AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ XƏBƏRLƏRİ
Fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, fizika və astronomiya 2010 №2

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ И КОРОТКОПЕРИОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ КАСПИЙСКОГО МОРЯ

Т.М.ТАТАРАЕВ, Л.Н.ФАРАДЖЕВА, А.В.ВЕЛИЕВ

Национальное Аэрокосмическое Агентство. Институт Экологии
AZ 1106, г.Баку, ул. С.С.Ахундова 1, корпус 2

В статье даны результаты исследований свободных периодических колебаний уровня Каспийского моря на основе уравнений динамики жидкости. Полученные результаты сравнивались с данными измерений.

Наличие широкого спектра сил, воздействующих на гидросферу Земли, является причиной сложного характера колебаний уровней океанов и морей, временная структура которых определяется возникновением составляющих от долей секунд до десятков лет [1;2]. Наблюдаемая изменчивость уровня моря практически является результатом суперпозиции его всех существующих периодических и непериодических составляющих (гармоник). Выделение отдельных гармоник из наблюдённой изменчивости уровня является очень сложной (порою неразрешимой) математической задачей, особенно непериодических составляющих. Определение и анализ последних требует применения методов спектрального анализа [3]. В представленной работе рассматриваются некоторые периодические колебания уровня Каспийского моря.

Задача о нахождении характеристик свободных колебаний в замкнутом или частично замкнутом природном водоёме, глубины которого малы по сравнению с длиной волны, как известно из гидродинамики, сводится к решению следующего уравнения

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right], \tag{1}$$

где x, y - горизонтальные прямоугольные координаты, t - время, $h = h(x, y)$ - глубина, $\zeta = \zeta(x, y, t)$ - волновое возвышение свободной поверхности, g - ускорение силы тяжести.

В случае периодических колебаний с частотой ω , ζ будет иметь вид

$$\tilde{\zeta}(x, y, t) = \zeta(x, y) \cdot e^{i\omega t} \quad , \tag{2}$$

получаем следующую краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\omega^2}{g} \cdot \zeta = 0 , \tag{3}$$

$$\left(h \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_{\Gamma} = 0, \tag{4}$$

где Γ - контур бассейна, n - орт внешней нормали к линии Γ , ω - частота колебаний. Условие (4) означает, что поток количества движения через границу водоёма равен нулю.

Сложный рельеф дна и изменчивость контура береговой линии водоёмов осложняет получение общего аналитического решения уравнения (3). Оно получено только для некоторых простейших случаев (прямоугольный, круглый и эллиптический в плане бассейнов с постоянной или меняющейся по параболическому закону глубиной), которые можно найти в монографиях [4]. Решение уравнения (3) при произвольном изменении глубины является довольно сложной задачей. Поэтому для расчёта колебаний типа сейш æ обычно вводится дополнительное допущение об одномерном характере колебаний [5-8]. Однако такое допущение, не плохо оправданно для вытянутых бассейнов простой формы, а для бассейнов более сложной формы, длина и ширина которых величины одного порядка, приводит к существенным ошибкам. В последнее время широкое применение получили вариационные и конечно-разностные методы решения краевых задач типа (3) [9]. Сильная меридиональная вытянутость Каспийского моря и малые значения отношений его ширины к длине позволяют применить к нему вышеуказанное допущение.

Наиболее удобным для решения поставленной задачи, по-видимому, является метод Ритца, где глубина представляется в виде двойного интеграла Фурье по переменным x и y. Это позволяет достаточно просто рассчитывать свободные колебания в бассейне, глубина которого меняется по произвольному закону.

Решение уравнения (3) с граничным условием (4) эквивалентно задаче отыскания минимума его функционала

$$J(\zeta)=\iint_D \left[h\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\zeta}\right)^2 + h\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - æ\cdot\zeta^2 \;\right] dx\cdot dy, \tag{5}$$

где $æ = \omega^2/g$, D - область, ограниченная контуром Γ.

Для решения экстремальной задачи воспользуемся прямым методом. Выберем линейно-независимую систему координатных функций $\{\varphi_i\}$ полную в области D и построим линейную комбинацию первых и её элементов, аппрокси-мирующих

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\varphi_i \tag{6}$$

Подстановка ζ_n вместо ζ в (5) и использование обычной процедуры метода Ритца приводит к следующей системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij} - æ\cdot\beta_{ij}\right)\cdot a_i = 0, \tag{7}$$

где $(j=1,2...,n)$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji} = \iint_D h(\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right) dx\cdot dy \\ \beta_{ij} &= \beta_{ji} = \iint_D \varphi_i\cdot\varphi_j\cdot dx\cdot dy \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и к соответствующему частотному уравнению

$$D\,(æ) = Det\left\|\alpha_{ij} - \beta_{ij}\right\| = 0 \tag{9}$$

Если в бассейне имеется хотя бы одна плоскость симметрии, то вычисление собственных значений и собственных функций значительно упрощается, так как тогда система (7) распадается на две подсистемы, собственные функции которых описывают симметричные и антисимметричные колебания относительно этой плоскости.

