Ф.А.Березин

МЕТОД ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Разбираются основы метода вторичного квантования, применяемого в задачах квантовой механики с переменным числом частиц и в задачах с бесконечным числом степеней свободы, описаны пространства состояний и операторы на них, установлена связь между векторами и функционалами, операторами и функционалами, а также основные правила действия над функционалами. Рассмотрены примеры.

Настоящее издание 1986 г. (1-е изд. вышло в свет в 1965 г.) дополнено 6 статьями автора, развивающими далее этот метод.

Для научных работников, аспирантов и студентов—физиков и математиков.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Эта книга — второе издание вышедшей в 1965 г. монографии безвременно погибшего Феликса Александровича Березина (1931—1978). Первоначальный текст дополнен рядом работ, написанных и опубликованных позднее и непосредственно примыкающих к содержанию книги.

Теория квантования и общая математическая структура квантовой теории поля всегда были в центре научных интересов Ф. А. Березина. Он заметил, что единообразное квантование бозонных и фермионных полей достигается, если наряду с обычными интегрированием и дифференцированием ввести соответствующие операции для «функций от антикоммутирующих переменных». Фактически операции над функционалами от антикоммутирующих переменных применялись в квантовой теории поля еще начиная с работы Швингера 1951 г., однако Ф. А. Березин был одним из первых, кто придал этим физическим построениям строгий смысл. Постепенно это привело его к мысли, что наряду с обычными алгеброй и анализом должны существовать столь же содержательные алгебра и анализ функций от антикоммутирующих переменных. Эта идея отчетливо высказана, например, в статье Ф. А. Березина и Г. И. Каца 1970 г., посвященной определению групп и алгебр Ли с антикоммутирующими параметрами.

Мысли эти стали общими после того, как в физике почти в то же время стали рассматривать теории, инвариантные относительно симметрий, перемешивающих бозонные и фермионные поля (суперсимметрий), что было предложено в работах Ю. А. Гольфанда и Е. П. Лихтмана (1971), Д. В. Волкова и В. П. Акулова (1972), Весса и Зумино (1974), Салама и Стратди (1974). Интерес к суперсимметричным моделям в физике привел к широкому развитию математики функций от антикоммутирующих переменных. Ее теперь часто называют суперматематикой, поскольку для пространства, в котором координаты могут как коммутировать, так и антикоммутировать, принято название суперпространства, а для алгебр и групп Ли с антикоммутирующими параметрами — название супералгебр и супергрупп Ли.

В работах Ф. А. Березина не было введено явного определения суперпространства, хотя, по существу, оно и использовалось. Это связано с тем, что введенное Саламом и Стратди определение суперпространства математически не строго, и Ф. А. Березин предпочитал, следуя принятой в математике традиции, определять суперпространство (а затем и супермногообразие) с помощью кольца функций на нем. Определение суперпространства, сочетающее наглядность с математической строгостью, было дано только много позже — в работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича 1984 г.

В теоретической физике сейчас ведется очень интенсивная работа, направленная на создание единой теории всех имеющихся взаимодействий в рамках суперсимметричной теории. Если эта работа увенчается успехом, то суперматематика будет играть в единой теории поля такую же фундаментальную роль, как риманова геометрия в общей теории относительности.

Первое издание этой книги служит в работах по суперсимметрии стандартным источником ссылок на основные понятия анализа функций антикоммутирующих переменных. Поскольку важное понятие супердетерминанта («березиниана», как его теперь принято называть) не содержалось в первом издании, мы поместили в этом издании короткое дополнение (Добавление 2, ч. I), в котором вводится это понятие и описывается его связь с заменой переменных в интеграле по антикоммутирующим и коммутирующим переменным. В то же время мы исключили из текста первого издания гл. IV, посвященную анализу безмассовой модели Тирринга, поскольку на сегодня этот анализ проведен в более широких предположениях (массивная модель) и полнее, а эта глава имела лишь иллюстративный характер.

Вторая часть монографии посвящена дальнейшему развитию метода вторичного квантования в трудах Ф. А. Березина и состоит из шести глав — отдельных работ, написанных им в период между 1971 и 1978 годами. Первая глава о невинеровских континуальных интегралах содержит описание разных типов символов операторов, т. е. различных квантований, и применение этих символов к выводу представлений различных физических величин в виде континуальных интегралов по траекториям в (p, q)-пространстве. В гл. II описывается виковское и антивиковское квантование, иначе говоря, изучаются виковский и антивиковский символы операторов. Виковский символ определен в первой части книги как функционал, отвечающий нормальной форме оператора. В гл. III анализируется ковариантный и контравариантный символы операторов, представляющие собой естественное обобщение виковских и антивиковских символов. Далее, в частности, показывается, что знание этих символов позволяет извлечь богатую информацию о спектральных свойствах оператора. Следующая глава о выпуклых операторных функциях представляет собой важную лемму, относящуюся к предыдущему материалу и имеющую самостоятельный интерес. Глава V содержит анализ общей проблемы квантования и представляет собой изложение главных результатов, полученных Ф. А. Березиным в цикле работ, посвященных этому вопросу и перечисленных в конце этой главы. Наконец, гл. VI — это приложение общих результатов о квантовании в искривленном пространстве к анализу конкретной модели квантовой теории поля.

Примыкающие к содержанию книги работы, относящиеся к развитию суперматематики, мы не стали включать в эту книгу, поскольку они отражены в другом посмертном издании Ф. А. Березина (Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во МГУ, 1983). Там же помещен полный список печатных трудов Ф. А. Березина.

В ч. II в отличие от ч. I нумерация параграфов независимая в каждой главе, а списки литературы приводятся в конце глав.

В подборе материала и подготовке этой книги приняли большое участие многие из друзей покойного Феликса Александровича. Особенно много сделано А. С. Шварцем, большая помощь которого была весьма существенна на всех стадиях работы над этим изданием.

М. К. Поливанов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В задачах квантовой механики, имеющих дело с переменным числом частиц, главным образом в теории поля и квантовой статистике, употребляется так называемый метод вторичного квантования.

Этот метод возник почти одновременно с окончательной математической формулировкой квантовой механики в работах Дирака [1], Фока [1, 2], Иордана и Вигнера [1], однако интенсивно развиваться метод вторичного квантования начал лишь в послевоенное время.

Эта задержка связана, по-видимому, с тем, что математические задачи, возникающие в методе вторичного квантования, в достаточной мере далеки от традиционных задач математической физики, которые формулируются в терминах дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, для метода вторичного квантования большую роль играют чуждые классической математической физике чисто алгебраические вопросы, близкие к теории представлений групп Ли, и некоторые вопросы теории меры. Именно этой стороне метода вторичного квантования уделяется в книге основное внимание.

В методе вторичного квантования так же, как в обычной квантовой механике, состояния физической системы описываются векторами гильбертова пространства, называемого *пространством состояний*, а эволюция системы определяется уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

где H — оператор энергии, называемый также *гамильтонианом*, Ψ — вектор пространства состояний.

Однако, в то время как в квантовой механике одной частицы

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi,$$

H является оператором, естественным образом реализующимся в пространстве функций трех вещественных переменных, в методе вторичного квантования пространство состояний есть прямая сумма пространств одного, двух и т. д. переменных и не существует естественной реализации гамильтониана в гильбертовом пространстве функций с фиксированным числом переменных.

Существует, однако, естественная реализация пространства состояний как пространства *функционалов* от функций определенного числа переменных. В зависимости от сорта частиц, которые описываются, эти функционалы являются либо функционалами от обычных комплекснозначных функций, либо от функций с антикоммутирующими значениями. В первом случае частицы называются *бозонами*, во втором — *фермионами*. Подобно векторам состояния, операторы также часто бывает удобно задавать с помощью функционалов [1]).

Заметим, что функционалы образуют не только линейное пространство, но и кольцо относительно обычного умножения. Это обстоятельство оказывается чрезвычайно полезным, благодаря ему многие вычисления сильно упрощаются. В случае, когда рассматриваются бозоны, кольцо функционалов оказывается коммутативным; в случае, когда рассматриваются фермионы, — это антикоммутативное кольцо, или, по другой терминологии, — грассманова алгебра с бесконечным числом образующих. Несмотря на очевидное алгебраическое различие между этими кольцами, все основные формулы для них поразительным образом почти полностью совпадают.

Другая причина, которая делает привлекательной реализацию пространства состояний с помощью функционалов, состоит в том, что функционалы можно себе представлять, грубо говоря, как функции бесконечного числа переменных. В обычной квантовой механике число переменных у функций, образующих пространство состояний, есть число степеней свободы. Таким образом возникает интерпретация задач вторичного квантования как задач квантовой механики с бесконечным числом степеней свободы и естественное желание аппроксимировать эти задачи задачами с конечным, но большим числом степеней свободы. На этом пути получен ряд интересных результатов (см. статью И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [1] и библиографию в конце этой статьи).

Настоящая книга является расширенным вариантом статьи, подготовленной для журнала «Успехи математических наук» в сентябре 1962 г.

Ф. А. Березин

---

1) Впервые функционалы для описания пространства состояний в бозевском случае были применены Фоком [2].

ЧАСТЬ I

МЕТОД ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

1. Пространство состояний. Согласно основным принципам квантовой механики, состояние частицы описывается вектором комплексного гильбертова пространства. Это пространство обозначим через L. Реализуем L с помощью функций с суммируемым квадратом на некотором множестве M, снабженном мерой [1]).

Если система состоит из n частиц и состояния k-й частицы описываются с помощью пространства L_k функций с суммируемым квадратом на множестве M_k, то состояния системы описываются функциями с суммируемым квадратом от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, где $x_k \in M_k$. Это пространство обозначим $\mathfrak{H}^n$. Скалярное произведение в $\mathfrak{H}^n$ задается формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(x_1, \ldots, x_n) \overline{f_2(x_1, \ldots, x_n)}\, d^n x,$$

где $x_k \in M_k$; $d^n x$ здесь и в дальнейшем означает произведение дифференциалов $d^n x = dx_1 \ldots dx_n$, причем dx_k — дифференциал меры на M_k.

Если система состоит из n одинаковых частиц, множества M_k совпадают между собой. В этом случае оказывается излишним рассматривать все пространство $\mathfrak{H}^n$. В зависимости от сорта частиц система описывается или подпространством $\mathscr{H}_B^n \subset \mathfrak{H}^n$, состоящим из симметричных функций, или подпространством $\mathscr{H}_F^n \subset \mathfrak{H}^n$, состоящим из антисимметричных функций. В первом случае частицы называются *бозонами*, во втором — *фермионами*.

Состояния системы, состоящей из переменного числа частиц, описываются векторами пространства $\mathfrak{H}$, которое является прямой суммой всех $\mathfrak{H}^n$, и одномерного пространства $\mathfrak{H}^0$, которое отвечает отсутствию частиц.

Система, состоящая из переменного числа бозонов, описывается с помощью подпространства $\mathscr{H}_B \subset \mathfrak{H}$, где $\mathscr{H}_B = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_B^n$, $\mathscr{H}_B^0 = \mathfrak{H}^0$; система, состоящая из переменного числа фермионов,

[1]) Множество M называется полной системой квантовых чисел.

описывается подпространством $\mathscr{H}_F \subset \mathfrak{H}$, где $\mathscr{H}_F = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_F^n$, $\mathscr{H}_F^0 = \mathfrak{H}^0$.

В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с пространствами $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$. Элементы этих пространств описывают состояния реальных физических систем. Поэтому $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ называют *пространствами состояний* [1]).

Векторы пространства $\mathfrak{H}$ естественно записывать в форме столбцов [2])

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1(x) \\ K_2(x_1, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_n(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \\ &(\hat{\Phi}, \hat{\Phi}) = |K_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int |K_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 d^n x. \end{aligned}\right\} \tag{0.1}$$

При такой записи векторы, у которых все компоненты, кроме n-й, равны нулю, образуют подпространство $\mathfrak{H}^n \subset \mathfrak{H}$.

Векторы, принадлежащие пространствам $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$, и скалярное произведение в этих пространствах также задаются формулами (0.1), но в первом случае все функции $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются симметричными, во втором — антисимметричными.

Векторы, у которых все компоненты, начиная с некоторой, равны нулю, будем называть *финитными*. Очевидно, что финитные векторы образуют плотное множество в каждом из трех пространств $\mathfrak{H}$, $\mathscr{H}_B$, $\mathscr{H}_F$.

Пусть $\hat{A}$ — оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, в область определения которого входят всюду плотные множества $\tilde{\mathfrak{H}}^n$, принадлежащие подпространствам $\mathfrak{H}^n$. Очевидно, что оператор A допускает матричное представление:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \ldots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \ldots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \ldots \\ . & . & . & . \; . \; . \; . \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

где A_{ik} — оператор, отображающий $\tilde{\mathfrak{H}}^k$ в $\mathfrak{H}^i$. В частности, матричное представление допускает любой ограниченный оператор.

---

[1]) По причинам, которые будут указаны в конце п. 2, эти пространства иногда называют также пространствами чисел заполнения.

[2]) Векторы и операторы в пространствах $\mathfrak{H}$, $\mathscr{H}_B$, $\mathscr{H}_F$ будем обозначать буквами, снабженными шляпками: $\hat{\Phi}$, $\hat{A}$ и т. д.

Действие оператора, допускающего матричное представление, на вектор $\hat{f}=\sum_k \hat{f}_k$, $\hat{f}_k \in \mathfrak{H}^k$, определяется естественной формулой: если $\hat{\Phi}=\hat{A}\hat{f}=\sum_k \hat{\Phi}_k$, $\hat{\Phi}_k \in \mathfrak{H}^k$, то

$$\hat{\Phi}_k=\sum_p A_{kp}\hat{f}_p; \tag{0.3}$$

произведение $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$ таких операторов определяется формулой [1])

$$C_{nk}=\sum_p A_{np}B_{pk}. \tag{0.4}$$

След $\hat{A}$, если он существует, равен

$$\operatorname{Sp}\hat{A}=\sum_k \operatorname{Sp} A_{kk}. \tag{0.5}$$

Так как пространства $\mathfrak{H}^n$ реализованы с помощью функций, то операторы A_{nk} можно задавать ядрами, которые являются, вообще говоря, обобщенными функциями $n+k$ переменных [2]):

$$A_{nk}=A_{nk}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_k). \tag{0.6}$$

При этом, если

$$\hat{f}_p=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_p(x_1, \ldots, x_p) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}^p,$$

то

$$A_{np}\hat{f}_p=\int A_{np}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_p)\, K_p(y_1, \ldots, y_p)\, d^p y. \tag{0.7}$$

Слагаемые в формулах (0.4) и (0.5) принимают вид

$$A_{ni}B_{ik}=\int A_{ni}(x_1, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_i)\times \\ \times B_{ik}(\xi_1, \ldots, \xi_i \mid y_1, \ldots, y_k)\, d^i\xi, \tag{0.8}$$

$$\operatorname{Sp} A_{kk}=\int A_{kk}(x_1, \ldots, x_k \mid x_1, \ldots, x_k)\, d^k x. \tag{0.9}$$

---

[1]) Естественно, при условии, что имеют смысл все операторы $A_{np}B_{pk}$. Это условие заведомо выполнено, если областью определения A_{np} служит все пространство $\mathfrak{H}^p$.

[2]) Нас не интересует функциональная природа обобщенных функций $A_{nk}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_k)$; они являются лишь способом выражения, который используется в тех случаях, когда с его помощью можно придать большую наглядность тем или иным формулам или рассуждениям. То же относится ко всем остальным обобщенным функциям, встречающимся в этой книге.

Все сказанное выше об операторах, допускающих матричное представление, без всякого изменения переносится на пространства $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$. В случае, если $\hat{A}$ — оператор в $\mathscr{H}_B$ или в $\mathscr{H}_F$, ядро $A_{nk}(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_k)$ не определяется однозначно оператором A_{nk}. Такой однозначности, однако, можно достичь, если потребовать, чтобы функция $A_{nk}(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_k)$ в первом случае была симметричной отдельно по $x_1, \ldots, x_n$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_k$, во втором случае — антисимметричной отдельно по $x_1, \ldots, x_n$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_k$. В дальнейшем это требование всегда предполагается выполненным.

2. Производящие функционалы. Пусть $\hat{\Phi} \in \mathscr{H}_B$ вида (0.1). Поставим в соответствие вектору $\hat{\Phi}$ функционал

$$\Phi(a^*) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int K_n(x_1, \ldots, x_n) a^*(x_1) \ldots a^*(x_n) d^n x, \quad (0.10)$$

$K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — те же функции, что в (0.1), $a^*(x) \in L$. Каждому оператору $\hat{A}$ в $\mathscr{H}_B$, который задается матрицей вида (0.2), поставим в соответствие функционал

$$\tilde{A}(a^*, a) = \sum \frac{1}{\sqrt{m!\,n!}} \int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times$$
$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_n) \ldots a(y_1) d^m x\, d^n y, \quad (0.11)$$

где $a(x) \in L$, $a^*(x)$ — функция, комплексно сопряженная $a(x)$.

В следующем параграфе будет доказана сходимость рядов (0.10), (0.11). (Сходимость рядов (0.11) будет доказана в предположении, что $\|A\| < \infty$.)

Оказывается, что функционал (0.11) очень просто связан с так называемой нормальной формой оператора $\hat{A}$.

Зная функционалы $\Phi(a^*)$ и $\tilde{A}(a^*, a)$, можно, очевидно, восстановить вектор $\hat{\Phi}$ и оператор $\hat{A}$.

В фермиевском случае мы также будем ставить в соответствие векторам и операторам функционалы вида (0.10), (0.11). Разница состоит в том, что в фермиевском случае $a(x)$, $a^*(x)$ не являются комплекснозначными функциями, а служат образующими грассмановой алгебры:

$$\{a(x),\ a(x')\} = \{a(x),\ a^*(x')\} = \{a^*(x),\ a^*(x')\} = 0$$

($\{A, B\}$ — сокращенная запись антикоммутатора: $\{A, B\} = AB + BA$). Мы будем называть иногда $a(x)$ и $a^*(x)$ функциями с антикоммутирующими значениями. Ряды (0.10), (0.11) в фермиевском случае являются формальными. Несмотря на это, как мы увидим, они оказываются столь же полезными, как и соответствующие ряды в бозевском случае.

С функционалами (0.10) связана реализация пространств состояний в виде бесконечных тензорных произведений.

Реализуем L в виде пространства последовательностей. В этом случае $x = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ пробегает номера состояний одной частицы, $a^*(x) = a_k^*$. Из

(0.10) ясно, что при такой реализации в пространстве $\mathscr{H}_B$ можно ввести ортонормированный базис из векторов $\hat{\Phi}_{n_1, n_2, \ldots}$, которым отвечают функционалы вида

$$\Phi_{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots} = \frac{1}{\sqrt{n_1! \, n_2! \ldots n_k! \ldots}} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \ldots (a_k^*)^{n_k} \ldots, \quad (0.10')$$

где лишь конечное число n_k отлично от нуля.

Векторы (0.10′) имеют простой физический смысл: если система находится в состоянии (0.10′), то это означает, что n_1 частиц находится в состоянии с номером 1, n_2 частиц — в состоянии с номером 2 и т. д. Числа n_k называются *числами заполнения*.

В пространстве $\mathscr{H}_F$ также можно ввести базис вида (0.10′) и числа n_k имеют тот же смысл, что и в бозевском случае. Однако, поскольку в фермиевском случае $(a_k^*)^2 = 0$, вектор $\hat{\Phi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots} \neq 0$, только если $n_k = 0$ или $n_k = 1$. Последнее обстоятельство есть выражение принципа Паули: в одном состоянии не может находиться более одной фермиевской частицы. Наличие в пространствах $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ базисов вида (0.10′) позволяет интерпретировать их как тензорные произведения бесконечного числа гильбертовых пространств R_k. (В бозевском случае R_k — бесконечномерные гильбертовы пространства, в фермиевском случае R_k двумерны.)

Отметим в заключение, что если число степеней свободы системы (т. е. размерность пространства L) конечно и равно N, то $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ являются тензорными произведениями N пространств R_k. (Пространство $\mathscr{H}_F$ в этом случае, очевидно, конечномерно; его размерность равна 2^N.) Пространства $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ являются очень специальными примерами бесконечных тензорных произведений. Общая теория бесконечных тензорных произведений гильбертовых пространств построена Дж. фон Нейманом [2].

3. Гильбертово пространство с инволюцией. В гильбертовом пространстве, описывающем состояния какой-либо частицы или физической системы, обычно бывает задана инволюция[1]). *Инволюцией* называется отображение $f \to f^*$ пространства на себя, обладающее свойствами:

1) $(f^*)^* = f$,
2) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$,
3) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ (λ — комплексное число),
4) $(f_1, f_2) = (f_2^*, f_1^*)$.

Векторы, удовлетворяющие условию $f = f^*$, будем называть *вещественными*, условию $f = -f^*$ — *чисто мнимыми*. Множество вещественных векторов, так же как и множество чисто мнимых векторов, являются вещественными подпространствами исходного гильбертова пространства.

Если гильбертово пространство реализовано с помощью функций с суммируемым квадратом $f = f(x)$, причем $f^* = \bar{f}(x)$, где $\bar{f}(x)$ — функция, комплексно сопряженная $f(x)$, то такую реализацию назовем *согласованной с инволюцией*.

Мы всегда будем считать, что пространство L, служащее исходным пунктом при построении пространств $\mathfrak{H}$, $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$,

[1]) Перестановочность гамильтониана с инволюцией влечет за собой так называемый *принцип детального равновесия* (см., например, учебник Ландау и Лифшица [1]).

снабжено инволюцией. Инволюция, заданная в L, естественным образом переносится на пространства $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_F$. (Пусть реализация пространства L, использованная при построении пространства $\mathfrak{H}$, согласована с инволюцией и $\hat{\Phi} \in \mathfrak{H}$ с компонентами $K_n(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $\hat{\Phi}^*$ имеет компоненты $\bar{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$.) Отметим некоторые свойства пространства L, связанные с инволюцией.

1) В L существует билинейная форма

$$f_1 f_2 = (f_1, f_2^*). \tag{0.12}$$

Очевидно, что $(f_1, f_2) = f_1 f_2^*$.

2) В L можно определить комплексно сопряженные и транспонированные операторы: оператор $\bar{A}$, определяемый равенством $(Af)^* = \bar{A} f^*$, назовем *комплексно сопряженным* по отношению к A.

Оператор $A' = \bar{A}^*$ назовем *транспонированным* по отношению к A. Очевидно, что $A^* = \bar{A}'$. (A^* здесь и в дальнейшем означает оператор, эрмитовски сопряженный по отношению к A.) Оператор A назовем соответственно *вещественным* или *симметричным*, если $\bar{A} = A$ или $A = A'$. Вещественный оператор может быть иначе определен как оператор, переводящий вещественные векторы в вещественные.

3) Определим правое действие оператора на вектор с помощью формулы $gA = A'g$.

Легко видеть, что справедливо соотношение

$$(gA) f = g(Af). \tag{0.13}$$

Равенство (0.13) по форме совпадает с законом ассоциативности в матричной алгебре. При этом f играет роль одностолбцовой матрицы и g — однострочечной.

Нам часто придется иметь дело с гильбертовым пространством $\mathscr{E}$, состоящим из пар $f = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2 \in L$, $(f, f) = (a_1, a_1) + (a_2, a_2)$. Как правило, нас будет интересовать случай, когда $a_2 = a_1^*$. В связи с этим будем иногда писать, что $\mathscr{E} = L \oplus L^*$.

Операторы в пространстве $\mathscr{E}$ естественным образом записываются с помощью матриц $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{ik} — операторы в L. Каждый оператор $\mathcal{A}$ в $\mathscr{E}$ порождает билинейную форму, которую удобно записывать в матричном виде:

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 A_{11} b_1 + a_1 A_{12} b_2 + a_2 A_{21} b_1 + a_2 A_{22} b_2. \tag{0.14}$$

Часто будут встречаться регуляризованные определенным образом детерминанты Фредгольма операторов в $\mathscr{E}$. Дадим соответствующее определение.

Рассмотрим монотонную, сильно сходящуюся к единичному оператору последовательность операторов ортогонального проектирования $P(n)$ на комплексные подпространства размерности n

в L. Каждому оператору $P(n)$ поставим в соответствие оператор проектирования $\mathscr{P}(n)$ в $\mathscr{E}$: $\mathscr{P}(n)=\begin{pmatrix} P(n) & 0 \\ 0 & \bar{P}(n)\end{pmatrix}$, где $\bar{P}(n)$ — оператор, комплексно сопряженный с $P(n)$. Обозначим подпространство $\mathscr{P}(n)\mathscr{E}$ через $\mathscr{E}_n$.

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольный ограниченный оператор в $\mathscr{E}$. Обозначим через $\mathscr{A}_n$ ограничение на $\mathscr{E}_{(n)}$ оператора $\mathscr{P}(n)\mathscr{A}\mathscr{P}(n)$.

Регуляризованным детерминантом Фредгольма оператора $\mathscr{A}$ или просто *детерминантом* $\mathscr{A}$ мы будем называть предел $\det\mathscr{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\det\mathscr{A}_n$ в случае, если этот предел существует и не зависит от выбора последовательности $P(n)$. Очевидно, что если $\mathscr{A}-E$ — ядерный оператор [1]), то $\det\mathscr{A}$ совпадает с детерминантом Фредгольма $\mathscr{A}$. Однако $\det\mathscr{A}$ может существовать и тогда, когда $\mathscr{A}-E$ — неядерный оператор, и, следовательно, детерминант Фредгольма $\mathscr{A}$ в обычном смысле не существует. Приведем без доказательства два таких случая, с которыми нам придется встречаться в дальнейшем.

1) $\mathscr{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, где $A_{11}-E$, $A_{22}-E$ — ядерные операторы и A_{12}, A_{21} — операторы Гильберта — Шмидта [2]).

2) $\mathscr{A}=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}$. В этом случае $\det\mathscr{A}=1$.

В заключение этого пункта докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве L с инволюцией. Тогда в L существует такой унитарный оператор U, что UAU^{-1} — вещественный оператор.*

Согласно теореме Хеллингера о спектральных типах (см., например, статью А. И. Плеснера и В. А. Рохлина [1]), пространство L может быть реализовано в виде вектор-функций от вещественного переменного x таким образом, что $f(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots)$, $(f,\ f)=\sum\limits_k\int|f_k(x)|^2\,d\sigma_k$, $Af=xf(x)$. Обозначим через R_A пространство вещественных вектор-функций.

Рассмотрим оператор U, осуществляющий взаимно однозначное изометрическое отображение R_A на пространство вещественных векторов $R\subset L$. Продолжим этот оператор до унитарного оператора во всем пространстве, положив $Ui\xi=iU\xi$, $\xi\in R_A$. Очевидно, что пространство R инвариантно относительно UAU^{-1}, и, следовательно, оператор U обладает требуемым свойством.

---

[1]) Оператор A называется ядерным или оператором с абсолютно сходящимся следом, если, каков бы ни был ортонормированный базис $\{\xi_i\}$, $\sum|(A\xi_i,\ \xi_i)|<\infty$. Если A — ядерный оператор и λ_p — его собственные числа, то $\sum|\lambda_p|<\infty$ и, каков бы ни был ортонормированный базис $\{\xi_i\}$, $\sum(A\xi_i,\ \xi_i)=\sum\lambda_p=\operatorname{Sp}A$.

Для того чтобы оператор $E+A$ имел детерминант Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был ядерным. (Подробнее о ядерных операторах см. книги Гельфанда и Виленкина [1], Данфорда и Шварца [1].)

[2]) A называется оператором Гильберта — Шмидта, если AA^* — ядерный оператор. Если пространство реализовано как пространство функций с суммируемым квадратом, то операторы Гильберта — Шмидта задаются ядрами, суммируемыми с квадратом, как функции двух переменных. При этом, если оператору A отвечает ядро $A(x,\ y)$, то $\operatorname{Sp}AA^*=\int|A(x,\ y)|^2\,dx\,dy$ (см. Данфорд и Шварц [1]).

Глава I

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

В § 1 этой главы вводятся операторы рождения и уничтожения, играющие основную роль в методе вторичного квантования. Эти операторы являются образующими в алгебре всех операторов в пространстве состояний. С их помощью удается записать в виде функционалов векторы пространства состояний и определенный класс операторов в нем (так называемые операторы, представимые в нормальной форме).

Параграфы 2 и 3 посвящены действиям над функционалами: по функционалам, отвечающим двум операторам, находится функционал, отвечающий их произведению, и т. д.

В § 2 эти задачи решаются для бозевского случая, в § 3 — для фермиевского.

§ 1. Операторы рождения и уничтожения. Производящие функционалы

1. Операторные обобщенные функции. В методе вторичного квантования важную роль играют операторные обобщенные функции. Дадим в связи с этим общее определение.

Пусть L — гильбертово пространство с инволюцией $*$. Поставим в соответствие каждому $f \in L$ оператор $B(f)$ в гильбертовом пространстве H.

Функцию $B(f)$ будем называть *операторным линейным функционалом* на L, если выполнены следующие условия:

1) Операторы $B(f)$ определены на общей для всех них плотной области $D \subset H$.

2) $B(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 B(f_1) + \alpha_2 B(f_2)$ при любых комплексных числах α_1, α_2.

Линейный операторный функционал $B^*(f)$ будем называть *сопряженным* к $B(f)$, если для любых $\xi \in D$, $\eta \in D^*$ $(B(f)\xi, \eta) = (\xi, B^*(f^*)\eta)$ ($D^* \subset H$ — плотное множество, на котором определены все операторы $B^*(f)$).

Если пространство L состоит из функций на множестве M, снабженном мерой, то операторные функционалы на L естественно записывать в символической форме $B(f) = \int B(x) f(x)\, dx$ $(x \in M$,

dx — дифференциал меры на M), $B(x)$ будем называть *операторной обобщенной функцией*.

Если операторные функционалы $B(f)$ и $B^*(f)$ сопряжены, то соответствующие им обобщенные функции $B(x)$ и $B^*(x)$ будем называть *сопряженными*.

2. Операторы рождения и уничтожения. Рассмотрим пространства $\mathfrak{H}$, $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$, описанные в п. 1 Введения.

Рассмотрим состоящие из обобщенных функций матрицы

$$\left.\begin{aligned}
\hat{a}(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & \delta(y, \xi) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,\delta(x_1, y_1)\,\delta(y_2, \xi) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\,\delta(x_1, y_1)\,\delta(x_2, y_2)\,\delta(y_3, \xi) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \\
\hat{a}^*(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \delta(x, \xi) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2}\,\delta(x_1, y_1)\,\delta(x_2, \xi) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\,\delta(x_1, y_1)\,\delta(x_2, y_2)\,\delta(x_3, \xi) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},
\end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где $\delta(\xi, \eta)$ есть δ-функция Дирака.

Нетрудно видеть, что если $f(\xi)$—функция с суммируемым квадратом, то

$$\hat{a}(f) = \int \hat{a}(\xi)\, f(\xi)\, d\xi, \quad \hat{a}^*(f) = \int \hat{a}^*(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

являются операторами в $\mathfrak{H}$, область определения которых содержит множество всех финитных векторов.

Таким образом, матрицы $\hat{a}(\xi)$ и $\hat{a}^*(\xi)$ являются операторными обобщенными функциями на гильбертовом пространстве L функций $f(\xi)$ с суммируемым квадратом. В пространстве L существует естественная инволюция, состоящая в переходе к комплексно сопряженной функции.

Нетрудно видеть, что $\hat{a}(\xi)$ и $\hat{a}^*(\xi)$ являются сопряженными друг другу операторными обобщенными функциями[1]).

---

[1]) Обратим внимание на то, что если мера каждой отдельной точки в M равна нулю, то $\hat{a}^*(\xi)$ не является оператором: к какому бы вектору $\hat{\Phi} \neq 0$ ни применять формально $\hat{a}^*(\xi)$, элемента гильбертова пространства получить нельзя. Напротив, $\hat{a}(\xi)$ является оператором, в область определения которого во всяком случае входит вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.

Нетрудно показать, что область определения $\hat{a}(\xi)$ в действительности плотна. Таким образом, в этом случае $\hat{a}(\xi)$—пример оператора, не имеющего сопряженного.

Напротив, в случае, если мера точки $\xi \in M$ конечна, $\hat{a}^*(\xi)$ есть оператор, сопряженный к $\hat{a}(\xi)$. Заметим, что в обоих случаях $\hat{a}^*(\xi)$ можно сопоставить билинейную форму, область определения которой совпадает с областью определения $\hat{a}(\xi)$: $(\hat{a}^*(\xi)\,\Phi,\ \hat{\Psi}) = (\hat{\Phi},\ \hat{a}(\xi)\,\hat{\Psi})$.

Все сказанное справедливо также в отношении определяемых ниже операторных обобщенных функций $\hat{a}_B(\xi)$, $\hat{a}_B^*(\xi)$, $\hat{a}_F(\xi)$, $\hat{a}_F^*(\xi)$.

Обозначим через P_B и P_F операторы проектирования из $\mathfrak{H}$ на подпространства $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ соответственно.

Рассмотрим в пространствах $\mathscr{H}_B$ и $\mathscr{H}_F$ операторы

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_B(f) &= P_B \hat{a}(f) P_B, \quad \hat{a}_B^*(f) = P_B \hat{a}^*(f) P_B, \\ \hat{a}_F(f) &= P_F \hat{a}(f) P_F, \quad \hat{a}_F^*(f) = P_F \hat{a}^*(f) P_F. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Операторы $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_F(f)$ называются *операторами уничтожения* бозе- (соответственно, ферми-) частиц, операторы $\hat{a}_B^*(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$ — *операторами рождения* бозе- (соответственно, ферми-) частиц.

Нетрудно видеть, что все эти операторы определены на финитных векторах и, кроме того, операторные функции $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ так же, как и $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$, сопряжены друг другу.

С помощью формул (1.1), (1.2) легко получить, что между операторами $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$, $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$ выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{a}_B(f_1), \hat{a}_B(f_2)] = [\hat{a}_B^*(f_1), \hat{a}_B^*(f_2)] = 0, \\ &[\hat{a}_B(f_1), \hat{a}_B^*(f_2)] = (f_1, f_2^*), \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\{\hat{a}_F(f_1), \hat{a}_F(f_2)\} = \{\hat{a}_F^*(f_1), \hat{a}_F^*(f_2)\} = 0, \\ &\{\hat{a}_F(f_1), \hat{a}_F^*(f_2)\} = (f_1, f_2^*). \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A, B, а $\{A, B\} = AB + BA$ — антикоммутатор операторов A, B.

Если перейти от операторных функционалов к операторным обобщенным функциям, то соотношения (1.3), (1.4) заменятся, очевидно, на

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{a}_B(\xi), \hat{a}_B(\eta)] = [\hat{a}_B^*(\xi), \hat{a}_B^*(\eta)] = 0, \\ &[\hat{a}_B(\xi), \hat{a}_B^*(\eta)] = \delta(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1.3'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\{\hat{a}_F(\xi), \hat{a}_F(\eta)\} = \{\hat{a}_F^*(\xi), \hat{a}_F^*(\eta)\} = 0, \\ &\{\hat{a}_F(\xi), \hat{a}_F^*(\eta)\} = \delta(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1.4'}$$

где $\delta(\xi, \eta)$ является δ-функцией Дирака.

Соотношения (1.3), (1.4) и (1.3′), (1.4′) называются *соотношениями коммутации*.

Пусть вектор $\hat{\Phi} \in \mathscr{H}_B$ описывает состояние системы, в которой находится точно n частиц:

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n(x_1 \ldots x_n) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $\hat{a}_B^*(f)$ переводит систему из состояния $\hat{\Phi}$ в состояние, в котором имеется $n+1$ частица (рождает частицу), а оператор $\hat{a}_B(f)$ — в состояние, в котором имеется $n-1$ частица (уничтожает частицу). Аналогичным свойством обладают операторы $\hat{a}_F$, $\hat{a}_F^*$. Благодаря этому свойству операторы $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$, $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$ получили свое название.

3. Запись векторов с помощью операторов рождения. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}_B$ вектор $\hat{\Phi}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix}$.

Легко видеть, что он аннулируется всеми операторами $\hat{a}_B(f)$, и, более того, является единственным, с точностью до множителя, решением уравнений $\hat{a}_B(f)\hat{\Phi}=0$ при всех f. Наоборот, применяя к $\hat{\Phi}_0$ операторы $\hat{a}_B^*(f)$, можно получить любой вектор гильбертова пространства:

$$\hat{\Phi}=\begin{pmatrix}K_0\\ K_1(x_1)\\ K_2(x_1,\ x_2)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\hat{a}_B^*(x_1)\ \ldots\ \hat{a}_B^*(x_n)\,d^nx\ \hat{\Phi}_0. \qquad (1.5)$$

Аналогичная формула справедлива и в фермиевском случае. Подчеркнем еще раз, что функции $K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ в бозевском случае являются симметричными, в фермиевском — антисимметричными.

Вектор $\hat{\Phi}_0$ описывает состояние системы, в котором она не имеет частиц. Он называется *вакуумным вектором*.

Операторы рождения, в отличие от операторов уничтожения, вообще говоря, не обращают в нуль векторов. Более точно, справедливы утверждения:

Если вектор $\hat{\Phi}\in\mathscr{H}_B$ удовлетворяет уравнениям $\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi}=0$ при всех $f\in L$, то $\hat{\Phi}=0$.

Если вектор $\hat{\Phi}\in\mathscr{H}_F$, $\hat{\Phi}\neq 0$ удовлетворяет уравнениям $\hat{a}_F^*(f)\hat{\Phi}=0$ при всех $f\in L$, то пространство L конечномерно.

Доказательство обоих утверждений очень просто, и мы на них не останавливаемся.

4. Область определения операторов рождения и уничтожения. Выше мы видели, что в область определения операторов рождения как в фермиевском, так и в бозевском случаях входит множество финитных векторов. В этом пункте мы изучим более подробно область определения операторов рождения и уничтожения. Начнем с фермиевского случая.

Теорема 1. *Операторы $\hat{a}_F(f)$ и $\hat{a}^*_F(f)$ ограничены.*

Доказательство. Пусть $f\in L$, $(f, f)=1$. Рассмотрим операторы

$$\hat{P}=\hat{a}_F(f)\,\hat{a}^*_F(f^*),\qquad \hat{Q}=\hat{a}^*_F(f^*)\,\hat{a}_F(f). \tag{1.6}$$

Операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ определены и симметричны на плотном множестве финитных векторов. Далее, из соотношений коммутации (1.4) следует, что

$$\hat{P}^2=\hat{P},\qquad \hat{Q}^2=\hat{Q},\qquad \hat{P}+\hat{Q}=E. \tag{1.7}$$

Пусть $\hat{f}$ — финитный вектор. Согласно (1.7), $(\hat{P}\hat{f},\hat{P}\hat{f})+(\hat{Q}\hat{f},\hat{Q}\hat{f})=(\hat{f},\ \hat{f})$. Следовательно, $(\hat{P}\hat{f},\ \hat{P}\hat{f})\leqslant(\hat{f},\ \hat{f})$, $(\hat{Q}\hat{f},\ \hat{Q}\hat{f})\leqslant(\hat{f},\hat{f})$. Так как финитные векторы образуют плотное множество, то $\|\hat{P}\|\leqslant 1$, $\|\hat{Q}\|\leqslant 1$. Отсюда очевидно следует, что $\|\hat{a}_F(f)\|\leqslant 1$, $\|\hat{a}^*_F(f^*)\|\leqslant 1$.

