этом случае принимается за искомое значение параметра γ.

В [6] был предложен новый метод оценки параметров распределения случайных величин износа, основанный на вычислении оценок параметров по аналогии с методом разделяющих разбиений с той разницей, что оценки параметров вычисляются для множества возможных сочетаний квантилей с последующим усреднением этих оценок. Стратегии выбора множества квантилей различны. Но все они должны учитывать возможное различие $\left[F^*(\tau_i) - F^*(\tau_j)\right]$ и $\left[F(\tau_i) - F(\tau_j)\right]$, т.е. оценки и истинного значения функции распределения с i=1,n, j=1,n и i < j.

Наиболее простым способом образования множества возможных сочетаний r квантилей является выбор сочетаний при фиксированном шаге. Например, при r=2 и К=K_1, это множество имеет вид

$$\left\{\tau_i ; \tau_{i+K_1}\right\}_{i=1, n-K_1-1}$$

Этот способ имеет неоспоримое преимущество, заключающееся в возможности оценки точности расчета параметров распределения в функции K_1. Очевидно, что результаты расчета будут зависеть, прежде всего, от самого вариационного ряда $\{\tau_i\}_n$.

В настоящей статье приводятся результаты оценки точности методов РР, модифицированного метода разделяющих разбиений (МРР).

При исследовании был применен метод обратной задачи. Суть этого метода применительно к оценке точности методов расчета γ^* и β^* сводится к моделированию n случайных значений квантилей распределения Вейбулла F(τ,) при заданных γ и β, имитирующих результаты измерения износа группы из n ОЭ, определению оценок γ^* и β^*

отмеченными выше методами и проверке гипотезы H_0 о случайном расхождении распределений $F(\tau,\gamma^*,\beta^*)$ и $F(\tau,\gamma,\beta)$. Многократное повторение этой процедуры позволяет оценить вероятность подтверждения нулевой гипотезы $P(H_0)$. В целях снижения дисперсии $P^*(H_0)$ оценка γ^* и β^* в каждом цикле для сопоставляемых методов проводилась для одних и тех же реализаций износа. Рассмотрим некоторые особенности алгоритма расчета на примере метода МРР.

1. Для выбранных (в общем случае произвольно) значений γ и β определяются квантили распределения Вейбулла при фиксированных $F(\tau)$ с постоянным шагом. Величина шага $\Delta F(\tau)$ должна быть выбрана так, чтобы аппроксимация кривой $F(\tau)$ на любом из интервалов линейной зависимостью была бы допустимой. Опыт расчетов позволяет заключить, что при шаге $\Delta F(\tau) \le 0.05$ полностью погрешностью линеаризации можно полностью пренебречь.
2. Для заданного объема выборки «n» моделируется случайное число ξ с равномерным законом распределения $F(\xi)$. Чтобы исключить влияние отличия распределения $F(\psi)$ программно моделируемых n псевдослучайных чисел ψ от равномерного закона на результаты расчета, предварительно строится статистическая функция распределения $F^*(\psi)$ и по формуле

$$\xi_j = F(\overline{\psi}_i) + \frac{\left[F(\overline{\psi_{i+1}}) - F(\overline{\psi}_i)\right](\psi_j - \overline{\psi}_i)}{(\overline{\psi_{i+1}} - \overline{\psi}_i)} \tag{13}$$

вычисляется j-ая реализация ξ с j=1,n.

где $\left[\overline{\psi_i};\overline{\psi_{i+1}}\right]$ - граничные значения i–го интервала группирования множества реализаций псевдослучайных чисел, Далее по формуле

$$\tau_j = \tau_i + \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)\left[\xi_j - F(\tau_i)\right]}{\left[F(\tau_{i+1}) - F(\tau_i)\right]}, \tag{14}$$

где j=1,n , i=1,m; m=1/ΔF(τ))

вычисляются n реализаций случайных величин τ_j, имеющих распределение Вейбулла $F(\tau)$ с j=1,n.