В случае, когда D представляет собой прямоугольник длиной L и шириной l (Каспийское море в первом приближении можно принимать именно такой областью), координатные функции удобно выбрать следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{mo} = \sqrt{\dfrac{2}{l \cdot L}} \cdot \cos \dfrac{m \cdot \pi \cdot x}{l}, \\ \varphi_{on} = \sqrt{\dfrac{2}{l \cdot L}} \cdot \cos \dfrac{n \cdot \pi \cdot y}{L}, \\ \varphi_{mn} = \dfrac{2}{\sqrt{l \cdot L}} \cdot \cos \dfrac{m \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \cos \dfrac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$(m, n = 1,2,...).$$

Коэффициенты при косинусах выбраны так, чтобы система (7) была отнормированной, т.е. чтобы

$$\beta_{ij} = \iint_D \varphi_i \cdot \varphi_j \cdot dx \cdot dy = \begin{cases} 0 npu i \neq j \\ 1 npu i = j \end{cases}. \tag{11}$$

Тогда систему (7) можно записать в виде

$$(A - æE) \cdot \gamma = 0, \tag{12}$$

где E - единичная матрица, A - квадратная матрица с элементами a_{ij}, γ -вектор-столбец с компонентами a_i.

Для матрицы α_{ij} можно получить следующие формулы

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{n\vartheta}^{m\vartheta} = \dfrac{2}{l \cdot L} \cdot \dfrac{m \cdot n \cdot \pi^2}{L^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^L h(x,y) \cdot \sin \dfrac{m\pi y}{L} \cdot \sin \dfrac{n\pi y}{L} \cdot dx \cdot dy; \\ \alpha_{\vartheta s}^{\vartheta r} = \dfrac{2}{l \cdot L} \cdot \dfrac{r \cdot s \cdot \pi^2}{l^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^L h(x,y) \cdot \sin \dfrac{r \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \sin \dfrac{s \cdot \pi \cdot \cdot x}{l} \cdot dx \cdot dy; \\ \alpha_{ns}^{mr} = \dfrac{4}{l \cdot L} \cdot \pi^2 \int\limits_0^l \int\limits_0^L h(x,y) \left[\begin{array}{l} \dfrac{m \cdot n}{L^2} \cdot \sin \dfrac{m \cdot \pi \cdot y}{L} \cdot \sin \dfrac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \cdot \cos \dfrac{r \cdot \pi \cdot x}{l} \cos \dfrac{s \cdot \pi \cdot x}{l} + \\ + \dfrac{r \cdot s}{l^2} \cdot \sin \dfrac{r \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \sin \dfrac{s \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \cos \dfrac{m \cdot \pi \cdot y}{L} \cdot \cos \dfrac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \end{array} \right] \cdot dx \cdot dy \\ (m, n, r, s = 1,2,3,...) \end{array}\right\} \tag{13}$$

Здесь вместо индекса i введён двойной индекс m, r, а вместо j - индекс n, s (m, n относятся к координатным элементам, зависящим от x, а r, s - от y). Случай $m = n, r = s$ соответствует случаю $i = j$.

Расчёт коэффициентов (13) значительно упрощается, если представить функцию $h(x,y)$ в виде двойного ряда Фурье в силу ортогональности тригонометрических функций в области D. Учитывая, что глубина большинства природных водоёмов при приближении к берегу равномерно понижается, задаем её следующим образом

$$h(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{L}, \tag{14}$$

где

$$c_{mn} = \int\limits_0^l \int\limits_0^L h(x,y) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{L}. \tag{15}$$

Интегралы типа (13) в настоящее время легко (аналитически или численно) берутся.

Для решения поставленной задачи выберем геометрическую модель, которая бы достаточно точно отражала характерные черты Каспийского моря и в то же время описывалась математическими выражениями типа (14), удобными для расчётов колебаний уровня. Как известно, в Северном Каспии содержится всего около 0,5% от общего объёма и, учитывая, что в этой мелководной части моря быстро разрушаются, эту часть можно исключить из рассмотрения. Тогда в качестве геометрической фигуры, аппроксимирующий Каспийское море можно взять прямоугольник длиной $L = 800км$ в меридиональном и шириной $l = 280км$ в широтном направлении.