В заключение заметим, что из симметричности операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и из равенств (1.7), кроме ограниченности $\hat{P}$ и $\hat{Q}$, вытекает, что $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ являются операторами ортогонального проектирования.

Из доказанной теоремы вытекает очевидное

Следствие. 1) *Операторы $\hat{a}_F(f)$ и $\hat{a}^*_F(f^*)$ сопряжены друг другу.*

2) *Операторы $\hat{\mathcal{P}}(f)=(\hat{a}_F(f)+\hat{a}^*_F(f^*))$ и $\hat{\mathcal{Q}}(f)=\frac{1}{i}(\hat{a}_F(f)-\hat{a}^*_F(f^*))$ являются самосопряженными.*

Перейдем к бозевскому случаю.

Рассмотрим на множестве финитных векторов $\mathcal{H}_B$ операторы $\hat{\mathcal{Q}}(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_B(f)+\hat{a}^*_B(f^*))$ и $\hat{\mathcal{P}}(f)=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_B(f)-\hat{a}^*_B(f^*))$. Очевидно, что эти операторы симметричны[1]). Докажем следующую теорему.

---

[1]) Если $\|f\|=1$, то операторы $\hat{\mathcal{P}}(f)$ и $\hat{\mathcal{Q}}(f)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям, характерным для операторов импульса и координаты обычной квантовой механики в системе единиц, в которой постоянная Планка равна $h=1$:

$$[\hat{\mathcal{P}}(f),\ \hat{\mathcal{Q}}(f)]=\frac{1}{i}.$$

Нетрудно показать, что в случае, когда число степеней свободы конечно (равно N), пространство $\mathcal{H}_B$ может быть реализовано как пространство функций с суммируемым квадратом от N вещественных переменных таким образом, что

$$\hat{a}_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_n+\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\quad \hat{a}^*_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_n-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

($\hat{a}_n=a(f_n)$, $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в L). Вакуумному вектору в такой интерпретации отвечает функция

$$\hat{\Phi}_0=\frac{1}{\pi^{n/4}}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{N}x_n^2},$$

Теорема 2. *Операторы* $\hat{\mathscr{P}}(f)$ *и* $\hat{Q}(f)$ *имеют индекс дефекта* $(0, 0)$.

Доказательство. Пусть z, $\operatorname{Im} z \neq 0$,— комплексное число. Покажем, что если вектор $\hat{\Phi} \in \mathscr{H}_B$ удовлетворяет уравнениям

$$((\hat{\mathscr{P}}(f) - z)\hat{F},\ \hat{\Phi}) = 0, \tag{1.8}$$

где $\hat{F}$ — произвольный финитный вектор, то $\hat{\Phi} = 0$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\|f\| = 1$.

Рассмотрим в пространстве L подпространство L_f, состоящее из элементов, ортогональных f. Порожденное векторами $\hat{a}_B^*(f_1) \ldots \hat{a}_B^*(f_n)\,\Phi_0$, где $f_k \in L_f$, $0 \leqslant n < \infty$, подпространство $\mathscr{H}_B$ обозначим $\mathscr{H}_f$. Элементы $\mathscr{H}_f$ обладают очевидным свойством: если $\hat{F} \in \mathscr{H}_f$, то $\hat{a}_B(f)\hat{F} = 0$.

Рассмотрим в $\mathscr{H}_f$ ортонормированный базис $\{\hat{F}_k\}$, состоящий из финитных векторов. Применяя к $\hat{F}_k$ операторы $\hat{a}_B^*(f)$, мы получим подпространство $\mathscr{H}_k$, состоящее из векторов вида

$$\hat{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_B^*(f))^n \hat{F}_k. \tag{1.9}$$

Из соотношений коммутации легко следует, что

$$(\hat{\Phi},\ \hat{\Phi}) = \sum_n |c_n|^2 < \infty. \tag{1.9'}$$

Очевидно, что все $\mathscr{H}_k$ между собой ортогональны и в сумме дают $\mathscr{H}_B$ [1]).

Пусть вектор $\hat{\Phi}$ удовлетворяет уравнению (1.8). Обозначим через $\hat{\Phi}_k$ проекцию $\hat{\Phi}$ на $\mathscr{H}_k$. Покажем, что $\hat{\Phi}_k = 0$. Пусть $\hat{\Phi}_k = \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_B^*(f))^n \hat{F}_k$. Подставим $\hat{\Phi}_k$ в (1.8) и будем брать в качестве $\hat{F}$ последовательно $\hat{F}_k$, $\hat{a}_B^*(f)\hat{F}_k$, $(\hat{a}_B^*(f))^2 \hat{F}_k$ и т. д. Тогда для определения c_n получим рекуррентные соотношения

$$\sqrt{n+1}\, c_{n+1} + \sqrt{n}\, c_{n-1} = z c_n. \tag{1.10}$$

Коэффициенты соотношений (1.10) образуют симметрическую якобиеву матрицу, сумма обратных величин боковых элементов которой равна $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. Поэтому в силу известной теоремы

имеют место соотношения

$$\hat{Q}_n f = x_n f, \quad \hat{\mathscr{P}}_n f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} f,$$

т. е. $\hat{Q}_n$ и $\hat{\mathscr{P}}_n$ являются операторами координаты и импульса обычной квантовой механики. (См., например, книгу Ландау и Лифшица [1, с. 87] или статью Баргмана [2].)

[1]) Нетрудно проверить, что $\mathscr{H}_B$ является тензорным произведением $\mathscr{H}_f$ на любое из $\mathscr{H}_k$.

Карлемана[1]) соотношение (1.10) совместимо с (1.9′), только если $c_n = 0$.

Итак, $\hat{\Phi}_k = 0$. Так как, очевидно, $\hat{\Phi} = \sum_k \hat{\Phi}_k$, то $\hat{\Phi} = 0$. Теорема доказана.

Множество финитных векторов может быть включено в более широкое множество, на котором определены все $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$.

Рассмотрим оператор

$$\hat{N} = \int \hat{a}_B^*(x)\,\hat{a}_B(x)\,dx. \tag{1.11}$$

Оператор N называется *оператором числа частиц*, так как состояние с фиксированным числом частиц является для него собственным: если

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n(x_1, \ldots, x_n) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

то $\hat{N}\hat{\Phi} = n\hat{\Phi}$ (это свойство оператора $\hat{N}$ легко следует из соотношений коммутации).

Нетрудно видеть, что множество векторов $\hat{\Phi}$, обладающих свойством

$$(\hat{\Phi}, \hat{N}\hat{\Phi}) < \infty, \tag{1.12}$$

входит в область определения операторов $a_B(f)$, $a_B^*(f)$ при всех $f \in L$. Интересно было бы узнать, является ли это множество максимальной совместной областью определения операторов $a_B(f)$, $a_B^*(f)$ при всех f.

5. Операторы, перестановочные с операторами рождения и уничтожения. Найдем общий вид оператора в пространствах $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_F$, перестановочного соответственно со всеми операторами $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ или $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$.

Напомним, что операторы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ перестановочны, если любой вектор $\hat{\Phi}$, входящий в область определения $\hat{B}\hat{C}$, входит также в область определения $\hat{C}\hat{B}$ и наоборот, причем $\hat{B}\hat{C}\hat{\Phi} = \hat{C}\hat{B}\hat{\Phi}$.

Теорема 3. 1) *Каждый замкнутый оператор в пространстве $\mathcal{H}_B$, перестановочный со всеми операторами $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ и определенный на вакуумном векторе, кратен единичному.*

2) *Каждый замкнутый оператор в пространстве $\mathcal{H}_F$, перестановочный со всеми операторами $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$ и определенный на вакуумном векторе, кратен единичному.*

Доказательство обоих утверждений идентично, поэтому ограничимся случаем пространства $\mathcal{H}_B$. Пусть $\hat{A}$ — оператор, перестановочный со всеми операторами $\hat{a}_B(f)$ и $\hat{a}_B^*(f)$. Пусть $\hat{\Phi}_0$ — вакуум-

[1]) См. Карлеман [1]. Доказательство этой теоремы имеется на русском языке в статье Н. И. Ахиезера [1].

ный вектор. Так как $\hat{a}_B(f)\hat{\Phi}_0=0$, то $\hat{a}_B(f)\hat{A}\hat{\Phi}_0=\hat{A}\hat{a}_B(f)\hat{\Phi}_0=0$. Далее, поскольку $\hat{\Phi}_0$ является единственным решением уравнений $\hat{a}_B(f)\hat{\Phi}=0$ при всех f, то $\hat{A}\hat{\Phi}_0=\alpha\hat{\Phi}_0$, где α — число.

Заметим теперь, что вектор $\hat{\Phi}_0$ входит в область определения оператора $\hat{A}\hat{a}_B^*(f)$ (это вытекает из перестановочности $\hat{A}$ и $\hat{a}_B^*(f)$ и из того, что $\hat{\Phi}_0$ входит в область определения $\hat{a}_B(f)\hat{A}$). Следовательно, вектор $\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi}_0$ входит в область определения оператора $\hat{A}$.

Применим оператор $\hat{A}$ к $\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi}_0$:

$$\hat{A}\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi}_0=\hat{a}_B^*(f)\hat{A}\hat{\Phi}_0=\alpha\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi}_0. \tag{1.13}$$

Продолжая это рассуждение дальше, получаем, что, каковы бы ни были функции $f_1, \ldots, f_n$, вектор $\hat{a}_B^*(f_1)\ldots\hat{a}_B^*(f_n)\hat{\Phi}_0$ является собственным для $\hat{A}$ с собственным значением α.

Очевидно, что линейные комбинации таких векторов $\hat{a}_B^*(f_1)\ldots\hat{a}_B^*(f_n)\hat{\Phi}_0$ при всевозможных f_n и n образуют плотное множество в $\mathscr{H}_B$ (см. (1.5)). Таким образом, на всюду плотном множестве оператор $\hat{A}$ кратен единичному. Из замкнутости $\hat{A}$ следует, что он кратен единичному оператору во всем $\mathscr{H}_B$.

Из доказанной теоремы вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. *Каждый ограниченный оператор, перестановочный со всеми $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$, кратен единичному.*

В самом деле, каждый ограниченный оператор определен на вакуумном векторе.

Рассмотрим множество $\tilde{\mathscr{H}}_B$ финитных векторов. Очевидно, что на $\tilde{\mathscr{H}}_B$ определены всевозможные произведения операторов $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ при различных f и суммы этих произведений. Таким образом, операторы $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ порождают на $\tilde{\mathscr{H}}_B$ кольцо операторов. Обозначим это кольцо через $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что последовательность операторов $\hat{C}_n$ *слабо сходится* к $\hat{C}$ на $\tilde{\mathscr{H}}_B$, если для любых $\hat{f}, \hat{g} \in \tilde{\mathscr{H}}_B$ имеет место $(\hat{C}_n\hat{f}, \hat{g}) \to (\hat{C}\hat{f}, \hat{g})$. Множество операторов, являющихся в этом смысле пределами последовательностей операторов из $\mathfrak{A}$, назовем *слабым замыканием* кольца $\mathfrak{A}$.

Следствие 2. *В слабом замыкании кольца $\mathfrak{A}$ содержатся все ограниченные операторы.*

Согласно теореме 2, операторы $\hat{a}_B(f)+\hat{a}_B^*(f^*)$ и $i(\hat{a}_B(f)-\hat{a}_B^*(f^*))$ имеют нулевые индексы дефекта. Поэтому операторы $\hat{b}_1(s, f)=e^{is\left(\hat{a}_B(f)+\hat{a}_B^*(f^*)\right)}$, $\hat{b}_2(s, f)=e^{s\left(\hat{a}_B(f)-\hat{a}_B^*(f^*)\right)}$, где s — вещественное число, являются унитарными и, следовательно, ограничены. Очевидно, что любой ограниченный оператор, перестановочный со всеми $\hat{b}_1(s, f)$ и $\hat{b}_2(s, f)$, перестановочен также с $\hat{a}_B(f)$ и $\hat{a}_B^*(f)$ и поэтому кратен единичному.

Рассмотрим кольцо $\mathfrak{B}$, порожденное операторами $\hat{b}_1(s, f)$ и $\hat{b}_2(s, f)$. Так как любой ограниченный оператор, перестановочный со всеми элементами $\mathfrak{B}$, кратен единичному, в силу известной теоремы функционального анализа [1]) слабое замыкание $\mathfrak{B}$ совпадает с множеством всех операторов в $\mathcal{H}_B$.

Легко видеть, с другой стороны, что кольцо $\mathfrak{B}$ лежит в слабом замыкании кольца $\mathfrak{A}$. Следствие доказано.

Пусть $\mathcal{H}_1$ — подпространство $\mathcal{H}_B$. Будем говорить, что $\mathcal{H}_1$ *инвариантно относительно операторов* $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$, если 1) из принадлежности $\hat{\Phi} \in D \cap \mathcal{H}_1$, где D — совместная область определения $\hat{a}_B(f)$ и $\hat{a}_B^*(f)$, вытекает, что $\hat{a}_B(f)\hat{\Phi} \in \mathcal{H}_1$, $\hat{a}_B^*(f)\hat{\Phi} \in \mathcal{H}_1$, и 2) если симметрические операторы $\hat{a}_B(f) + \hat{a}_B^*(f^*)$ и $i(\hat{a}_B(f) - \hat{a}_B^*(f^*))$ с областью определения $D \cap \mathcal{H}_1$ имеют как операторы в $\mathcal{H}_1$ нулевые индексы дефекта.

Следствие 3. *Семейство операторов $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ неприводимо в том смысле, что не существует собственного подпространства $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_B$, инвариантного относительно всех $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$.*

В самом деле, подпространство $\mathcal{H}_1$, инвариантное относительно всех $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$, инвариантно очевидно относительно кольца $\mathfrak{B}$, построенного при доказательстве следствия 2. $\mathfrak{B}$ есть кольцо ограниченных операторов, в которое вместе с каждым оператором входит сопряженный. Поэтому ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_1$ также инвариантно относительно $\mathfrak{B}$. Следовательно, оператор $\hat{P}$ ортогонального проектирования на $\mathcal{H}_1$ перестановочен со всеми элементами $\mathfrak{B}$, а потому $\hat{P} = \lambda E$, откуда либо $\hat{P} = 0$, либо $\hat{P} = E$.

Все три следствия остаются справедливы в фермиевском случае.

При этом, так как операторы $\hat{a}_F(f)$ и $\hat{a}_F^*(f)$ ограничены, под кольцом $\mathfrak{A}$, участвующим в формулировке следствия, можно понимать просто кольцо ограниченных операторов, порожденное $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$, а слабое замыкание понимать в обычном смысле.

Надо также иметь в виду, что если пространство $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_F$ инвариантно относительно $\hat{a}_F(f)$, $\hat{a}_F^*(f)$, то сужения операторов $\hat{a}_F(f) + \hat{a}_F^*(f^*)$ и $i(\hat{a}_F(f) - \hat{a}_F^*(f^*))$ на $\mathcal{H}_1$ являются самосопряженными операторами в $\mathcal{H}_1$. Поэтому требование 2) в определении инвариантного подпространства выполняется автоматически.

6. Замечание о соотношениях коммутации. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 4. *Пусть L — гильбертово пространство с инволюцией, $\alpha(f)$, $\alpha^*(f)$ — сопряженные друг другу операторные функционалы на L, являющиеся операторами в гильбертовом пространстве H. Предположим, что операторы $\alpha(f)$, $\alpha^*(f)$ удовлетворяют условиям:*

---

[1]) См. книгу Наймарка [1].

1) *В H не существует собственного подпространства, инвариантного*[1]) *относительно всех* $\alpha(f)$, $\alpha^*(f)$.

2) *В H существует вектор $\mathcal{F}_0$ такой, что $\alpha(f)\mathcal{F}_0=0$ при всех f.*

3_B) $[\alpha(f_1),\ \alpha(f_2)]=[\alpha^*(f_1),\ \alpha^*(f_2)]=0,\ [\alpha(f_1),\ \alpha^*(f_2)]=(f_1,\ f_2^*)$.

Тогда существует взаимно однозначное изометрическое отображение U пространства H на $\mathcal{H}_B$ такое, что

$$\hat{a}_B(f)=U\alpha(f)U^{-1},\quad \hat{a}_B^*(f)=U\alpha^*(f)U^{-1}.$$

Если вместо условия 3_B) выполнено условие

3_F) $\{\alpha(f_1),\ \alpha(f_2)\}=\{\alpha^*(f_1),\ \alpha^*(f_2)\}=0,\ \{\alpha(f_1),\ \alpha^*(f_2)\}=(f_1,\ f_2^*)$,

то существует взаимно однозначное изометрическое отображение U пространства H на $\mathcal{H}_F$ такое, что

$$\hat{a}_F(f)=U\alpha(f)U^{-1},\quad \hat{a}_F^*(f)=U\alpha^*(f)U^{-1}.$$

Оба утверждения доказываются совершенно одинаково, поэтому мы ограничимся первым.

Рассмотрим согласованную с инволюцией реализацию пространства L с помощью функций с суммируемым квадратом на множестве M. Пусть $\mathcal{F}_0\in H$ — вектор, удовлетворяющий уравнениям $\alpha(f)\mathcal{F}_0=0$ при всех f.

Рассмотрим подпространство H_1 пространства H, состоящее из векторов вида

$$\mathcal{F}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\alpha^*(x_1)\ldots\alpha^*(x_n)\,d^nx\,\mathcal{F}_0. \qquad (1.14)$$

Из условия 3_B) следует, что

$$(\mathcal{F},\ \mathcal{F})=\sum_n\int|K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)|^2\,d^nx. \qquad (1.15)$$

Поставим в соответствие каждому вектору (1.14) вектор (1.5) с теми же функциями $K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Полученное отображение пространства H_1 на $\mathcal{H}_B$ обозначим через U. Легко видеть, что U является взаимно однозначным изометрическим отображением, удовлетворяющим условию $U\alpha^*(f)U^{-1}=\hat{a}_B^*(f)$, $U\alpha(f)U^{-1}=\hat{a}_B(f)$.

Покажем, что пространство H_1 совпадает с H. Пусть D — совместная область определения операторов $\alpha(f)$, $\alpha^*(f)$ при всех $f\in L$. Очевидно, что в $D\cap H_1$ содержатся все векторы вида (1.14), у которых сумма в правой части (1.14) конечна. Из перестановочных соотношений 3_B) следует, что если $F\in D\cap H_1$, то $\alpha(f)F\in H_1$, $\alpha^*(f)F\in H_1$. При отображении U множество D пере-

---

[1]) Определение инвариантного пространства такое же, как для $\hat{a}_B(f)$, $\hat{a}_B^*(f)$ (см. с. 24). Очевидно, что если $\alpha(f)$, $\alpha^*(f)$ — ограниченные операторы, то требование 2) этого определения следует из 1).

ходит в множество всех финитных векторов. Согласно теореме 2, операторы $\hat{a}_B(f)+\hat{a}_B^*(f^*)$ и $i(\hat{a}_B(f)-\hat{a}_B^*(f^*))$, определенные на множестве финитных векторов, симметричны и имеют нулевые индексы дефекта. Следовательно, операторы $\alpha(f)+\alpha^*(f^*)$ и $i(\alpha(f)-\alpha^*(f^*))$, определенные на $D\cap H_1$, обладают тем же свойством. Следовательно, H_1 — инвариантное подпространство, и так как $H_1\neq 0$, то $H_1=H$. Доказанную теорему иногда коротко формулируют так: *неприводимые представления соотношений коммутации с вакуумным вектором эквивалентны.* Задачу об описании неприводимых соотношений коммутации без вакуумного вектора можно считать решенной лишь отчасти [1]). Нетрудно показать, что если число степеней свободы конечно (т. е. L — пространство конечной размерности), то вакуумный вектор всегда есть. Таким образом, неприводимые представления соотношений коммутации в случае конечного (фиксированного) числа степеней свободы эквивалентны [2]).

В случае бесконечного числа степеней свободы представление соотношений коммутации, обладающее вакуумным вектором, иногда называют *фоковским представлением.*

7. Нормальная форма оператора. Рассмотрим функцию

$$K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)=\sum f_{i_1}(x_1)\ldots f_{i_m}(x_m)\, g_{j_1}(y_1)\ldots g_{j_n}(y_n),$$

где $f_i(x)$, $g_j(y)$ — функции с суммируемым квадратом и сумма конечная. Поставим в соответствие функции K оператор в пространстве H_B:

$$\hat{A}=\int K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\times$$
$$\times\hat{a}_B^*(x_1)\ldots\hat{a}_B^*(x_m)\,\hat{a}_B(y_1)\ldots\hat{a}_B(y_n)\,d^mx\,d^ny=$$
$$=\sum\hat{a}_B^*(f_{i_1})\ldots\hat{a}_B^*(f_{i_m})\,\hat{a}_B(g_{j_1})\ldots\hat{a}_B(g_{j_n}).$$

Пусть теперь $K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)$ — обобщенная функция: для некоторого линейного множества $\tilde{L}$ функций с суммируемым квадратом от $m+n$ переменных определен функционал

$$(K, \varphi^*)=\int K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\,d^mx\,d^ny.$$

Пусть $K_N(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)$ — последовательность функций, представимых в виде конечных линейных комбинаций произведений функций с суммируемым квадратом одного переменного. Предположим, что последовательность K_N аппроксимирует обоб-

---

[1]) См. по этому поводу работы Гординга и Уайтмана [1, 2], Сигала [1], Гельфанда и Виленкина [1].

[2]) Эквивалентность представлений соотношений коммутации для случая конечного числа степеней свободы в бозевском случае доказана впервые в работе Дж. фон Неймана [1] и в фермиевском случае в работе Иордана и Вигнера [1].

щенную функцию K в том смысле, что для любой функции $\varphi \in \tilde{L}$ $\lim_{N\to\infty}(K_N, \varphi^*) = (K, \varphi^*)$.

Поставим каждой функции K_N в соответствие оператор $\hat{A}_N$ описанным выше способом. Если последовательность операторов $\hat{A}_N$ при $N \to \infty$ сильно сходится на плотном множестве D, состоящем из финитных векторов [1], к оператору $\hat{A}$ и этот оператор не зависит от выбора последовательности K_N, аппроксимирующей K, то поставим его в соответствие функции K и условимся записывать в виде

$$\hat{A} = \int K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times \hat{a}_B^*(x_1) \ldots \hat{a}_B^*(x_m)\, \hat{a}_B(y_1) \ldots \hat{a}_B(y_n)\, d^m x d^n y. \qquad (1.16_B)$$

Аналогично определим в фермиевском случае оператор вида

$$\hat{A} = \int K(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots y_n) \times \\ \times \hat{a}_F^*(x_1) \ldots \hat{a}_F^*(x_m)\, \hat{a}_F(y_1) \ldots \hat{a}_F(y_n)\, d^m x\, d^n y. \qquad (1.16_F)$$

Отметим, что, не меняя оператор $\hat{A}$, можно в бозевском случае заменить функцию K на симметричную отдельно по $x_1, \ldots, x_m$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_n$, в фермиевском — на антисимметричную. При условии, что функция K обладает указанными свойствами симметрии, она как в бозевском, так и в фермиевском случаях однозначно определяется оператором $\hat{A}$.

Может случиться, что, хотя и нельзя обобщенной функции $K(x_1, \ldots \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)$ сопоставить оператор описанным выше способом, существует такое всюду плотное множество D, состоящее из финитных векторов, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} (\hat{A}_N \hat{\Phi}, \hat{\Psi}), \qquad \hat{\Phi} \in D,\ \hat{\Psi} \in D.$$

Как и выше, $\hat{A}_N$ — операторы, порожденные функциями K_N, аппроксимирующими K; предел предполагается не зависящим от выбора аппроксимирующей последовательности.

В этом случае будем говорить, что функция K задает билинейную форму. Билинейную форму, порожденную K, будем по-прежнему записывать в виде (1.16_B) или (1.16_F). К билинейным формам относятся все те замечания относительно симметрии функции K, которые были сделаны по поводу операторов.

Нетрудно проверить, что если множество $\tilde{L}$, на котором функция K определяет функционал, содержит плотное подмножество, состоящее из конечных линейных комбинаций функций вида $f_1(x_1, \ldots, x_m) f_2(y_1, \ldots, y_n)$, то функции K отвечает билинейная форма. Вопрос о том, соответствует ли ей также оператор с непустой областью определения, вообще говоря, не так прост [2].

---

[1] Множество D не обязано состоять из *всех* финитных векторов.

[2] Приведем простейший пример обобщенной функции, которой отвечает билинейная форма и не отвечает оператор с непустой областью определения. Пусть x пробегает вещественную ось, dx — лебегова мера, $K(x \mid \cdot) = \delta(x - \xi)$. Соответствующая билинейная форма $\int K(x \mid \cdot)\, \hat{a}_B^*(x)\, dx = \hat{a}_B^*(\xi)$ или $\int K(x \mid \cdot)\, \hat{a}_F^*(x)\, dx = \hat{a}_F^*(\xi)$ не является оператором. (См. примечание на с. 17.)

Перейдем к определению нормальной формы оператора. Пусть $K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n)$ — последовательность обобщенных функций, которым соответствуют операторы.

Оператор $\hat{A}$ в пространстве $\mathscr{H}_B$ или $\mathscr{H}_F$ назовем *приводимым к нормальной форме*, если он может быть представлен в виде ряда, слабо сходящегося на плотном множестве D, состоящем из финитных векторов [1]):

$$\hat{A} = \sum \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times \hat{a}^*(x_1) \ldots \hat{a}^*(x_m) \hat{a}(y_1) \ldots \hat{a}(y_n) d^m x \, d^n y, \quad (1.16)$$

где $\hat{a}(x) = \hat{a}_B(x)$, $\hat{a}^*(x) = \hat{a}_B^*(x)$, если речь идет о пространстве $\mathscr{H}_B$, и $\hat{a}(x) = \hat{a}_F(x)$, $\hat{a}^*(x) = \hat{a}_F^*(x)$, если речь идет о пространстве $\mathscr{H}_F$. Функции K_{mn}, вообще говоря, обобщенные, в первом случае предполагаются симметричными отдельно по $x_1, \ldots, x_m$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_n$, во втором случае — антисимметричными.

Ряд (1.16) называется *нормальной формой* оператора $\hat{A}$.

Для нормальной формы характерно, что в каждом слагаемом операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения [2]). В п. 10 будет показано, что в нормальной форме представимы ограниченные операторы. Кроме них в нормальной форме представимы также и некоторые неограниченные операторы.

Часто приходится иметь дело не с операторами, а с билинейными формами, определенными на том или ином плотном множестве в пространстве состояний. По аналогии с оператором, приводимым к нормальной форме, дадим определение билинейной формы, приводимой к нормальному виду. Билинейная форма $\hat{A}$ *представима в нормальном виде*, если она может быть записана в виде ряда (1.16) из билинейных форм, сходящегося на плотном множестве, состоящем из финитных векторов [1]). (Последовательность билинейных форм $\hat{A}_N$ сходится к билинейной форме $\hat{A}$ на множестве D, если для любых $\hat{\Phi}, \hat{\Psi} \in D$ $\lim\limits_{N\to\infty} (\hat{A}_N\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) = (\hat{A}\hat{\Phi}, \hat{\Psi})$.)

8. Производящие функционалы для векторов и операторов. Бозевский случай. Пусть L — гильбертово пространство функций на множестве M. Поставим в соответствие каждому вектору, записанному в виде (1.5), и каждому оператору, записанному в виде (1.16), функционалы на L:

$$\Phi(a^*) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int K_n(x_1, \ldots, x_n) a^*(x_1) \ldots a^*(x_n) d^n x, \quad (1.17)$$

$$A(a^*, a) = \sum \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_1) \ldots a(y_n) d^m x \, d^n y, \quad (1.18)$$

---

[1]) Множество D не обязано состоять из *всех* финитных векторов.

[2]) В физической литературе оператором, приводимым к нормальной форме, называется всякий оператор, представимый в виде (1.16) без какого бы то ни было указания на характер сходимости ряда (1.16) и на область определения отдельных слагаемых.

Данное выше уточнение этого понятия представляется естественным, хотя, может быть, и не является единственно возможным.

где K_n, K_{mn} — те же функции, что в (1.5), (1.16), $a(x)$, $a^*(x) \in L$.

Функции $a(x)$, $a^*(x)$, если не оговорено противное, будут считаться комплексно сопряженными.

Пусть $\| A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \|$ — матрица, соответствующая оператору $\hat{A}$. Поставим в соответствие этой матрице функционал на L:

$$\tilde{A}(a^*, a) = \sum \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_n) \ldots a(y_1) d^m x d^n y. \quad (1.19)$$

В п. 11 будет доказана сходимость ряда (1.17) и сходимость рядов (1.18), (1.19) в предположении, что оператор $\hat{A}$ ограничен.

Заметим, что функционалы (1.17)—(1.19) имеют форму степенных рядов. Отдельные слагаемые в (1.17)—(1.19) будем называть *однородными функционалами степени n* (в случае (1.17)) или степени m по a^* и n по a (в случае (1.18), (1.19)).

Если ряды (1.17)—(1.19) являются в действительности конечными суммами, то соответствующие функционалы будем называть *полиномиальными*. Очевидно, что $\Phi(a^*)$ является полиномиальным функционалом тогда и только тогда, когда $\hat{\Phi}$ — финитный вектор.

Найдем вариационные производные функционала (1.18) по $a(x)$ и $a^*(x)$:

$$\frac{\delta}{\delta a(x)} A(a^*, a) = \sum n \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_{n-1}, x) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_1) \ldots a(y_{n-1}) d^m x d^{n-1} y,$$

$$\frac{\delta}{\delta a^*(x)} A(a^*, a) = \sum m \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_{m-1}, x | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_{m-1}) a(y_1) \ldots a(y_n) d^{m-1} x d^n y.$$

Аналогично определяются вариационные производные функционалов $\tilde{A}(a^*, a)$ и $\Phi(a^*)$.

Легко видеть, что если вектору $\hat{\Phi}$ отвечает функционал (1.17), оператору $\hat{A}$ — функционалы (1.18), (1.19), то векторам $\hat{a}(x)\hat{\Phi}$, $\hat{a}^*(x)\hat{\Phi}$ и операторам $\hat{a}(x)\hat{A}$, $\hat{a}^*(x)\hat{A}$, $\hat{A}\hat{a}(x)$, $\hat{A}\hat{a}^*(x)$ отвечают функционалы [1])

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(x)\hat{\Phi} &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta a^*(x)} \Phi(a^*), \\ \hat{a}^*(x)\hat{\Phi} &\leftrightarrow a^*(x)\Phi(a^*), \end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

---

[1]) Строго говоря, следует рассматривать векторы $\hat{a}(f)\hat{\Phi} = \int \hat{a}(x) f(x) dx \hat{\Phi}$ и т. д., соответствующие изменения формул (1.20)—(1.22) очевидны.

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}(x)\hat{A} &\leftrightarrow \left(a(x)+\frac{\delta}{\delta a^*(x)}\right)A(a^*, a),\\ \hat{a}^*(x)\hat{A} &\leftrightarrow a^*(x)A(a^*, a),\\ \hat{A}\hat{a}(x) &\leftrightarrow a(x)A(a^*, a),\\ \hat{A}\hat{a}^*(x) &\leftrightarrow \left(a^*(x)+\frac{\delta}{\delta a(x)}\right)A(a^*, a),\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}(x)\hat{A} &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta a^*(x)}\tilde{A}(a^*, a),\\ \hat{a}^*(x)\hat{A} &\leftrightarrow a^*(x)\tilde{A}(a^*, a),\\ \hat{A}\hat{a}(x) &\leftrightarrow a(x)\tilde{A}(a^*, a),\\ \hat{A}\hat{a}^*(x) &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta a(x)}\tilde{A}(a^*, a).\end{aligned}\right\}\tag{1.22}$$

Обозначения в этих формулах не требуют пояснений.

9. Производящие функционалы для векторов и операторов. Фермиевский случай. Рассмотрим антикоммутирующие символы $a(x)$, $a^*(x)$:

$$\{a(x),\ a(x')\} = \{a(x),\ a^*(x')\} = \{a^*(x),\ a^*(x')\} = 0.$$

В дальнейшем эти символы мы будем часто называть функциями с антикоммутирующими значениями. Поставим в соответствие каждому вектору $\tilde{\Phi}$, записанному в виде (1.5), оператору $\hat{A}$, записанному в нормальной форме, и матрице $\| A_{mn}(x_1, \ldots \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n)\|$ оператора $\hat{A}$ производящие функционалы

$$\Phi(a^*) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int K_n(x_1, \ldots, x_n)\, a^*(x_1)\ldots a^*(x_n)\, d^n x, \tag{1.23}$$

$$A(a^*, a) = \sum \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1)\ldots a^*(x_m)\, a(y_1)\ldots a(y_n)\, d^m x\, d^n y, \tag{1.24}$$

$$\tilde{A}(a^*, a) = \sum \frac{1}{\sqrt{m!\,n!}} \int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1)\ldots a^*(x_m)\, a(y_n)\ldots a(y_1)\, d^m x\, d^n y, \tag{1.25}$$

где функции $K_n(x_1, \ldots, x_n)$, $K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n)$ те же, что и в (1.5) и (1.16).

Ряды (1.23)—(1.25) будем понимать как формальные степенные ряды. В § 3 будет показано, что функционалы Φ, A, $\tilde{A}$ являются элементами грассмановой алгебры с бесконечным числом образующих [1]).

[1]) В случае, если число степеней свободы системы бесконечно. В случае, если число степеней свободы равно $n < \infty$, x пробегает n значений и символы $a(x)$, $a^*(x)$ являются образующими конечномерной алгебры Грассмана.

Определим левую производную функционала $A(a^*, a)$ по $a^*(x)$, и правую по $a(x)$. Обозначим эти производные соответственно $\frac{\delta}{\delta a^*(x)} A(a^*, a)$ и $A(a^*, a) \frac{\delta}{\delta a(x)}$:

$$\frac{\delta}{\delta a^*(x)} A(a^*, a) = \sum m \int K_{mn}(x, x_1, \ldots, x_{m-1} | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_{m-1}) a(y_1) \ldots a(y_n) \, d^{m-1}x \, d^n y,$$

$$A(a^*, a) \frac{\delta}{\delta a(x)} = \sum n \int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_{n-1}, x) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_1) \ldots a(y_{n-1}) \, d^m x \, d^{n-1} y.$$

Аналогично определяются производные функционалов[1]) $\tilde{A}$ и Φ.

Пусть $\Phi(a^*)$, $A(a^*, a)$, $\tilde{A}(a^*, a)$ — функционалы, отвечающие вектору $\hat{\Phi}$ и оператору $\hat{A}$. Найдем функционалы, отвечающие векторам $\hat{a}(x)\hat{\Phi}$, $\hat{a}^*(x)\hat{\Phi}$ и операторам $\hat{a}(x)\hat{A}$, $\hat{a}^*(x)\hat{A}$, $\hat{A}\hat{a}(x)$, $\hat{A}\hat{a}^*(x)$. Нетрудно проверить, что эти функционалы равны[2])

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(x)\hat{\Phi} &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta a^*(x)} \Phi(a^*), \\ \hat{a}^*(x)\hat{\Phi} &\leftrightarrow a^*(x)\Phi(a^*), \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(x)\hat{A} &\leftrightarrow \left(a(x) + \frac{\delta}{\delta a^*(x)}\right) A(a^*, a), \\ \hat{a}^*(x)\hat{A} &\leftrightarrow a^*(x) A(a^*, a), \\ \hat{A}\hat{a}(x) &\leftrightarrow A(a^*, a) a(x), \\ \hat{A}\hat{a}^*(x) &\leftrightarrow A(a^*, a)\left(a^*(x) + \frac{\delta}{\delta a(x)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(x)\hat{A} &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta a^*(x)} \tilde{A}(a^*, a), \\ \hat{a}^*(x)\hat{A} &\leftrightarrow a^*(x)\tilde{A}(a^*, a), \\ \hat{A}\hat{a}(x) &\leftrightarrow \tilde{A}(a^*, a) a(x), \\ \hat{A}\hat{a}^*(x) &\leftrightarrow \tilde{A}(a^*, a)\frac{\delta}{\delta a(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

10. Представление ограниченных операторов в нормальной форме[3]).

Теорема 5. *Ограниченный оператор в каждом из пространств $\mathcal{H}_B$ или $\mathcal{H}_F$ представим в нормальной форме.*

Доказательство в обоих случаях одинаковое, поэтому ограничимся случаем пространства $\mathcal{H}_F$.

---

[1]) В § 3 будет дано общее определение производных элемента грассмановой алгебры.

[2]) См. примечание к с. 29.

[3]) Часть результатов (теоремы 5, 6 и 8) кратко изложены в работе автора [6]. Теорема 7 сформулирована в работе Баргмана [1].

Обозначим через $\hat{P}_m$ оператор проектирования на $\mathscr{H}_F^m$ и через $\hat{A}_{mn}$ оператор $\hat{P}_m \hat{A} \hat{P}_n$. Очевидно, что оператор $\hat{A}$ является суммой сильно сходящегося ряда:

$$\hat{A} = \sum \hat{A}_{mn}. \tag{1.29}$$

Заметим, что матричной записи оператора $\hat{P}_0$ проектирования на вакуум отвечает функционал

$$\tilde{P}_0 \equiv 1, \tag{1.30}$$

матричной записи оператора $\hat{A}_{mn}$—функционал

$$\tilde{A}_{mn}(a^*, a) = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) a(y_n) \ldots a(y_1) \, d^m x \, d^n y, \tag{1.31}$$

где $A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)$—элемент матрицы $\|A_{mn}\|$, отвечающий оператору $\hat{A}$.

Из формул (1.30), (1.31), используя вторую и третью формулы (1.28), находим

$$\hat{A}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times \hat{a}^*(x_1) \ldots \hat{a}^*(x_m) \hat{P}_0 \hat{a}(y_n) \ldots \hat{a}(y_1) \, d^m x \, d^n y. \tag{1.32}$$

Найдем нормальную форму оператора $\hat{P}_0$. Заметим с этой целью, что $\hat{P}_0$ является единственным оператором, удовлетворяющим условиям

$$\hat{a}(x) \hat{P}_0 = 0, \quad \hat{P}_0 \hat{a}^*(x) = 0, \quad \hat{P}_0 \hat{\Phi}_0 = \hat{\Phi}_0, \tag{1.33}$$

где $\hat{\Phi}_0$—вакуумный вектор.

Согласно (1.27), первые два соотношения (1.33) эквивалентны следующим уравнениям для функционала $P_0(a^*, a)$, если такой функционал существует:

$$\left(a(x) + \frac{\delta}{\delta a^*(x)} \right) P_0 = 0, \quad P_0 \left(a^*(x) + \frac{\delta}{\delta a(x)} \right) = 0. \tag{1.34}$$

Легко проверить, что решением этих уравнений является функционал

$$P_0(a^*, a) = c e^{-\int a^*(x) a(x) \, dx}.$$

$P_0(a^*, a)$ является функционалом, отвечающим оператору. В самом деле, для любого финитного вектора $\hat{\Phi}$ ряд [1])

$$c \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \int \hat{a}^*(x_1) \ldots \hat{a}^*(x_n) \hat{a}(x_n) \ldots \hat{a}(x_1) \, d^n x \, \hat{\Phi} \tag{1.35}$$

[1]) Обратим внимание на порядок сомножителей в подынтегральном выражении (1.35). Он вызван тем, что функции $a(x)$, $a^*(x)$ антикоммутируют между собой.

содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых, каждое из которых, как легко видеть, принадлежит $\mathscr{H}_F$. Следовательно, ряд (1.35) сходится по норме и функционал $P_0(a^*, a)$ определяет нормальную форму некоторого оператора $\hat{Q}$.

Из (1.34), (1.27) очевидно следует, что оператор $\hat{Q}$ удовлетворяет первым двум уравнениям (1.33). Кроме того, подставляя в (1.35) $\hat{\Phi}=\hat{\Phi}_0$, находим, что $\hat{Q}\hat{\Phi}_0=c\hat{\Phi}_0$. Поэтому при $c=1$ оператор $\hat{Q}$ удовлетворяет всем условиям (1.33), следовательно, $\hat{Q}=\hat{P}_0$. Таким образом, мы получаем, что оператор $\hat{P}_0$ приводится к нормальной форме и что его нормальной форме отвечает функционал

$$P_0(a^*, a)=e^{-\int a^*(x)\,a(x)\,dx}. \tag{1.36}$$

Подставим

$$\hat{P}_0=\sum_n \frac{(-1)^n}{n!}\int \hat{a}^*(x_1)\ldots\hat{a}^*(x_n)\,\hat{a}(x_n)\ldots\hat{a}(x_1)\,d^nx$$

в (1.32) и применим полученный ряд к финитному вектору $\hat{\Phi}$. Заметим, что в результате получится конечная сумма элементов пространства $\mathscr{H}_F$. Таким образом, оператор $\hat{A}_{mn}$ также представим в нормальной форме. Очевидно, что его нормальной форме отвечает функционал[1])

$$A_{mn}(a^*, a)=\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m\,|\,y_1, \ldots, y_n)\times$$
$$\times a^*(x_1)\ldots a^*(x_m)\,a(y_n)\ldots a(y_1)\,d^mx\,d^ny\;e^{-\int a^*(x)\,a(x)\,dx}. \tag{1.37}$$

Подставим нормальную форму оператора $\hat{A}_{mn}$ в (1.29) и применим полученный таким образом повторный ряд операторов к финитному вектору $\hat{\Phi}$.

Внутренние ряды полученного повторного ряда векторов являются в действительности конечными суммами, причем число членов в них ограничено константой, не зависящей от m, n. Поэтому сходится по норме тройной ряд векторов. Следовательно, в нем можно как угодно переставлять и группировать слагаемые — от этого сходимость по норме не нарушится и его сумма не изменится. Производя эти операции, можно представить вектор $\hat{A}\hat{\Phi}$ в виде

$$\hat{A}\hat{\Phi}=\sum\int K_{mn}(x_1, \ldots, x_m\,|\,y_1, \ldots, y_n)\times$$
$$\times\hat{a}^*(x_1)\ldots\hat{a}^*(x_m)\,\hat{a}(y_1)\ldots\hat{a}(y_n)\,d^mx\,d^ny\,\hat{\Phi},$$

где K_{mn} есть конечная линейная комбинация произведений A_{mn} и δ-функций. Теорема доказана.

[1]) Функционал $e^{-\int a^*(x)\,a(x)\,dx}$ коммутирует с любым функционалом, потому что его разложение по степеням $a(x)$, $a^*(x)$ содержит только элементы четной степени по совокупности a, a^*.

Заметим, что из формул (1.29) и (1.37) вытекает связь между функционалами $A(a^*, a)$ и $\tilde{A}(a^*, a)$. Сформулируем получающийся результат в виде самостоятельной теоремы.

Теорема 6. *Функционалы $A(a^*, a)$ и $\tilde{A}(a^*, a)$, отвечающие нормальной и матричной формам оператора $\hat{A}$, связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} A(a^*, a) &= \tilde{A}(a^*, a)\, e^{-\int a^*(x)\, a(x)\, dx}, \\ \tilde{A}(a^*, a) &= A(a^*, a)\, e^{\int a^*(x)\, a(x)\, dx}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Формулы (1.38) справедливы в равной мере как в фермиевском, так и в бозевском случаях.

11. Сходимость рядов (1.17) — (1.19) в бозевском случае. Рассмотрим векторы $\hat{P}_f$ и $\hat{Q}_f$, производящие функционалы которых имеют вид

$$P_f(a^*) = e^{\int a^*(x) f(x)\, dx - \frac{1}{2}\int f(x) f^*(x)\, dx}, \tag{1.39}$$

$$Q_f(a^*) = e^{\int a^*(x) f(x)\, dx}. \tag{1.39'}$$

Очевидно, что $(\hat{P}_f, \hat{P}_f) = 1$, $(\hat{Q}_f, \hat{Q}_f) = e^{\int f^*(x) f(x)\, dx}$. В случае, если система имеет одну степень свободы и находится в состоянии $\hat{P}_f$ или $\hat{Q}_f$, то вероятность наличия в системе n частиц равна, очевидно, $\frac{|f|^{2n}}{n!} e^{-|f|^2}$ и имеет, таким образом, пуассоновское распределение. В связи с этим векторы $\hat{P}_f$ и $\hat{Q}_f$ будем называть *нормированным* и *ненормированным пуассоновскими векторами с индексом* f.

Заметим теперь, что если $\hat{\Phi}$ — произвольный вектор, то отвечающий ему функционал равен

$$\Phi(a^*) = (\hat{\Phi}, \hat{Q}_a). \tag{1.40}$$

Из (1.40) вытекает сходимость ряда (1.17).

Пусть далее вектор $\hat{\Phi}$ имеет компоненты $K_n(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через $|\hat{\Phi}|$ вектор с компонентами $|K_n(x_1, \ldots, x_n)|$. Очевидно, что $(\hat{\Phi}, \hat{\Phi}) = (|\hat{\Phi}|, |\hat{\Phi}|)$.

Заметим, что ряд из абсолютных величин ряда (1.17) равен $(|\hat{\Phi}|, Q_{|a|})$ и, следовательно, также сходится. Оценим остаток ряда (1.17). Рассмотрим с этой целью оператор $\hat{P}_N$ проектирования на подпространство $\mathcal{H}_N = \sum_{n>N} \mathcal{H}_B^n$. Очевидно, что остаток $R_N(a^*)$ ряда (1.17) допускает оценку

$$|R_N(a^*)| \leqslant (|\hat{\Phi}|, \quad \hat{P}_N \hat{Q}_{|a|}) \leqslant \|\hat{\Phi}\| \|\hat{P}_N \hat{Q}_{|a|}\|.$$

Из (1.39′) непосредственно находим, что если $\int |a(x)|^2 dx \leqslant R^2$, то

$$\| \hat{P}_N \hat{Q}_{|a|} \| \leqslant c \frac{R^N}{\sqrt{N!}} \tag{1.41}$$

при условии, что $N+1 > R^2$.

Таким образом, мы приходим окончательно к следующей теореме:

Теорема 7. *Функционалы* $\Phi(a^*)$, *отвечающие векторам, определены на гильбертовом пространстве* L *функций на* M *с суммируемым квадратом. Ряд* (1.17) *сходится абсолютно и равномерно для всех* $a^* \in L$, *лежащих в шаре фиксированного радиуса* R.

Перейдем к функционалам (1.18), (1.19). Исследуем сходимость несколько более общих рядов $\tilde{A}(a_1, a_2)$, $A(a_1, a_2)$, где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — различные функции. Заметим прежде всего, что функционал $\tilde{A}(a_1, a_2)$ может быть представлен в виде

$$\tilde{A}(a_1, a_2) = \left(\hat{A}\hat{Q}_{a_2}, \hat{Q}_{a_1^*}\right). \tag{1.42}$$

Из (1.42) вытекает сходимость ряда (1.18). Оценим остаток R_{MN} этого ряда. Очевидно, что R_{MN} можно представить в виде

$$R_{MN}(a_1, a_2) = (\hat{A}\hat{P}_N\hat{Q}_{a_2}, \hat{Q}_{a_1^*}) + (\hat{A}\hat{Q}_{a_2}, \hat{P}_M\hat{Q}_{a_1^*}) + \\ + (\hat{A}\hat{P}_N\hat{Q}_{a_2}, \hat{P}_M\hat{Q}_{a_1^*}).$$

Используя (1.41), получаем в предположении

$$\int |a_1|^2 dx \leqslant R_1, \quad \int |a_2|^2 dx \leqslant R_2 \tag{1.43}$$

оценку для R_{MN}:

$$|R_{MN}(a_1, a_2)| \leqslant \|A\| \left(c_1 \frac{R_1^M}{\sqrt{M!}} + c_2 \frac{R_2^N}{\sqrt{N!}} + c_3 \frac{R_1^M R_2^N}{\sqrt{M!N!}} \right).$$

Из этой оценки следует, что ряд (1.18) сходится равномерно, когда a_1, a_2 удовлетворяют неравенствам (1.43).

Покажем теперь, что ряд (1.18) сходится абсолютно. С этой целью выберем произвольно функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ и фиксируем их. Обозначим

$$\int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times a_1(x_1)\ldots a_1(x_m) a_2(y_1)\ldots a_2(y_n)\, d^m x\, d^n y$$

через a_{mn}. Тогда

$$\tilde{A}(a_1, a_2) = \sum a_{mn}. \tag{1.44}$$

Рассмотрим функции $b_1(x) = \alpha a_1(x)$, $b_2(x) = \beta a_2(x)$, где α и β — числа, причем $0 < |\alpha| < 1$, $0 < |\beta| < 1$. Очевидно, что

$$\tilde{A}(b_1, b_2) = \sum a_{mn}\beta^n\alpha^m. \tag{1.45}$$

Так как ряд (1.44) сходится, то по известной теореме о степенных рядах ряд (1.45) сходится абсолютно. Таким образом, ряд (1.18) для $b_1(x)$, $b_2(x)$ сходится абсолютно. Вспоминая связь между $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $b_1(x)$, $b_2(x)$, а также то обстоятельство, что $a_1(x)$, $a_2(x)$ — произвольные функции с суммируемым квадратом, получаем, что $b_1(x)$ и $b_2(x)$ — также произвольные функции с суммируемым квадратом.

Так как функционалы $A(a^*, a)$ и $\tilde{A}(a^*, a)$ связаны соотношением (1.38), все сказанное без изменений переносится на функционалы $A(a^*, a)$.

Сформулируем окончательный результат в виде теоремы.

Теорема 8. *Пусть $a(x)$, $a^*(x)$ — две произвольные функции с суммируемым квадратом. Тогда ряды* (1.18) *и* (1.19) *сходятся равномерно и абсолютно, если $\|a\| < R_1$, $\|a^*\| < R_2$, где $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ — произвольные числа.*

Через $\|a\|$, $\|a^*\|$ в формулировке теоремы обозначены нормы a, a^* как элементов гильбертова пространства L:

$$\|a\| = \left(\int |a|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \|a^*\| = \left(\int |a^*|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Заметим, что если $\hat{A}$ — неограниченный оператор, но в область определения $\hat{A}$ входят пуассоновские векторы $\hat{P}_a$ с индексами $a(x)$, пробегающими множество $\tilde{L}$, то для оператора $\tilde{A}$ справедливы теоремы, являющиеся видоизменением теорем 7 и 8. При этом функционалы $\tilde{A}(a^*, a)$, $A(a^*, a)$ оказываются определенными не на всем L, а на $\tilde{L}$.

В заключение этого пункта отметим, что для функционала $A(a^*, a)$ справедлива формула, аналогичная (1.42):

$$A(a^*, a) = (\hat{A}\hat{P}_a, \hat{P}_a), \tag{1.46}$$

где $\hat{P}_a$ — нормированный пуассоновский вектор с индексом a. Формула (1.46) получается очевидным образом из сопоставления (1.42), (1.38) и (1.39).

12. Операторы проектирования. Найдем матричную и нормальную формы оператора $\hat{P}_{\hat{\Phi}}$ проектирования на вектор $\hat{\Phi}$. Рассмотрим для определенности фермиевский случай. Пусть

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1(x) \\ K_2(x_1, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что элементы матрицы $\|A_{mn}\|$ оператора $\hat{P}_{\hat{\Phi}}$ имеют вид

$$A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) = K_m(x_1, \ldots, x_m)\overline{K_n(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Таким образом, функционал, отвечающий матрице оператора $\hat{P}_{\hat{\Phi}}$, равен

$$\tilde{P}(a^*,\ a)=\Phi(a^*)\,\Phi^*(a), \tag{1.47}$$

где $\Phi(a^*)$ — функционал, отвечающий вектору $\hat{\Phi}$, $\Phi^*(a) = \sum\int \overline{K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\,a(x_n)\ldots a(x_1)\,d^nx$.

Из (1.38) получаем, что нормальная форма оператора $\hat{P}_{\hat{\Phi}}$ определяется функционалом

$$P(a^*,\ a)=\Phi(a^*)\,\Phi^*(a)\,e^{-\int a^*(x)\,a(x)\,dx}. \tag{1.48}$$

Формулы (1.47), (1.48) справедливы также и в бозевском случае.

§ 2. Действия над производящими функционалами. Бозевский случай

В конце предыдущего параграфа мы сопоставили функционалы векторам и операторам в пространстве $\mathscr{H}_B$. В этом параграфе мы выразим функционал, отвечающий произведению операторов, через функционалы, отвечающие сомножителям, а функционал, отвечающий вектору $\hat{A}\hat{\Phi}$, через функционалы, отвечающие оператору $\hat{A}$ и вектору $\hat{\Phi}$, и установим некоторые другие формулы операторного исчисления для бозевского случая. Все эти формулы содержат континуальные интегралы.

Заметим, что функционалы, которые были поставлены в соответствие векторам и операторам, являются бесконечномерными аналогами аналитических функций. В связи с этим, прежде чем выводить формулы операторного исчисления, уточним определения аналитического функционала и континуального интеграла.

1. Дифференцируемые и аналитические функционалы. Пусть L — вещественное гильбертово пространство. Функционал Φ называется *дифференцируемым в точке* $f\in L$, если для любого $h\in L$ существует элемент $\frac{\delta\Phi}{\delta f}\in L$ такой, что

$$\left|\Phi(f+h)-\Phi(f)-\left(h,\ \frac{\delta\Phi}{\delta f}\right)\right|=o(\|h\|). \tag{2.1}$$

$\frac{\delta\Phi}{\delta f}$ называется *вариационной производной* функционала Φ в точке f. В случае, если пространство L реализовано как пространство функций с суммируемым квадратом от переменной x, $\frac{\delta\Phi}{\delta f}$ есть функция, которую принято обозначать $\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)}$.

Функционал Φ в вещественном или комплексном гильбертовом пространстве L назовем *целым аналитическим*, если он представим в виде ряда, абсолютно и равномерно сходящегося внутри любого шара конечного радиуса в L:

$$\Phi(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(f), \tag{2.2}$$

где $\Phi_n(f)$ — однородный ограниченный функционал n-й степени[1]).

Пусть L — комплексное гильбертово пространство с инволюцией. L можно рассматривать как вещественное пространство, состоящее из элементов u, v — вещественных и мнимых частей элемента $f=u+iv$. Тогда на функционалы в L переносятся данные выше определения дифференцируемости и аналитичности. Нам, однако, всегда удобнее будет пользоваться не переменными u, v, а формальными переменными $f=u+iv$ и $f^*=u-iv$. Определим, как обычно, формальные производные

$$\frac{\delta\Phi(f^*, f)}{\delta f}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Phi}{\delta u}-i\frac{\delta\Phi}{\delta v}\right), \quad \frac{\delta\Phi}{\delta f^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Phi}{\delta u}+i\frac{\delta\Phi}{\delta v}\right). \tag{2.3}$$

Аналитические в вещественном смысле функционалы в L мы будем записывать рядами по f, f^*

$$\Phi(f^*, f)=\sum\Phi_{mn}(f^*, f), \tag{2.4}$$

где Φ_{mn} — однородный функционал степени m по f^* и степени n по f.

Пусть L — пространство состояний одной частицы и $\mathcal{H}_B$ — пространство состояний системы. Очевидно, что среди аналитических в вещественном смысле функционалов в L содержатся как функционалы, отвечающие векторам пространства $\mathcal{H}_B$, так и функционалы обоих видов, отвечающие операторам в $\mathcal{H}_B$.

Определения дифференцируемого и аналитического функционалов легко переносятся на случай, когда функционал Φ определен не на всем пространстве L, а на плотном множестве $D\subset L$, в котором задана своя норма $\|f\|_D$. Для приспособления определений к этому случаю надо заменить в них всюду $\|f\|$ на $\|f\|_D$. Надо иметь в виду только, что в этом случае $\frac{\delta\Phi}{\delta f}$ есть линейный функционал, определенный только на D, поэтому не обязательно $\frac{\delta\Phi}{\delta f}\in L$.

В качестве примера рассмотрим гильбертово пространство функций $f(x)$ с суммируемым квадратом на некотором множестве M. Пусть D — множество ограниченных, всюду определенных функций, $\|f\|_D=\sup\limits_{x\in M} f(x)$. Рассмотрим функционал $\Phi(f)=f(x_0)$. Очевидно, что $\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)}=\delta(x, x_0)$, где $\delta(x, x_0)$ — δ-функция Дирака.

---

[1]) Функционал $\Phi_n(f)$ называется *ограниченным однородным функционалом* n-й степени, если он равен значению ограниченного полилинейного функционала $F(f_1, \ldots, f_n)$ при совпадающих аргументах:

$$\Phi_n(f)=F_n(f, \ldots, f).$$

Функционал $F(f_1, \ldots, f_n)$ называется полилинейным ограниченным, если он обладает свойствами:

1) $F(f_1, \ldots, f_{k-1}, \alpha f'_k+\beta f''_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)=$
$=\alpha F(f_1, \ldots, f_{k-1}, f'_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)+\beta F(f_1, \ldots, f_{k-1}, f''_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)$,
$k=1, 2, \ldots, n$; α, β — комплексные числа;

2) $|F_n(f_1, \ldots, f_n)|\leqslant C\|f_1\|\|f_2\|\ldots\|f_n\|$.

2. Континуальный интеграл. Пусть L — вещественное гильбертово пространство, $\Phi(f)$ — функционал в L. Рассмотрим последовательность вложенных друг в друга конечномерных подпространств L_n размерности n такую, что замыкание суммы L_n совпадает с L:

$$\overline{\cup L_n} = L. \tag{2.5}$$

В каждом из подпространств L_n выберем ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Рассмотрим функционал Φ на элементах подпространства L_n. Так как $f \in L_n$ представим в виде $f = x_1 f_1 + \ldots$ $\ldots + x_n f_n$, то $\Phi(f) = \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)\, d^n x. \tag{2.6}$$

Если существует предел $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ и этот предел не зависит от выбора последовательности подпространств L_n, то будем его называть *континуальным интегралом* функционала Φ и обозначать

$$I(\Phi) = \int \Phi(f)\, \Pi\, df. \tag{2.7}$$

Пусть теперь L — гильбертово пространство с инволюцией. Рассмотрим последовательность вложенных комплексных подпространств L_n комплексной размерности n, удовлетворяющих условию (2.5). В каждом L_n выберем ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Значение функционала Φ на подпространстве L_n есть функция Φ_n $2n$ вещественных переменных x_k, y_k — действительной и мнимой частей координат z_k вектора f по базису $\{f_k\}$. Вместо переменных x_k, y_k нам удобнее будет рассматривать формальные переменные z_k, $\bar{z}_k$. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \Phi_n(z_1, \ldots, z_n \,|\, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, d^n z\, d^n \bar{z},$$

где, как обычно, $dz\, d\bar{z} = 2i\, dx\, dy$.

Если существует предел I_n при $n \to \infty$ и этот предел не зависит от выбора последовательности подпространств L_n, то будем его называть *континуальным интегралом* и обозначать

$$I(\Phi) = \int \Phi(f^*, f)\, \Pi\, df\, df^*. \tag{2.8}$$

Пространство L с инволюцией можно рассматривать как вещественное: $L = R \oplus iR$, где R — пространство вещественных элементов (т. е. таких, что $f^* = f$).

Очевидно, что если для функционала Φ, рассматриваемого в L как в вещественном пространстве, существует интеграл (2.7), то существует также интеграл (2.8) и они равны. Обратное, вообще говоря, неверно; соответствующий пример будет указан ниже[1]).

[1]) Причина этого в том, что интеграл (2.8) определяется с помощью предельного перехода не по любой последовательности *вещественных* подпространств, удовлетворяющей условию (2.5), а по любой последовательности *комплексных* пространств, удовлетворяющих этому условию.

Пусть L — вещественное гильбертово пространство, Φ — функционал в L, $E_1 \subset L$ — подпространство L и E_2 — ортогональное дополнение к E_1. Очевидно, что Φ можно записать в виде функционала от двух переменных как

$$\Phi(f) = \Phi(f_1, f_2), \quad f = f_1 + f_2, \quad f_i \in E_i.$$

Интеграл от Φ представим в виде кратного интеграла

$$\int \Phi(f) \Pi\, df = \int \Phi(f_1, f_2) \Pi\, df_1\, df_2.$$

Исходя из определения континуального интеграла, нетрудно показать, что если существует кратный интеграл, то существуют и равны ему оба повторных:

$$\int \Phi(f_1, f_2) \Pi\, df_1\, df_2 = \int \left(\int \Phi(f_1, f_2) \Pi\, df_1 \right) \Pi\, df_2 = \\ = \int \left(\int \Phi(f_1, f_2) \Pi\, df_2 \right) \Pi\, df_1.$$

Аналогичная формула справедлива для интегралов от функционалов в комплексном гильбертовом пространстве с инволюцией.

3. Интегрирование по частям. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть Φ — дифференцируемый функционал в вещественном гильбертовом пространстее L, такой, что*

$$\lim_{\|f\| \to \infty} \Phi(f) = 0$$

и для некоторого $h \in L$ существует интеграл

$$\int \left(\frac{\delta \Phi}{\delta f}, h \right) \Pi\, df.$$

Тогда

$$\int \left(\frac{\delta \Phi}{\delta f}, h \right) \Pi\, df = 0. \tag{2.9}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|h\| = 1$.

Дополним вектор $h = h_1$ до ортонормированного базиса $\{h_i\}$ в пространстве L. Обозначим через L_n пространство, натянутое на векторы h_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $f = x_1 h_1 + \ldots + x_n h_n \in L_n$, $\Phi(f) = \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что

$$\left(\frac{\delta \Phi}{\delta f}, h \right) = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}.$$

Ясно, далее, что последовательность L_n удовлетворяет условию (2.5). Поэтому интеграл (2.9) есть предел конечнократных интегралов

$$I_n = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} d^n x. \tag{2.10}$$

В силу предположения, сделанного относительно функционала $\Phi(f)$, функция $\Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ стремится к нулю при $x_1 + \ldots \ldots + x_n^2 \to \infty$. Выполняя в (2.10) интегрирование по x_1, получаем, что $I_n = 0$.

Докажем теперь теорему об интегрировании по частям.

Теорема 1. *Пусть Φ_1, Φ_2 — дифференцируемые функционалы такие, что*

1) $\Phi_1\Phi_2 \to 0$ *при* $\|f\| \to \infty$;

2) *существуют интегралы*

$$\int \Phi_1 \left(\frac{\delta\Phi_2}{\delta f}, h\right) \Pi\, df, \quad \int \left(\frac{\delta\Phi_1}{\delta f}, h\right) \Phi_2 \Pi\, df.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int \Phi_1 \left(\frac{\delta\Phi_2}{\delta f}, h\right) \Pi\, df = -\int \left(\frac{\delta\Phi_1}{\delta f}, h\right) \Phi_2 \Pi\, df. \tag{2.11}$$

Для доказательства теоремы следует подставить в (2.9) в качестве Φ функционал $\Phi = \Phi_1\Phi_2$ и воспользоваться тем, что

$$\frac{\delta}{\delta f}(\Phi_1\Phi_2) = \frac{\delta\Phi_1}{\delta f}\Phi_2 + \Phi_1 \frac{\delta\Phi_2}{\delta f}.$$

Формулу интегрирования по частям мы часто будем записывать вместо (2.11) в виде

$$\int \Phi_1 \frac{\delta\Phi_2}{\delta f} \Pi\, df = -\int \frac{\delta\Phi_1}{\delta f} \Phi_2 \Pi\, df. \tag{2.12}$$

В случае, если L — комплексное пространство с инволюцией, справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\Phi_1(f^*, f)$, $\Phi_2(f^*, f)$ — дифференцируемые функционалы такие, что*

1) $\Phi_1\Phi_2 \to 0$ *при* $\|f\| \to \infty$;

2) *существуют интегралы*

$$\int \Phi_1 \frac{\delta\Phi_2}{\delta f} \Pi\, df\, df^*, \quad \int \Phi_2 \frac{\delta\Phi_1}{\delta f^*} \Pi\, df\, df^*,$$
$$\int \frac{\delta\Phi_1}{\delta f} \Phi_2 \Pi\, df\, df^*, \quad \int \frac{\delta\Phi_2}{\delta f^*} \Phi_1 \Pi\, df\, df^*.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\delta\Phi_1}{\delta f} \Phi_2 \Pi\, df\, df^* &= -\int \Phi_1 \frac{\delta\Phi_2}{\delta f} \Pi\, df\, df^*, \\ \int \frac{\delta\Phi_1}{\delta f^*} \Phi_2 \Pi\, df\, df^* &= -\int \Phi_1 \frac{\delta\Phi_2}{\delta f^*} \Pi\, df\, df^*. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Доказательство этой теоремы по существу не отличается от доказательства теоремы 1, и мы его опускаем.

4. Примеры. Вычислим гауссов интеграл. Пусть $A > 0$ — симметричный оператор в вещественном гильбертовом пространстве L. Очевидно, что

$$\int e^{-(Af, f)} \Pi\, df = (\det A)^{-1/2}; \tag{2.14}$$

стоящий в правой части детерминант есть определитель Фредгольма оператора A. Интеграл (2.14) существует тогда и только тогда, когда оператор $A-E$ является ядерным (см. примечания к с. 15).

В качестве второго примера рассмотрим аналогичный интеграл в комплексном гильбертовом пространстве с инволюцией (см. Введение, п. 3):

$$\int e^{-\frac{1}{2}(f\, f^*)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f^*\end{pmatrix}} \Pi\, df\, df^* = \left[\det\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12}\end{pmatrix}\right]^{-1/2}, \qquad (2.15)$$

где $A_{ik}=A'_{ki}$. Детерминант в правой части есть регуляризованный детерминант Фредгольма в смысле определения, данного в конце п. 4 Введения [1]). Интеграл (2.15) существует, если $A_{21}-E$ и $A_{12}-E$ — ядерные операторы, A_{11}, A_{22} — операторы Гильберта — Шмидта [2]) и

$$\operatorname{Re}\ (f\, f^*)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f^*\end{pmatrix} \geqslant \alpha (f,\ f),$$

где $\alpha>0$ — некоторое вещественное число. Отметим, что последнее условие выполнено, если $A_{12}=A_{21}=E$, $\|A_{11}\|<1$, $\|A_{22}\|<1$. Формула (2.15) немедленно следует из аналогичной формулы для конечнократных интегралов.

Нам будет встречаться более общий интеграл

$$\int e^{-\frac{1}{2}(f\ f^*)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f^*\end{pmatrix} + (\varphi_1\ \varphi_2)\begin{pmatrix} f \\ f^*\end{pmatrix}} \Pi\, df\, df^* =$$

$$= \left[\det\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12}\end{pmatrix}\right]^{-1/2} e^{\frac{1}{2}(\varphi_1\ \varphi_2)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}}. \qquad (2.16)$$

Вычисление (2.16) сводится к (2.15) путем выделения в показателе полного квадрата. Из (2.15), в частности, вытекает, что

$$\int e^{-(f,\ f^*)}\, \Pi\, df\, df^* \equiv \int e^{-(f^* f)}\, \Pi\, df^*\, df = 1. \qquad (2.17)$$

Рассмотрим ограниченный однородный функционал

$$\int A_{mn}(x_1,\ \ldots,\ x_m \mid y_1,\ \ldots,\ y_n)\, f^*(x_1)\ \ldots\ f^*(x_m)\ \times$$
$$\times f(y_1)\ \ldots\ f(y_n)\, d^m x\, d^n y$$

---

[1]) Матрица $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ определяет очевидным образом оператор в пространстве $\mathcal{E}=L\oplus L^*$ прямой сумме двух экземпляров пространства L.

[2]) Отметим, что если рассматривать L как вещественное пространство и пользоваться соответствующим определением интеграла, то (2.15) существует при более жестких ограничениях на A_{ik}; в этом случае надо потребовать, чтобы операторы A_{11}, A_{22} были ядерными. См. по этому поводу замечание к определению континуального интеграла (п. 2 этого параграфа) и к определению детерминанта в пространстве с инволюцией (Введение, п. 4).

и докажем равенство

$$\int \left(\int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) f^*(x_1) \ldots f^*(x_m) \times \right.$$
$$\left. \times f(y_1) \ldots f(y_n) \, d^m x \, d^n y \right) e^{-f^* f} \Pi \, df \, df^* =$$
$$= \delta_{mn} n! \int A_{nn}(x_1, \ldots, x_n | x_1, \ldots, x_n) \, d^n x. \quad (2.18)$$

(Функция A предполагается симметричной отдельно по $x_1, \ldots, x_m$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_n$.) Для проверки этой формулы заметим, что

$$f^*(y_1) \ldots f^*(y_n) e^{-ff^*} = (-1)^n \frac{\delta^n}{\delta f(y_1) \ldots \delta f(y_n)} e^{-ff^*}. \quad (2.19)$$

Подставляя это выражение в левую часть (2.18) и интегрируя затем по частям, получаем правую часть.

5. Скалярное произведение в пространстве состояний. В предыдущем параграфе было показано, что каждому вектору $\hat{\Phi}$ пространства состояний можно естественным образом поставить во взаимно однозначное соответствие функционал $\Phi(a^*)$. В множестве $\mathscr{L}$ функционалов, соответствующих векторам, введем скалярное произведение

$$(\Phi_1, \Phi_2) = (\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2). \quad (2.20)$$

Скалярное произведение (2.20) превращает $\mathscr{L}$ в гильбертово пространство. Полученное таким образом гильбертово пространство функционалов служит реализацией пространства состояний. Чтобы произвольный аналитический функционал

$$\Phi(a^*) = \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} \int K_n(x_1, \ldots, x_n) a^*(x_1) \ldots a^*(x_n) \, d^n x \quad (2.21)$$

принадлежал $\mathscr{L}$, очевидно, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_n \int |K_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 \, d^n x < \infty. \quad (2.22)$$

Для скалярного произведения (2.20) и условия (2.22) существует выражение в виде континуального интеграла.

Теорема 3[1]). 1. *Скалярное произведение* (2.20) *может быть задано формулой*

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \Phi_1(a^*) \overline{\Phi_2(a^*)} e^{-aa^*} \Pi \, da \, da^*. \quad (2.23)$$

2. *Для того чтобы аналитический функционал* $\Phi(a^*)$ *соответствовал вектору пространства состояний, необходимо и доста-*

---

[1]) См. работу Баргмана [1], а также доклад автора, Минлоса и Фаддеева на IV Всесоюзном математическом съезде 1961 г. [1, т. II, с. 535].

точно выполнение неравенства

$$\int |\Phi(a^*)|^2 e^{-a^*a}\Pi\, da^* da < \infty. \qquad (2.24)$$

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что если подставить в правую часть (2.23) выражение для Φ_1 и Φ_2 в виде рядов (1.17), затем переставить знаки суммы и интеграла и воспользоваться формулой (2.18), то получится, как легко видеть, скалярное произведение $(\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2)$. Перестановка суммы и интеграла законна во всяком случае, если Φ_1 и Φ_2 — полиномиальные функционалы. Содержание предлагаемого доказательства теоремы 3 состоит в обосновании этой перестановки в общем случае. Пусть сначала число степеней свободы конечно и равно N. Тогда

$$\Phi = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{1 \leqslant p_k \leqslant N} K_{p_1 \ldots p_n} a^*_{p_1} \ldots a^*_{p_n},$$

$$\|\Phi\|^2 = \sum_n \sum_{1 \leqslant p_k \leqslant N} |K_{p_1 \ldots p_n}|^2.$$

Обозначим через Φ_M частичную сумму этого ряда

$$\Phi_M = \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{1 \leqslant p_k \leqslant N} K_{p_1 \ldots p_n} a^*_{p_1} \ldots a^*_{p_n}.$$

Рассмотрим интеграл

$$C(M, R) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|a_k| < R} |\Phi_M(a^*)|^2 e^{-\sum a_k a_k^*} d^n a\, d^n a^*.$$

Очевидно, что

$$\lim_{M \to \infty} \lim_{R \to \infty} C(M, P) = (\Phi, \Phi). \qquad (2.25)$$

Выполняя интегрирование, получаем для $C(M, R)$ выражение

$$C(M, R) = \sum_{n=0}^{M} {\sum_{1 \leqslant p_k \leqslant N}}' |K_{p_1 \ldots p_n}|^2 \alpha(p_1, R) \ldots \alpha(p_n, R),$$

где

$$\alpha(p, R) = \frac{1}{p!} \int_0^{R^2} e^{-s} s^p\, ds.$$

Отсюда видно, что $C(M, R)$ является монотонной возрастающей функцией M при фиксированном R и монотонной возрастающей функцией R при фиксированном M. Поэтому в (2.25) можно переставить пределы:

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{M \to \infty} C(M, R) = (\Phi, \Phi).$$

Стоящий в левой части этого равенства предел равен, очевидно, интегралу

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int |\Phi(a^*)|^2 e^{-\sum a_k a_k^*} d^n a\, d^n a^*.$$

Таким образом, формула (2.23) доказана для случая $\Phi_1=\Phi_2$. Распространение формулы (2.23) на произвольные Φ_1, Φ_2 делается с помощью стандартных рассуждений.

Перейдем к общему случаю. Реализуем пространство L как пространство последовательностей a_k^*. Тогда

$$\Phi_i=\sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_p K^i_{p_1\ldots p_n} a^*_{p_1}\ldots a^*_{p_n}, \quad \sum_n\sum_p |K^i_{p_1\ldots p_n}|^2<\infty$$
$$(i=1,\ 2)$$

и

$$(\Phi_1,\ \Phi_2)=\sum_n\sum_p K^1_{p_1\ldots p_n}\overline{K^2_{p_1\ldots p_n}}. \qquad (2.26)$$

Рассмотрим подпространство $L_N\subset L$, состоящее из последовательностей $\{a_k^*\}$, $1\leqslant k\leqslant N$. Рассмотрим связанную с L_N конечномерную аппроксимацию интеграла (2.23). Значение Φ_i на L_N обозначим Φ_i^N. Очевидно, что

$$\Phi_i^N=\sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{1\leqslant p_k\leqslant N} K^i_{p_1\ldots p_n} a^*_{p_1}\ldots a^*_{p_n}.$$

Так как для конечного числа степеней свободы теорема 3 доказана, то конечномерная аппроксимация интеграла (2.23), связанная с L_N, равна

$$(\Phi_1^N,\ \Phi_2^N)=\sum_n\sum_{1\leqslant p_k\leqslant N} K^1_{p_1\ldots p_n}\overline{K^2_{p_1\ldots p_n}}. \qquad (2.27)$$

Сумма (2.27) является, очевидно, бесконечной частичной суммой ряда (2.26). Так как ряд (2.26) сходится абсолютно, то он является пределом (2.27) при $N\to\infty$. Таким образом, пределом конечномерных аппроксимаций интеграла (2.27) служит $(\Phi_1,\ \Phi_2)$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично[1]).

З а м е ч а н и е. Пользуясь работой Р. А. Минлоса [1], можно показать, что интеграл (2.24) есть интеграл по гауссовой мере, сосредоточенной в расширении $\tilde{L}$ пространства L; $\tilde{L}$ есть гильбертово пространство, получающееся пополнением L по скаляр-

[1]) Очевидно, что, какова бы ни была последовательность вложенных подпространств L_N, удовлетворяющая условию (2.5), можно так подобрать реализацию L в виде пространства последовательностей, чтобы L_N состояло из последовательностей вида $(a_1^*,\ \ldots,\ a_N^*)$. Таким образом, рассмотренная при доказательстве последовательность подпространств L_N является самой общей последовательностью, удовлетворяющей условию (2.5).

ному произведению

$$(a_1, a_2)_1 = (Ka_1, Ka_2),$$

где K — произвольный оператор Гильберта—Шмидта, не обращающий в нуль ни одного вектора.

Функционалы $\Phi(a^*)$ могут быть естественным образом продолжены до функционалов в $\tilde{L}$.

Вообще все содержащиеся в настоящей работе континуальные интегралы, относящиеся к бозевскому случаю, могут быть так или иначе интерпретированы как интегралы по гауссовой мере. Мы, однако, нигде этим не пользуемся.

6. Действие оператора на вектор. Пусть $\tilde{A}$ — функционал, отвечающий матричной форме ограниченного оператора $\hat{A}$, и Φ — функционал, отвечающий вектору $\hat{\Phi}$. Найдем функционал Ψ, отвечающий вектору $\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Phi}$. Очевидно, что функционал $\Psi(a^*)$ равен (см. (0.3), (0.6), (0.7))

$$\Psi(a^*) = \sum_{m, n} \frac{1}{\sqrt{m!}} \int a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) \times \\ \times A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) K_n(y_1, \ldots, y_n)\, d^m x\, d^n y.$$

При фиксированной функции a^* эта формула имеет вид

$$\Psi(a^*) = (\hat{\Phi}, \hat{\mathfrak{A}}),$$

где $\hat{\mathfrak{A}}$ — вектор, которому отвечает функционал

$$\mathfrak{A}(\alpha^*) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \mathfrak{A}_n(y_1, \ldots, y_n) \alpha^*(y_1) \ldots \alpha^*(y_n)\, d^n y,$$

$$\mathfrak{A}_n(y_1, \ldots, y_n) = \\ = \sum_m \frac{1}{\sqrt{m!}} \int a(x_1) \ldots a(x_m) \bar{A}_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\, d^m x.$$

(Из ограниченности $\hat{A}$ вытекает, что

$$\sum_n \int |\mathfrak{A}_n(y_1, \ldots, y_n)|^2\, d^n y < \infty.)$$

Поэтому, согласно теореме 3,

$$\Psi(a^*) = \int \Phi(\alpha^*) \overline{\mathfrak{A}(\alpha^*)}\, e^{-\alpha\alpha^*} \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha.$$

Подставляя значение $\mathfrak{A}$, получаем окончательно

$$\Psi(a^*) = \int \tilde{A}(a^*, \alpha) \Phi(\alpha^*) e^{-\alpha\alpha^*} \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \tag{2.28}$$

Переходя с помощью формулы (1.38) от функционала $\tilde{A}$ к функционалу A, отвечающему нормальной форме оператора $\hat{A}$, получаем

$$\Psi(a^*) = \int A(a^*, \alpha) \Phi(\alpha^*) e^{-(\alpha^* - a^*)\alpha} \Pi\, d\alpha\, d\alpha^*. \tag{2.29}$$

Подставим в (2.28) в качестве $\tilde{A}$ и Φ соответствующие этим функционалам ряды и переставим получающуюся сумму и интеграл. Выполняя в каждом слагаемом интегрирование и пользуясь формулой (2.18), мы, как легко видеть, придем к правильному ответу. Перестановка суммы и интеграла законна, если $\Phi(a^*)$ — полиномиальный функционал. Таким образом, использование теоремы 3 есть, по существу, обоснование этой перестановки в общем случае.

Это замечание относится и к формулам, следующим ниже.