3. Строится вариационный ряд значений $\{\tau_j\}_n$.
4. При K=1,(n-1) определяются сочетания $\{\tau_i;\tau_{i+1}\}_n$, для каждого из которых вычисляется оценка параметра γ^*. Формула для расчета этой оценки может быть получена в результате следующих преобразований (3).

$$-\frac{\tau^\gamma}{\beta} = \ln\left[\frac{1}{1 - F(\tau)}\right]$$

$$\beta = -\frac{\tau^\gamma}{\ln\left[\frac{1}{1 - F(\tau)}\right]} \tag{15}$$

Для сочетания $\left[\tau_i;\tau_{i+k}\right]$ составим уравнения

$$\beta^*_{i,k} = -\frac{\tau_i^{\gamma^*_{i,k}}}{\ln\left[\frac{1}{1-F^*(\tau_I)}\right]}$$

$$\beta^*_{i,k} = -\frac{\tau_{i+k}^{\gamma^*_{i,k}}}{\ln\left[\frac{1}{1-F^*(\tau_{i+k})}\right]} \tag{16}$$

Отсюда

$$\frac{\tau_{i+k}^{\gamma^*_{i,k}}}{\tau_i^{\gamma^*_{i,k}}} = \frac{\ln\left[\frac{1}{1-F^*(\tau_{i+k})}\right]}{\ln\left[\frac{1}{1-F^*(\tau_i)}\right]}$$

$$\gamma^*_{i,k}\ln\frac{\tau_{i+k}}{\tau_i} = \ln\frac{\ln\left[1-F^*(\tau_{i+k})\right]}{\ln\left[1-F(\tau_i)\right]}$$

$$\gamma^*_{i,k} = \frac{\ln\frac{\ln\left[1-F^*(\tau_{i+k})\right]}{\ln\left[1-F^*(\tau_i)\right]}}{\ln\frac{\tau_{i+k}}{\tau_i}} \tag{17}$$

5. Вычисляется среднее арифметическое значение оценок параметра γ^*.

$$\gamma^*_{k,cp} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\gamma^*_{i,k} \tag{18}$$

6. По формуле с i=1,(n-1) вычисляются оценки параметра β^*.

$$\beta^*_{i,k} = -\frac{\tau_i^{\gamma^*_{k,cp}}}{\ln\left[\frac{1}{1-F(\tau_i)}\right]} \tag{19}$$

7. Определяется средне арифметическое значение оценок β^*_k

$$\beta^*_{k,cp} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\beta^*_{i,k} \tag{20}$$

8. Вычисляются квантили распределения Вейбулла $F(\tau,\gamma^*_{cp},\beta^*_{cp})$ для вероятностей i·ΔF(τ) с i=0,n. Обозначим выборку квантилей через $\{\tau^*_i\}_n$

9. Проверяется гипотеза H_0. Среди ряда критериев выбран критерий Андерсена, отличающийся большой мощностью. Для чего:

- составляем объединенную ранжированную в порядке возрастания выборку квантилей $\{\hat{\tau}_i\}_{2n}$ (из выборок $\{\tau_i\}_n$ и $\{\tau^*_i\}_n$);
- методом сравнения определяем порядковые номера квантилей выборок $\{\tau_i\}_n$ и $\{\tau^*_i\}_n$ в выборке $\{\hat{\tau}_i\}_{2m}$. Обозначим вариационные ряды этих номеров для каждой выборки через $\{l_i\}_m$ и $\{P_i\}_m$;
- вычисляем статистика Андерсена по формуле [7]

$$A = \frac{6\sum_{i=1}^{n}\left[(l_i - i)^2 + (P_i - i)^2\right] - (4n^2 - 1)}{12n^2} \tag{21}$$

- величина А сравнивается с критическим значением статистики Андерсена при заданном уровне значимости υ =0,05. Если A>A(5%)=0.45, где A(5%) – критическое значение статистики A при уровне значимости 5%, то расхождение $F(\tau,\gamma^*,\beta^*)$ и $F(\tau,\gamma,\beta)$ принимается случайным.

Блок-схема алгоритма расчета и анализа оценок γ^* и β^* для метода МРР приведена на рисунке 1.