Если предположить, что функции, описывающие изменение глубины (h) в направлении длины и ширины, взаимно-независимы, тогда в силу (14) можно написать

$$h(x, y) = h_1(x) \cdot h_2(y). \tag{16}$$

Функции $h_1(x)$ и $h_2(y)$ представим в виде тригонометрических полиномов

$$\left.\begin{aligned} h_1(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \sin\frac{i \cdot \pi \cdot x}{l} \\ h_2(y) &= \sum_{i=1}^{\infty} d_j \cdot \sin\frac{j \cdot \pi \cdot y}{L} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Такое представление глубины создаёт определённое преимущество при расчётах сейшевых колебаний. В (17) коэффициенты c_i и d_j рассчитываются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \frac{2}{l}\int_0^l h_1(x) \cdot \sin\frac{i \cdot \pi \cdot x}{l} \cdot dx \\ d_j &= \frac{2}{L}\int_0^L h_2(y) \cdot \sin\frac{j \cdot \pi \cdot y}{L} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Ограничиваясь четырьмя значениями d_j и одним значением c_i, получаем следующее выражение для глубины (в м)

$$h(x, y) = \sin\frac{\pi \cdot x}{l}(378 \cdot \sin\frac{\pi \cdot y}{L} - 77 \cdot \sin\frac{2\pi \cdot y}{L} + 272 \cdot \frac{3\pi \cdot y}{L} - 250 \cdot \sin\frac{4\pi \cdot y}{L}\ , \tag{19}$$

а для общего случая

$$h = \sum_{n=1}^{4} d_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}\ , \tag{20}$$

где $d_1 = 578м$, $d_2 = -77м$, $d_3 = 272м$, $d_4 = -250м$.

В рассматриваемом случае плоскость $x = l/2$ служит плоскостью симметрии, система (12) на основе определённых собственных значений описывает два типа колебаний.

1. Симметричные сейшевые колебания

$$\begin{aligned} \zeta_m^p &= \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \varphi_i = a_{1m} \cdot \sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{L} + a_{2m} \cdot \sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{2\pi \cdot y}{L} + \ldots \\ &\ldots + a_{5m} \cdot \sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{2\pi \cdot x}{l} + a_{6m} \cdot \frac{2}{\sqrt{lL}} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{L} \cdot \cos\frac{2\pi \cdot x}{l} + \ldots \\ &\ldots a_{10m}\sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{4\pi \cdot x}{l} + \ldots \\ &m = 1,2,\ldots, p. \end{aligned} \tag{21}$$

2. Антисимметричные колебания

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{q} b_{in} \cdot \Psi_i = b_{1n}\sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{l} + b_{2n} \cdot \frac{2}{\sqrt{lL}} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{L} \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + b_{6n}\sqrt{\frac{2}{lL}} \cdot \cos\frac{3\pi \cdot x}{l} + b_{7n} \cdot \frac{2}{\sqrt{lL}} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{L} \cdot \cos\frac{3\pi \cdot x}{l} + \ldots \qquad (22)$$
$$\ldots + b_{10n} \cdot \frac{2}{\sqrt{lL}} \cdot \cos\frac{4\pi \cdot y}{L} \cdot \cos\frac{3\pi \cdot x}{l} + \ldots$$
$$n = 1,2,\ldots,q.$$

Деформационные колебания уровня Каспийского моря являются результатом сложения различных видов колебаний: сгонно-нагонных, сейшевых, приливных и инерционных. В настоящей работе будут рассмотрены, главным образом, сейшевые и инерционные колебания. Различным видам колебаний уровня Каспийского моря посвящено довольно большое число работ. Наименее изученными являются колебания уровня продолжительностью от нескольких часов до нескольких суток. Анализу колебаний в указанном диапазоне посвящены работы [3,7,8,10,11].

В настоящей работе для определения свободных колебаний поверхности Каспийского моря оценены значения безразмерных величин $æ^* = K \cdot æ$, где $K = 10^9 м$ для симметричных и антисимметричных колебаний при изменении p, q от 1 до 10. Полученные результаты расчётов собственных значений $æ^*$ для симметричных и антисимметричных колебаний уровня моря представлены в Таблице 1 и Таблице2.

Таблица 1

Порядок приближения, p	Номер собственного значения, m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,363	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	4,363	20,55	-	-	-	-	-	-	-	-
3	4,191	17,23	43,78	-	-	-	-	-	-	-
4	3,705	16,07	39,68	74,02	-	-	-	-	-	-
5	3,795	16,97	39,68	74,02	145,6	-	-	-	-	-
6	3,770	16,97	39,68	73,83	108,2	180,8	-	-	-	-
7	3,766	16,34	38,87	73,34	74,35	149,5	198,1	-	-	-
8	3,762	16,08	36,99	55,67	74,14	140,4	193,6	206,5	-	-
9	3,757	15,88	34,84	46,18	66,36	131,2	186,0	201,4	246,1	-
10	3,757	15,81	34,42	44,50	66,32	120,4	177,1	193,1	238,2	593,0