7. Произведение операторов. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — ограниченные операторы, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — функционалы, соответствующие их матричной записи. Функционал $\tilde{C}$, отвечающий матричной записи оператора $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$, равен

$$\tilde{C}(a^*, a)=\int \tilde{A}(a^*, \alpha)\,\tilde{B}(\alpha^*, a)\,e^{-\alpha^*\alpha}\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \qquad (2.30)$$

Для случая, когда $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — полиномиальные функционалы, для проверки (2.30) следует переставить сумму и интеграл и воспользоваться затем формулами (2.18) и (0.4). В общем случае доказательство формулы (2.30) сводится к теореме 3 с помощью приема, подобного тому, который был использован при доказательстве формулы (2.28). Подробнее мы на этом не останавливаемся.

Из (2.30) и (1.38) следует, что функционалы A, B, C, отвечающие нормальным формам операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, связаны формулой

$$C(a^*, a)=\int A(a^*, \alpha)\,B(\alpha^*, a)\,e^{-(\alpha^*-a^*)(\alpha-a)}\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \qquad (2.31)$$

8. След оператора. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — операторы Гильберта — Шмидта, $\|A_{mn}\|$, $\|B_{mn}\|$ — матрицы этих операторов. Очевидно, что

$$\operatorname{Sp}\hat{A}\hat{B}=\sum_{m,n}\int A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\times$$
$$\times B_{nm}(y_1, \ldots, y_n \mid x_1, \ldots, x_m)\, d^m x\, d^n y;$$

$\operatorname{Sp}\hat{A}\hat{B}$, подобно скалярному произведению (Φ_1, Φ_2), может быть вычислен с помощью континуального интеграла:

$$\operatorname{Sp}\hat{A}\hat{B}=\int \tilde{A}(a^*, \alpha)\,\tilde{B}(\alpha^*, a)\,e^{-\alpha^*\alpha-a^*a}\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha\, da^*\, da, \qquad (2.32)$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — функционалы, отвечающие матричной записи операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Формула (2.32) доказывается точно так же, как (2.23), поэтому ее доказательство мы опустим.

Заменим двойной интеграл (2.32) повторным:

$$\operatorname{Sp}\hat{A}\hat{B}=\int e^{-a^*a}\left(\int \tilde{A}(a^*, \alpha)\,\tilde{B}(\alpha^*, a)\,e^{-\alpha^*\alpha}\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha\right)\Pi\, da^*\, da.$$

Заметим, что внутренний интеграл есть функционал $\tilde{C}(a^*, a)$, отвечающий матричной записи оператора $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$. Очевидно, что $\hat{C}$ — ядерный оператор. Более того, хорошо известно, что любой ядерный оператор представим в виде произведения двух операторов Гильберта — Шмидта.

Таким образом, если $\hat{C}$ — ядерный оператор, а $\tilde{C}$ — функционал, отвечающий его матричной записи, то

$$\operatorname{Sp} \hat{C} = \int \tilde{C}(a^*, a)\, e^{-a^*a} \Pi\, da^*\, da. \tag{2.33}$$

Через функционал $C(a^*, a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{C}$, $\operatorname{Sp}\hat{C}$ записывается следующим образом:

$$\operatorname{Sp} \hat{C} = \int C(a^*, a)\, \Pi\, da^*\, da. \tag{2.34}$$

§ 3. Действия над производящими функционалами. Фермиевский случай

В этом параграфе мы находим выражение для функционала, отвечающего произведению операторов, через функционалы, отвечающие сомножителям, и решаем некоторые другие близкие задачи в фермиевском случае. Так как многие формулы содержат континуальные интегралы по грассмановой алгебре, предварительно мы сформулируем основные понятия, необходимые в дальнейшем.

1. Анализ на конечномерной грассмановой алгебре[1]**.** *Грассмановой алгеброй с n образующими* называется алгебра, образующие которой $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют соотношениям

$$x_i x_k + x_k x_i \equiv \{x_i, x_k\} = 0. \tag{3.1}$$

В частности, $x_i^2 = 0$. Грассманову алгебру с n образующими будем обозначать $\mathcal{G}_n$. Из (3.1) вытекает, что $\mathcal{G}_n$ как линейное пространство имеет размерность 2^n. В качестве базиса в $\mathcal{G}_n$ удобно рассматривать одночлены

$$1,\ x_1, \ldots, x_n,\ x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n, \ldots,\quad x_1 \ldots x_n. \tag{3.2}$$

Одночлен $x_{i_1} \ldots x_{i_p}$ будем называть *одночленом степени p*.

Каждый элемент $f(x)$ алгебры $\mathcal{G}_n$ представим в виде линейной комбинации одночленов:

$$f(x) = f_0 + \sum_k f_1(k)\, x_k + \sum_{k_i} f_2(k_1, k_2)\, x_{k_1} x_{k_2} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{k_i} f_n(k_1, \ldots, k_n)\, x_{k_1} \ldots x_{k_n}. \tag{3.3}$$

Элемент вида $\sum\limits_{k_i} f_p(k_1, \ldots, k_p)\, x_{k_1} \ldots x_{k_p}$ будем называть *однородным степени p*.

Запись элемента f в виде (3.3), вообще говоря, не однозначна. Легко проверить, что она может быть сделана однозначной, если в качестве коэффициентов брать не любые функции, а кссосим-

[1]) См. работу автора [2], а также работу Вивье [1], где содержится далеко развитое дифференциальное исчисление на грассмановой алгебре.

метрические, т. е. меняющие знак при перестановке любой пары аргументов.

В дальнейшем, если элемент f записан в виде (3.3) и противное не оговорено, предполагается, что коэффициенты $f_p(k_1, \ldots, k_p)$ являются кососимметрическими.

Возможны и другие способы делать запись элемента в виде (3.3) однозначной. Можно, например, с этой целью брать в качестве коэффициентов функции, удовлетворяющие условию $f_p(k_1, \ldots, k_p)=0$, если $k_i \geqslant k_j$ хотя бы для одной пары индексов $i<j$. В этом случая однородный элемент степени p записывается в виде

$$\sum_{k_1<k_2<\ldots<k_p} f_p(k_1, \ldots, k_p)\, x_{k_1} \ldots x_{k_p}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{G}_n''$ элементов $\mathcal{G}_n$, представляющихся в виде линейных комбинаций одночленов четной степени:

$$f''=f_0+\sum_{k_i} f_2(k_1, k_2)\, x_{k_1}x_{k_2}+\ldots$$

Элементы $\mathcal{G}_n''$ будем называть *четными*. Четные элементы перестановочны со всеми элементами $\mathcal{G}_n$. Множество $\mathcal{G}_n'$ элементов, являющихся линейными комбинациями одночленов нечетной степени, будем называть *нечетными*. Элементы $\mathcal{G}_n'$ имеют вид

$$f'=\sum_k f_1(k)\, x_k+\sum_{k_i} f_3(k_1, k_2, k_3)\, x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}+\ldots$$

Очевидно, что каждый элемент $\mathcal{G}_n$ однозначно представим в виде $f=f'+f''$, $f' \in \mathcal{G}_n'$, $f'' \in \mathcal{G}_n''$.

А) Производные. Определим левую и правую производные $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ и $f \frac{\partial}{\partial x_k}$ элемента $f(x)$ алгебры $\mathcal{G}_n$. Обе производные являются линейными операторами в $\mathcal{G}_n$, поэтому достаточно задать их на базисных элементах (3.2). На базисных элементах производные задаются формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_p} x_{i_1} \ldots x_{i_s}=\delta_{i_1 p} x_{i_2} \ldots x_{i_s}- \\
&\qquad -\delta_{i_2 p} x_{i_1} x_{i_3} \ldots x_{i_s}+\ldots+(-1)^{s-1} \delta_{i_s p} x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}}, \\
&x_{i_1} \ldots x_{i_s} \frac{\partial}{\partial x_p}=\delta_{i_s p} x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}}- \\
&\qquad -\delta_{i_{s-1}} x_{i_1} \ldots x_{i_{s-2}} x_{i_s}+\ldots+(-1)^{s-1} \delta_{i_1 p} x_{i_2} \ldots x_{i_s}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Другими словами, чтобы вычислить левую производную по x_p от $x_{i_1} \ldots x_{i_p}$, нужно, пользуясь соотношениями (3.1), переставить x_p на первое место в одночлене и затем вычеркнуть; чтобы вычислить правую производную, нужно x_p переставить на последнее место и вычеркнуть. Если же одночлен $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ вообще не содержит x_p, то обе производные равны нулю. •

Непосредственно из определения производных вытекают правила дифференцирования сложной функции. Ограничимся вначале простейшими случаями.

1) Пусть

$$x_k=\sum_p a_{kp}y_p, \quad f(x)=f[x(y)].$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_p} f[x(y)] &= \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\right]_{x=x(y)} a_{kp},\\ f[x(y)]\frac{\partial}{\partial y_p} &= \sum_k \left[f(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right]_{x=x(y)} a_{kp}.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

2) Пусть t — вещественный параметр,

$$x_k(t)=\sum_p a_{kp}(t)\,y_p.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} f[x(t)] = \sum_k \frac{dx_k}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k} f = \sum_k \left(f\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{dt}. \tag{3.5'}$$

Отметим также формулу дифференцирования произведения. Пусть $f_1\in\mathcal{G}_n''$ — четный элемент, f_2 — произвольный элемент $\mathcal{G}_n$; тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_p}(f_1f_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_1\right) f_2 + f_1\left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_2\right),\\ (f_2f_1)\frac{\partial}{\partial x_p} &= f_2\left(f_1\frac{\partial}{\partial x_p}\right)+\left(f_2\frac{\partial}{\partial x_p}\right) f_1.\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Если $f_1\in\mathcal{G}_n'$ и f_2 — произвольный элемент, то формулы приобретают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_p}(f_1f_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_1\right) f_2 - f_1\left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_2\right),\\ (f_2f_1)\frac{\partial}{\partial x_p} &= f_2\left(f_1\frac{\partial}{\partial x_p}\right)-\left(f_2\frac{\partial}{\partial x_p}\right) f_1.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Обратим внимание на свойства вторых производных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right),\\ \left(f\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} &= -\left(f\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1},\\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f\frac{\partial}{\partial x_2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Подобно (3.5) — (3.7), эти свойства легко следуют из определения производных.

В) Интеграл на грассмановой алгебре. Введем символы $dx_1, \ldots, dx_n$ и подчиним их соотношениям коммутации

$$\{dx_i, dx_k\} = \{x_k, dx_i\} = 0. \tag{3.9}$$

Определим однократные интегралы:

$$\int dx_i = 0, \quad \int x_i\,dx_i = 1. \tag{3.10}$$

Кратные интегралы будем понимать как повторные. Таким образом, формулы (3.9) и (3.10) определяют интеграл $\int f(x)\,dx_n \ldots dx_1$ на всех одночленах. На произвольные элементы интеграл распространяется по линейности. Интеграл, определенный формулами (3.9), (3.10), будем называть *интегралом на грассмановой алгебре* по переменным (или по образующим) $x_1, \ldots, x_n$.

Из определения интеграла следует, что для произвольного элемента $f(x)$, записанного по формуле (3.3),

$$\int f(x)\,dx_n \ldots dx_1 = n!\, f_n(1, \ldots, n). \tag{3.11}$$

Интеграл на конечномерной грассмановой алгебре $\mathcal{G}_n$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам обычного интеграла. В частности, любой линейный функционал на $\mathcal{G}_n$ задается формулами

$$F(f) = \int f(x)\, F_{\text{пр}}(x)\,dx_n \ldots dx_1, \tag{3.12}$$

или

$$F(f) = \int F_{\text{лев}}(x)\, f(x)\,dx_n \ldots dx_1, \tag{3.12'}$$

где $F_{\text{пр}}$ и $F_{\text{лев}}$ — фиксированные элементы $\mathcal{G}_n$.

Линейный оператор в $\mathcal{G}_n$ может быть задан формулой

$$(Tf)(x) = \int f(y_1, \ldots, y_n)\, K_{\text{пр}}(y_1, \ldots, y_n \mid x_1, \ldots, x_n)\,dy_n \ldots dy_1, \tag{3.13}$$

или

$$(Tf)(x) = \int K_{\text{лев}}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)\, f(y_1, \ldots, y_n)\,dy_n \ldots dy_1, \tag{3.13'}$$

где $K_{\text{лев}}$ и $K_{\text{пр}}$ — элементы алгебры $\mathcal{G}_{2n}$, а x_i, y_k — образующие в $\mathcal{G}_{2n}$.

Для доказательства формулы (3.12) достаточно проверить, что равенство $\int f(x)\,F(x)\,dx_n \ldots dx_1 = 0$ при любом $f \in \mathcal{G}_n$ возможно, только если $F = 0$. В самом деле, пространство линейных функционалов на $\mathcal{G}_n$ имеет размерность 2^n. Ту же размерность имеет при указанном выше условии пространство функционалов, представимых в виде $\int f(x)\,F(x)\,dx_n \ldots dx_1$. Для того чтобы проверить, что из равенства $\int f(x)\,F(x)\,dx_n \ldots dx_1 = 0$ при любом f следует $F = 0$, необходимо представить F в виде (3.3), а в качестве f взять последовательно все базисные одночлены. Аналогично устанавливается представимость любого функционала в виде (3.12′).

Для доказательства формулы (3.13) заметим, что линейные операторы в $\mathcal{G}_n$ образуют пространство размерности 2^{2n}. Такую же размерность имеет алгебра $\mathcal{G}_{2n}$. Поэтому достаточно проверить, что из равенства $\int f(y)\,K(y \mid x)\,dy_n \ldots dy_1 = 0$ при всех f следует, что $K(y \mid x) = 0$. Заметим, что любой элемент алгебры $\mathcal{G}_{2n}$ с образующими $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ представим в виде $\mathcal{F} = \sum_{i,k} a_{ik} f_i(x)\, g_k(y)$. Поэтому если $\int f(y)\,K(y \mid x)\,dy_n \ldots dy_1 = 0$, то линейный функционал на $\mathcal{G}_{2n}$, определяемый равенством

$$F(\mathcal{F}) = \int \mathcal{F}(x \mid y) K(y \mid x) \, dy_n \ldots dy_1 \, dx_n \ldots dx_1,$$

равен нулю. Это же, как мы знаем, возможно лишь при $K(y \mid x) = 0$.

Аналогично устанавливается представимость любого оператора в виде (3.13′).

Как и в обычном анализе, на грассмановой алгебре имеются формулы интегрирования по частям

$$\int f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_p} g(x) \right) dx_n \ldots dx_1 = \int \left(f(x) \frac{\partial}{\partial x_p} \right) g(x) \, dx_n \ldots dx_1, \tag{3.14}$$

$$\int f(x) \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x_p} \right) dx_n \ldots dx_1 = \\ = (-1)^{n+1} \int \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f(x) \right) g(x) \, dx_n \ldots dx_1. \tag{3.14′}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть в качестве f и g произвольные одночлены.

Для интегралов на грассмановой алгебре справедлива формула замены переменных. Ограничимся вначале простейшим случаем, когда замена линейная:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k, \quad dx_i = \sum_k \tilde{a}_{ik} \, dy_k;$$

$\| \tilde{a}_{ik} \|$ — матрица, обратная $\| a_{ik} \|$. При такой замене переменных справедлива формула

$$\int f(x) \, dx_n \ldots dx_1 = \det \| \tilde{a}_{ik} \| \int f[x(y)] \, dy_n \ldots dy_1. \tag{3.15}$$

Отметим, что, в отличие от обычного правила замены переменных, независимые переменные и дифференциалы преобразуются с помощью взаимно обратных матриц.

Формула (3.15) является следствием очевидных равенств

$$x_1 \ldots x_n = \det \| a_{ik} \| \, y_1 \ldots y_n,$$

$$dx_n \ldots dx_1 = \det \| \tilde{a}_{ik} \| \, dy_n \ldots dy_1.$$

В заключение этого пункта вычислим «гауссов интеграл»

$$I = \int e^{\sum a_{ik} x_i x_k} dx_n \ldots dx_1, \quad a_{ik} = -a_{ki}.$$

Пусть сначала $\| a_{ik} \|$ — вещественная матрица. Воспользуемся тем, что собственным ортогональным преобразованием $\| s_{ik} \|$ матрица $\| a_{ik} \|$ может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Произведем в интеграле замену переменных

$$x_i = \sum s_{ik} y_k.$$

В соответствии с формулой (3.15) получим

$$I = \int e^{2(\lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_2 y_3 y_4 + \ldots + \lambda_{n/2} y_{n-1} y_n)} dy_n \ldots dy_1$$

при четном n и

$$I = \int e^{2(\lambda_1 y_1 y_2 + \ldots + \lambda_{(n-1)/2} y_{n-2} y_{n-1})} dy_n \ldots dy_1$$

при нечетном n. ($\det\| s_{ik} \| = 1$, так как $\| s_{ik} \|$ — собственная ортогональная матрица.)

Используя формулу (3.11), находим, что при n четном[1])

$$I = 2^{n/2} \lambda_1 \ldots \lambda_n = \det(\| 2a_{ik} \|)^{1/2},$$

а при n нечетном $I = 0$. Так как при нечетном n $\det \| a_{ik} \| = 0$, то эти случаи можно объединить.

В результате получаем

$$\int e^{\sum a_{ik} x_i x_k} dx_n \ldots dx_1 = (\det \| 2a_{ik} \|)^{1/2} \tag{3.16}$$

при соответствующем выборе значения квадратного корня.

Формула (3.16) справедлива не только для вещественных матриц, но и для комплексных. Чтобы распространить ее на комплексные матрицы $\| a_{ik} \|$, заметим, что в левой части (3.16) стоит многочлен от a_{ik}, следовательно, правая часть также есть многочлен. Если же два многочлена равны при вещественных значениях аргументов, то они равны и при комплексных значениях аргументов.

2. Клиффордова алгебра. *Клиффордовой*, или *спинорной*, алгеброй с n образующими называется алгебра K_n с образующими $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$k_i k_j + k_j k_i = \{k_i, k_j\} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$
$$k_i^2 = 1.$$

С каждой грассмановой алгеброй $\mathcal{G}_n$ тесно связана клиффордова алгебра K_{2n} с удвоенным числом образующих.

Рассмотрим в $\mathcal{G}_n$ операторы $\hat{x}_k$ левого умножения на образующую x_k и $\frac{\partial}{\partial x_k}$ — левого дифференцирования по x_k. Нетрудно проверить, что эти опера-

---

[1]) Квадратный корень из детерминанта кососимметрической матрицы называется пфаффианом. То обстоятельство, что он является многочленом от ее элементов, есть хорошо известный факт (см., например, книгу Вейля [1]). Доказательство, которое мы получили в качестве следствия формулы (3.16), есть, по существу, модификация рассуждений, приведенных в этой книге.

Значение пфаффиана представляет собой арифметическое значение корня с соответствующим знаком, которое легко определяется, когда матрица приведена к каноническому виду: тогда пфаффиан есть произведение наддиагональных элементов.

торы удовлетворяют соотношениям

$$\left\{\hat{x}_k, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\} = \delta_{kj}.$$

Образуем теперь операторы $Q_k = \hat{x}_k + \frac{\partial}{\partial x_k}$ и $P_k = \frac{1}{i}\left(\hat{x}_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. Нетрудно видеть, что эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\{P_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{3.17}$$

Таким образом, операторы P_i, Q_j являются образующими клиффордовой алгебры K_{2n}.

В алгебру $\mathcal{G}_n$ естественно ввести скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int e^{-\sum\limits_k y_k x_k} f_1(x)\,\overline{f_2'(y)}\,dy_n\,dx_n \ldots dy_1\,dx_1, \tag{3.18}$$

где $f \longrightarrow f'$ — линейное преобразование в $\mathcal{G}_n$, задаваемое формулой $(y_{i_1}\ldots y_{i_k})' = y_{i_k} \ldots y_{i_1}$. Нетрудно проверить, что это скалярное произведение положительно определено, $\hat{x}_k$ и $\frac{\partial}{\partial x_k}$ сопряжены друг другу в смысле этого скалярного произведения, P_i и Q_j самосопряжены. По тем же формулам, по каким мы построили P_i и Q_j с помощью операторов левого умножения и дифференцирования, можно построить операторы $\tilde{P}_i$ и $\tilde{Q}_j$ с помощью операторов правого умножения и дифференцирования. При этом оказывается, что для любых i, j

$$P_i\tilde{P}_j - \tilde{P}_j P_i \equiv [P_i, \tilde{P}_j] = 0, \quad Q_i\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j Q_i \equiv [Q_i, \tilde{Q}_j] = 0. \tag{3.19}$$

Проверим второе из этих равенств:

$$Q_i\tilde{Q}_j f = \left(x_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left[f\left(x_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= x_i(fx_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + x_i\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(fx_j).$$

В силу ассоциативности умножения $x_i(fx_j) = (x_i f)x_j$. Кроме того, согласно (3.8) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$. Поэтому

$$[Q_i\tilde{Q}_j]\,f = x_i\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(fx_j) - (x_i f)\frac{\partial}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)x_j.$$

Очевидно, что при $i \neq j$

$$x_i\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (x_i f)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(fx_j) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)x_j.$$

Поэтому $[Q_i\tilde{Q}_j] = 0$ при $i \neq j$. Представим теперь f в виде $f = f' + f''$, где f'' — четный и f' — нечетный элементы $\mathcal{G}_n$, и рассмотрим выражение в скобках при $i = j$.

Используя формулы (3.6) и (3.7), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fx_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f'x_i + f''x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f'\right)x_i - f' + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f''\right)x_i + f'' =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)x_i + f'' - f',$$

$$(x_i f)\frac{\partial}{\partial x_i} = (x_i f' + x_i f'')\frac{\partial}{\partial x_i} = x_i\left(f'\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - f' + x_i\left(f''\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + f'' =$$

$$= x_i\left(f\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + f'' - f'.$$

Подставляя эти равенства в выражение для $[Q_i, \tilde{Q}_i]$, находим, что $[Q_i, \tilde{Q}_i]=0$. Таким образом, $[Q_i, \tilde{Q}_j]=0$ при всех i, j. Аналогично устанавливается, что $[P_i, \tilde{P}_j]=0$. Доказанное утверждение остается в силе при $n=\infty$. С его помощью можно установить, что в случае $n=\infty$ как кольцо, порожденное P_i, так и кольцо, порожденное Q_i, есть фактор типа II_1 (см. также с. 75). Операторы P_i и Q_j до некоторой степени аналогичны операторам координаты и импульса для бозевской системы с n степенями свободы.

Напомним, что бозевская система с n степенями свободы может быть описана с помощью гильбертова пространства аналитических функций n переменных $f(z_1, \ldots, z_n)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int e^{-\sum\limits_k z_k\bar{z}_k} f_1(z)\overline{f_2(z)}\,dz_1\,d\bar{z}_1\ldots dz_n\,d\bar{z}_n.$$

Операторы координаты и импульса задаются формулами

$$Q_kf=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_k+\frac{\partial}{\partial z_k}\right)f, \quad P_kf=\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(z_k-\frac{\partial}{\partial z_k}\right)f.$$

3. Грассманова алгебра с бесконечным числом образующих. Грассманова алгебра с бесконечным числом образующих является прямой суммой счетного числа топологических линейных пространств. Дадим в связи с этим определение прямой суммы топологических пространств.

Пусть $E^0, E^1, \ldots, E^n, \ldots$ — последовательность линейных топологических пространств, не обязательно полных. Элементы пространства E^n будем обозначать через f_n. *Прямой суммой пространств* E^n назовем линейное пространство E, состоящее из формальных сумм

$$f=f_0+f_1+\ldots+f_n+\ldots$$

с обычными правилами линейного комбинирования, удовлетворяющее условию: если

$$f=f_0+f_1+\ldots+f_n+\ldots\in E,$$

то

$$\tilde{f}=k_0f_0+k_1f_1+\ldots+k_nf_n+\ldots\in E,$$

где k_i — произвольные комплексные числа.

Отметим, что из этого свойства вытекает, что E принадлежат элементы вида $f=f_n$, $f_n\in E^n$. Таким образом, пространство E^n оказывается вложенным в E.

Последовательность элементов $f(k)=f_0(k)+f_1(k)+\ldots$ $\ldots+f_n(k)+\ldots$ будем называть *сходящейся* к $f=f_0+f_1+\ldots$ $\ldots+f_n+\ldots$, если $f_n(k)\to f_n$ при $k\to\infty$ в смысле топологии пространства E^n [1]).

Грассмановой алгеброй $\mathcal{G}$ назовем прямую сумму пространств E^n, обладающую следующими свойствами:

1) E^0 — одномерное пространство с фиксированным базисным элементом f_0.

---

[1]) Близкое к понятию прямой суммы понятие объединения топологических пространств см. в книге Гельфанда и Шилова [1].

2) Для любых $f \in E^p$, $g \in E^q$ определено произведение $fg \in E^{p+q}$, причем

2_1) если $f = \alpha f_0 \in E^0$, α — комплексное число, то $fg = \alpha g$,

2_2) $fg = (-1)^{pq} gf$,

2_3) если $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимые элементы E^1, то $f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$ — линейно независимые элементы E^n,

2_4) конечные линейные комбинации элементов вида fg, $f \in E^p$, $g \in E^q$ образуют плотное множество в E^{p+q}.

3) Пространство $\mathscr{G}$ замкнуто относительно умножения, которое определяется следующим образом. Если

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots, \quad f_n \in E^n,$$
$$g = g_0 + g_1 + \ldots + g_n + \ldots, \quad g_n \in E^n,$$

то

$$fg = h = h_0 + h_1 + \ldots + h_n + \ldots,$$

где

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}. \tag{3.20}$$

Очевидно, что если E^1 — пространство конечной размерности N, то $\mathscr{G}$ есть грассманова алгебра с N образующими, которыми могут служить базисные элементы E^1. Поэтому, если E^1 бесконечномерно, то $\mathscr{G}$ естественно называть *грассмановой алгеброй с бесконечным числом образующих*. Если $f \in E^n \subset \mathscr{G}$, то будем f называть *однородным элементом* степени n.

Обозначим через $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ подпространство, состоящее из линейных комбинаций однородных элементов нечетной степени, через $\mathscr{G}'' \subset \mathscr{G}$ подпространство, состоящее из линейных комбинаций однородных элементов четной степени. Из (3.20) вытекает, что элементы $\mathscr{G}''$ перестановочны со всеми элементами алгебры $\mathscr{G}$. Элементы $\mathscr{G}'$ будем называть *нечетными*, элементы $\mathscr{G}''$ — *четными*. Очевидно, что каждый элемент f однозначно представим в виде суммы четного и нечетного:

$$f = f' + f'', \quad f' \in \mathscr{G}', \quad f'' \in \mathscr{G}''. \tag{3.21}$$

В заключение этого пункта определим нормированную грассманову алгебру. Алгебру Грассмана $\mathscr{G}$ будем называть *нормированной*, если в ней существует норма и выполнены условия

1) $\|fg\| \leqslant \|f\| \|g\|$, $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Алгебра $\mathscr{G}$ называется *полной нормированной* алгеброй, если кроме 1) выполнены условия

2) $\mathscr{G}$ является полным нормированным пространством,

3) пространства E^n являются замкнутыми подпространствами $\mathscr{G}$.

4. Грассманова алгебра со скалярным произведением. Образующие. Рассмотрим грассманову алгебру $\mathscr{G}$, подпространства E^n которой обладают следующими дополнительными свойствами.

1) В каждом пространстве E^n выделено плотное в смысле топологии E^n линейное многообразие $\tilde{E}^n$, являющееся линейным топологическим пространством с собственной топологией.

2) Для любого $f_0 \in E^n$ и $f \in \tilde{E}^n$ определено скалярное произведение (f, f_0), которое задает непрерывный линейный функционал на $\tilde{E}^n$.

3) Топология пространства E^n является топологией пространства, сопряженного к $\tilde{E}^n$.

4) Если $f \in \tilde{E}^n$, то $(f, f) \geqslant 0$, причем $(f, f) = 0$, только если $f = 0$.

5) Пополнение $\tilde{E}^n$ по скалярному произведению принадлежит E^n.

Это пополнение обозначим через H^n, которое, очевидно, является гильбертовым пространством [1].

6) Если $\{f_i\}$ — ортонормированный базис в H^1, то $\{f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_p}\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, — ортонормированный базис в H^p.

Грассманову алгебру, обладающую этими свойствами, будем называть *грассмановой алгеброй со скалярным произведением.*

Пусть M — некоторое множество с мерой dx. Рассмотрим пространство $L_2(M)$ функций с суммируемым квадратом на M. Обозначим через α изоморфное отображение пространства $L_2(M)$ на H^1:

$$\alpha: \qquad \varphi(x) \to \alpha(\varphi) \in H^1, \quad (\alpha(\varphi), \alpha(\varphi)) = \int |\varphi(x)|^2 \, dx.$$

Отображение $\alpha(\varphi)$ в силу его линейности удобно записывать в символическом виде

$$\alpha(\varphi) = \int \alpha(x) \varphi(x) \, dx. \tag{3.22}$$

В случае, если M состоит из счетного множества точек x_n, каждая из которых имеет меру единица, $\alpha(x_n) = \alpha_n$, $\varphi(x_n) = \varphi_n$ и интеграл в (3.22) превращается в сумму

$$\alpha(\varphi) = \sum_n \alpha_n \varphi_n.$$

Очевидно, что в этом случае $\{\alpha_n\}$ — ортонормированный базис в H^1:

$$(\alpha_n, \alpha_{n'}) = \delta_{nn'}.$$

В общем случае символы $\alpha(x)$ не являются элементами H^1. Их, однако, можно рассматривать как обобщенные элементы в H^1 [2]).

---

[1]) Тройка пространств $E^n \supset H^n \supset \tilde{E}^n$, удовлетворяющая условиям 1) — 5), часто встречается в теории обобщенных функций (см., например, книгу Гельфанда и Виленкина [1]).

[2]) Рассмотрим в $L_2(M)$ коммутативное кольцо операторов умножения на ограниченные вещественные функции. Этому кольцу отвечает коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$ самосопряженных операторов в H^1. Нетрудно проверить, что $\alpha(x)$ являются обобщенными собственными функциями, общими для всех операторов из кольца $\mathfrak{A}$. (Понятие обобщенной собственной функции см. в работе Гельфанда и Костюченко [1] или в книге Гельфанда и Виленкина [1].)

Условие изометричности отображения $\alpha(\varphi)$ может быть с помощью $\alpha(x)$ записано в виде

$$(\alpha(x),\ \alpha(y))=\delta(x,\ y),$$

где $\delta(x,\ y)$ есть δ-функция Дирака на M:

$$\int\delta(x,\ y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x).$$

Совокупность обобщенных элементов $\alpha(x)$ будем в дальнейшем называть *обобщенным ортонормированным базисом* в H^1.

Обозначим через $\tilde{E}^1(M)\subset L_2(M)$ совокупность функций, которым при отображении α отвечают элементы $\tilde{E}^1$. Это пространство будем называть пространством *основных функций*. Из свойства 2) скалярного произведения очевидным образом вытекает, что каждый элемент $f_0\in\tilde{E}^1(M)$ задает в $\tilde{E}^1(M)$ непрерывный функционал $F_0(f)$ по формуле $F_0(f)=(f, f_0)=\int f(x)\overline{f_0}(x)\,dx$. Это обстоятельство позволяет ввести в $\tilde{E}^1(M)$ топологию пространства функционалов на $\tilde{E}^1(M)$. Пополнение $\tilde{E}^1(M)$ по этой топологии обозначим $\tilde{E}^{1\prime}(M)$. Очевидно, что $\tilde{E}^{1\prime}(M)$ является пространством всех непрерывных функционалов на $\tilde{E}^1(M)$. Пространство $\tilde{E}^{1\prime}(M)$ будем называть *пространством обобщенных функций* на M.

В пространство $\tilde{E}^1$ также можно ввести топологию пространства функционалов на $\tilde{E}^1$. Пополнение $\tilde{E}^1$ по этой топологии обозначим $\tilde{E}^{1\prime}$. Так как $\tilde{E}^{1\prime}$ — пространство *всех* непрерывных функционалов на $\tilde{E}^1$, то из условия 2) вытекает, что $E^1\subset\tilde{E}^{1\prime}$.

Заметим теперь, что отображение α: $\tilde{E}'(M)\longrightarrow\tilde{E}^1$ может быть по непрерывности продолжено до отображения α: $\tilde{E}^{1\prime}(M)\longrightarrow\tilde{E}^{1\prime}$. Это отображение мы будем по-прежнему записывать в виде (3.22). Множество элементов $\tilde{E}^{1\prime}(M)$, соответствующих при отображении α элементам E^1, обозначим $E^1(M)$.

Суммируя все сказанное, получаем, что каждый элемент пространства E^1 представим в виде

$$f=\int\alpha(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{3.22′}$$

причем, если $f\in\tilde{E}^1$, то $\varphi(x)\in\tilde{E}^1(M)\subset L_2(M)$ — основная функция; если f — произвольный элемент H^1, то $\varphi(x)\in L_2(M)$; наконец, если f — произвольный элемент E^1, то $\varphi(x)\in E^1(M)$, вообще говоря, обобщенная функция.

Рассмотрим элементы

$$f_1=\int\alpha(x)\,\varphi_1(x)\,dx\in E^1 \quad \text{и} \quad f_2=\int\alpha(x)\,\varphi_2(x)\,dx\in E^1.$$

Образуем их произведение

$$f_1f_2=\int\alpha(x)\,\varphi_1(x)\,dx\int\alpha(x)\,\varphi_2(x)\,dx.$$

Определим произведение $\alpha(x)\alpha(y)$ обобщенных элементов $\alpha(x)$, $\alpha(y)$, положив

$$f_1 f_2 = \int \alpha(x)\varphi_1(x)\,dx \int \alpha(y)\varphi_2(y)\,dy = \int \alpha(x)\alpha(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dx\,dy. \tag{3.23}$$

Согласно определению грассмановой алгебры,

$$f_1 f_2 = -f_2 f_1, \quad f_1(f_2 f_3) = (f_1 f_2) f_3.$$

Очевидно, что эти равенства эквивалентны соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \alpha(x)\alpha(y) &= -\alpha(y)\alpha(x), \\ \alpha(x)(\alpha(y)\alpha(z)) &= (\alpha(x)\alpha(y))\alpha(z). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Пусть теперь $f \in E^n$. В соответствии с определением грассмановой алгебры (см. п. 3, свойство 2_4)) элементы вида

$$f_N = \sum_{\text{(сумма конечная)}} f_{k_1} \ldots f_{k_n}, \quad f_k \in E^1,$$

плотны в E^n.

Выражая f_k по формуле (3.22') через $\varphi(x)$, получаем

$$f_N = \int \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n) \sum \varphi_{k_1}(x_1)\ldots\varphi_{k_n}(x_n)\,d^n x,$$

или

$$f_N = \int \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n)\,\varphi_N(x_1, \ldots, x_n)\,d^n x. \tag{3.25}$$

Из правил умножения $\alpha(x)$ (3.24) вытекает, что функцию $\varphi_N(x_1, \ldots, x_n)$ можно выбрать кососимметрической.

Введем в пространство кососимметрических функций $\varphi_N(x_1, \ldots, x_n)$ топологию, индуцированную топологией пространства E^n. Пополнив пространство функций φ_N по этой топологии, получим пространство $E'^n(M)$ обобщенных кососимметрических функций от n переменных на M.

Пусть последовательность f_N сходится по топологии E^n к элементу f. Тогда последовательность φ_N сходится по топологии $E'^n(M)$ к обобщенной функции φ. Переходя к пределу, получаем, что каждый элемент $f \in E^n$ представим в виде

$$f = \int \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,d^n x, \tag{3.25'}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, вообще говоря, обобщенная функция. Пространство обобщенных функций, отвечающих элементам E^n, обозначим $E'(M)$. В дальнейшем всегда, если элемент f_N записан в виде (3.25) и противное не оговорено, $\varphi_N(x_1, \ldots, x_n)$ означает кососимметрическую функцию.

Отметим в заключение, что из свойства 6) скалярного произведения вытекает, что если $f \in H^n$, то $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — функция с суммируемым квадратом от n переменных.

Пространство кососимметрических функций n переменных с суммируемым квадратом обозначим $H^n(M)$. Пространство функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которым отвечают элементы $\tilde{E}^n$, обозначим $\tilde{E}^n(M)$ и назовем пространством *основных функций*. Подобно пространству $\tilde{E}^1(M)$, пространство $\tilde{E}^n(M)$ можно замкнуть по топологии сопряженного к $\tilde{E}^n(M)$ пространства. Очевидно, что получающееся в результате пространство совпадает с введенным ранее пространством обобщенных функций $E'^n(M)$.

Согласно определению грассмановой алгебры $\mathcal{G}$, каждый элемент $\mathcal{G}$ представим в виде

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots, \quad f_n \in E^n.$$

Используя для f_n запись в виде (3.25′), получаем для произвольного элемента $f \in \mathcal{G}$ представление

$$f = f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n)\, d^n x, \tag{3.26}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — кососимметрические функции n переменных, вообще говоря, обобщенные.

Обобщенные элементы $\alpha(x)$ мы в дальнейшем будем называть *образующими алгебры* $\mathcal{G}$. Они играют для произвольных алгебр роль, аналогичную роли образующих в конечномерных алгебрах.

Заметим, что формула (3.26) по форме напоминает запись аналитического функционала. В связи с этим элементы $f = f(\alpha)$ грассмановой алгебры со скалярным произведением мы будем иногда называть *функционалами от функций с антикоммутирующими значениями*.

Рассмотрим в E^1 подпространство L. Подалгебру $\mathcal{G}$, порожденную элементами L, обозначим $\mathcal{G}_L$. Очевидно, что $\mathcal{G}_L$ есть грассманова алгебра. Если пространство L конечномерно, то $\mathcal{G}_L$ — алгебра с конечным числом образующих, которыми служат базисные элементы L.

Пусть L есть n-мерное подпространство H^1. Рассмотрим в H^1 ортонормированный базис $\{\alpha_k\}$ такой, что

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L. \tag{3.27}$$

Пусть F — произвольный элемент $\mathcal{G}$. В соответствии с формулой (3.26) он представим в виде

$$F = F(\alpha) = \sum_p \sum_k F(k_1, \ldots, k_p)\, \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_p}.$$

Рассмотрим теперь элемент $F_L(\alpha)$

$$F_L(\alpha) = \sum_p \sum_{k_s \leqslant n} F(k_1, \ldots, k_p)\, \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_p}. \tag{3.28}$$

Очевидно, что $F_L(\alpha)$ принадлежит $\mathcal{G}_L$. Будем называть $F_L(\alpha)$ *значением элемента* $F(\alpha)$ на подпространстве L. Хотя элемент

$F_L(\alpha)$ был определен с помощью базиса $\{\alpha_k\}$, он от базиса не зависит; легко видеть, что элементы F_L, определенные с помощью любых базисов, удовлетворяющих условию (3.27), совпадают.

Аналогично можно определить значение F на подпространстве $L \subset H^1$ бесконечной размерности.

5. Грассманова алгебра с инволюцией. Пусть $\mathcal{G}$ — грассманова алгебра со скалярным произведением, в которой определено взаимно однозначное отображение на себя $f \leftrightarrow f^*$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(f^*)^* = f$.

2) $(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*$.

3) $(\alpha f)^* = \bar{\alpha} f^*$ (α — комплексное число).

4) Если для f, g определено скалярное произведение, то оно определено также для f^*, g^* и $(f^*, g^*) = (g, f)$.