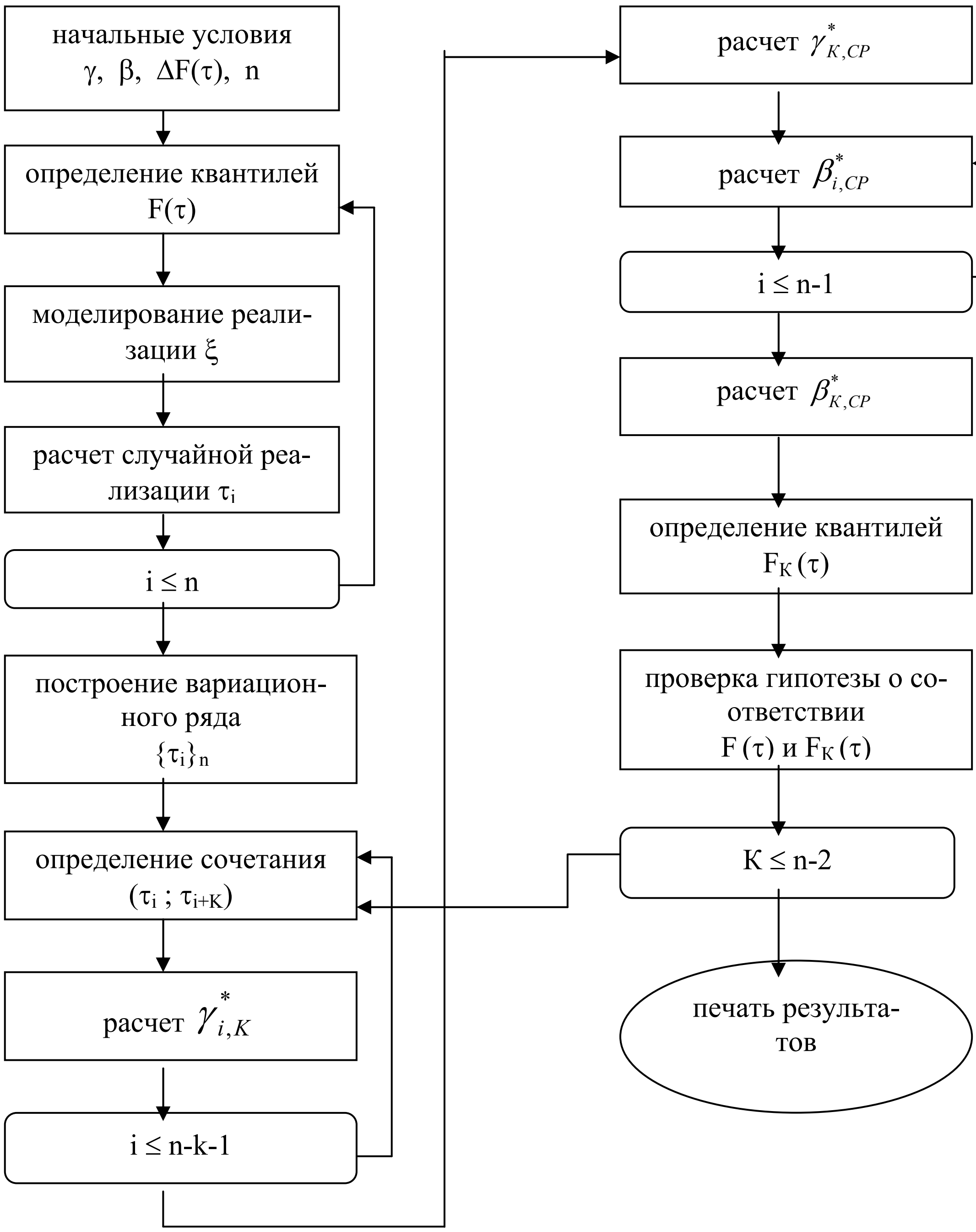

Рис.1. Блок-схема оценки и статистического анализа параметров распределения Вейбулла.

Предложенный выше алгоритм расчета и анализа оценок γ^*_{cp} и β^*_{cp} может быть несколько иным. Если по формулам (17-20) первоначально вычисляются γ^*_{cp}, а затем β^*_{cp}, то, изменив порядок преобразования (3), получим [4]

$$\beta^*_{i,k} = e^{\left[\frac{\ln\tau_i \ln\ln\frac{n}{n-\kappa-1} - \ln\tau_{i+\kappa}\ln\ln\frac{n}{n-\kappa}}{\ln\tau_{i+\kappa} - \ln\tau_i}\right]} \qquad (22)$$

$$\beta^*_{k,cp} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}\beta^*_{i,k} \qquad (23)$$

$$\gamma^*_{i,k} = \frac{\ln\beta^*_{k,cp} + \ln\ln\frac{n}{n-k-1}}{\ln\tau_i} \qquad (24)$$

$$\gamma^*_{k,cp} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\gamma^*_{i,k} \qquad (25)$$

Результаты проведенных исследований позволяют заключить:

1. Выбор сочетаний квантилей распределения $F^*(t)$ неоднозначен. При к≤2 наблюдаются резкие отклонения величин γ^*_{cp} и β^*_{cp} от действительных значений. Аналогичные результаты были получены при к≥n-2. Необходимо выбирать 2<k<(n-1)
2. Набольшее расхождение γ^* и β^* от действительных значений наблюдается для тех выборок, отдельные значения которых незначительно различаются друг от друга. В том случае необходимо или провести повторные измерения, или увеличить число измерений. Например, для программно генерируемой реализации случайных чисел с равномерным законом распределения (0,4135, 0,4162, 0,5085, 0,5990, 0,8137) и соответствующим этим числам случайным длительностям интервалов до моментов превышения износа допустимой величины (30,8, 31,0, 38,4, 46,6, 74,6) ни один из методов расчета параметров распределения не даст точных результатов.
3. В методе МРР алгоритм оценки γ^*_{cp}, и затем β^*_{cp}, предпочтительнее алгоритма оценки β^*_{cp}, и затем γ^*_{cp}, так как при этом $\sigma^*(\gamma^*_{cp})$ существенно снижается.
4. Критерий Андерсена с R=0.95 подтверждает возможность принятия гипотезы о случайном расхождении $F(\tau,\gamma^*,\beta^*)$, $F(\tau,\gamma^*_{cp},\beta^*_{cp})$ и $F(\tau,\gamma,\beta)$ для всех случайных выборок с n=20 и в 90 % для всех выборок с n=5. В этом находит свое отражение заключение п.2.
5. Характер расхождения γ^* и γ^*_{cp} для n=5 и n=20 свидетельствует о соответствии распределений нормальному закону.
6. Результаты исследований подтверждают случайное расхождение функций распределения $F(\tau,\gamma^*,\beta^*)$, $F(\tau,\gamma^*_{cp},\beta^*_{cp})$ и $F(\tau,\gamma,\beta)$ и при существенном расхождении самих параметров распределения, иначе говоря, случайном расхождении моделей изменения износа.
7. В таблице приведены результаты расчета оценок среднего квадратического отклонения реализаций γ^* и γ^*_{cp}, β^* и β^*_{cp} от действительных значений, которые подтверждают определенное преимущество метода МРР в части точности расчетов параметров распределения Вейбулла.

Таблица. Результаты сравнения точности методов РР и МРР.

Действительные значения параметров	Число измерений	Метод расчета	Численные оценки с.к.о.
$\gamma = 0{,}5$ $\beta = 7{,}07$	5	РР МРР	0,171 0,171
	20	РР МРР	0,182 0,138
$\gamma = 1{,}3$ $\beta = 161{,}7$	5	РР МРР	0,528 0,482
	20	РР МРР	0,368 0,285

1. *Fisher R.A, Tippett L.H.C.* Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. Proc. Cambridge Phil Soc.24.part 2. 1928
2. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике и теории случайных функций. Под ред. *А.А. Свешникова*, М., Наука, 1965, 632 с.
3. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. М., Наука, 1965, 524 с.
4. *Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б.* Модели отказов. М., Советское радио, 1966.
5. *Аронов И.З., Бурдасов Е.И.* Оценка надежности по результатам сокращенных испытаний. М., Изд-во стандартов, 1987, 189 с.
6. *Фархадзаде Э.М., Никджой А.А., Мурадалиев А.З.* Методы оценки долговечности невосстанавливаемых элементов. Проблемы энергетики, №2, 2001, с.21-31.
7. *Рябинин И.А.* Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем, Л, Судостроение, 1971, 456 с.

ELEKTRİK AVADANLIQLARIN ELEMENTLƏRİNİN AŞINMASININ EKSTREMAL KƏMİYYƏTLƏRİNİN PARAMETRLƏRİNİN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNİN DƏQİQLİYİ

FƏRHADZADƏ E.M., MURADƏLİYEV A.Z., NİKDJU A.A.

Eyni tipli elementlərinin aşınma göstəricilərinin ekstremal kəmiyyətlərinin paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsi metodu işlənmişdir. Veybulla paylanması nümunəsində parametrlərin qiymətləndirilməsinin dəqiqliyinin artması təsvir edilir.

ACCURACY OF PARAMETERS ESTIMATIONS OF DISTRIBUTION OF EXTREME VALUES OF DETERIORATION OF ELECTRICAL INSTALLATIONS ELEMENTS

FARHADZADE E.M., MURADALIYEV A.Z., NIKDJOU A.A.

The method of an estimation of parameters of distribution of extreme meanings of parameters of deterioration of the same elements is developed. On an example of Waybool distribution the increase of accuracy of estimations of parameters is illustrated.