Таблица 2

Порядок приближения, q	Номер собственного значения, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	45,49	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	34,58	57,30	-	-	-	-	-	-	-	-
3	26,14	49,23	65,18	-	-	-	-	-	-	-
4	19,24	48,85	64,44	77,15	-	-	-	-	-	-
5	15,52	47,10	63,70	74,30	98,73	-	-	-	-	-
6	15,44	45,56	63,40	73,54	98,47	319,4	-	-	-	-
7	15,21	45,53	61,16	72,18	98,16	235,8	383,7	-	-	-
8	14,90	43,83	59,73	71,09	98,03	151,3	319,5	425,8	-	-
9	14,40	43,82	59,28	69,14	90,27	118,6	281,2	402,8	437,8	-
10	13,94	43,61	59,04	67,53	83,88	90,31	261,8	359,6	419,1	489,9

Периоды колебаний рассчитываются по следующей формуле

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\,(\text{g}\cdot æ)^{-1/2} \approx 17{,}6\cdot æ^{\,-1/}. \quad (23)$$

Как видно из таблиц, в некоторых случаях сходимость собственных значений носит скачкообразный характер. По-видимому, основной причиной этого является сложность рельефа дна. С помощью эффективного подбора координатных функций можно добиться улучшения сходимости, учитывающих особенности каждого конкретного водоёма. Ниже приведены (Таблица 3) первые 12 собственных значений, взятых с достоверным количеством значащих цифр $æ^*_{n\ ср.}$ и соответствующие им периоды T_n (в часах)

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$æ^*_n$	3,757	13,94	15,81	34,42	43,61	44,50	59,04	66,23	67,53	83,83	90,31	120,4
$æ^*_{n\ ср.}$	3,76	14	15,8	34	43	44	59,02	66	67	80	90	120
$\overline{T_n}$	9,11	4,71	4,43	3,0	2,7	2,7	2,3	2,2	2,2	2,0	1,9	1,6

Таким образом, периоды колебаний уровня можно считать вычисленными с точностью до нескольких минут. Добиваться дальнейшего увеличения точности в данном случае не имеет смысла, т.к. погрешности, связанные аппроксимацией водоёма, больше погрешностей численной реализации метода Ритца.

1. А.С.Монин, В.М.Каменкович, В.Г.Корт, *Изменчивость Мирового океана. Л.: Гидрометеоиздат,* (1974) 262.
2. А.С.Монин, Р.В.Озмидов, *Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат,* (1981) 320.
3. А.М.Гасанов, Т.М.Татараев, Ф.Г.Мамедов и др., *Известия Национального Аэрокосмического Агенства, Баку,* № 3 (2005) 113.
4. Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, *Теоретическая гидромеханика.М.:Гос. техиздат.*, ч. I (1955) 560.
5. Н.М.Арсеньев, Л.К.Давыдов, Л.Н.Дубровина, Н.К.Конкина, *Сейши на озёрах СССР. Л.: ЛГУ,* (1963).
6. А.Н.Кощеев, *Расчёт длинных волн во внутренних водоёмах. Тр. ГГИ,* вып. **113** (1964).
7. А.Б.Рабинович, *Расчёт сейш Каспийского моря. Вестник Моск. ун-та, сер. геогр.,* № 4 (1973) 116.
8. А.Б.Рабинович, *Водные ресурсы,* № 1 (1976) 121.
9. Л.В.Канторович, В.И.Крылов, *Приближённые методы высшего анализа. М.-Л., Физматиз,* (1962).
10. А.Н.Косарев, В.Ф.Цыганов, *Метеорология и гидрология*, № 2 (1972) 49.
11. *Каспийское море. Гидрология и гидрохимия. М., Наука,* (1986) 264.

XƏZƏR DƏNİZİ SƏVİYYƏSİNİN SƏRBƏST VƏ QISAPERİODLU RƏQSLƏRİNİN ANALİZİ

T.M.TATARAYEV, L.N.FƏRƏCOVA, A.V.VƏLİYEV

Məqalə Xəzər dənizi səviyyəsinin sərbəst və qısaperiodlu rəqslərinin maye dinamikası tənlikləri əsasında araşdırılmasına həsr edilmişdir. Alınmış nəzəri nəticələr natur ölcmə məlumatları ilə müqayisə edilmişdir.

ANALYSIS OF FREE AND SHORT-PERIOD FLUCTUATIONS OF THE CASPIAN SEA LEVEL

T.M.TATARAYEV, L.N.FARADJEVA, A.V.VELIYEV

The article has been dedicated to the analysis of free and short-periodical fluctuations of the Caspian sea level on the basis of equations of liquid dynamics. Obtained results have been compared with data of nature measuring.

Редактор: Р.Мамедов