5) Пространство E^1 распадается в прямую сумму подпространств: $E^1 = F + F^*$, причем $F \cap H^1$ ортогонально $F^* \cap H^1$.

Отображение f^*, удовлетворяющее этим условиям, назовем *инволюцией* в $\mathcal{G}$. Элементы $f \in \mathcal{G}$ и $f^* \in \mathcal{G}$ подпространств $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ и $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{G}$ будем называть сопряженными друг другу.

Рассмотрим пространство E^{pq}, состоящее из линейных комбинаций элементов вида $f_{k_1}^* \ldots f_{k_p}^* f_{l_1} \ldots f_{l_q}$, где f_l, $f_k \in F$. Очевидно, что пространство E^n распадается в прямую сумму $E^n = \sum\limits_{p+q=n} E^{pq}$, причем пространства $H^{pq} = H^n \cap E^{pq}$ ортогональны между собой. Очевидно, что пространства E^{pq} и E^{qp} сопряжены между собой.

Разбиение пространства E^1 в прямую сумму сопряженных подпространств F и F^* не однозначно. Мы, однако, имея дело с алгеброй с инволюцией, всегда будем считать это разложение фиксированным. Рассмотрим в пространстве F ортонормированный обобщенный базис $\alpha(x)$. В пространство F^* введем сопряженный базис, положив по определению

$$f^* = \int \alpha^*(x) \overline{\varphi(x)}\, dx \quad \text{при} \quad f = \int \alpha(x) \varphi(x)\, dx.$$

Объединение этих базисов является, очевидно, базисом в E^1. Как всякий базис в E^1, $\{\alpha, \alpha^*\}$ является системой образующих алгебры $\mathcal{G}$. Образующие α, α^* будем в дальнейшем называть *инволютивными*. С помощью образующих $\alpha(x)$, $\alpha^*(x)$ элементы $\mathcal{G}$ естественно записывать в виде

$$f = \sum_{m,n} \int \varphi_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \alpha^*(x_1) \ldots \alpha^*(x_m) \alpha(y_1) \ldots \alpha(y_n) d^m x d^n y. \tag{3.29}$$

Очевидно, что отдельные слагаемые в этой сумме являются элементами пространств E^{mn}. Легко видеть, что если f имеет вид (3.29), то f^* имеет вид

$$f^* = \sum_{m,n} \int \overline{\varphi}_{mn}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) \alpha^*(y_n) \ldots \alpha^*(y_1) \alpha(x_m) \ldots \alpha(x_1) d^m x\, d^n y. \tag{3.30}$$

Функции φ_{mn} мы будем считать, если противное не оговорено, кососимметричными отдельно по $x_1, \ldots, x_m$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_n$.

6. Вариационные производные. Пусть $\mathscr{G}$ — грассманова алгебра со скалярным произведением, $\alpha(x)$, $x \in M$, — система образующих $\mathscr{G}$. Определим левую и правую вариационные производные элемента $f \in \mathscr{G}$ по $\alpha(x)$. Левую и правую вариационные производные элемента f будем обозначать соответственно $\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f$ и $f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}$. Обе производные являются линейными операторами в $\mathscr{G}$, поэтому достаточно задать их на однородных элементах. Нам даже будет несколько удобнее задать производные сначала на произведениях образующих:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n) = \delta(x, x_1)\,\alpha(x_2)\ldots\alpha(x_n) - \\
&\qquad - \delta(x, x_2)\,\alpha(x_1)\,\alpha(x_3)\ldots\alpha(x_n) + \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\,\delta(x, x_n)\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_{n-1}), \\
&\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n)\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} = \delta(x, x_n)\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_{n-1}) - \\
&\qquad - \delta(x, x_{n-1})\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_{n-2})\,\alpha(x_n) + \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\delta(x, x_1)\,\alpha(x_2)\ldots\alpha(x_n);
\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

$\delta(x, x_k)$ означает в этих формулах δ-функцию Дирака на M:

$$\int \delta(x, y)\, f(y)\, dy = f(x).$$

Сами по себе образующие, вообще говоря, не обязаны быть элементами алгебры $\mathscr{G}$. Тем более не обязаны принадлежать $\mathscr{G}$ производные от их произведений. Однако производные произведения образующих имеют очевидный смысл обобщенных функций: дифференцируя формально под знаком интеграла и применяя формулы (3.31), находим, что если

$$f = \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_n)\, d^n x,$$

то

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f = n \int \varphi(x, x_2, \ldots, x_n)\,\alpha(x_2)\ldots\alpha(x_n)\, d^{n-1} x, \\
&f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} = n \int \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_{n-1})\, d^{n-1} x.
\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

(При получении формул (3.32) из (3.31) использовано, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — кососимметрическая функция.)

Производные $\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f$ и $f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}$ элемента f также не обязаны принадлежать $\mathscr{G}$.

Их естественно пытаться рассматривать как обобщенные функции, т. е. вместо $\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f$ и $f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}$ рассматривать

$$\int \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f\, dx \tag{3.33}$$

или соответственно

$$\int \varphi(x) f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} dx, \qquad (3.33')$$

где $\varphi(x)$ принадлежит некоторому множеству основных функций. Рассмотрим появляющиеся здесь возможности.

Может случиться, что существует некоторая функция $\varphi \in E^1(M)$, для которой $\int \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f\, dx \in \mathcal{G}$. В этом случае элемент f будем называть *дифференцируемым слева* по функции φ. Аналогично определим элемент, *дифференцируемый справа* по φ.

Может случиться, что ни для какой функции $\varphi(x) \in E^1(M)$, кроме $\varphi(x) \equiv 0$, $\int \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f\, dx$ не принадлежит $\mathcal{G}$. В этом случае элемент f называется *недифференцируемым слева*. Аналогично определим элемент, *недифференцируемый справа*.

Можно показать, что если элемент f дифференцируем слева по некоторой функции φ, то он дифференцируем справа по φ, и наоборот, элемент, дифференцируемый справа по φ, дифференцируем по φ слева. Поэтому элементы, недифференцируемые слева, недифференцируемы справа и обратно.

Если элемент f дифференцируем по всем функциям φ, принадлежащим некоторому множеству $D \subset E^1(M)$, то назовем его *D-дифференцируемым*.

Покажем, что если э емент f дифференцируем по φ слева, то он дифференцируем по φ также с рава. Пусть сначала f — однородный элемент степени k:

$$f = \int \varphi(x_1, \ldots, x_k)\, \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_k)\, d^k x.$$

Из формул (3.32) очевидно вытекает, что $\int \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f\, dx = (-1)^{k+1} \int \varphi(x) \times$ $\times f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} dx$. Поэтому оба интеграла принадлежат или не принадлежат $\mathcal{G}$ одновременно.

Пусть теперь f — произвольный элемент $\mathcal{G}$ и $I_{\text{лев}} = \int \varphi(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f\, dx \in \mathcal{G}$. Разобьем $I_{\text{лев}}$ на сумму четного и нечетного слагаемых: $I_{\text{лев}} = u' + u''$. По определению алгебры $\mathcal{G}$ имеем $u' \in \mathcal{G}$ и $u'' \in \mathcal{G}$. С другой стороны, из сказанного выше ясно, что $I_{\text{пр}} = \int \varphi(x) f \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} dx = u' - u''$. Поэтому $I_{\text{пр}} \in \mathcal{G}$. Точно так же убеждаемся, что если $I_{\text{пр}} \in \mathcal{G}$, то $I_{\text{лев}} \in \mathcal{G}$.

Отметим в заключение, что из определения вариационных производных вытекает следующее свойство. Рассмотрим алгебру $\mathcal{G}$ с образующими $\alpha(x)$, $\beta(x)$. Пусть $F(\alpha) \in \mathcal{G}$. Если разложить $F(\alpha + \beta)$ по степеням β, то в качестве коэффициентов при β в первой степени получатся левые и правые производные от F:

$$F(\alpha+\beta) = F(\alpha) + \int \beta(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} F(\alpha)\, dx + \ldots = F(\alpha) + \int \left(F \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} \right) \beta(x)\, dx + \ldots \qquad (3.34)$$

Это свойство может служить определением вариационных производных[1]).

[1]) Сравните с определением вариационных производных в бозевском случае (§ 2, п. 1).

7. Замена переменных при дифференцировании. Пусть $\alpha(x)$, $x \in M_\alpha$ и $\beta(y)$, $y \in M_\beta$,— две системы образующих алгебры $\mathcal{G}$.

Пусть элемент $f \in H^1$ можно записать как с помощью базиса $\alpha(x)$, так и с помощью базиса $\beta(y)$:

$$f = \int \alpha(x)\, \varphi_\alpha(x)\, dx = \int \beta(y)\, \varphi_\beta(y)\, dy. \tag{3.35}$$

Таким образом, возникает линейное соответствие между пространствами $H^1(M_\alpha)$ и $H^1(M_\beta)$. Очевидно, что это соответствие является изоморфизмом. Полученный изоморфизм будем записывать в виде

$$\varphi_\alpha(x) = \int K(x, y)\, \varphi_\beta(y)\, dy. \tag{3.36}$$

Ядро $K(x, y)$, определяемое этим равенством, может быть истолковано как обобщенная функция над некоторым пространством основных функций от x, y. Нам, однако, функциональная природа $K(x, y)$ не понадобится, поэтому мы на этом не останавливаемся.

Используя (3.36), формулу (3.35) перепишем в виде

$$\int \alpha(x)\, K(x, y)\, \varphi_\beta(y)\, dy\, dx = \int \beta(y)\, \varphi_\beta(y)\, dy.$$

Полученную формулу можно записать в символическом виде как

$$\int \alpha(x)\, K(x, y)\, dx = \beta(y).$$

Таким образом, ядро $K(x, y)$ является аналогом матрицы перехода от системы $\alpha(x)$ к $\beta(y)$.

Пусть теперь $f \in \mathcal{G}$. Имеют место следующие формулы замены переменных при дифференцировании:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f &= \int K(x, y) \frac{\delta}{\delta\beta(y)} f\, dy, \\ f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\alpha(x)} &= \int K(x, y)\, f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta(y)}\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Формулы (3.37) легко проверяются непосредственно. Отметим важный частный случай этих формул. Пусть M_α состоит из счетного множества точек, каждая из которых имеет меру, равную единице. Тогда $\alpha(x) = \alpha_n$ — ортонормированный базис в H^1 в обычном смысле слова. Формулы (3.37) в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\alpha_n} f &= \int K_n(y) \frac{\delta}{\delta\beta(y)} f\, dy, \\ f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\alpha_n} &= \int K_n(y)\, f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta(y)}\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.37'}$$

Функции $K_n(y)$, входящие в правую часть (3.37′), образуют, очевидно, ортонормированный базис в $L_2(M_\beta)$. Отметим, что правые части формул (3.37′) с точностью до обозначений совпадают с выражениями (3.33) и (3.33′), рассмотренными в предыдущем пункте.

8. Континуальный интеграл[1]. Пусть $\mathcal{G}$ — грассманова алгебра с инволюцией, $E^1 = F + F^*$ — разложение пространства E^1, входящее в определение алгебры с инволюцией.

Рассмотрим в пространстве F систему вложенных друг в друга конечномерных подпространств F_n с размерностью $2n$ такую,

[1]) См. работу автора [2]. В неявном виде фермиевский континуальный интеграл встречался ранее в физических работах Салама и Маттьюза [1] и Халатникова [1].

что замыкание их суммы совпадает с F: $\overline{\bigcup F_n}=F$. Обозначим через $\mathcal{G}_{L_n}$ подалгебру $\mathcal{G}$, порожденную пространством $L_n=F_n+F_n^*$. Введем в F_n произвольным образом ортонормированный базис $\alpha_1\ldots\alpha_{2n}$ и в F_n^* базис из сопряженных элементов $\alpha_1^*\ldots\alpha_{2n}^*$. Пусть теперь $f(\alpha^*, \alpha)$ — произвольный элемент $\mathcal{G}$. Рассмотрим его значение на $\mathcal{G}_{L_k}$. Обозначим значение f на $\mathcal{G}_{L_n}$ через $f_n(\alpha^*, \alpha)$. Рассмотрим интеграл

$$I_n(f_n)=\int f_n(\alpha^*, \alpha)\, d\alpha_{2n}^*\, d\alpha_{2n}\ldots d\alpha_1^*\, d\alpha_1. \tag{3.38}$$

Покажем, что интеграл (3.38) не зависит от выбора ортонормированного базиса в F_n. Пусть, в самом деле, $\{\beta_k\}$ — другой ортонормированный базис в F_n, и $\{\beta_k^*\}$ — соответствующий ему базис в F_n^*. Тогда β_k выражается через α_k с помощью унитарной матрицы: $\beta_k=\sum\limits_s u_{ks}\alpha_s$. Очевидно, что β_k^* выражается через α_k^* с помощью комплексно сопряженной матрицы $\beta_k^*=\sum\limits_s \bar{u}_{ks}\alpha_s^*$. Пользуясь формулой (3.15), находим, что

$$\int f_n(\beta^*, \beta)\, d\beta_{2n}^*\, d\beta_{2n}\ldots d\beta_1^*\, d\beta_1=$$
$$=\det(u^{-1}\bar{u}^{-1})\int f_n(\alpha^*, \alpha)\, d\alpha_{2n}^*\, d\alpha_{2n}\ldots d\alpha_1^*\, d\alpha_1.$$

Так как $u=\|u_{sk}\|$ — унитарная матрица, то $\det(u^{-1}\bar{u}^{-1})=1$. Тем самым равенство интегралов доказано.

Определение. Если существует предел $I(f)=\lim\limits_{k\to\infty} I_k(f_k)$, не зависящий от выбора системы подпространств F_k (лишь бы они были четномерны и замыкание их суммы совпадало с F), то этот предел называется *континуальным интегралом функционала f по алгебре $\mathcal{G}$*. Континуальный интеграл в грассмановой алгебре будем называть иногда *фермиевским континуальным интегралом*. Обозначать его будем так же, как и обычный континуальный интеграл:

$$I(f)=\int f(\alpha^*, \alpha)\,\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \tag{3.39}$$

В случае, если сможет возникнуть путаница, будем в правой части (3.39) приписывать вверху справа индекс F:

$$I(f)=\int^F f(\alpha^*, \alpha)\,\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \tag{3.40}$$

9. Интегрирование по частям. Пусть $\mathcal{G}$ — алгебра с инволюцией, $E^1=F+F^*$ — разложение E^1 в сумму сопряженных пространств и $\alpha(x)$, $x\in M$, — обобщенный ортонормированный базис в F.

Рассмотрим два D-дифференцируемых элемента f_1, $f_2\in\mathcal{G}$ и интеграл

$$\int f_1\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\, f_2\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \tag{3.41}$$

Этот интеграл имеет очевидный смысл обобщенной функции на D:

$$\int \varphi(x)\left(\int f_1\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f_2\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha\right) dx = \\ = \int f_1\left(\int \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f_2 \varphi(x)\, dx\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha.$$

Аналогичный смысл имеют семь интегралов, получаемых из (3.41) заменой α на α^*, левой производной на правую и f_1 на f_2. Пусть существуют интегралы, стоящие в левой и правой частях (3.42). Тогда имеют место формулы интегрирования по частям

$$\left.\begin{aligned} \int f_1\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f_2\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha &= \int\left(f_1 \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right) f_2 \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha, \\ \int f_1\left(f_2 \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha &= -\int\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f_1\right) f_2 \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha, \\ \int f_1\left(\frac{\delta}{\delta\alpha^*(x)} f_2\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha &= \int\left(f_1 \frac{\delta}{\delta\alpha^*(x)}\right) f_2 \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha, \\ \int f_1\left(f_2 \frac{\delta}{\delta\alpha^*(x)}\right)\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha &= -\int\left(\frac{\delta}{\delta\alpha^*(x)} f_1\right) f_2 \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (3.42)$$

Докажем вторую из этих формул. Пусть $\varphi \in D$, $\|\varphi\| = 1$. Дополним $\varphi(x)$ до ортонормированного базиса $\{\varphi_k(x)\}$ $(\varphi_1 = \varphi)$ в $E^1(M)$. Построим систему образующих в $\mathcal{G}$:

$$\varphi_k = \int \alpha(x)\,\varphi_k(x)\, dx, \quad \varphi_k^* = \int \varphi_k^*(x)\,\alpha^*(x)\, dx.$$

Элемент f может быть записан через образующие φ_k. Очевидно, что при этом

$$\int \varphi_1(x) \frac{\delta}{\delta\alpha(x)} f(\alpha^*, \alpha)\, dx = \frac{\delta}{\delta\varphi_1} f(\varphi^*, \varphi).$$

Поэтому достаточно доказать равенство

$$\int f_1\left(f_2 \frac{\delta}{\delta\varphi_1}\right)\Pi\, d\varphi^*\, d\varphi = -\int\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_1} f_1\right) f_2 \Pi\, d\varphi^*\, d\varphi. \quad (3.43)$$

Для доказательства (3.43) воспользуемся определением континуального интеграла. Построим подпространства F_p с базисом $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2p}\}$. Очевидно, что F_p образуют систему вложенных друг в друга подпространств и замыкание их суммы совпадает с F. Обозначим через $\mathcal{G}_p$ алгебру с образующими $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2p}$, $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{2p}^*$ и через f_{1p}, f_{2p} значения f_1, f_2 на $\mathcal{G}_p$.

Из формулы (3.14′) при $n = 4p$ вытекает, что

$$\int f_{1p}\left(f_{2p} \frac{\delta}{\delta\varphi_1}\right) d\varphi_{2p}^*\, d\varphi_{2p} \ldots d\varphi_1^*\, d\varphi_1 = \\ = -\int\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_1} f_{1p}\right) f_{2p}\, d\varphi_{2p}^*\, d\varphi_{2p} \ldots d\varphi_1^*\, d\varphi_1. \quad (3.44)$$

В силу определения континуального интеграла предел левой части (3.44) равен левой части (3.43), предел правой части — правой части (3.43). Тем самым формула (3.43), а с ней и вторая из формул (3.42) доказаны. Остальные формулы (3.42) доказываются аналогично. Формулы (3.42) играют в анализе на грассмановой алгебре роль, аналогичную той, которую играют обычные формулы интегрирования по частям.

10. Примеры. Пусть $\mathscr{G}$ — алгебра с инволюцией, $E^1 = F + F^*$, $\alpha(x)$ — обобщенный ортонормированный базис в F. Рассмотрим в E^1 оператор A. Его естественно задавать с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}(x, x') & A_{12}(x, x') \\ A_{21}(x, x') & A_{22}(x, x') \end{pmatrix}, \quad A_{ik}(x, x') = -A_{ki}(x', x).$$

Построим с помощью оператора A элемент пространства E^2 $f(\alpha^*, \alpha)$, равный

$$f(\alpha^*, \alpha) = \int [\alpha(x) A_{11}(x, x')\alpha(x') + \\ + 2\alpha(x) A_{12}(x, x')\alpha^*(x') + \alpha^*(x) A_{22}(x, x')\alpha^*(x')]\, dx\, dx'.$$

Элемент $f(\alpha^*, \alpha)$ играет роль, аналогичную роли квадратичной формы в бозевском случае. Условимся по аналогии с бозевским случаем записывать $f(\alpha^*, \alpha)$ сокращенно в виде

$$f = \alpha A_{11}\alpha + 2\alpha A_{12}\alpha^* + \alpha^* A_{22}\alpha^* \tag{3.45}$$

или в виде

$$f = (\alpha \ \ \alpha^*) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} = -A'_{ji}. \tag{3.46}$$

В частности, если $A_{12} = E$, $A_{11} = A_{22} = 0$, то $f = 2\alpha\alpha^*$. Вычислим гауссов интеграл $\int e^{\frac{1}{2} f(\alpha^* \alpha)} \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha$. Пользуясь формулой (3.16) и определением континуального интеграла, находим

$$\int e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{pmatrix}} \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha = \left[\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right]^{1/2}. \tag{3.47}$$

Стоящий в правой части (3.47) детерминант является обобщенным детерминантом Фредгольма (см. Введение, п. 3) при подходящем выборе конечномерных аппроксимаций.

Из (3.47), в частности, вытекает, что

$$\int e^{-\alpha^*\alpha} \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha = 1. \tag{3.48}$$

Вычислим вариационные производные от $e^{\frac{1}{2} f(\alpha^* \alpha)}$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}} &= (A_{11}\alpha + A_{12}\alpha^*)\, e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}}, \\
\frac{\delta}{\delta\alpha^*(x)} e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}} &= (A_{21}\alpha + A_{22}\alpha^*)\, e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}}, \\
e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}} \frac{\delta}{\delta\alpha} &= (\alpha A_{11} + \alpha^* A_{21})\, e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}}, \\
e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}} \frac{\delta}{\delta\alpha^*} &= (\alpha A_{12} + \alpha^* A_{22})\, e^{\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*) A \binom{\alpha}{\alpha^*}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Для получения формул (3.49) удобно пользоваться не непосредственно определением вариационных производных, а формулой (3.34).

В качестве следующего примера рассмотрим интегралы

$$\int \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_m)\,\alpha^*(y_n)\ldots\alpha^*(y_1)\,e^{-\int \alpha^*(x)\,\alpha(x)\,dx}\,\Pi\,d\alpha^*\,d\alpha = \\ = \delta_{mn}\sum_i \pm\,\delta(x_1-y_{i_1})\ldots\delta(x_m-y_{i_m}), \quad (3.50)$$

$$\int \alpha^*(x_1)\ldots\alpha^*(x_m)\,\alpha(y_n)\ldots\alpha(y_1)\,e^{-\int \alpha(x)\,\alpha^*(x)\,dx}\,\Pi\,d\alpha\,d\alpha^* = \\ = \delta_{mn}\sum_i \pm\,\delta(x_1-y_{i_1})\ldots\delta(x_m-y_{i_m}). \quad (3.50')$$

В этих формулах $+$ ставится в случае, если подстановка $i_1\ldots i_m$ четная, и $-$ в противном случае.

Формула (3.50) доказывается интегрированием по частям:

$$\alpha^*(y_n)\ldots\alpha^*(y_1)\,e^{-\int \alpha^*(x)\,\alpha(x)\,dx} = \frac{\delta}{\delta\alpha(y_n)}\ldots\frac{\delta}{\delta\alpha(y_1)}\,e^{-\int \alpha^*(x)\,\alpha(x)\,dx}.$$

Подставляя это тождество в левую часть (3.50) и интегрируя по частям, получаем правую часть. Аналогично доказывается (3.50′). Из формулы (3.50) вытекает следствие, которое в дальнейшем будет многократно использоваться:

$$\int\left(\int F(x_1,\ \ldots,\ x_m\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_n)\,\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_m)\times\right. \\ \left.\times\,\alpha^*(y_n)\ldots\alpha^*(y_1)\,d^mx\,d^ny\right)e^{-\int \alpha^*(x)\,\alpha(x)\,dx}\,\Pi\,d\alpha^*\,d\alpha = \\ = \delta_{mn}n!\int F(x_1,\ \ldots,\ x_n\,|\,x_1,\ \ldots,\ x_n)\,d^nx. \quad (3.51)$$

В этой формуле $F(x_1,\ \ldots,\ x_m\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_n)$ предполагается функцией, антисимметричной отдельно по $x_1,\ \ldots,\ x_m$ и отдельно по $y_1,\ \ldots,\ y_n$.

Заметим, что формула (3.51) по форме совпадает с соответствующей формулой для бозевского случая (см. (2.18)).

11. Алгебра функционалов, отвечающих векторам и операторам. В § 1, п. 7, матричной записи каждого ограниченного оператора и нормальной форме каждого ограниченного оператора, а также каждому вектору в пространстве состояний были поставлены в соответствие функционалы от функций с антикоммутирующими значениями, являющиеся формальными степенными рядами. Покажем, что все эти функционалы являются элементами некоторой грассмановой алгебры $\mathcal{G}$. Начнем с функционалов, отвечающих матричной записи операторов. Эти функционалы мы будем обозначать через $\tilde{A}(a^*,\ a)$. Напомним, что функционалы $\tilde{A}$ имеют вид

$$\tilde{A}(a^*,\ a) = \sum_{p,\ q}\frac{1}{\sqrt{p!\,q!}}\int A_{pq}(x_1,\ \ldots,\ x_p\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_q)\times \\ \times\,a^*(x_1)\ldots a^*(x_p)\,a(y_q)\ldots a(y_1)\,d^px\,d^qy, \quad (3.52)$$

где $A_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q)$ — матричный элемент оператора $\hat{A}$, причем $A_{pq}(x|y)$ является ядром ограниченного оператора из гильбертова пространства H^q функций с суммируемым квадратом от q переменных в гильбертово пространство H^p функций с суммируемым квадратом от p переменных. Символы $a(x)$, $a^*(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\{a(x),\ a(y)\} = \{a^*(x),\ a^*(y)\} = \{a(x),\ a^*(y)\} = 0. \qquad (3.53)$$

Рассмотрим множество $\mathscr{G}$ всех функционалов, имеющих вид

$$F(a^*,\ a) = \sum_{p,\ q} \frac{1}{\sqrt{p!\,q!}} \int F_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q) \times$$
$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_p)\, a(y_q) \ldots a(y_1)\, d^p x\, d^q y, \qquad (3.54)$$

где $F_{pq}(x|y)$ — ядра ограниченных операторов из H^q в H^p. Относительно всего ряда $F(a^*, a)$ мы не предполагаем, что он отвечает матричной записи какого бы то ни было оператора.

В $\mathscr{G}$ естественно вводятся операции линейного комбинирования и умножения; умножение определяется формулой (3.53). Нетрудно проверить, что $\mathscr{G}$ является грассмановой алгеброй, причем роль пространств E^n играют множества функционалов вида

$$F(a^*,\ a) = \sum_{p+q=n} \frac{1}{\sqrt{p!\,q!}} \int F_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q) \times$$
$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_p)\, a(y_q) \ldots a(y_1)\, d^p x\, d^q y. \qquad (3.55)$$

Проверим, что $\mathscr{G}$ замкнуто относительно операций линейного комбинирования и умножения. Замкнутость относительно линейного комбинирования очевидна, поскольку оно сводится к линейному комбинированию F_{pq}, а линейная комбинация ограниченных операторов снова является ограниченным оператором.

Замкнутость относительно умножения доказывается следующим образом. Пусть $F_1 \in \mathscr{G}$, $F_2 \in \mathscr{G}$, $\Phi = F_1 F_2$ — функционалы, $F^1_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q)$, $F^2_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q)$, $\Phi_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q)$ — функции, входящие в разложения этих функционалов в ряды вида (3.54). Производя умножение рядов, находим, что

$$\Phi_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q) = \sum_{\substack{p'+p''=p \\ q'+q''=q}} \sqrt{\frac{p!\,q!}{p'!\,q'!\,p''!\,q''!}} \times$$
$$\times F^1_{\{p'q'}(x_1, \ldots, x_{p'} | y_1, \ldots, y_{q'})\, F^2_{p''q''\}}(x_{p'+1}, \ldots, x_p | y_{q'+1}, \ldots, y_q). \qquad (3.56)$$

Значок $\{\ \}$ означает альтернирование отдельно по $x_1, \ldots, x_p$ и отдельно по $y_1, \ldots, y_q$.

Покажем, что оператор F_{pq} с ядром

$$F_{pq}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_q) =$$
$$= F^1_{p'q'}(x_1, \ldots, x_{p'} | y_1, \ldots, y_{q'})\, F^2_{p''q''}(x_{p'+1}, \ldots, x_p | y_{q'+1}, \ldots, y_q)$$

ограничен. Введем для краткости обозначения

$$\xi_1 = (x_1, \ldots, x_{p'}), \qquad \xi_2 = (x_{p'+1}, \ldots, x_p),$$
$$\eta_1 = (y_1, \ldots, y_{q'}), \qquad \eta_2 = (y_{q'+1}, \ldots, y_q),$$
$$F^1_{p'q'}(\xi_1, \eta_1) = F_1(\xi_1, \eta_1), \qquad F^2_{p''q''}(\xi_2, \eta_2) = F_2(\xi_2, \eta_2).$$

Ввиду изоморфизма гильбертовых пространств можно без ограничения общности считать, что переменные ξ_i, η_i пробегают одно и то же множество $\mathfrak{M}$ с мерой; пространства $H^{p'}$, $H^{p''}$, $H^{q'}$, $H^{q''}$ совпадают между собой и образуют пространство H функций с суммируемым квадратом на $\mathfrak{M}$. Рассмотрим гильбертово пространство H_2 функций K на $\mathfrak{M}$ от двух переменных с суммируемым квадратом. Следует показать, что оператор F в H_2 с ядром $F(\xi_1, \xi_2 \mid \eta_1, \eta_2) = F_1(\xi_1, \eta_1) F_2(\xi_2, \eta_2)$ ограничен.

Будем интерпретировать H_2 как пространство операторов Гильберта — Шмидта в H: $(K_1, K_2) = \operatorname{Sp} K_1 K_2^*$. В таком случае

$$\int F(\xi_1, \xi_2 \mid \eta_1, \eta_2) K(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 = F_1 K F_2, \qquad K \in H_2.$$

Используя известные неравенства, получаем

$$\operatorname{Sp}(F_1 K F_2 F_2^* K^* F_1^*) \leqslant \| F_1 F_1^* \| \operatorname{Sp}(K F_2 F_2^* K^*) = \\ = \| F_1 F_1^* \| \operatorname{Sp}(K^* K F_2 F_2^*) \leqslant \| F_1 F_1^* \| \| F_2 F_2^* \| \operatorname{Sp} K^* K.$$

Таким образом, $\| F \| \leqslant \| F_1 \| \| F_2 \|$. (Нетрудно показать, что на самом деле $\| F \| = \| F_1 \| \| F_2 \|$.)

Из ограниченности оператора $F = F_{pq}$ очевидным образом следует ограниченность оператора Φ_{pq} с ядром (3.56) и тем самым замкнутость $\mathcal{G}$ относительно умножения. Остальные пункты определения грассмановой алгебры проверяются еще более просто.

Рассмотрим в пространстве E^n функционалов вида (3.55) множество $\tilde{E}^n$ функционалов, которые являются производящими для ядерных операторов. Пусть $F_1 \in \tilde{E}^n$, $F_2 \in E^n$, $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ — соответствующие операторы. Введем в E^n скалярное произведение, положив

$$(F_1, F_2) = \operatorname{Sp} \hat{F}_1 \hat{F}_2^* \tag{3.57}$$

($\hat{F}_2^*$ — оператор, сопряженный к $\hat{F}_2$). Наконец, введем в $\mathcal{G}$ инволюцию, положив, если F задается рядом (3.55),

$$F^*(a^*, a) = \sum_{p,\, q} \frac{1}{\sqrt{p!q!}} \int \overline{F_{pq}(x_1, \ldots, x_p \mid y_1, \ldots, y_q)} \times \\ \times a^*(y_1) \ldots a^*(y_q)\, a(x_p) \ldots a(x_1)\, d^p x\, d^q y. \tag{3.58}$$

(Очевидно, что если функционал F отвечает оператору $\hat{F}$, то функционал F^* отвечает оператору $\hat{F}^*$.)

Легко проверить, что скалярное произведение (3.57) и инволюция (3.58) превращают $\mathcal{G}$ в алгебру со скалярным произведением и инволюцией в смысле определений, данных в пп. 5 и 6. Символы $a(x)$, $a^*(x)$ являются системой инволютивных образующих в $\mathcal{G}$ в смысле определения, данного в п. 6.

Доказательство всех этих утверждений крайне просто, и останавливаться мы на них не будем.

Таким образом, доказано, что производящие функционалы для матричной записи ограниченных операторов являются элементами грассмановой алгебры $\mathcal{G}$ со скалярным произведением и инволюцией.

Пусть теперь $A(a^*, a)$ — функционал, отвечающий записи оператора $\hat{A}$ в нормальной форме, $\tilde{A}(a^*, a)$ — функционал, отвечающий записи этого функционала в матричном виде. Согласно формуле (1.38),

$$A(a^*, a) = \tilde{A}(a^*, a)\, e^{-\int a^*(x)\, a(x)\, dx}.$$

Нетрудно проверить непосредственно, что $e^{-\int a^*(x)\, a(x)\, dx}$ есть функционал, отвечающий матричной записи ограниченного оператора. Поэтому $e^{-\int a^*(x)\, a(x)\, dx} \in \mathcal{G}$. Тем самым $A(a^*, a) \in \mathcal{G}$.

В алгебру $\mathcal{G}$ входят элементы вида

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(a^*) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)\, a^*(x_1) \ldots a^*(x_n)\, d^n x, \\ &\sum_n \int |\Phi_n|^2\, d^n x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

Элементы $\Phi(a^*)$ будем отождествлять с производящими функционалами для векторов пространства состояний (см. § 1, п. 7).

Итак, все три типа интересующих нас функционалов — функционалы $\tilde{A}(a^*, a)$ и $A(a^*, a)$, отвечающие операторам, и функционалы $\Phi(a^*)$, отвечающие векторам, — оказываются элементами одной и той же грассмановой алгебры $\mathcal{G}$.

В заключение этого пункта покажем, что в алгебре $\mathcal{G}$ имеется подалгебра $\mathcal{G}_1$, которая является нормированной грассмановой алгеброй и которая также содержит функционалы $\tilde{A}(a^*, a)$, $A(a^*, a)$ и $\Phi(a^*)$.

Рассмотрим с этой целью в пространстве $L_2(M)$ ортонормированный базис $\{f_k(x)\}$. Рассмотрим множество $\mathcal{G}_1$ функционалов F вида (3.54), обладающих свойством

$$\left| \int F_{pq}(x_1, \ldots, x_p \mid y_1, \ldots, y_q)\, f_{k_1}(x_1) \ldots f_{k_p}(x_p) \times \right.$$
$$\left. \times \overline{f_{l_1}(y_1)} \ldots \overline{f_{l_q}(y_q)}\, d^p x\, d^q y \right| \leqslant c. \tag{3.60}$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части под знаком модуля, через $F_{pq}(k_1, \ldots, k_p \mid l_1, \ldots, l_q)$.

Легко видеть, что функционалы, отвечающие матричной записи ограниченных операторов, принадлежат $\mathcal{G}_1$. В самом деле, если $\tilde{A}(a^*, a)$ — функционал, отвечающий оператору $\hat{A}$, то $A_{pq}(k_1, \ldots, k_p \mid l_1, \ldots, l_q)$ — матричный элемент оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе. Поэтому

$$|A_{pq}(k_1, \ldots, k_p \mid l_1, \ldots, l_q)| \leqslant \|\hat{A}\|. \tag{3.61}$$

Введем в пространство функционалов $F(a^*, a)$ норму, положив

$$\|F\| = \sup_{\sum_k |\alpha_k| = 1} \sum_{p,q} \sum_{k,l} \frac{1}{\sqrt{p!q!}} |F_{pq}(k_1, \ldots, k_p \mid l_1, \ldots, l_q)| \times$$
$$\times |\alpha_{k_1}| \ldots |\alpha_{k_p}| |\alpha_{l_1}| \ldots |\alpha_{l_q}|.$$

Используя неравенство (3.60), находим

$$\sum_{p,\,q}\sum_{k,\,l}\frac{1}{\sqrt{p!q!}}\,|F_{pq}(k_1,\ \ldots,\ k_p\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_q)|\,|\alpha_{k_1}|\ldots|\alpha_{k_p}|\,|\alpha_{l_1}|\ldots|\alpha_{l_q}|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_p\frac{1}{\sqrt{p!}}\left(\sum_k|\alpha_k|\right)^p\sum_q\frac{1}{\sqrt{q!}}\left(\sum_l|\alpha_l|\right)^q=cU^2\left(\sum_k|\alpha_k|\right),$$

где $U(z)=\sum\frac{1}{\sqrt{n!}}z^n$. В частности, если $F=\tilde{A}(a^*,\ a)$ — функционал, отвечающий матричной записи оператора $\hat{A}$, то, как следует из (3.61),

$$\|F\|=\|\tilde{A}\|\leqslant\|\hat{A}\|\,U^2(1).$$

Покажем, что введенная норма удовлетворяет условию

$$\|F_1F_2\|\leqslant\|F_1\|\,\|F_2\|. \tag{3.62}$$

Обозначим через F_0 произведение функционалов $F_0=F_1F_2$, через $F^i_{pq}(x_1,\ \ldots,\ x_p\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_q)$ — коэффициенты разложений функционалов F_i, $i=0,\ 1,\ 2$, в ряды (3.54). Пусть далее

$$F^i_{pq}(k_1,\ \ldots,\ k_p\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_q)=\int F^i_{pq}(x_1,\ \ldots,\ x_p\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_q)\times$$
$$\times f_{k_1}(x_1)\ldots f_{k_p}(x_p)\,\bar{f}_{l_1}(y_1)\ldots\bar{f}_{l_q}(y_q)\,d^px\,d^qy.$$

Легко видеть, что

$$F^0_{pq}(k_1,\ \ldots,\ k_p\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_q)=\sum_{\substack{p'+p''=p\\ q'+q''=q}}\sqrt{\frac{p!q!}{p'!p''!q'!q''!}}\times$$
$$\times F^1_{\{p'q'}(k_1,\ldots,k_{p'}\,|\,l_1,\ldots,l_{q'})\,F^2_{p''q''\}}(k_{p'+1},\ldots,k_p\,|\,l_{q'+1},\ldots,l_q). \tag{3.63}$$

(Знак $\{\ \}$ означает альтернирование в отдельности по $k_1,\ \ldots,\ k_p$ и по $l_1,\ \ldots,\ l_q$.)

Из (3.63), учитывая, что $\sum|\alpha_k|=1$, получаем

$$\sum_{p,\,q,\,k,\,l}\frac{1}{\sqrt{p!q!}}\,|F^0_{pq}(k_1,\ \ldots,\ k_p\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_q)|\,|\alpha_{k_1}|\ldots|\alpha_{l_q}|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{p',\,p'',\,q',\,q'',\,k,\,l}\sqrt{\frac{1}{p'!\,p''!\,q'!\,q''!}}\,|F^1_{p'q'}(k_1,\ \ldots,\ k_{p'}\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_{q'})|\times$$
$$\times|F^2_{p''q''}(k_{p'+1},\ \ldots,\ k_p\,|\,l_{q'+1},\ \ldots,\ l_q)|\,|\alpha_{k_1}|\ldots|\alpha_{l_q}|=$$
$$=\sum_{p',\,q',\,k,\,l}\frac{1}{\sqrt{p'!q'!}}\,|F^1_{p'q'}(k_1,\ \ldots,\ k_{p'}\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_{q'})|\times$$
$$\times|\alpha_{k_1}|\ldots|\alpha_{k_{p'}}|\,|\alpha_{l_1}|\ldots|\alpha_{l_{q'}}|\times$$
$$\times\sum_{p'',\,q'',\,k,\,l}\frac{1}{\sqrt{p''!q''!}}\,|F^2_{p''q''}(k_1,\ \ldots,\ k_{p''}\,|\,l_1,\ \ldots,\ l_{q''}|\times$$
$$\times|\alpha_{k_{p'+1}}|\ldots|\alpha_{k_{p''}}|\,|\alpha_{l_{q'+1}}|\ldots|\alpha_{l_{q''}}|\leqslant\|F^1\|\,\|F^2\|.$$

Таким образом, свойство нормы (3.62) доказано и тем самым доказано, что $\mathcal{G}_1$ является нормированной алгеброй.

Пополнив $\mathcal{G}_1$ по введенной норме, мы получим полную нормированную алгебру.

Принадлежность функционалов $A(a^*, a)$ и $\Phi(a^*)$ алгебре $\mathscr{G}_1$ доказывается так же, как аналогичный факт в основном тексте.

Доказанное в этой части настоящего пункта утверждение является аналогом теоремы 3, доказанной в § 1, п. 9.

12. Скалярное произведение в пространстве состояний. Пусть $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$ — векторы пространства состояний, $\Phi_1(a^*)$, $\Phi_2(a^*)$ — отвечающие им функционалы — элементы алгебры $\mathscr{G}$. Введем в множество $\mathscr{L}$ функционалов, отвечающих векторам состояния, скалярное произведение по формуле

$$(\Phi_1, \Phi_2) = (\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2). \tag{3.64}$$

Скалярное произведение (3.64) превращает $\mathscr{L}$ в гильбертово пространство, служащее реализацией пространства состояний.

Имеет место

Теорема 1. 1) *Скалярное произведение* (3.64) *может быть задано формулой*

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \Phi_1(a^*)\,\Phi_2^*(a)\,e^{-aa^*}\Pi\,da\,da^* \tag{3.65}$$

или формулой

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \Phi_2^*(a)\,\Phi_1(a^*)\,e^{-a^*a}\Pi\,da^*\,da, \tag{3.66}$$

где $\Phi_2^*(a)$ — *элемент, сопряженный* $\Phi_2(a^*)$ (см. (3.30)).

2) *Для того чтобы функционал* Φ *принадлежал пространству* $\mathscr{L}$, *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\int \Phi(a^*)\,\Phi^*(a)\,e^{-aa^*}\,\Pi\,da\,da^* < \infty \tag{3.65'}$$

или неравенства

$$\int \Phi^*(a)\,\Phi(a^*)\,e^{-a^*a}\,\Pi\,da^*\,da < \infty. \tag{3.66'}$$

В формулах (3.65)—(3.66') и ниже использовано сокращенное обозначение $a^*a = \int a^*(x)\,a(x)\,dx$ (см. с. 67).

Формула (3.65) доказывается с помощью (3.50'), формула (3.66) — с помощью (3.50). Доказательство этой теоремы отличается от доказательства аналогичной теоремы для бозевского случая (теорема 1, § 2) лишь упрощением, связанным с тем, что пространство $\mathscr{H}_F$ для случая конечного числа степеней свободы конечномерно. Поэтому мы опустим доказательство.

Следующие ниже формулы (3.67)—(3.72) легко доказываются для случая, когда входящие в эти формулы функционалы являются полиномиальными. Доказательство их в общем случае требует привлечения теоремы 1. Мы этих доказательств приводить не будем, так как они слово в слово повторяют доказательство аналогичных формул в бозевском случае.

Обратим внимание на то, что все формулы операторного исчисления (3.65)—(3.74), за исключением формулы для следа (3.72), совпадают по написанию с аналогичными им формулами в бозевском случае.

13. Действие оператора на вектор. Пусть $\hat{\Psi}=\hat{A}\hat{\Phi}$; $\Phi(a^*)$, $\Psi(a^*)$ — функционалы, отвечающие векторам $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$; $\tilde{A}(a^*, a)$ — функционал, отвечающий матричной записи оператора $\hat{A}$; $A(a^*, a)$ — функционал, отвечающий его нормальной форме. Найдем выражение Ψ через Φ и $\tilde{A}$. Комбинируя формулу (0.1) Введения и формулу (3.50), находим

$$\Psi(a^*)=\int \tilde{A}(a^*, \alpha)\,\Phi(\alpha^*)\,e^{-\alpha^* a}\prod d\alpha^*\,d\alpha. \qquad (3.67)$$

Используя связь между функционалами $\tilde{A}(a^*, a)$ и $A(a^*, a)$ (формула (1.38)), выражаем Ψ через Φ и A:

$$\Psi(a^*)=\int A(a^*, \alpha)\,\Phi(\alpha^*)\,e^{-(\alpha^*-a^*)\alpha}\prod d\alpha^*\,d\alpha. \qquad (3.68)$$

14. Произведение операторов. Выразим функционал, отвечающий оператору $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$, через функционалы, отвечающие $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Начнем с функционалов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, отвечающих матричной записи операторов. Комбинируя формулу (0.2) введения с (3.50), находим

$$\tilde{C}(a^*, a)=\int \tilde{A}(a^*, \alpha)\,\tilde{B}(\alpha^*, a)\,e^{-\alpha^*\alpha}\prod d\alpha^*\,d\alpha. \qquad (3.69)$$

Переходя от функционалов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ к A, B, C по формулам (1.38), получаем

$$C(a^*, a)=\int A(a^*, \alpha)\,B(\alpha^*, a)\,e^{-(\alpha^*-a^*)(\alpha-a)}\prod d\alpha^*\,d\alpha. \qquad (3.70)$$

15. След оператора. Пусть $\tilde{A}(a^*, a)$ — функционал, отвечающий матричной записи ядерного оператора $\hat{A}$. Подобно тому, как это было сделано в бозевском случае, для следа $\hat{A}$ находим с помощью формулы (3.50′) выражение

$$\operatorname{Sp}\hat{A}=\int \tilde{A}(a^*, a)\,e^{-aa^*}\prod da\,da^*. \qquad (3.71)$$

Переходя по формуле (1.37) от функционала $\tilde{A}$ к функционалу A, получаем

$$\operatorname{Sp}\hat{A}=\int A(a^*, a)\,e^{-2aa^*}\prod da\,da^*. \qquad (3.72)$$

16. Другое определение следа. Изменим определение следа, положив

$$\operatorname{Sp}_1\hat{A}=\int A\left(\frac{a^*}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)e^{aa^*}\prod da\,da^*. \qquad (3.73)$$

Пусть, как обычно, $a=a(x)$, $a^*=a^*(x)$. С помощью правила замены переменных (3.15) нетрудно проверить, что в случае, когда x пробегает конечное множество, состоящее из n элементов, и оператор $\hat{A}$, следовательно, является линейным оператором в 2^n-мерном пространстве, следы, определяемые формулами (3.72) и (3.73), связаны соотношением

$$\operatorname{Sp}_1\hat{A}=\frac{1}{2^n}\operatorname{Sp}\hat{A}. \qquad (3.74)$$

Естественно, в бесконечномерном случае такая связь сохраниться не может. В этом случае оказывается, что следы (3.72) и (3.73) определены на разных классах операторов: (3.72) — на ядерных операторах, (3.73) — на кольце, состоящем из операторов вида

$$\hat{A} = \sum_{m, n} A_{mn}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\, \hat{a}^*(x_1) \ldots \hat{a}^*(x_m)\, \hat{a}(y_1) \ldots \hat{a}(y_n)\, d^m x\, d^n y. \tag{3.75}$$

(Сумма, стоящая в правой части, конечна.) Операторы (3.75) образуют кольцо $\mathcal{A}$, содержащее единичный оператор E, причем очевидно, $\mathrm{Sp}_1 E = 1$. След (3.73) обладает основными свойствами обычного следа: он является линейной функцией на элементах $\mathcal{A}$ и $\mathrm{Sp}\, \hat{A}_1 \hat{A}_2 = \mathrm{Sp}\, \hat{A}_2 \hat{A}_1$.

Рассмотрим операторы

$$\hat{q}(x) = \hat{a}(x) + \hat{a}^*(x), \qquad \hat{p}(x) = \frac{1}{i}(\hat{a}^*(x) - \hat{a}(x)).$$

Кольцо операторов вида

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{N} \int A_k(x_1, \ldots, x_k)\, \hat{p}(x_1) \ldots \hat{p}(x_k)\, d^k x \tag{3.76}$$

обозначим через $\tilde{\mathcal{P}}$, а кольцо операторов вида

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{N} \int A_k(x_1, \ldots, x_k)\, \hat{q}(x_1) \ldots \hat{q}(x_k)\, d^k x \tag{3.77}$$

— через $\tilde{Q}$. Функции $A(x_1, \ldots, x_k)$ в обоих случаях обладают суммируемым квадратом.

Очевидно, что $\tilde{\mathcal{P}} \subset A$ и $\tilde{Q} \subset \mathcal{A}$. Поэтому след (3.73) определен как на элементах $\tilde{\mathcal{P}}$, так и на элементах $\tilde{Q}$. Слабое замыкание кольца $\tilde{\mathcal{P}}$ обозначим через $\mathcal{P}$, слабое замыкание $\tilde{Q}$ — через Q.

Можно показать, что след (3.73) продолжается по непрерывности на $\mathcal{P}$ и на Q. Кольца $\mathcal{P}$ и Q оказываются факторами типа II_1 (см. по этому поводу также п. 2 настоящего параграфа). Нетрудно проверить, что если $\hat{A}$ имеет вид (3.76) или (3.77), то $\mathrm{Sp}_1 \hat{A} = A_0$.

Сформулированные в этом пункте утверждения являются перефразировкой результатов Дж. фон Неймана [2]. См. также работу автора [5].

Глава II

ЛИНЕЙНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Каждое унитарное преобразование $\hat{U}$ в пространстве состояний порождает автоморфизм в алгебре операторов: $\hat{A} \to \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$. В частности, если $\hat{a}^*(f)$, $\hat{a}(f)$ — операторы рождения и уничтожения, то операторы $\hat{b}^*(f) = \hat{U}\hat{a}^*(f)\hat{U}^{-1}$, $\hat{b}(f) = \hat{U}\hat{a}(f)\hat{U}^{-1}$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{a}^*(f)$, $\hat{a}(f)$. Возникающее таким образом соответствие между операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^*$ и $\hat{b}$, $\hat{b}^*$ называется собственным каноническим преобразованием.

В более широком смысле каноническим преобразованием называется всякая система операторов $\hat{b}(f)$, $\hat{b}^*(f)$, удовлетворяющая тем же перестановочным соотношениям, что и $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$. Каноническое преобразование называется линейным, если операторы $\hat{b}(f)$, $\hat{b}^*(f)$ линейно выражаются через операторы рождения и уничтожения $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$. Не составляет труда доказать, что в случае конечного числа степеней свободы всякое каноническое преобразование является собственным[1]). Характерной чертой случая бесконечного числа степеней свободы является наличие несобственных канонических преобразований. Несобственные канонические преобразования часто возникают в квантовой теории поля. Их роль там отчетливо видна на примере модели Тирринга.

В настоящей главе изучаются линейные канонические преобразования: в § 4 — для бозевского случая, в § 5 — для фермиевского. Устанавливаются критерии того, что линейное каноническое преобразование является собственным, и восстанавливается для этого случая унитарный оператор $\hat{U}$ в пространстве состояний, осуществляющий это каноническое преобразование.

В конце § 4, 5 устанавливаются формулы для канонического преобразования операторов.

Отметим в заключение, что канонические преобразования в квантовой механике, так же как и канонические преобразования в обычной механике, могут быть использованы для приведения

[1]) См. теорему 4 § 1 и примечание [2]) на с. 26.

того или иного оператора к простейшему каноническому виду. Однако, в то время как для обычной механики хорошо известно описание всех (а не только линейных) канонических преобразований, в квантовой механике такая задача в настоящее время не решена.

§ 4. Бозевский случай

1. Основные определения. Пусть L — гильбертово пространство с инволюцией, $\hat{a}^*(\varphi)$ и $\hat{a}(\varphi)$, $\varphi \in L$, — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие бозевским перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} [\hat{a}(\varphi_1),\ \hat{a}^*(\varphi_2)] &= \varphi_1\varphi_2 = (\varphi_1,\ \varphi_2^*), \\ [\hat{a}(\varphi_1),\ \hat{a}(\varphi_2)] &= [\hat{a}^*(\varphi_1),\ \hat{a}^*(\varphi_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Рассмотрим в L плотную область D, инвариантную относительно инволюции. Пусть Φ и Ψ — операторы, определенные в D и обладающие сопряженными, определенными на общей плотной области D_1, также инвариантной относительно инволюции. Пусть далее f — функционал в D_1. Удобно считать, что пространство D_1' функционалов на D_1 является расширением пространства L: $D_1' \supset L \supset D_1$. На пространство D_1' естественным образом продолжается инволюция в L. Значение функционала $f \in D_1'$ на элементе $\varphi \in D_1$ будем обозначать $(\varphi,\ f^*)$ или φf. В случае, когда $f \in L$, $(\varphi,\ f)$ — скалярное произведение φ и f, $\varphi f = (\varphi,\ f^*)$ — соответствующая билинейная форма.

Образуем операторы $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$ $(\varphi \in D_1)$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}(\varphi) &= \hat{a}(\varphi\Phi) + \hat{a}^*(\varphi\Psi) + \varphi f, \\ \hat{b}^*(\varphi) &= \hat{a}(\varphi\overline{\Psi}) + \hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi}) + \varphi f^*. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Если уравнения (4.2) разрешимы относительно $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ и операторы $\hat{b}(\varphi)$ и $\hat{b}^*(\varphi)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} [\hat{b}(\varphi_1),\ \hat{b}^*(\varphi_2)] &= \varphi_1\varphi_2, \\ [\hat{b}(\varphi_1),\ \hat{b}(\varphi_2)] &= [\hat{b}^*(\varphi_1),\ \hat{b}^*(\varphi_2)] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.1'}$$

то формула (4.2), устанавливающая связь между операторами $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ и $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$, называется *линейным неоднородным каноническим преобразованием*.

Если функционал f равен нулю, то преобразование (4.2) называется *линейным однородным каноническим преобразованием*.

Операторы Φ и Ψ, задающие преобразование (4.2), не являются произвольными. Между ними существуют соотношения, которые будут установлены в следующем пункте.

Если пространство L реализовано согласованным с инволюцией образом с помощью функций с суммируемым квадратом на некотором множестве, снабженном мерой, то операторы Φ, Ψ, $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Psi}$ задаются ядрами соответственно $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$, $\overline{\Phi}(x, y)$, $\overline{\Psi}(x, y)$. Функционал f задается функцией $f(x)$. Функции $f(x)$, $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ являются, вообще говоря, обобщенными [1]). Операторы $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$, $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$ порождаются операторными обобщенными функциями $\hat{a}(x)$, $\hat{a}^*(x)$, $\hat{b}(x)$, $\hat{b}^*(x)$: $\hat{a}(\varphi)=\int \varphi(x)\hat{a}(x)\,dx$ и т. д. Очевидно, что формулы (4.2) могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}(x) &= \int \Phi(x, y)\hat{a}(y)\,dy + \int \Psi(x, y)\hat{a}^*(y)\,dy + f(x), \\ \hat{b}^*(x) &= \int \overline{\Psi}(x, y)\hat{a}(y)\,dy + \int \overline{\Phi}(x, y)\hat{a}^*(y)\,dy + f^*(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

Рассмотрим случай, когда пространство L имеет конечную размерность N.

В § 1 было отмечено (см. с. 26), что в этом случае все неприводимые представления соотношений коммутации унитарно эквивалентны. Отсюда легко следует, что операторы $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ и $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$ связаны соотношением

$$\hat{b}(\varphi)=\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}, \qquad \hat{b}^*(\varphi)=\hat{U}\hat{a}^*(\varphi)\hat{U}^{-1}, \qquad (4.4)$$

где $\hat{U}$ — унитарный оператор в $\mathscr{H}_B$. (Из неприводимости семейства операторов $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ легко следует, что оператор $\hat{U}$ определен соотношением (4.4) однозначно с точностью до множителя.) В общем случае, когда L — бесконечномерно, имеются две возможности: либо, как и в конечномерном случае, существует унитарный оператор $\hat{U}$, удовлетворяющий условиям (4.4), либо такого оператора не существует.

В первом случае каноническое преобразование будем называть *собственным*, во втором — *несобственным* [2]).

2. Соотношения между операторами Φ и Ψ. Подставляя в (4.1′) $\hat{b}(\varphi)$ и $\hat{b}^*(\varphi)$ из (4.2) и пользуясь формулами (4.1), находим соотношения между операторами Φ и Ψ:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi\Psi'-\Psi\Phi'=0, \quad \overline{\Phi}\Psi^*-\overline{\Psi}\Phi^*=0, \\ &\Phi\Phi^*-\Psi\Psi^*=E, \quad \overline{\Phi}\Phi'-\overline{\Psi}\Psi'=E. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Стоящие в левой части выражения имеют смысл эрмитовых форм на множестве D_1, на котором определены операторы Ψ^*, Φ^*, например $(\Phi\Psi' f, g)=(\Psi' f, \Phi^* g)$, $f, g\in D_1$.

Рассмотрим матрицу $\mathcal{A}$, состоящую из операторов Φ, Ψ, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

---

[1]) См. примечание [2]) на с. 11.

[2]) Нетрудно показать (см. с. 81), что если существует какой-нибудь оператор, который определен на вакуумном векторе и удовлетворяет соотношению (4.4), то этот оператор лишь множителем отличается от унитарного.

Матрицу $\mathcal{A}$ будем называть *матрицей канонического преобразования*. Легко видеть, что условия (4.5) эквивалентны следующему:

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^* & -\Psi' \\ -\Psi^* & \Phi' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\mathcal{A}$ имеет правую обратную. Согласно определению, каноническое преобразование обратимо. Это означает, что матрица $\mathcal{A}$ имеет левую обратную. Так как левый обратный оператор равен правому (если оба существуют), то, следовательно, матрица $\mathcal{A}$ имеет двустороннюю обратную, которая равна

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \Phi^* & -\Psi' \\ -\Psi^* & \Phi' \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Легко видеть, что произведению канонических преобразований отвечает произведение соответствующих матриц. Используя то обстоятельство, что матрица канонического преобразования имеет обратную, нетрудно проверить, что линейные неоднородные канонические преобразования образуют группу. Однородные преобразования образуют, очевидно, подгруппу этой группы.

Пользуясь тем обстоятельством, что $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}=E$, получаем в дополнение к (4.5) соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\Phi'\overline{\Psi}-\Psi^*\Phi=0, \quad \Phi^*\Psi-\Psi'\overline{\Phi}=0, \\ &\Phi^*\Phi-\Psi'\overline{\Psi}=E, \quad \Phi'\overline{\Phi}-\Psi^*\Psi=E. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Стоящие в левой части выражения имеют смысл эрмитовых форм на плотном множестве D, на котором определены Φ, Ψ, например $(\Phi'\overline{\Psi}f,\ g)=(\overline{\Psi}f,\ \overline{\Phi}g)$, $f,\ g\in D$.

Отметим два важных свойства канонических преобразований, которые вытекают из соотношений (4.5) и (4.8).

1) Оператор Φ обладает ограниченным обратным. В самом деле, из (4.5), (4.8) следует, что

$$\Phi\Phi^*=E+\Psi\Psi^*, \qquad \Phi^*\Phi=E+\Psi'\overline{\Psi}.$$

Итак, $\Phi^*\Phi$ и $\Phi\Phi^*$ обладают ограниченными обратными. Отсюда следует, что $\Phi=U\sqrt{\Phi^*\Phi}$, где U — унитарный оператор, и следовательно, что существует и ограничен оператор $\Phi^{-1}=(\Phi^*\Phi)^{-1/2}U^{-1}$.

2) Матрица $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ канонического преобразования представима в виде

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \overline{U} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \overline{\Psi}_1 & \overline{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где U — унитарный и $\Phi_1=\sqrt{\Phi^*\Phi}$ — эрмитов положительно определенный операторы. Каждый из сомножителей правой части является матрицей канонического преобразования. Свойство 2) очевидным образом следует из свойства 1).

В заключение этого пункта сделаем еще несколько замечаний.

Рассмотрим матрицу $I=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что условия (4.5) и (4.8) эквивалентны условиям

$$\mathcal{A}I\mathcal{A}'=I, \quad \mathcal{A}'I\mathcal{A}=I, \tag{4.10}$$

где $\mathcal{A}'$ — транспонированная матрица $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}'=\begin{pmatrix} \Phi & \Psi^* \\ \Psi' & \Phi^* \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ матрицу

$$\mathcal{B}=U\mathcal{A}U^{-1}, \tag{4.11}$$

где $\mathcal{A}$ — матрица канонического преобразования. Выполняя матричное умножение, получаем

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} A&=\operatorname{Re}(\Phi+\Psi), & B&=-\operatorname{Im}(\Phi-\Psi), \\ C&=\operatorname{Im}(\Phi+\Psi), & D&=\operatorname{Re}(\Phi-\Psi). \end{aligned} \right\} \tag{4.12}$$

Нетрудно проверить, что матрица $\mathcal{B}$ по-прежнему удовлетворяет условию (4.10) и, более того, множество матриц $\mathcal{B}$ вида (4.11) совпадает с множеством всех вещественных матриц, удовлетворяющих условию (4.10)[1]. Умножая (4.10) справа на I и пользуясь тем, что $I^2=-E$, находим, что матрица $\mathcal{B}^{-1}$ имеет вид

$$\mathcal{B}^{-1}=UI\mathcal{A}'IU^{-1}=\begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

3. Собственные канонические преобразования. В этом пункте мы находим критерий того, что каноническое преобразование, задаваемое операторами Φ, Ψ и функционалом f, является собственным[2].

Теорема 1. *Каноническое преобразование*

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}(\varphi)&=\hat{a}(\varphi\Phi)+\hat{a}^*(\varphi\Psi)+\varphi f, \\ \hat{b}^*(\varphi)&=\hat{a}(\varphi\overline{\Psi})+\hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi})+\varphi f^* \end{aligned} \right\} \tag{4.14}$$

является собственным тогда и только тогда, когда

1) Ψ — *оператор Гильберта — Шмидта*,

2) $f\in L$.

Прежде чем переходить к доказательству, заметим, что, согласно (4.5), $\Phi\Phi^*=E+\Psi\Psi^*$. Если каноническое преобразование является собственным, то $\Psi\Psi^*$ — ядерный оператор, и, следовательно, у оператора $\Phi\Phi^*$ существует детерминант Фредгольма.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы каноническое преобразование было*

---

[1]) Конечномерные матрицы, удовлетворяющие условиям (4.10), называются *симплектическими*. Они образуют группу, которая называется *симплектической*. По аналогии с конечномерным случаем группу операторов, удовлетворяющих условиям (4.10), естественно называть *бесконечномерной симплектической группой*.

[2]) См. книгу Фридрихса [1].

собственным, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве состояний существовал вектор $\hat{F}_0$, *удовлетворяющий уравнениям*

$$\hat{b}(\varphi)\hat{F}_0=0 \tag{4.15}$$

при любом $\varphi\in L$, *для которого определен оператор* $b(\hat{\varphi})$.

Вектор $\hat{F}_0$ будем называть *вакуумным по отношению к* $\hat{b}(\varphi)$.

Рассмотрим подпространство $\tilde{\mathscr{H}}\subset\mathscr{H}_B$, состоящее из векторов вида

$$\hat{\Phi}=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}\int K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\hat{b}^*(x_1)\ldots\hat{b}^*(x_n)\,d^nx\hat{F}_0. \tag{4.16}$$

Согласно теореме 4 § 1, существует изометрическое взаимно однозначное отображение $\hat{U}$ пространства $\tilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}_B$ такое, что $\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}=\hat{b}(\varphi)$. Покажем, что $\tilde{\mathscr{H}}=\mathscr{H}_B$. В самом деле, $\tilde{\mathscr{H}}$ инвариантно относительно $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$. Как мы знаем, операторы $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ выражаются линейно через $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$. Следовательно, пространство $\tilde{\mathscr{H}}$ инвариантно относительно $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$. Согласно следствию 3, из теоремы 4 § 1 вытекает, что $\tilde{\mathscr{H}}=\mathscr{H}_B$. Отсюда в свою очередь, очевидно, следует, что $\hat{U}$ — унитарный оператор в $\mathscr{H}_B$.

Замечание. Из леммы 1 вытекает, что если $\hat{U}_1$ — произвольный оператор, удовлетворяющий условию (4.4) и определенный на вакуумном векторе, то $\hat{U}_1$ лишь множителем отличается от унитарного. В самом деле, рассмотрим вектор $\hat{F}_0=\hat{U}_1\hat{\Phi}_0$, где $\hat{\Phi}_0$ — вакуумный вектор. Очевидно, что вектор $\hat{F}_0$ удовлетворяет уравнениям $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_0=0$. Согласно лемме 1, отсюда следует, что $\hat{b}(\varphi)=\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}$, где $\hat{U}$ — унитарный оператор. Очевидно, что оператор $\hat{U}^{-1}\hat{U}_1$ перестановочен с $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$ и определен на вакуумном векторе. Поэтому, согласно теореме 4 § 1, $\hat{U}^{-1}\hat{U}_1=\lambda E$, $\hat{U}_1=\lambda\hat{U}$ (см. примечание на с. 78).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть

$$\hat{F}_0=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}\int K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\hat{a}^*(x_1)\ldots\hat{a}^*(x_n)\,d^nx\hat{\Phi}_0 \tag{4.17}$$

есть вектор, удовлетворяющий условию (4.15). Подставляя в левую часть (4.15) выражение $\hat{b}(x)$, получаем для определения функций K_n систему уравнений

$$\int\Phi(x,\ y)\,K_{n+1}(y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\,dy=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(\Psi(x,\ x_1)\,K_{n-1}(x_2,\ \ldots,\ x_n)+\ldots$$
$$\ldots+\Psi(x,\ x_n)\,K_{n-1}(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}))-\frac{1}{\sqrt{n+1}}f(x)\,K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

Так как оператор Φ имеет ограниченный обратный, то эти уравнения разрешимы относительно K_{n+1}:

$$K_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(C(x, x_1) K_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + C(x, x_n) K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} g(x) K_n(x_1, \ldots, x_n), \quad (4.18)$$

где $C(x, y)$ означает ядро оператора $C = \Phi^{-1}\Psi$, $g(x) = (\Phi^{-1}f)(x)$. Из (4.18) видно, что $\hat{F}_0 \neq 0$, только когда $K_0 \neq 0$. Полагая в (4.18) $n = 0$, получаем

$$K_1(x) = -K_0 g(x).$$

Следовательно, $g(x)$ — функция с суммируемым квадратом. Полагая $n = 1$, получаем

$$K_2(x, x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} K_0 C(x, x_1) - \frac{1}{\sqrt{2}} g(x) K_1(x_1).$$

Отсюда вытекает, что $C(x, x_1)$ есть функция с суммируемым квадратом и, следовательно, что $C = \Phi^{-1}\Psi$ есть оператор Гильберта — Шмидта.

Покажем теперь, что оператор Φ ограничен. С этой целью воспользуемся тождеством

$$(\Phi^*\Phi)^{-1} = E - \Phi^{-1}\Psi\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}, \quad (4.19)$$

которое легко следует из (4.5).

Согласно доказанному выше $\Phi^{-1}\Psi$ есть оператор Гильберта — Шмидта. Очевидно, что оператор $\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}$ также является оператором Гильберта — Шмидта. Поэтому оператор $\Phi^*\Phi = (E - \Phi^{-1}\Psi\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi})^{-1}$ ограничен, поскольку, согласно определению канонического преобразования, скалярное произведение $(\Phi^*\Phi f, g)$ существует на всюду плотном множестве. Следовательно, ограничен также оператор Φ.

Возвращаясь к оператору Ψ и функционалу f, получаем отсюда, что $\Psi = \Phi C$ — оператор Гильберта — Шмидта, поскольку C — оператор Гильберта — Шмидта, и $f = \Phi g \in L$, поскольку $g \in L$. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности построим функционал, отвечающий вектору $\hat{F}_0$. Согласно (1.20) условие $\hat{b}(x)\hat{F}_0 = 0$ эквивалентно уравнению относительно функционала F_0

$$\left\{\int \left(\Phi(x, y)\frac{\delta}{\delta a^*(y)} + \Psi(x, y) a^*(y)\right) dy + f(x)\right\} F_0 = 0. \quad (4.20)$$

Из (4.20) находим, что

$$F_0 = c e^{-\frac{1}{2} a^*\Phi^{-1}\Psi a^* - a^*\Phi^{-1}f}. \quad (4.21)$$

Для того чтобы функционал F_0 отвечал вектору пространства состояний, необходимо и достаточно выполнение неравенства (см. теорему 3 § 2)

$$I = \int F_0(a^*) \overline{F_0(a^*)} e^{-a^*a} \Pi\, da^*\, da < \infty. \tag{4.22}$$

Запишем интеграл (4.22) подробно:

$$I = |c|^2 \int e^{-\frac{1}{2}(a^*\Phi^{-1}\Psi a^* + a\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} a) - a^*\Phi^{-1}f - a\overline{\Phi}^{-1}f^* - a^*a} \Pi\, da^*\, da. \tag{4.23}$$

Для вычисления интеграла (4.23) воспользуемся формулой (2.16). Так как $\Phi^{-1}\Psi$ — оператор Гильберта — Шмидта, то для применимости этой формулы достаточно выполнения неравенства $\|\Phi^{-1}\Psi\| < 1$. Используя формулу (4.19) и тождество $\Phi\Psi' = \Psi\Phi'$, находим, что $\Phi^{-1}\Psi(\Phi^{-1}\Psi)^* = E - (\Phi^*\Phi)^{-1}$. Поэтому собственные числа ρ_i, λ_i операторов $\Phi^{-1}\Psi(\Phi^{-1}\Psi)^*$ и $(\Phi^*\Phi)^{-1}$ связаны соотношением $0 \leqslant \rho_i = 1 - \lambda_i$. Так как оператор $(\Phi^*\Phi)^{-1}$ не отрицателен и имеет ограниченный обратный, то $\lambda_i > 0$. Кроме того, $\rho_i \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому $\rho_i < \alpha < 1$ при всех i; следовательно, $\|\Phi^{-1}\Psi(\Phi^{-1}\Psi)^*\| < 1$ и $\|\Phi^{-1}\Psi\| < 1$. Таким образом, для вычисления интеграла (4.23) можно пользоваться формулой (2.16).

Применяя эту формулу, получаем

$$I = |c|^2 \left[\det \begin{pmatrix} E & \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} \\ \Phi^{-1}\Psi & E \end{pmatrix}\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(\varphi\ \varphi^*) \begin{pmatrix} \Phi^{-1}\Psi & E \\ E & \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.24}$$

где $\varphi = \Phi^{-1}f$. Матрицу, стоящую под знаком детерминанта, обозначим через A. Так как $\Phi^{-1}\Psi$ — оператор Гильберта — Шмидта, то $\det A$ существует. Для того чтобы проверить, что $\det A \neq 0$, преобразуем его к виду

$$\det A = \det(E - \Phi^{-1}\Psi\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}) = \det(\Phi^*\Phi)^{-1}$$

(см. (4.19)). Таким образом, $\det A > 0$, следовательно, $I < \infty$ и F_0 есть функционал, отвечающий вектору пространства состояний. Теорема полностью доказана.

Одновременно с доказательством теоремы мы получили выражение для преобразованного вакуумного вектора $\hat{F}_0$. Так как очевидно, что $I = (\hat{F}_0, \hat{F}_0)$, то, исходя из (4.24) и из условия $(\hat{F}_0, \hat{F}_0) = 1$, можно определить c. Прежде чем записывать получающееся выражение, приведем, пользуясь (4.7), оператор, стоящий в показателе (4.24), к более удобному виду

$$\begin{pmatrix} \Phi^{-1}\Psi & E \\ E & \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} \Phi^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^* & -\Psi' \\ -\Psi^* & \Phi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Psi^* & \Phi' \\ \Phi^* & -\Psi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}.$$

Вспоминая, что $\varphi = \Phi^{-1} f$, получаем

$$(\varphi\ \varphi^*) \begin{pmatrix} \Phi^{-1}\Psi & E \\ E & \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} = (f\ f^*) \begin{pmatrix} -\Phi'^{-1}\Psi^* & E \\ E & -\Phi^{*-1}\Psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, окончательно имеем [1])

$$c = \frac{\theta}{(\det \Phi\Phi^*)^{1/4}} \exp\left\{\frac{1}{4}(f\ f^*) \begin{pmatrix} \Phi'^{-1}\Psi^* & -E \\ -E & \Phi^{*-1}\Psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}\right\}, \qquad (4.25)$$

где θ — произвольное комплексное число такое, что $|\theta| = 1$.

4. Детерминант матрицы собственного канонического преобразования. Хорошо известно, что детерминант симплектической матрицы n-го порядка равен единице. Аналогичный факт имеет место в бесконечномерном случае. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ — *матрица собственного канонического преобразования такая, что оператор* Φ *эрмитовый положительно определенный.*

Тогда матрица $\mathcal{A}$ *имеет детерминант и* $\det \mathcal{A} = 1$.

Напомним, что детерминантом $\mathcal{A}$ мы называем предел [2]) $\lim\limits_{n \to \infty} \det \begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & \overline{P}_n \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & \overline{P}_n \end{pmatrix}$, где P_n — монотонная возрастающая последовательность операторов проектирования на конечномерные пространства, сильно сходящаяся к единичному оператору.

Заметим прежде всего, что из соотношений (4.5) и из эрмитовости Φ следует, что $\Phi^2 = E + \Psi\Psi^*$. Из теоремы 1 вытекает, что $\Psi\Psi^*$ — ядерный оператор. Поэтому оператор Φ имеет дискретный спектр, и его собственные значения имеют вид $\lambda_n = \sqrt{1+\alpha_n} = 1 + \sigma_n$, где $\alpha_n > 0$ — собственное число оператора $\Psi\Psi^*$ и $\sigma_n = \frac{\alpha_n}{1+\sqrt{1+\alpha_n}}$. Так как $\sum\limits_n \alpha_n < \infty$, то также $\sum\limits_n \sigma_n < \infty$. Таким образом, оператор Φ представим в виде $\Phi = E + \Sigma$, где Σ — ядерный оператор. Как отмечалось в п. 3 введения, отсюда вытекает, что у оператора $\mathcal{A}$ существует регуляризованный детерминант Фредгольма. Проведем формальные преобразования:

$$\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \Phi^{-1}\Psi \\ \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} & E \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \Phi \det \overline{\Phi} \det \begin{pmatrix} E & \Phi^{-1}\Psi \\ \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} & E \end{pmatrix} =$$

$$= \det \Phi \det \Phi^* \det \begin{pmatrix} E & \Phi^{-1}\Psi \\ 0 & E - \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi \end{pmatrix} =$$

$$= \det \Phi\Phi^* \det (E - \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi).$$

---

[1]) Выражение для преобразованного вакуумного вектора встречается в книге Фридрихса [1]. Однако ввиду того, что в этой книге не используются функционалы, найденные там формулы по форме отличаются от (4.21), (4.25) и являются крайне громоздкими.

[2]) См. введение, п. 3.

Обоснование этих преобразований весьма просто, и мы его опускаем. Заметим, что в результате мы получили произведение детерминантов, являющихся определителями Фредгольма в обычном смысле.

Далее, пользуясь соотношениями (4.5), преобразуем оператор $E-\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi$:

$$E-\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi=E-\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Psi'\Phi^{-1\prime}=$$
$$=E-\overline{\Phi}^{-1}(\overline{\Phi}\Phi'-E)\Phi'^{-1}=\overline{\Phi}^{-1}\Phi'^{-1}.$$

Таким образом,

$$\det(E-\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi)=\det\overline{\Phi}^{-1}\Phi'^{-1}=\det(\Phi\Phi^*)^{-1},$$

следовательно, $\det\mathcal{A}=1$, что и требовалось.

В заключение заметим, что утверждение теоремы сохраняет силу, если оператор Φ представим в виде $\Phi=U\Phi_0$, где Φ_0 — эрмитов, положительно определенный оператор и U — унитарный оператор такой, что $E-U$ — ядерный оператор.

5. Построение оператора $\hat{U}$. Пусть операторы Φ, Ψ и вектор f задают собственное каноническое преобразование. Согласно определению, это означает, что существует унитарный оператор $\hat{U}$, удовлетворяющий условию (4.4). В § 1 каждому ограниченному оператору были сопоставлены функционалы: функционал, отвечающий матричной форме оператора, и функционал, отвечающий нормальной форме оператора. В этом пункте мы найдем эти функционалы для оператора $\hat{U}$.

Теорема 3. *Функционал $\tilde{U}(a^*, a)$ — производящий для матричной записи оператора $\hat{U}$ — имеет вид*

$$\tilde{U}(a^*, a)=c\exp\left\{\frac{1}{2}(a\ \ a^*)\begin{pmatrix}\overline{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi'^{-1}\\ \Phi^{-1} & -\Phi^{-1}\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ a^*\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+a(f^*-\overline{\Psi}\Phi^{-1}f)-a^*\Phi^{-1}f\right\}, \tag{4.26}$$

$$c=c(f^*, f)=\frac{\theta}{(\det\Phi\Phi^*)^{1/4}}\exp\left\{\frac{1}{4}(f\ f^*)\begin{pmatrix}\Phi'^{-1}\Psi^* & -E\\ -E & \Phi^{*-1}\Psi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\ f^*\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.26'}$$

где $|\theta|=1$. Функционал $U(a^*, a)$ — производящий для нормальной формы оператора $\hat{U}$ — имеет вид

$$U(a^*, a)=\tilde{U}(a^*, a)e^{-a^*a}. \tag{4.27}$$

Формула (4.27) является следствием общей формулы (1.38). Вычислим функционал $\tilde{U}(a^*, a)$, отвечающий матричной записи оператора $\hat{U}$. Рассмотрим тождества, следующие из (4.4):

$$\hat{b}(x)\hat{U}=\hat{U}\hat{a}(x),\ \ \hat{b}^*(x)\hat{U}=\hat{U}\hat{a}^*(x). \tag{4.28}$$

Подставим в (4.28) $\hat{b}(x)$, $\hat{b}^*(x)$ из (4.3) и перейдем к функционалам. Согласно (1.22) из (4.28), получаем

$$\left.\begin{aligned}&\int\Phi(x,\ y)\frac{\delta}{\delta a^*(y)}\,dy\tilde{U}+\int\Psi(x,\ y)\,a^*(y)\,dy\tilde{U}+f(x)\,\tilde{U}=\tilde{U}a(x),\\&\int\overline{\Psi}(x,\ y)\frac{\delta}{\delta a^*(y)}\,dy\tilde{U}+\int\overline{\Phi}(x,\ y)\,a^*(y)\,dy\tilde{U}+f^*(x)\,\tilde{U}=\frac{\delta}{\delta a(x)}\,\tilde{U}.\end{aligned}\right\}\tag{4.29}$$

Тождества (4.29) будем рассматривать как уравнения для определения функционала $\tilde{U}(a^*,\ a)$.

Прежде чем решать уравнения (4.29), заметим, что они обладают единственным с точностью до множителя решением, которое является функционалом, отвечающим матричной записи оператора, для которого вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$ входит в область определения. Пусть, в самом деле, $\tilde{U}_1$ — решение (4.29), соответствующее оператору $\hat{U}_1$, определенному на $\hat{\Phi}_0$. Так как (4.29) эквивалентно (4.28), то $\hat{U}_1$, подобно $\hat{U}$, удовлетворяет тождествам (4.28). Отсюда легко следует, что оператор $\hat{A}=\hat{U}^{-1}\hat{U}_1$ перестановочен с $\hat{a}(x)$, $\hat{a}^*(x)$ и определен на $\hat{\Phi}_0$. Поэтому, согласно теореме 3 § 1, $\hat{A}=\lambda E$, и, следовательно, $\hat{U}_1=\lambda\hat{U}$, $\tilde{U}_1=\lambda\tilde{U}$.

Положим

$$\left.\begin{aligned}\tilde{U}=c\exp\left\{\frac{1}{2}(a\ a^*)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\a^*\end{pmatrix}+a\varphi_1+a^*\varphi_2\right\},\\A_{ik}=A'_{ki}.\end{aligned}\right\}\tag{4.30}$$

Подставляя (4.30) в (4.29) и сокращая на $\tilde{U}$, получаем

$$\begin{aligned}&\int\Phi(x,\ y')\,A_{22}(y',\ y)\,a^*(y)\,dy\,dy'+\\&\quad+\int\Phi(x,\ y')\,A_{21}(y',\ y)\,a(y)\,dy\,dy'+\int\Psi(x,\ y)\,a^*(y)\,dy+\\&\qquad+\int\Phi(x,\ y)\,\varphi_2(y)\,dy+f(x)=a(x),\\&\int\overline{\Psi}(x,\ y')\,A_{22}(y',\ y)\,a^*(y)\,dy\,dy'+\int\overline{\Psi}(x,\ y')\,A_{21}(y',\ y)\,a(y)\,dy\,dy'+\\&\quad+\int\overline{\Phi}(x,\ y)\,a^*(y)\,dy+\int\overline{\Psi}(x,\ y)\,\varphi_2(y)\,dy+f^*(x)=\\&\qquad=\int A_{12}(x,\ y)\,a^*(y)\,dy+\int A_{11}(x,\ y)\,a(y)\,dy+\varphi_1(x),\end{aligned}$$

где $A_{ik}(x,\ y)$ — ядра операторов A_{ik}.

Приравняем коэффициенты при $a(x)$ и $a^*(x)$. В результате получаем следующие уравнения для операторов A_{ik} и вектора $(\varphi_1\,\varphi_2)$:

$$\begin{aligned}&\Phi A_{22}+\Psi=0,\quad \overline{\Psi}A_{22}+\overline{\Phi}=A_{12},\quad \Phi\varphi_2+f=0,\\&\Phi A_{21}=E,\qquad \overline{\Psi}A_{21}=A_{11},\quad \overline{\Psi}\varphi_2+f^*=\varphi_1.\end{aligned}$$

Из третьего столбца получаем

$$\varphi_2 = -\Phi^{-1}f,\ \varphi_1 = -\overline{\Psi}\Phi^{-1}f + f^*. \tag{4.31}$$

Из уравнений первого столбца находим

$$A_{22} = -\Phi^{-1}\Psi,\ A_{21} = \Phi^{-1}. \tag{4.32}$$

Из второго уравнения второго столбца находим

$$A_{11} = \overline{\Psi}\Phi^{-1}. \tag{4.32$'$}$$

Проверим, что оставшееся не использованным первое уравнение второго столбца не противоречит найденным значениям A_{ik}. Воспользуемся с этой целью последним из соотношений (4.8). Переходя к комплексно сопряженным операторам, получаем $\Phi'\overline{\Phi} - \Psi^*\Psi = E$. Далее, $\Psi^*\Psi = \Psi^*\Phi\Phi^{-1}\Psi$. Воспользуемся первым соотношением (4.8) $\Psi^*\Phi = \Phi'\overline{\Psi}$. Таким образом,

$$E = \Phi'\overline{\Phi} - \Phi'\overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi.$$

Умножая полученное равенство слева на Φ'^{-1}, получаем окончательно

$$\Phi'^{-1} = \overline{\Phi} - \overline{\Psi}\Phi^{-1}\Psi.$$

То же самое равенство получается, если подставить в первое уравнение второго столбца A_{21} и A_{22} из (4.32) и учесть, что $A_{12} = A'_{21}$.

Обозначим через $\|u_{ik}\|$ матрицу, для которой $\tilde{U}(a^*a)$ служит производящим функционалом. Покажем, что $\|u_{ik}\|$ является матрицей некоторого оператора, в область определения которого входит вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$. Вектор, получаемый из $\hat{\Phi}_0$ действием матрицы $\|u_{ik}\|$, обозначим $\hat{F}_0$, соответствующий ему функционал обозначим $F_0(a^*)$. Из (2.28) имеем [1])

$$F_0(a^*) = \int \tilde{U}(a^*,\ \alpha)\, e^{-\alpha^*\alpha}\, \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha =$$

$$= c\int e^{\frac{1}{2}(\alpha\overline{\Psi}\Phi^{-1}\alpha - a^*\Phi^{-1}\Psi a^* + 2\alpha\Phi'^{-1}a^*) + \alpha(f^* - \overline{\Psi}\Phi^{-1}f) - a^*\Phi^{-1}f - \alpha^*\alpha}\, \Pi\, d\alpha\, d\alpha^* =$$

$$= c e^{-\frac{1}{2}a^*\Phi^{-1}\Psi a^* - a^*\Phi^{-1}f} \int e^{\frac{1}{2}(\alpha\overline{\Psi}\Phi^{-1}\alpha + 2\alpha\Phi'^{-1}\alpha^*) + \alpha(f^* - \overline{\Psi}\Phi^{-1}f) - \alpha^*\alpha}\, \Pi\, d\alpha^*\, d\alpha.$$

Покажем, что оставшийся интеграл равен единице. С этой целью убедимся прежде всего в применимости формулы (2.16). Так как $\overline{\Psi}\Phi^{-1}$ — оператор Гильберта—Шмидта, то достаточно проверить, что $\|\overline{\Psi}\Phi^{-1}\| < 1$. Это доказывается точно так же, как аналогичное неравенство $\|\Phi^{-1}\Psi\| < 1$ на с. 83. При этом следует исполь-

---

[1]) Строго говоря, применение формулы (2.28) требует обоснования, так как она выведена в предположении, что функционал $\tilde{U}$ отвечает ограниченному оператору. Это обоснование не сложно, и мы его опускаем, чтобы не загромождать изложения.

зовать тождество, вытекающее из (4.5) и (4.8):

$$\overline{\Psi}\Phi^{-1}(\overline{\Psi}\Phi^{-1})^* = E - (\overline{\Phi}\Phi')^{-1}.$$

Применяя формулу (2.16), находим, что

$$\int e^{\frac{1}{2}(\alpha\overline{\Psi}\Phi^{-1}\alpha + 2\alpha\Phi'^{-1}a^*) + \alpha(f^* - \overline{\Psi}\Phi^{-1}f) - \alpha^*\alpha} \Pi\, d\alpha^* d\alpha = \det\begin{pmatrix} E & \overline{\Psi}\Phi^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} = 1.$$

Таким образом, для F_0 получается выражение, совпадающее с (4.21). Следовательно, функционал F_0 отвечает вектору в пространстве состояний, а это означает, что функционалу $\tilde{U}$ отвечает оператор $\hat{U}$, в область определения которого входит вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$. Для того чтобы оператор $\hat{U}$ был унитарным, следует, очевидно, определить константу c из условия $(F_0, F_0) = 1$. Соответствующие вычисления были проделаны в п. 4. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится выражение для преобразованного пуассоновского вектора $\hat{P}_\sigma$. Напомним, что соответствующий функционал равен $P_\sigma(a^*) = e^{a^*\sigma - \frac{1}{2}(\sigma, \sigma)}$. Функционал, отвечающий преобразованному вектору, обозначим $\mathcal{P}_\sigma(a^*)$. Вычисление функционала $\mathcal{P}_\sigma(a^*)$ почти не отличается от проведенного в этом пункте вычисления $F_0(a^*)$. Приведем окончательный ответ

$$\mathcal{P}_\sigma(a^*) = c(f^* - \sigma^*,\ f - \sigma)\exp\left\{-\frac{1}{2}a^*\Phi^{-1}\Psi a^* - a^*\Phi^{-1}(f - \sigma)\right\}, \tag{4.33}$$

где $c(f^*, f)$ определяется формулой (4.26′).

Формула (4.26) сопоставляет каждому собственному каноническому преобразованию g однопараметрическое (параметр θ) семейство операторов в пространстве $\mathcal{H}_B$: $g \longrightarrow \theta\hat{U}_g$. При этом, очевидно, выполнено условие,

$$\text{если } g_1 \longrightarrow \theta\hat{U}_{g_1},\ g_2 \longrightarrow \theta\hat{U}_{g_2}, \text{ то } g_1 g_2 \longrightarrow \theta\hat{U}_{g_1}\hat{U}_{g_2}.$$

Подобного рода соответствие, когда каждому элементу группы отвечает семейство операторов, отличающихся множителем, и произведению элементов группы отвечает произведение операторов, называется проективным представлением группы.

Возникает вопрос, нельзя ли выбрать θ таким образом, чтобы неоднозначность при соответствии $g \longrightarrow \theta\hat{U}_g$ была ликвидирована или по крайней мере уменьшена. Этого можно достичь, если рассматривать не все собственные канонические преобразования, а лишь подгруппу G группы однородных преобразований, в которую входят преобразования, матрица которых $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ обладает свойством: $\Phi = E + K$, где K — оператор с абсолютно сходящимся следом. Для преобразований из G множитель c в формуле (4.26) можно выбрать равным

$$c = (\det\Phi)^{-1/2}.$$

При таком выборе константы c остается неопределенность в знаке, каждому g из группы G отвечают два преобразования: $g \longrightarrow \pm\hat{U}_g$. Используя формулы для умножения операторов (2.30) или (2.31), находим, что

$$\text{если } g_1 \longrightarrow \pm \hat{U}_{g_1},\ g_2 \longrightarrow \pm \hat{U}_{g_2}, \text{ то } g_1 g_2 \longrightarrow \pm \hat{U}_{g_1} \hat{U}_{g_2}.$$

Оставшаяся неоднозначность в знаке неустранима. В самом деле, для того чтобы выделить однозначную ветвь функции $\sqrt{z}$, следует сделать разрез в комплексной плоскости, соединяющий 0 и ∞. Однако существует семейство преобразований $g(t)$ такое, что при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ $\det \Phi(t)$ обходит вокруг начала координат и, следовательно, пересекает разрез, как бы он ни был проведен. С другой стороны, заменить функцию $c(g) = (\det \Phi)^{-1/2}$ другой функцией $c_1(g)$, при которой представление стало бы однозначным, тоже нельзя: выберем однозначную ветвь $\sqrt{z}$, сделав разрез по отрицательной части вещественной оси и положив $\sqrt{1} = 1$. Используя эту ветвь, определим $c(g) = (\det \Phi)^{-1/2}$ однозначно в окрестности единицы группы G, удовлетворяющей условию $|\arg \det \Phi| < \pi$. В этой окрестности функция $\alpha(g) = c_1(g)\, c^{-1}(g)$ удовлетворяет условию $\alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1)\, \alpha(g_2)$. Существует, однако, лишь одна функция, удовлетворяющая этому условию: $\alpha(g) \equiv 1$ [1]).

Итак, при $c(g) = (\det \Phi)^{-1/2}$ представление группы G с помощью операторов $\hat{U}_g$ является двузначным. Конструкция этого представления дублирует конструкцию спинорного представления ортогональной группы (см. § 5, п. 5). Поэтому его естественно назвать спинорным представлением группы G. В случае конечного числа степеней свободы группа G изоморфна группе вещественных симплектических матриц (см. п. 2 настоящего параграфа). Таким образом, возникает спинорное представление группы вещественных симплектических матриц.

6. Канонические преобразования операторов [2]). Пусть $\hat{U}$ — унитарный оператор, задающий линейное каноническое преобразование $\hat{b}(\varphi) = \hat{U} \hat{a}(\varphi)\, \hat{U}^{-1} = \hat{a}(\varphi\Phi) + \hat{a}^*(\varphi\Psi) + \varphi f$. Рассмотрим произвольный оператор $\hat{A}$, представимый в нормальной форме, и оператор $\hat{B} = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^{-1}$, который мы предположим также представимым в нормальной форме. Выразим функционал $B(a^*, a)$, производящий для нормальной формы оператора $\hat{B}$, через аналогичный ему функционал $A(a^*, a)$, соответствующий оператору $\hat{A}$.

Пусть сначала каноническое преобразование имеет вид

$$\hat{b}(\varphi) = \hat{a}(\varphi\Phi), \quad \hat{b}^*(\varphi) = \hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi}). \tag{4.34}$$

Из соотношений (4.5) вытекает, что в этом случае Φ — унитарный оператор. Легко видеть, что если каноническое преобразование имеет вид (4.34), то функционал $B(a^*, a)$ равен

$$B(a^*, a) = A(\overline{\Phi} a^*, \Phi a). \tag{4.35}$$

Таким образом, в этом случае преобразование функционалов состоит в замене переменных.

Напомним теперь (см. (4.9)), что каждое каноническое преобразование может быть разложено в произведение преобразования

---

[1]) Это связано с отсутствием у группы G нормальных делителей (за исключением самой группы) с одномерной или нульмерной фактор-группой.

[2]) См. работу автора [2].

вида (4.34) и преобразования

$$\hat{b}(\varphi)=\hat{a}(\varphi\Phi)+\hat{a}^*(\varphi\Psi)+\varphi f, \quad \hat{b}^*(\varphi)=\hat{a}(\varphi\overline{\Psi})+\hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi})+\varphi f^*,$$

где Φ—эрмитов положительно определенный оператор. Таким образом, наибольший интерес представляет случай, когда каноническое преобразование задается операторами Φ, Ψ и вектором f, причем Φ—эрмитов положительно определенный оператор.

Прежде чем формулировать основную теорему, докажем лемму.

Лемма 2. *Пусть $A=\|a_{ik}\|$—симметрическая $(n\times n)$-матрица. Существует унитарная симметрическая $(n\times n)$-матрица $U=\|u_{ik}\|$ такая, что UAU—вещественная симметрическая, неотрицательно определенная матрица, равная $UAU=U\sqrt{AA^*}U^{-1}$.*

Представим матрицу A в виде $A=\sqrt{AA^*}V=BV$, где V—унитарная матрица. Покажем, что $V'=V$. Из симметричности A вытекает тождество $BV=V'B'$. Отсюда $B'=V'^{-1}BV=V'^{-1}VV^{-1}BV=$ $=WC$, где $C=V^{-1}BV$—положительно определенная эрмитова матрица и $W=V'^{-1}V$—унитарная матрица. Заметим теперь, что B', подобно B,—эрмитова неотрицательная матрица. Из единственности представления произвольной матрицы в виде WC, где W—унитарная и C—эрмитова неотрицательная матрицы, следует поэтому, что $W=E$ и, следовательно, $V'=V$.

Как известно, у каждой симметрической унитарной матрицы есть квадратный корень, который также является симметрической унитарной матрицей. Поэтому существует симметрическая унитарная матрица U такая, что $V=U^{-2}$. Очевидно, что U является искомой матрицей.

Обозначим через P_n оператор проектирования на n-мерное пространство, принадлежащий спектральному семейству оператора Φ. Пусть далее α—неотрицательный и S—унитарный операторы, определяемые равенством $\Psi=\alpha S$. Из соотношений (4.5) и (4.8), учитывая, что $\Phi=\Phi^*$, имеем

$$\Phi^2-\alpha^2=E,\ \Phi^2-S'\alpha'\overline{\alpha}\overline{S}=E.$$

Отсюда $\alpha^2=S'\alpha'\overline{\alpha}\overline{S}$, $\overline{\alpha}^2=S^{-1}\alpha^2S$. Такое же соотношение должно выполняться для проекционных операторов, принадлежащих спектральному разложению α^2, поскольку эти операторы являются вещественными функциями от α^2. Заметим теперь, что из соотношения $\Phi^2-\alpha^2=E$ вытекает, что семейства проекционных операторов, принадлежащих спектральному разложению Φ и α^2, совпадают. Таким образом, операторы P_n удовлетворяют соотношению

$$\overline{P}_n=S^{-1}P_nS,\ S\overline{P}_n=P_nS.$$

Умножая обе части последнего равенства слева на α и пользуясь перестановочностью α и P_n, получаем

$$\Psi\overline{P}_n=P_n\Psi, \tag{4.36}$$

а переходя к комплексно сопряженным операторам, находим

$$\overline{\Psi} P_n = \overline{P}_n \overline{\Psi}. \qquad (4.36')$$

Рассмотрим оператор $A_n = P'_n \overline{\Phi} \Psi^{-1} P_n$. Оператор A_n порождает в пространстве $L_n = P_n L$ билинейную форму[1]): если ξ, $\eta \in L_n$, то $\xi \overline{\Phi} \Psi^{-1} \eta = \xi A_n \eta$. Выберем в пространстве L_n ортонормированный базис $\{\xi_k\}$. Матрицу билинейной формы $\xi A_n \eta$, записанную в базисе $\{\xi_k\}$, обозначим $\mathcal{A}_n$. Применяя доказанную перед этим лемму, получаем, что существует унитарная симметрическая матрица U_n такая, что $U_n \mathcal{A}_n U_n$ — вещественная, положительно определенная матрица.

Покажем, что все собственные числа матрицы $U_n \mathcal{A}_n U_n$ больше единицы. Так как $U_n \mathcal{A}_n U_n = U_n \sqrt{\mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^*}\, U_n^{-1}$, то достаточно рассмотреть матрицу $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^*$. Очевидно, что $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^*$ есть матрица оператора $A_n A_n^*$, который является значением на L_n оператора

$$A_n A_n^* = P'_n \overline{\Phi} \Psi^{-1} P_n \Psi^{*-1} \Phi' P'_n.$$

С помощью соотношений (4.36), (4.36′) выражение для $A_n A_n^*$ можно переписать в виде

$$A_n A_n^* = P'_n \overline{\Phi} \Psi^{-1} \Psi^{*-1} \Phi' P'_n.$$

Утверждение о спектре матрицы $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^*$ будет доказано, если мы проверим, что $(A_n A_n^* f,\ f) > (P'_n f,\ P'_n f)$.

Рассмотрим оператор $AA^* = \overline{\Phi} \Psi^{-1} \Psi^{*-1} \Phi'$. В предыдущем пункте было показано, что $\| \overline{\Phi}^{-1} \Psi \| < 1$. Аналогично можно проверить, что $\| \Psi \overline{\Phi}^{-1} \| < 1$. Следовательно, $\| (AA^*)^{-1} \| < 1$ и $AA^* > E$, т. е. все собственные числа AA^* больше 1. Поэтому

$$(A_n A_n^* f,\ f) = (P'_n AA^* P'_n f,\ f) > (P'_n f,\ P'_n f),$$

и, следовательно, собственные числа $A_n A_n^*$ больше 1.

Объединим полученные результаты в виде следующего предложения.

Лемма 3. *Пусть P_n — оператор проектирования на n-мерное подпространство $L_n = P_n L$, принадлежащий спектральному семейству оператора Φ. Введем в L_n ортонормированный базис $\{\xi_k\}$ и рассмотрим матрицу*

$$\mathcal{A}_n = \| \xi_i \overline{\Phi} \Psi^{-1} \xi_k \|.$$

Тогда

1) *Существует унитарная симметрическая матрица U_n такая, что $U_n \mathcal{A}_n U_n$ — вещественная матрица.*

2) *Для векторов t, имеющих вещественные компоненты t_k по*

---

[1]) Из соотношений (4.8) следует, что билинейная форма $\xi \overline{\Phi} \Psi^{-1} \eta$ является симметричной.

базису $\{\xi_k\}$,

$$\sum_{i,\,k} t_i\,(U_n\mathcal{A}_nU_n)_{ik}\,t_k > \sum_k t_k^2. \tag{4.37}$$

Рассмотрим пространство $L_n^* = (P_nL)^*$ и введем в него базис $\{\xi_k^*\}$.

Матрица $\overline{\mathcal{A}}_n = \| \xi_i^*\Phi\overline{\Psi}^{-1}\xi_k^*\|$ комплексно сопряжена с $\mathcal{A}_n$. Следовательно, для векторов τ, имеющих вещественные компоненты τ_k по базису $\{\xi_k^*\}$,

$$\sum_{i,\,k} \tau_i\,(\overline{U}_n\overline{\mathcal{A}}_n\overline{U}_n)_{ik}\,\tau_k > \sum_k \tau_k^2. \tag{4.37$'$}$$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 4. *Пусть $\hat{A}$ — ограниченный оператор. Рассмотрим каноническое преобразование $\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1} = \hat{a}(\varphi\Phi) + \hat{a}^*(\varphi\Psi) + \varphi f$, обладающее следующими свойствами:*

1) *Оператор Φ эрмитов.*

2) *Оператор Ψ обладает обратным.*

Пусть далее P_n — монотонная последовательность операторов ортогонального проектирования на конечномерные пространства L_n, обладающая свойствами:

1) *Операторы P_n принадлежат спектральному семейству проекционных операторов оператора Φ.*

2) *При $n\to\infty$ последовательность P_n сильно сходится к единичному оператору.*

Тогда функционал $B(a^*, a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{B} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$, равен

$$B(a^*,\ a) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\substack{\alpha = U_nt \\ \alpha^* = \overline{U}_n\tau}} \mathcal{K}_n(a^*,\ a\,|\,\alpha^*,\ \alpha)\,A(\alpha^*,\ \alpha)\,d^nt\,d^n\tau, \tag{4.38}$$

где

$$\mathcal{K}_n(a^*,\ a\,|\,\alpha^*,\ \alpha) =$$

$$= [\det P_n(\Psi\Psi^*)^{-1}P_n]^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(b_n-\alpha \quad b_n^*-\alpha^*)\,\mathcal{L}\begin{pmatrix} b_n-\alpha \\ b_n^*-\alpha^* \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.39}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}\Psi^{-1} & -E \\ -E & \Phi\overline{\Psi}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

$$b_n = \Phi P_na + \Psi\overline{P}_na^* + P_nf, \quad b_n^* = \overline{\Psi}P_na + \overline{\Phi}\overline{P}_na^* + \overline{P}_nf^*,$$

$P_n(\Psi\Psi^*)^{-1}P_n$ — матрица, равная $\|\xi_i(\Psi\Psi^*)^{-1}\xi_k\|$, где $\{\xi_k\}$ — ортонормированный базис в L_n, $U_n = \|\xi_iU_n\xi_k\|$ — унитарная симметрическая матрица, свойства которой описаны в лемме 3, $\overline{U}_n = \|\xi_i^*\overline{U}_n\xi_k\|$ — комплексно сопряженная ей матрица, $t\in L_n$, $\tau\in L_n^*$ — векторы, имеющие вещественные координаты по базису $\{\xi_k\}$ и соответственно $\{\xi_k^*\}$.

Путь интегрирования в (4.38) выбран так, что квадратичная форма, стоящая в показателе, имеет отрицательно определенную вещественную часть (см. лемму 3).

Вспомним, что функционал $A(a^*, a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{A}$, равен (см. с. 36) $A(a^*, a) = (\hat{A}\hat{P}_{a^*}, \hat{P}_{a^*})$, где $\hat{P}_a$ — пуассоновский вектор с параметром a: $P_a(\sigma^*) = e^{a\sigma^* - \frac{1}{2} a^* a}$. Очевидно, что $A(a^*, a)$ можно записать также в виде

$$A(a^*, a) = \operatorname{Sp} \hat{A}\hat{\mathscr{P}}_{a^*, a},$$

где $\hat{\mathscr{P}}_{a^*, a}$ — оператор проектирования на пуассоновский вектор [1]): $\mathscr{P}_{a^*, a}(\sigma^*, \sigma) = e^{a\sigma^* + a^*\sigma - \sigma^*\sigma - a^*a}$.

Таким образом, функционал $B_n(a^*, a) = \int \mathscr{K}_n A \, d^n t \, d^n \tau$ равен

$$B_n(a^*, a) = \int \mathscr{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) \operatorname{Sp} \hat{A}\hat{\mathscr{P}}_{\alpha^*, \alpha} d^n t \, d^n \tau =$$
$$= \operatorname{Sp} \hat{A} \int \mathscr{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) \hat{\mathscr{P}}_{\alpha^*, \alpha} \, d^n t \, d^n \tau. \quad (4.41)$$

(Законность перестановки следа и интеграла будет обоснована в конце доказательства теоремы.)

Оказывается, что оператор $\hat{\mathscr{P}}^n_{a^*, a} = \int \mathscr{K}_n \hat{\mathscr{P}}_{\alpha^*, \alpha} \, d^n t \, d^n \tau$ является оператором проектирования на вектор $\hat{\xi}_n(a^*)$. Мы покажем, что при $n \to \infty$ векторы $\hat{\xi}_n(a^*)$ сходятся по норме к $\hat{U}^{-1}\hat{P}_{a^*}$. Отсюда, очевидно, будет вытекать, что

$$B(a^*, a) = \lim B_n(a^*, a) = (\hat{A}\hat{U}^{-1}\hat{P}_a, \hat{U}^{-1}\hat{P}_a) = (\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}\hat{P}_a, \hat{P}_a),$$

т. е. что $B(a^*, a)$ есть функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{B} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$.

Приступим к вычислению оператора $\hat{\mathscr{P}}^n_{a^*, a}$. Заменим с этой целью операторы $\hat{\mathscr{P}}_{a^*, a}$ и $\hat{\mathscr{P}}^n_{a^*, a}$ соответствующими им функционалами $\mathscr{P}_{a^*, a}(\sigma^*, \sigma)$, $\mathscr{P}^n_{a^*, a}(\sigma^*, \sigma)$:

$$\mathscr{P}_{a^*, a}(\sigma^*, \sigma) = e^{-(a^* - \sigma^*)(a - \sigma)},$$

$$\mathscr{P}^n_{a^*, a}(\sigma^*, \sigma) = (\det P_n (\Psi\Psi^*)^{-1} P_n)^{1/2} \times$$
$$\times \int\limits_{\substack{\alpha = U_n t \\ \alpha^* = \overline{U}_n \tau}} e^{-\frac{1}{2}(b_n - \alpha \;\; b_n^* - \alpha^*)\begin{pmatrix} \Phi\Psi^{-1} & -E \\ -E & \Phi\overline{\Psi}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_n - \alpha \\ b_n^* - \alpha^* \end{pmatrix} - (\alpha^* - \sigma^*)(\alpha - \sigma)} d^n t \, d^n \tau$$
$$(4.42)$$

В силу леммы 3 вещественная часть показателя отрицательно определена. Выделяя полный квадрат и пользуясь соотношениями

---

[1]) См. выражение (1.48) для нормальной формы оператора проектирования.

(4.5), (4.8) и (4.36), (4.36′), находим $\mathcal{P}^n_{a^*,a}(\sigma^*, \sigma)$:

$$\mathcal{P}^n_{a^*,a}(\sigma^*, \sigma) = (\det P_n(\Psi\Psi^*)^{-1} P_n)^{1/2} \times \\ \times (\det P_n'\overline{\Phi}\Psi^{-1} P_n \det P_n\Phi\overline{\Psi}^{-1}P_n')^{-1/2} \times \\ \times e^{\frac{1}{2}(b_n-\sigma_n \quad b_n^*-\sigma_n^*)\begin{pmatrix} \overline{\Psi}\Phi^{-1} & -E \\ -E & \Psi\overline{\Phi}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_n-\sigma_n \\ b_n^*-\sigma_n^*\end{pmatrix} - \tilde{\sigma}_n^*\tilde{\sigma}_n}, \tag{4.43}$$

где $\sigma_n = P_n\sigma$, $\sigma_n^* = \overline{P}_n\sigma^*$, $\tilde{\sigma}_n = \sigma - \sigma_n$, $\tilde{\sigma}_n^* = \sigma^* - \sigma_n^*$.

Из соотношений (4.36), (4.36′) вытекает, что в предэкспоненциальном множителе можно произвести сокращение на $(\det P_n(\Psi\Psi^*)^{-1} P_n)^{1/2}$. Легко показать, что оставшийся множитель равен $(\det P_n\Phi\Phi^*P_n)^{-1/2}$. Используя соотношения (4.5), (4.8), $\mathcal{P}^n_{a^*,a}(\sigma^*, \sigma)$, можно преобразовать к виду

$$\mathcal{P}^n_{a^*,a}(\sigma^*, \sigma) = \xi^n_{a^*,a}(\sigma^*)\,\overline{\xi^n_{a^*,a}(\sigma^*)}\, e^{-\sigma^*\sigma}, \tag{4.44}$$

где

$$\xi^n_{a^*,a}(\sigma^*) = (\det P_n\Phi\Phi^*P_n)^{-1/4} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{4}(\varphi_n - a_n \quad \varphi_n^* - a_n^*)\begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} & E \\ E & \Phi^{-1}\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_n - a_n \\ \varphi_n^* - a_n^*\end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sigma^* P_n'\Phi^{*-1}\Psi' P_n'\sigma^* - \sigma^*\Phi^{*-1}(\varphi_n - a_n)\right\},$$

$$\varphi_n = \Phi^* f_n - \Psi' f_n^*, \quad \varphi_n^* = -\Psi^* f_n + \Phi' f_n^*.$$

При $n\to\infty$ имеем $\det P_n\Phi\Phi^*P_n \to \det\Phi\Phi^*$, a_n, φ_n сходятся по норме гильбертова пространства L к a, $\varphi = \Phi^* f - \Psi' f^*$, оператор $P_n'\Phi^{*-1}\Psi' P_n'$ сходится по норме в пространстве операторов Гильберта—Шмидта к $\Phi^{*-1}\Psi'$. Отсюда следует, что последовательность векторов $\hat{\xi}^n_{a^*,a}$, для которых $\xi^n_{a^*,a}(\sigma^*, \sigma)$ служит производящими функционалами, сходится по норме к вектору $\hat{\xi}_{a^*,a}$, производящий функционал которого равен

$$\xi_{a^*,a}(\sigma^*) = \\ = (\det\Phi\Phi^*)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{4}(\varphi - a \quad \varphi^* - a^*)\begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{-1}\overline{\Psi} & E \\ E & \Phi^{-1}\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi - a \\ \varphi^* - a^*\end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sigma^*\Phi^{*-1}\Psi'\sigma^* - \sigma^*\Phi^{*-1}(\varphi - a)\right\}, \tag{4.45}$$

где $\varphi = \Phi^* f - \Psi' f^*$, $\varphi^* = -\Psi^* f + \Phi' f^*$.

Сравнивая (4.45) с (4.33), находим, что $\hat{\xi}_{a^*,a} = \hat{U}^{-1}\hat{P}_a$, где $\hat{P}_a$ — пуассоновский вектор [1]).

Наконец, из формулы (4.44) вытекает, что $\hat{\mathcal{P}}^n_{a^*,a}$ есть оператор проектирования на $\hat{\xi}^n_{a^*,a}$. (См. (1.48) — общий вид нормальной формы оператора проектирования на вектор.)

---

[1]) При сравнении (4.45) с (4.33) следует иметь в виду, что если каноническое преобразование задается операторами Φ, Ψ и вектором f, то обратное преобразование задается операторами Φ^*, $-\Psi'$ и вектором $\varphi = \Phi^* f - \Psi' f^*$.

Для завершения доказательства теоремы следует обосновать перестановку следа и интеграла в (4.41).

Формула (4.41) имеет вид $\int F(\varphi_\alpha)\,d\mu_\alpha = F\left(\int \varphi_\alpha\,d\mu_\alpha\right)$, где $\varphi_\alpha = \mathcal{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha)\,\hat{\mathcal{P}}_{a^*, a}$ — элемент банахова пространства $\mathfrak{S}$ ядерных операторов, F — непрерывный функционал на этом пространстве. Перестановка интеграла и следа будет, таким образом, доказана, если мы установим, что интегральные суммы сходятся к $\int \varphi_\alpha\,d\mu_\alpha$ по норме $\mathfrak{S}$.

Вернемся к формуле (4.42). Легко видеть, что она преобразуется к виду

$$\mathcal{P}^n_{\alpha^*, \alpha}(\sigma^*, \sigma) = \\ = c_n \int\limits_{\alpha = U_n t} e^{-\frac{1}{2}\alpha\overline{\Phi}\Psi^{-1}\alpha + \alpha(\rho - \sigma^*)}\,dt \int\limits_{\alpha^* = \overline{U}_n\tau} e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\Phi\overline{\Psi}^{-1}\alpha^* + \alpha^*(\rho^* - \sigma)}\,d\tau, \tag{4.46}$$

где c_n — константа и ρ, ρ^* означают выражения, зависящие от b_n, b_n^*. Заменяя в (4.46) интеграл суммой, мы получаем операторы $\hat{\mathcal{P}}^{n, \Sigma}_{a^*, a}$, которые, очевидно, с точностью до множителя c_n являются операторами проектирования на векторы $\hat{\xi}^{n, \Sigma}$. Последним отвечают функционалы

$$\xi^{n, \Sigma}(\sigma^*) = \sum_{\alpha = U_n t} \Delta t e^{-\frac{1}{2}\alpha\overline{\Phi}\Psi^{-1}\alpha + \alpha(\rho - \sigma^*)}.$$

Раскладывая $\xi^{n, \Sigma}(\sigma^*)$ в ряд по степеням σ^* и оценивая отдельные слагаемые, нетрудно убедиться, что последовательность $\hat{\xi}^{n, \Sigma}$ при измельчении разбиения сходится по норме к вектору $\hat{\xi}^n$, которому отвечает функционал

$$\xi^n(\sigma^*) = \int\limits_{\alpha = U_n t} e^{-\frac{1}{2}\alpha\overline{\Phi}\Psi^{-1}\alpha + \alpha(\rho - \sigma^*)}\,d^n t. \tag{4.47}$$

Соответствующие оценки не сложны, и мы их опускаем.

Из сходимости по норме векторов $\hat{\xi}^{n, \Sigma}$ к вектору $\hat{\xi}^n$ вытекает, очевидно, сходимость по норме $\mathfrak{S}$ последовательности операторов $\hat{\mathcal{P}}^{n, \Sigma}_{a^* a}$ к оператору, задаваемому интегралом (4.46).

Предложенное здесь доказательство является в достаточной степени искусственным и, кроме того, не переносится на фермиевский случай, так как в фермиевском случае нет аналога пуассоновских векторов. В случае, когда число степеней свободы конечно, можно предложить другое доказательство теоремы, по существу одинаково пригодное как для фермиевского, так и для бозевского случаев. Это доказательство (в фермиевском варианте), при котором формулы (4.38)—(4.40) получаются сразу, помещено в п. 7 следующего параграфа.

Отметим в заключение, что формулы (4.38)—(4.40) справедливы не только тогда, когда оператор $\hat{A}$ ограничен. Нетрудно установить их справедливость для случая, когда $\hat{A}$ — полиномиальный оператор. По-видимому, они справедливы для всех операторов $\hat{A}$, представимых в нормальной форме и таких, что оператор $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ также представим в нормальной форме.

7. Примеры. Пусть система имеет одну степень свободы. Рассмотрим каноническое преобразование

$$\hat{b} = \hat{a}\,\mathrm{ch}\,\sigma + \varepsilon\hat{a}^*\,\mathrm{sh}\,\sigma, \quad \hat{b}^* = \bar{\varepsilon}\hat{a}\,\mathrm{sh}\,\sigma + \hat{a}^*\,\mathrm{ch}\,\sigma$$

($|\varepsilon| = 1$, σ — произвольное вещественное число). Из теоремы 4 вытекает, что в этом случае каноническое преобразование операторов задается формулой

$$B(a^*, a) = \\ = \frac{1}{|\mathrm{sh}\,\sigma|}\int e^{-\frac{1}{2}\left[(b-\alpha)^2 \frac{\mathrm{ch}\,\sigma}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma} + (b^*-\alpha^*)^2 \frac{\mathrm{ch}\,\sigma}{\bar{\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\sigma} - 2(b-\alpha)(b^*-\alpha^*)\right]} A(\alpha^*, \alpha)\,d\alpha^*\,d\alpha, \tag{4.48}$$

где $b = a\,\mathrm{ch}\,\sigma + \varepsilon a^*\,\mathrm{sh}\,\sigma$, $b^* = \bar{\varepsilon}a\,\mathrm{sh}\,\sigma + a^*\,\mathrm{ch}\,\sigma$. Интеграл по $d\alpha\,d\alpha^*$ следует брать по контуру, на котором $\alpha^2 \frac{\mathrm{ch}\,\sigma}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma} + \alpha^{*2} \frac{\mathrm{ch}\,\sigma}{\bar{\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\sigma} - 2\alpha\alpha^* > 0$. Согласно этой теореме, контур задается условием: $\alpha = ut$, $\alpha^* = \bar{u}\tau$, где $u = (\varepsilon\,\mathrm{sign}\,\sigma)^{1/2}$.

В качестве второго примера рассмотрим каноническое преобразование оператора $\hat{A}$, нормальной форме которого соответствует производящий функционал A вида [1])

$$A(a^*, a) = \exp\left[-\frac{1}{2}(a\ a^*)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^*\end{pmatrix}\right], \quad A_{ik} = A'_{ki},$$

где матрица $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\,(tU'_n\ \ \tau U^*_n)(\mathscr{A} + \mathscr{L})\begin{pmatrix} U_n t \\ \bar{U}_n\tau\end{pmatrix} > 0 \tag{4.49}$$

при достаточно больших n. Согласно теореме 4, функционал $B(a^*, a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{B} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$, есть предел функционалов $B_n(a^*, a)$, где

$$B_n(a^*, a) = \\ = (\det P_n(\Psi\Psi^*)^{-1}P_n)^{1/2} \int\limits_{\substack{\alpha = U_n t \\ \alpha^* = \bar{U}_n\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(b-\alpha\ b^*-\alpha^*)\,\mathscr{L}\begin{pmatrix} b-\alpha \\ b^*-\alpha^*\end{pmatrix} - \\ -\frac{1}{2}(\alpha\ \alpha^*)\,\mathscr{A}\begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha^*\end{pmatrix}\right\} d^n\alpha\,d^n\alpha^*. \tag{4.50}$$

[1]) См. работу автора [1].

Чтобы вычислить интеграл (4.50), выделим в показателе полный квадрат:

$$(b-\alpha\ \ b^*-\alpha^*)\,\mathscr{L}\begin{pmatrix} b-\alpha \\ b^*-\alpha^* \end{pmatrix}+(\alpha\ \alpha^*)\,\mathscr{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{pmatrix}=$$

$$=(x-\alpha\ \ x^*-\alpha^*)\,(\mathscr{L}+\mathscr{A})\begin{pmatrix} x-\alpha \\ x^*-\alpha^* \end{pmatrix}+$$

$$+(b\ \ b^*)\,(\mathscr{L}-\mathscr{L}\,(\mathscr{L}+\mathscr{A})^{-1}\,\mathscr{L})\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

где $\begin{pmatrix} x \\ x^* \end{pmatrix}=(\mathscr{L}+\mathscr{A})^{-1}\,\mathscr{L}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$. Заметим, что поскольку $b,\ \alpha\in L_n$, $b^*,\ \alpha^*\in L_n^*$ и, следовательно, $\alpha=P_n\alpha$, $b=P_nb$, $\alpha^*=P_n'\alpha^*$, $b^*=P_n'b^*$, матрицы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{L}$ в (4.50), (4.51) можно заменить на

$$\mathscr{A}_n=\begin{pmatrix} P_n' & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}\mathscr{A}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n' \end{pmatrix}, \quad \mathscr{L}_n=\begin{pmatrix} P_n' & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}\mathscr{L}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n' \end{pmatrix}.$$

По условию, начиная с некоторого n_0, $\mathrm{Re}\,(tU_n'\ \ \tau U_n^*)\,(\mathscr{A}_n+\mathscr{L}_n)\times$ $\times\begin{pmatrix} U_nt \\ \overline{U}_n\tau \end{pmatrix}>0$. Следовательно, при $n>n_0$ интеграл (4.50) может быть вычислен. В результате получаем

$$B_n(a^*,\ a)=(\det P_n\,(\Psi\Psi^*)^{-1}\,P_n)^{1/2}\,[\det(\mathscr{A}_n+\mathscr{L}_n)]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\,(b\ b^*)\,(\mathscr{L}-\mathscr{L}\,(\mathscr{L}+\mathscr{A})^{-1}\,\mathscr{L}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}\right\}. \quad (4.52)$$

Используя равенство (4.36), матрицу $\mathscr{L}_n+\mathscr{A}_n$ нетрудно привести к виду

$$\mathscr{A}_n+\mathscr{L}_n=\begin{pmatrix} P_n' & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi} \\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} P_n' & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\Psi}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n' \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$\det(\mathscr{A}_n+\mathscr{L}_n)=\det\begin{pmatrix} P_n' & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}+A_{11}\Psi & (A_{12}-E)\,\overline{\Psi} \\ (A_{21}-E)\,\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n' \end{pmatrix}\times$$

$$\times\det P_n'\Psi^{-1}P_n\det P_n\overline{\Psi}^{-1}P_n'. \quad (4.53)$$

В силу (4.36), (4.36′)

$$\det P_n'\Psi^{-1}P_n\det P_n\overline{\Psi}^{-1}P_n'=\det P_n\,(\Psi\Psi^*)^{-1}\,P_n.$$

Сокращая на $\det P_n'\Psi^{-1}P_n\det P_n\overline{\Psi}^{-1}P_n'$ и выполняя предельный переход при $n\to\infty$, находим функционал $B(a^*,\ a)$

$$B(a^*,\ a)=\left[\det\begin{pmatrix} \overline{\Phi}+A_{11}\Psi & (A_{12}-E)\,\overline{\Psi} \\ (A_{21}-E)\,\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi} \end{pmatrix}\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\,(b\ b^*)\,(\mathscr{L}-\mathscr{L}\,(\mathscr{A}+\mathscr{L})^{-1}\,\mathscr{L})\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}\right\}. \quad (4.54)$$

Преобразуем показатель экспоненты в (4.54), представляя матрицы $\mathscr{A}+\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$ в виде

$$\mathscr{A}+\mathscr{L}=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi}\\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi^{-1} & 0\\ 0 & \overline{\Psi}^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{L}=\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi^{-1} & 0\\ 0 & \overline{\Psi}^{-1}\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathscr{L}-\mathscr{L}(\mathscr{A}+\mathscr{L})^{-1}\mathscr{L}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\left[E-\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi}\\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix}^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Psi^{-1} & 0\\ 0 & \overline{\Psi}^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi}\\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\left[\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi}\\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Psi^{-1} & 0\\ 0 & \overline{\Psi}^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & -\overline{\Psi}+A_{12}\overline{\Psi}\\ -\Psi+A_{21}\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}.$$

В результате этих преобразований получаем для B окончательное выражение

$$B(a^*,\ a)=$$

$$=(\det C)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(b\ \ b^*)\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}C^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ b^*\end{pmatrix}\right\},\quad(4.55)$$

где

$$C=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}+A_{11}\Psi & (A_{12}-E)\overline{\Psi}\\ (A_{21}-E)\Psi & \Phi+A_{22}\overline{\Psi}\end{pmatrix},$$

$$b=\Phi a+\Psi a^*+f,\ \ b^*=\overline{\Psi}a+\overline{\Phi}a^*+f^*.\qquad(4.56)$$

Формула (4.55) выведена в предположении, что $\Phi=\Phi^*$ и что существует оператор Ψ^{-1}. Рассмотрим произвольное каноническое преобразование, задаваемое операторами Φ, Ψ и вектором f. Представим Φ в виде $\Phi=V\Phi_1$, где Φ_1 — эрмитов положительно определенный оператор и V — унитарный оператор.

Представим рассматриваемое преобразование в виде суперпозиции

$$b_1=\Phi_1 a+\Psi_1 a^*+f_1,\ \ b_1^*=\overline{\Psi}_1 a+\overline{\Phi}_1 a^*+f_1^*,$$

$$b=Vb_1,\ \ b^*=\overline{V}b_1^*,\ \text{где}\ V\Psi_1=\Psi,\ \ Vf_1=f.$$

Используя формулы (4.35) и (4.55), находим, что в этом случае

$$B(a^*,\ a)=$$

$$=(\det C_1)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(b\ \ b^*)\begin{pmatrix}\overline{\Phi} & -\overline{\Psi}\\ -\Psi & \Phi\end{pmatrix}C^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ b^*\end{pmatrix}\right\},\ (4.57)$$

где C, l, b^* определяются формулами (4.56) и

$$C_1=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}_1+A_{11}\Psi_1 & (A_{12}-E)\overline{\Psi}_1\\ (A_{21}-E)\Psi_1 & \Phi_1+A_{22}\overline{\Psi}_1\end{pmatrix}.$$

Заметим теперь, что оператор Ψ^{-1} не входит явно в формулы (4.55), (4.57). Отсюда, очевидно, вытекает, что эти формулы справедливы не только для канонических преобразований, для которых существует Ψ^{-1}, но и для преобразований, которые можно аппроксимировать такими, для которых существует Ψ^{-1}. В частности, нетрудно проверить непосредственно, что формулы (4.55) и (4.57) справедливы для случая, когда $\Psi=0$.

§ 5. Фермиевский случай

1. Определение. Пусть L — гильбертово пространство с инволюцией, $\varphi\in L$, $\hat a(\varphi)$, $\hat a^*(\varphi)$ — операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и удовлетворяющие фермиевским перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&\{\hat a(\varphi_1),\ \hat a^*(\varphi_2)\}=\varphi_1\varphi_2,\\ &\{\hat a(\varphi_1),\ \hat a(\varphi_2)\}=\{\hat a^*(\varphi_1),\ \hat a^*(\varphi_2)\}=0.\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

Рассмотрим в L операторы Φ и Ψ, имеющие общую всюду плотную область определения и обладающие сопряженными, определенными на общем всюду плотном множестве D, инвариантном относительно инволюции. Построим в $\mathscr{H}$ операторы $\hat b(\varphi)$, $\hat b^*(\varphi)$, $\varphi\in D$:

$$\hat b(\varphi)=\hat a(\varphi\Phi)+\hat a^*(\varphi\Psi),\ \ \hat b^*(\varphi)=\hat a(\varphi\overline{\Psi})+\hat a^*(\varphi\overline{\Phi}).\tag{5.2}$$

Если преобразование (5.2) обратимо и операторы $\hat b(\varphi)$, $\hat b^*(\varphi)$ удовлетворяют фермиевским перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&\{\hat b(\varphi_1),\ \hat b^*(\varphi_2)\}=\varphi_1\varphi_2,\\ &\{\hat b(\varphi_1),\ \hat b(\varphi_2)\}=\{\hat b^*(\varphi_1),\ \hat b^*(\varphi_2)\}=0,\end{aligned}\right\}\tag{5.1'}$$

то преобразование (5.2) называется *линейным каноническим преобразованием*.

Если операторы Φ, Ψ определяют каноническое преобразование, то между ними существуют определенные соотношения, которые будут найдены в следующем пункте.

Будем говорить, что каноническое преобразование, определенное операторами Φ и Ψ, *обладает свойством* **A**, если оператор Φ представим в виде $\Phi=\sqrt{\Phi\Phi^*}\,U$, где U — унитарный оператор. В дальнейшем рассматриваются главным образом такие преобразования.

В § 1 было отмечено, что если пространство L конечномерно, операторы $\hat a(\varphi)$, $\hat a^*(\varphi)$ и $\hat b(\varphi)$, $\hat b^*(\varphi)$ действуют в одном пространстве и удовлетворяют фермиевским перестановочным соотношениям, то

$$\hat{b}(\varphi)=\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1},\quad \hat{b}^*(\varphi)=\hat{U}\hat{a}^*(\varphi)\hat{U}^{-1}, \tag{5.3}$$

где $\hat{U}$ — унитарный оператор.

В бесконечномерном случае есть две возможности. Если каноническое преобразование порождено унитарным оператором $\hat{U}$, то будем называть его *собственным*, если же каноническое преобразование таково, что не существует унитарного оператора, удовлетворяющего условию (5.3), то будем называть его *несобственным*.

2. Соотношения между операторами Φ и Ψ. Подставляя (5.2) в (5.1′) и пользуясь (5.1), получаем, что, для того чтобы преобразование (5.2) было каноническим, необходимо и достаточно выполнения между операторами Φ и Ψ соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\Phi\Psi'+\Psi\Phi'=0, \quad \overline{\Phi}\Psi^*+\overline{\Psi}\Phi^*=0,\\ &\Phi\Phi^*+\Psi\Psi^*=E, \quad \overline{\Phi}\Phi'+\overline{\Psi}\Psi'=E. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Стоящие в левой части этих равенств выражения имеют смысл эрмитовых форм на плотном множестве D, на котором определены операторы Φ^*, Ψ^*, например:

$$(\Phi\Psi' f,\ g)=(\Psi' f,\ \Phi^* g),\qquad f,g\in D.$$

Обратим внимание на соотношение $\Phi\Phi^*+\Psi\Psi^*=E$. Из него, очевидно, вытекает, что операторы Φ и Ψ, задающие каноническое преобразование, ограничены. Этот факт не имеет аналога в бозевском случае[1]). Рассмотрим матрицу $\mathcal{A}$, составленную из операторов Φ и Ψ:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}.$$

Матрицу $\mathcal{A}$ в дальнейшем будем называть *матрицей канонического преобразования.*

Легко видеть, что соотношения (5.4) эквивалентны наличию у матрицы $\mathcal{A}$ правой обратной, которая задается формулой

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi^* & \Psi'\\ \Psi^* & \Phi'\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Согласно определению, каноническое преобразование обратимо. Обратимость преобразования (5.2) означает наличие у матрицы $\mathcal{A}$ левой обратной.

Хорошо известно, что если некоторый оператор обладает как левым, так и правым обратным, то эти обратные совпадают. Поэтому матрица (5.5) служит не только правой, но и левой обратной для $\mathcal{A}$.

---

[1]) Из результата § 4, п. 3, следует, что если бозевское каноническое преобразование является *собственным*, то операторы Φ и Ψ ограничены. Нетрудно построить в бозевском случае пример несобственного канонического преобразования, для которого операторы Φ и Ψ не ограничены.

Используя это, получаем в дополнение к (5.4) соотношения

$$\left.\begin{aligned} \Phi^*\Psi+\Psi'\overline{\Phi}=0, \quad \Psi^*\Phi+\Phi'\overline{\Psi}=0, \\ \Phi^*\Phi+\Psi'\overline{\Psi}=E, \quad \Phi'\overline{\Phi}+\Psi^*\Psi=E. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Легко видеть, что при композиции канонических преобразований соответствующие им матрицы перемножаются. Из того обстоятельства, что матрица канонического преобразования обладает двусторонней обратной, вытекает, таким образом, что линейные канонические преобразования образуют группу.

Рассмотрим матрицу $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix}$. Представим матрицу $U\mathcal{A}U^{-1}$ в виде

$$\mathcal{B}=U\mathcal{A}U^{-1}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Операторы A, B, C и D следующим образом выражаются через Φ, Ψ:

$$\left.\begin{aligned} A=\operatorname{Re}(\Phi+\Psi), \quad B=-\operatorname{Im}(\Phi-\Psi), \\ C=\operatorname{Im}(\Psi+\Phi), \quad D=\operatorname{Re}(\Phi-\Psi). \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Таким образом, матрица $\mathcal{B}$ является вещественной.

Рассмотрим матрицу $I=\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что соотношения (5.4), (5.6) эквивалентны соотношениям

$$\mathcal{A}I\mathcal{A}'=I, \quad \mathcal{A}'I\mathcal{A}=I. \tag{5.9}$$

Умножим первое из этих соотношений слева на U и справа на U', а второе — слева на U'^{-1} и справа — на U^{-1}. Замечая, что $UIU'=U'^{-1}IU^{-1}=E$, получаем отсюда

$$\mathcal{B}\mathcal{B}'=E, \quad \mathcal{B}'\mathcal{B}=E. \tag{5.10}$$

Верно и обратное: если матрица $\mathcal{B}$ удовлетворяет соотношениям (5.10), то $\mathcal{A}=U^{-1}\mathcal{B}U$ удовлетворяет соотношениям (5.9) и, следовательно, является матрицей канонического преобразования.

Конечномерные матрицы, удовлетворяющие соотношениям (5.10), называются *ортогональными*. Они образуют группу, причем вещественные ортогональные матрицы образуют компактную группу.

В общем случае операторы, удовлетворяющие соотношениям (5.10), по аналогии с конечномерным случаем естественно назвать *ортогональными*. Они, очевидно, образуют группу.

3. Собственные канонические преобразования. В этом пункте мы находим критерий того, что каноническое преобразование, обладающее свойством **А**, является собственным (см. книгу Фридрихса [1]).

Основная теорема, устанавливающая этот критерий, опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы каноническое преобразование было собственным, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве состояний существовал вектор* $\hat{F}$, *удовлетворяющий уравнениям*

$$\hat{b}(\varphi)\hat{F}=0 \tag{5.11}$$

при всех $\varphi\in L$.

Эта лемма так же, как аналогичная лемма в бозевском случае, является непосредственным следствием теоремы 4 § 1.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть каноническое преобразование, обладающее свойством* A, *задается матрицей* $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$. *Для того чтобы преобразование было собственным, необходимо и достаточно, чтобы оператор* Ψ *был оператором Гильберта—Шмидта.*

Эта теорема доказывается несколько более сложно, чем аналогичная теорема в бозевском случае. Усложнение связано с тем, что в бозевском случае оператор Φ для любого канонического преобразования обладает ограниченным обратным, тогда как в фермиевском случае это не так.

Рассмотрим сначала случай, когда операторы Φ и Φ^* имеют обратные (быть может, неограниченные), определенные на всюду плотном множестве. Затем сведем общий случай к этому.

В первом случае доказательство теоремы почти не отличается от доказательства соответствующей теоремы для бозевского случая. Поэтому мы не будем проводить подробных рассуждений, а ограничимся лишь коротким наброском.

Используя то обстоятельство, что оператор Φ ограничен и имеет обратный, так же, как и в бозевском случае, убеждаемся, что Ψ является оператором Гильберта—Шмидта. Далее, после того, как установлено, что Ψ является оператором Гильберта—Шмидта, замечаем, что из соотношения $\Phi\Phi^* = E - \Psi\Psi^*$ вытекает, что если оператор $\Phi\Phi^*$ имеет обратный, то он имеет *ограниченный* обратный. Тем же свойством, очевидно, обладает $\sqrt{\Phi\Phi^*}$.

По предположению каноническое преобразование обладает свойством A. Это означает, что $\Phi = \sqrt{\Phi\Phi^*}U$, где U — унитарный оператор.

Из этого, очевидно, вытекает, что оператор Φ обладает ограниченным обратным $\Phi^{-1} = U^{-1}(\sqrt{\Phi\Phi^*})^{-1}$. После того, как установлено, что оператор Φ^{-1} ограничен, доказательство достаточности не отличается от доказательства достаточности в бозевском случае.

Сведение общего случая к случаю, когда операторы Φ и Φ^* имеют обратные, опирается на ряд лемм.

Лемма 2. *Пусть собственное каноническое преобразование таково, что оператор* Φ *равен нулю. Тогда пространство* L *конечномерно.*

В самом деле, если $\Phi = 0$, то

$$\hat{b}(\varphi) = \hat{a}^*(\varphi\Psi).$$

Далее, из соотношений (5.4), (5.6) следует, что в этом случае Ψ — унитарный оператор. Поэтому, когда φ пробегает L, то $\varphi\Psi$ также пробегает все пространство L. Следовательно, уравнения (5.11) в этом случае эквивалентны уравнениям

$$\hat{a}^*(\varphi)\hat{F} = 0. \qquad (5.12)$$

Что же касается уравнений (5.12), то в случае, если L бесконечномерно, из них следует, что $\hat{F}=0$ (см. § 1, п. 3).

Разобьем пространство L в сумму двух ортогональных подпространств: $L=L_1+L_2$. Обозначим через $\mathscr{H}_i$ подпространство $\mathscr{H}$, порожденное действием операторов $\hat{a}^*(\varphi)$, $\varphi \in L_i$ на $\hat{\Phi}_0$. Рассмотрим каноническое преобразование, обладающее тем свойством, что пространства L_1 и L_2 инвариантны относительно правого действия операторов Φ, Ψ, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ (см. Введение, п. 3). Обозначим через Φ_i, Ψ_i, $\overline{\Phi}_i$, $\overline{\Psi}_i$ значения операторов Φ, Ψ, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ на подпространстве L_i. Очевидно, что при $\varphi \in L_i$ каноническое преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}(\varphi) &= \hat{a}(\varphi\Phi_i)+\hat{a}^*(\varphi\Psi_i), \\ \hat{b}^*(\varphi) &= \hat{a}(\varphi\overline{\Psi}_i)+\hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi}_i). \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Пространство $\mathscr{H}_i$, очевидно, инвариантно относительно операторов $\hat{a}(\varphi)$, $\hat{a}^*(\varphi)$, $\hat{b}(\varphi)$, $\hat{b}^*(\varphi)$ при $\varphi \in L_i$. Поэтому формулы (5.13) можно рассматривать как каноническое преобразование в пространстве $\mathscr{H}_i$. Преобразование (5.13) будем называть *компонентой* преобразования с матрицей $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$. Преобразование с матрицей $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$, обладающее описанными свойствами, назовем преобразованием, *разбивающимся на две компоненты.*

Компоненту (5.13) назовем *собственной*, если каноническое преобразование (5.13) — собственное, т. е. в пространстве $\mathscr{H}_i$ существует унитарный оператор $\hat{U}$ такой, что

$$\hat{b}(\varphi)=\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}, \quad \hat{b}^*(\varphi)=\hat{U}\hat{a}^*(\varphi)\hat{U}^{-1}.$$

Лемма 3. *Каноническое преобразование, разбивающееся на две компоненты, является собственным тогда и только тогда, когда обе его компоненты являются собственными.*

Напомним, что каждому вектору пространства состояний $\mathscr{H}$ соответствует элемент грассмановой алгебры $\mathscr{G}$, порожденной пространством L. Очевидно, что если вектор $\hat{\Phi}$ принадлежит $\mathscr{H}_i$, то соответствующий ему функционал есть элемент подалгебры $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}$, порожденной подпространством L_i. Пусть исходное каноническое преобразование является собственным, $\hat{F}$ — вектор, удовлетворяющий уравнениям (5.11), и $F(a^*)$ — соответствующий ему функционал.

Рассмотрим значение $F(a^*)$ на L_1. Допустим сначала, что это значение равно нулю. Отсюда, очевидно, вытекает, что $F(a^*) \in \mathscr{G}_2$. Применим к $F(a^*)$ оператор $\hat{b}(\varphi)=\int \varphi(x)\Phi(x, y)\frac{\delta}{\delta a^*(y)}\,dx\,dy+$ $+\int \varphi(x)\Psi(x, y)a^*(y)\,dx\,dy$ при $\varphi \in L_1$. Из (5.11) и из того обстоятельства, что $F(a^*) \in \mathscr{G}_2$, вытекает, что $\int \varphi(x)\Psi(x, y)a^*(y)\,dx\,dy\,F(a^*)=$ $=0$. Так как пространство L_1 инвариантно относительно Ψ, то последнее уравнение эквивалентно тому, что $\hat{a}^*(\varphi_1)\hat{F}=0$, где $\varphi_1 = \varphi\Psi \in L_1$. Принимая опять во внимание, что $F(a^*) \in \mathcal{G}_2$, приходим к выводу, что уравнение $\hat{a}^*(\varphi_1)\hat{F}=0$, $\varphi_1 \in L_1$, имеет решение только если $\varphi_1 = 0$, или, другими словами, если значение оператора Ψ на L_1 равно нулю. Таким образом, в этом случае первая компонента канонического преобразования имеет вид

$$\hat{b}(\varphi) = \hat{a}(\varphi\Phi_1), \quad \hat{b}^*(\varphi) = \hat{a}^*(\varphi\overline{\Phi}_1), \quad \varphi \in L_1. \tag{5.14}$$

Очевидно, что преобразование (5.14) является собственным и что вектору $\hat{F}_1 \in \mathcal{H}_1$, удовлетворяющему уравнениям $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_1 = 0$, $\varphi \in L_1$, отвечает функционал $F_1 \equiv 1$.

Рассмотрим случай, когда значение $F(a^*)$ на L_1 отлично от нуля. Обозначим это значение через $F_1(a^*)$. Очевидно, что соответствующий $F_1(a^*)$ вектор $\hat{F}_1$ есть проекция $\hat{F}$ на пространство $\mathcal{H}_1$. Поэтому $(\hat{F}_1, \hat{F}_1) < \infty$. Покажем, что $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_1 = 0$ при $\varphi \in L_1$.

Пусть $\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{T}$, где $\hat{T}$ — вектор, ортогональный $\mathcal{H}_1$. Так как пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно операторов $\hat{b}^*(\varphi)$ при $\varphi \in L_1$, то $\hat{b}(\varphi)\hat{T}$ при $\varphi \in L_1$ остается ортогональным $\mathcal{H}_1$. С другой стороны, $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_1 \in \mathcal{H}_1$. Поэтому из равенств $0 = \hat{b}(\varphi)\hat{F} = \hat{b}(\varphi)\hat{F}_1 + \hat{b}(\varphi)\hat{T}$ следует, что $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_1 = 0$, что и требовалось.

Пусть теперь обе компоненты являются собственными; $\hat{F}_i \in \mathcal{H}_i$ — векторы, удовлетворяющие уравнениям $\hat{b}(\varphi)\hat{F}_i = 0$ при $\varphi \in L_i$; $F_i(a^*)$ — соответствующие этим векторам функционалы. Рассмотрим вектор $\hat{F}$, которому отвечает функционал $F = F_1 \cdot F_2$.

Из формулы (3.66) для скалярного произведения вытекает, что $(\hat{F}, \hat{F}) = (\hat{F}_1, \hat{F}_1)(\hat{F}_2, \hat{F}_2)$; следовательно, $(\hat{F}, \hat{F}) < \infty$, и, тем самым, $\hat{F}$ принадлежит пространству состояний.

Рассмотрим оператор над функционалами, соответствующий $\hat{b}(\varphi)$, и обозначим его по-прежнему через $\hat{b}(\varphi)$:

$$\hat{b}(\varphi) = \int \varphi(x)\Phi(x, y)\frac{\delta}{\delta a^*(y)}\,dx\,dy + \int \varphi(x)\Psi(x, y)a^*(y)\,dx\,dy.$$

Для завершения доказательства леммы, очевидно, осталось проверить, что $\hat{b}(\varphi)F = 0$ при любом $\varphi \in L$. Если $\varphi \in L_1$, то $\hat{b}(\varphi)F = 0$ вследствие того, что $\hat{b}(\varphi)F_1 = 0$. Если же $\varphi \in L_2$, то разобьем F_1 на сумму четного и нечетного функционалов: $F_1 = F_1'' + F_1'$. Из формулы (3.7) для дифференцирования произведения[1]) непосредственно вытекает, что в этом случае

$$\hat{b}(\varphi)F_1F_2 = F_1''\hat{b}(\varphi)F_2 - F_1'\hat{b}(\varphi)F_2 = 0,$$

так как $\hat{b}(\varphi)F_2 = 0$.

Итак, $\hat{b}(\varphi)F = 0$ при любом φ. Лемма доказана.

---

[1]) Очевидно, что эта формула справедлива для бесконечномерной алгебры Грассмана точно так же, как и для конечномерной.

Рассмотрим каноническое преобразование, для которого оператор Ψ равен нулю. Из соотношений (5.4), (5.6) следует, что для такого преобразования оператор Φ является произвольным унитарным оператором.

Пусть $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$ — матрица некоторого собственного преобразования, $\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix}V_1 & 0 \\ 0 & \overline{V_1}\end{pmatrix}$, $\mathcal{A}_2=\begin{pmatrix}V_2 & 0 \\ 0 & \overline{V_2}\end{pmatrix}$ — матрицы только что описанных канонических преобразований. Рассмотрим каноническое преобразование с матрицей $\mathcal{B}=\mathcal{A}_1\mathcal{A}\mathcal{A}_2=\begin{pmatrix}V_1\Phi V_2 & V_1\Psi\overline{V_2} \\ \overline{V_1}\overline{\Psi}V_2 & \overline{V_1}\overline{\Phi}V_2\end{pmatrix}$. Очевидно, что это каноническое преобразование будет или не будет собственным одновременно с первоначальным преобразованием и что условие теоремы для этого преобразования выполняется тогда и только тогда, когда оно выполнено для первоначального преобразования.

Благодаря тому что преобразование обладает свойством **A**, операторы V_1 и V_2 можно подобрать так, чтобы $V_1\Phi V_2$ был вещественным эрмитовым оператором[1]). Достаточно, следовательно, доказать теорему для случая, когда оператор Φ вещественный эрмитов.

Пусть $\Phi=\Phi^*=\overline{\Phi}$. Обозначим через L_1 подпространство, на котором Φ обращается в нуль, и через L_2 ортогональное дополнение к L_1. Очевидно, что на L_2 оператор Φ обратим.

Покажем, что пространства L_1, L_2 инвариантны относительно Ψ и $\overline{\Psi}$. Пусть $f\in L_1$. Из условия (5.4) $\Phi\Psi'+\Psi\Phi'=0$, дополненного соотношением $\Phi=\Phi'$, получаем $0=f\Phi\Psi'=-f\Psi\Phi$. Отсюда $f\Psi\in L_1$. Аналогично из условия $\overline{\Phi}\Psi^*+\overline{\Psi}\Phi^*=0$ получаем, что $f\overline{\Psi}=0$; Далее из условий (5.6) $\Phi^*\Psi+\Psi'\overline{\Phi}=0$, $\Psi^*\Phi+\Phi'\overline{\Psi}=0$ и тождества $\Phi^*=\overline{\Phi}=\Phi$ находим таким же образом, что $f\Psi'\in L_1$ и $f\Psi^*\in L_1$; следовательно, пространство L_1 инвариантно относительно операторов Ψ, Ψ^*, Ψ', $\overline{\Psi}$. Отсюда, очевидно, следует, что L_2 инвариантно относительно тех же операторов. Таким образом, каноническое преобразование распадается на две компоненты, соответствующие пространствам L_1 и L_2. Из лемм 2 и 3 сразу следует, что пространство L_1 конечномерно и что преобразование является собственным одновременно с его компонентой, порожденной пространством L_2. Очевидно, с другой стороны, что, поскольку пространство L_1 конечномерно, оператор Ψ является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда его значение в пространстве L_2 является оператором Гильберта—Шмидта. Таким образом, доказательство теоремы сведено к случаю, когда операторы Φ и Φ^* обладают обратными. Начиная с этого места, как указывалось выше, доказательство совпадает с доказательством аналогичной теоремы для бозевского случая.

---

[1]) См. Введение, конец п. 3.

Отметим, что в процессе доказательства нами установлен факт, который представляет ценность сам по себе. Сформулируем его в виде отдельной леммы.

Лемма 4. *Пусть собственное каноническое преобразование с матрицей* $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ *обладает свойством* A. *Обозначим через* $L_1 \subset L$ *собственное подпространство для оператора* Φ *с собственным значением* 0. *Пространство* L_1 *конечномерно.*

Отметим также еще одно важное обстоятельство.

Лемма 5. *Рассмотрим собственное каноническое преобразование, обладающее тем свойством, что собственное подпространство* L_1 *оператора* Φ *с собственным значением* 0 *четномерно. Тогда существует семейство канонических преобразований, зависящее от параметра* t, *такое, что при* $t \neq 0$ *существует оператор* Φ_t^{-1} *и* Φ *есть предел* Φ_t *при* $t \to 0$ *в сильном смысле, а* Ψ *есть предел* Ψ_t *при* $t \to 0$ *в сильном смысле.*

Для доказательства представим каноническое преобразование в виде произведения двух компонент, для одной из которых Φ^{-1} существует, для другой $\Phi = 0$, подобно тому как это было сделано при доказательстве теоремы 1. Компонента с $\Phi = 0$ есть каноническое преобразование в конечномерном пространстве, имеющее матрицу $\begin{pmatrix} 0 & \Psi_1 \\ \overline{\Psi}_1 & 0 \end{pmatrix}$, где Ψ_1 — произвольная унитарная матрица четного порядка. Нетрудно показать, исходя из элементарных соображений линейной алгебры, что существует семейство матриц $\begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Psi_1(t) \\ \overline{\Psi}_1(t) & \overline{\Phi}_1(t) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условиям (5.5), для которых существует Φ_1^{-1} и $\begin{pmatrix} 0 & \Psi_1 \\ \overline{\Psi}_1 & 0 \end{pmatrix}$ служит пределом при $t \to 0$.

Используя каноническое преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Psi_1(t) \\ \overline{\Psi}_1(t) & \overline{\Phi}_1(t) \end{pmatrix}$ в качестве одной из компонент и компоненту исходного преобразования, для которой существует Φ^{-1}, строим нужное каноническое преобразование.

4. Детерминант собственного канонического преобразования. Пусть $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ — матрица собственного канонического преобразования, причем оператор Φ эрмитов и имеет обратный Φ^{-1}. Точно так же, как в бозевском случае, убеждаемся в том, что матрица $\mathcal{A}$ имеет детерминант и $\det \mathcal{A} = 1$.

5. Построение оператора $\hat{U}$. Найдем производящие функционалы для матричной записи и нормальной формы оператора $\hat{U}$, задающего собственное линейное каноническое преобразование.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\hat{U}$ *задает собственное каноническое преобразование* $\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1} = \hat{a}(\varphi\Phi) + \hat{a}^*(\varphi\Psi)$ *такое, что у оператора* Φ *есть двусторонний обратный* Φ^{-1}. *Тогда функционалы* $U(a^*, a)$, $\tilde{U}(a^*, a)$, *производящие для нормальной и матрич-*

ной форм $\hat{U}$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{U}(a^*, a)=\\&=\theta(\det\Phi\Phi^*)^{1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(a\overline{\Psi}\Phi^{-1}a-2a^*\Phi^{-1}a+a^*\Phi^{-1}\Psi a^*)\right\},\\&U(a^*, a)=\tilde{U}(a^*, a)e^{-a^*a},\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

где θ — произвольное число, равное по модулю единице.

Формулы (5.15) доказываются дословно так же, как аналогичные им формулы в бозевском случае. Поэтому на их выводе мы не будем останавливаться.

Приведем также без вывода выражение для функционала F, отвечающего преобразованному вакуумному вектору $\hat{F}=\hat{U}\hat{\Phi}_0$:

$$F(a^*)=\theta(\det\Phi\Phi^*)^{1/4}\exp\left[-\frac{1}{2}a^*\Phi^{-1}\Psi a^*\right]. \tag{5.16}$$

Заметим, что если оператор Φ обладает двусторонним обратным, то он представим в виде $\Phi=\sqrt{\Phi\Phi^*}U$, где U — унитарный оператор. Следовательно, каноническое преобразование обладает свойством **А**.

Можно показать (мы на этом не будем останавливаться), что выражения для функционалов $\tilde{U}(a^*, a)$, $U(a^*, a)$, $F(a^*)$, отвечающих произвольному собственному каноническому преобразованию, обладающему свойством **А**, могут быть получены из (5.15) и (5.16) предельным переходом.

Формула (5.15) сопоставляет каждому собственному каноническому преобразованию семейство операторов, отличающихся множителем: $g\longrightarrow\theta\hat{U}_g$, причем это соответствие является проективным представлением:

$$\text{если}\quad g_1\longrightarrow\theta\hat{U}_{g_1},\quad g_2\longrightarrow\theta\hat{U}_{g_2},\quad\text{то}\quad g_1g_2\longrightarrow\theta\hat{U}_{g_1}\hat{U}_{g_2}.$$

Неоднозначность в сопоставлении $g\longrightarrow\theta\hat{U}_g$ можно уменьшить, если рассмотреть вместо группы всех собственных канонических преобразований ее подгруппу G, определяемую следующим образом: матрица $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$ преобразования из g обладает тем свойством, что $\Phi=E+K$, где K — оператор с абсолютно сходящимся следом. Для элементов группы G можно выбрать θ в формуле (5.15) таким образом, чтобы

$$\theta(\det\Phi\Phi^*)^{1/4}=(\det\Phi)^{1/2}.$$

При таком выборе θ остается лишь неопределенность в выборе знака корня. Используя формулы (3.69) или (3.70) для произведения операторов, легко установить, что полученное двузначное представление является проективным представлением группы G:

$$\text{если}\quad g_1\longrightarrow\pm U_{g_1},\quad g_2\longrightarrow\pm U_{g_2},\quad\text{то}\quad g_1g_2\longrightarrow\pm U_{g_1}U_{g_2}.$$

Оставшуюся неопределенность в знаке устранить нельзя. Это доказывается буквально так же, как аналогичное утверждение для бозевского случая (см. с. 89).

Полученное представление группы G называется спинорным. Спинорные представления конечномерных ортогональных групп хорошо изучены (см., например, книгу Вейля [1]).

6. Канонические преобразования операторов. Рассмотрим собственное каноническое преобразование $\hat{U}\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}=\hat{a}(\varphi\Phi)+\hat{a}^*(\varphi\Psi)$. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}=\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ — операторы, представимые в нормальной форме. Выразим функционал $B(a^*, a)$, отвечающий нормальной форме $\hat{B}$, через аналогичный ему функционал $A(a^*, a)$. Решим сначала эту задачу для частного случая, когда $\Psi=0$.

Очевидно, что в этом случае

$$B(a^*, a)=A(\overline{\Phi}a^*, \Phi a), \tag{5.17}$$

т. е. каноническое преобразование сводится к замене переменных.

Заметим, что если $\Psi=0$, то, как следует из соотношений (5.4), (5.6), Φ — произвольный унитарный оператор. Перейдем к общему случаю.

Пусть преобразование обладает свойством **А**. Представим матрицу преобразования в виде

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \Psi_1\\ \overline{\Psi}_1 & \overline{\Phi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & \overline{V}\end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

где Φ_1 — эрмитов оператор, V — унитарный оператор. Очевидно, что каждый сомножитель в (5.18) является матрицей канонического преобразования. Для случая, когда каноническое преобразование задается матрицей $\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & \overline{V}\end{pmatrix}$, задача решается формулой (5.17). Таким образом, остается рассмотреть канонические преобразования, для которых оператор Φ_1 эрмитов. Очевидно, что этот случай представляет наибольший интерес.

Теорема 3. *Пусть* $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$ — *матрица собственного канонического преобразования, причем* Ψ — *оператор, имеющий обратный, а* Φ — *эрмитов оператор, у которого собственное подпространство со значением нуль имеет четную размерность.*

Предположим, что существует монотонная, сильно сходящаяся к единице последовательность операторов проектирования P_n, *принадлежащих спектральному семейству* Φ, *такая, что пространства* P_nL *конечномерны и имеют четную размерность*[1]. *Тогда функционал* $B(a^*, a)$ *равен*

$$B(a^*, a)=\lim_{n\to\infty}\int \mathcal{K}_n(a^*, a\mid\alpha^*, \alpha)\,A(\alpha^*, \alpha)\,d^n\alpha^*\,d^n\alpha, \tag{5.19}$$

[1]) Очевидно, что это условие выполнено, если собственные подпространства Φ четномерны.

где

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) =\\ &\quad = (\det P_n \Psi\Psi^* P_n)^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(b-\alpha \;\; b^*-\alpha^*)\,\mathcal{L}\begin{pmatrix} b-\alpha \\ b^*-\alpha^*\end{pmatrix}\right],\\ &\qquad\qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}\Psi^{-1} & -E \\ E & -\Phi\overline{\Psi}^{-1}\end{pmatrix},\end{aligned}\right\} \quad (5.20)$$

$b = \Phi a + \Psi a^*$, $b^* = \overline{\Psi} a + \overline{\Phi} a^*$, $\alpha \in P_n F$, $\alpha^* \in \overline{P}_n F^*$, $F + F^*$ — *пространство образующих алгебры, которой принадлежит* $A(\alpha^*, \alpha)$.

Для доказательства теоремы заметим, что, согласно формуле (3.70), функционал $B(a^*, a)$ равен

$$B(a^*, a) = \int U(a^*, \alpha) V(\beta^*, a) A(\alpha^*, \beta) e^{-(\alpha^*-a^*)(\alpha-\beta)-(\beta^*-\alpha^*)(\beta-a)} \prod d\alpha^*\, d\alpha\, d\beta^*\, d\beta, \quad (5.21)$$

где $U(a^*, a)$ — функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{U}$, осуществляющего каноническое преобразование; $V(a^*, a)$ — функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{V} = \hat{U}^{-1}$.

Рассмотрим последовательность интегралов

$$B_n(a^*, a) = \int U(a^*, \alpha) V(\beta^*, a) A(\alpha^*, \beta) e^{-(\alpha^*-a^*)(\alpha-\beta)-(\beta^*-\alpha^*)(\beta-a)} d^n\alpha\, d^n\alpha^*\, d^n\beta\, d^n\beta^*, \quad (5.22)$$

где α, $\beta \in P_n F$; α^*, $\beta^* \in \overline{P}_n F^*$. В соответствии с определением континуального интеграла

$$B(a^*, a) = \lim_{n \to \infty} B_n(a^*, a).$$

Пользуясь четностью числа n, интеграл (5.22) можно представить в виде

$$B_n(a^*, a) = \int \tilde{\mathcal{K}}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \beta) A(\alpha^*, \beta)\, d^n\alpha^*\, d^n\beta, \quad (5.23)$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \beta) = \int U(a^*, \alpha) V(\beta^*, a) e^{-(\alpha^*-a^*)(\alpha-\beta)-(\beta^*-a^*)(\beta-a)} d^n\alpha\, d^n\beta^*.$$

Предположим теперь, что каноническое преобразование таково, что существует Φ^{-1}. В этом случае функционал $U(a^*, \alpha)$ определяется формулой (5.15). Функционал $V(\beta^*, a)$ отвечает оператору $\hat{U}^{-1}$, поэтому он получается заменой в (5.15) числа θ на $\overline{\theta}$ и операторов Φ, Ψ на соответствующие им элементы Φ^*, Ψ' матрицы $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* & \Psi' \\ \Psi^* & \Phi'\end{pmatrix}$.

Таким образом, подынтегральным выражением в (5.23) является экспонента, в показателе которой стоит многочлен второй степени по переменным интегрирования. Выделяя полный квадрат и вычисляя гауссов интеграл, получаем для $\tilde{\mathscr{K}}_n$ выражение

$$\tilde{\mathscr{K}}_n = (\det \Phi\Phi^*)^{1/2} (\det \bar{P}_n \bar{\Psi}\Phi^{-1} P_n)^{1/2} (\det P_n \Phi^{*-1}\Psi' \bar{P}_n)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\alpha^* - a^*\Phi^{-1})\Phi\bar{\Psi}^{-1}(\alpha^* - \Phi'^{-1}a^*) + \right.\right.$$
$$+ (\beta - a\bar{\Phi}^{-1})\Psi'^{-1}\Phi^*(\beta - \Phi^{*-1}a) + a^*\Phi^{-1}\Psi a^* + a\Psi^*\Phi^{*-1}a +$$
$$\left.\left. + 2\alpha^*\beta + 2a^*a\right]\right\}. \quad (5.24)$$

Показатель экспоненты (5.24) после замены β на α совпадает с показателем экспоненты (5.20). Чтобы убедиться в этом, следует представить показатель (5.20), пользуясь выражением для b, b^* через a, a^*, в виде квадратичной формы от a, a^*, α, α^* и установить совпадение коэффициентов этой формы с соответствующими коэффициентами квадратичной формы, стоящей в показателе (5.24). Это приводит к несложным, хотя и довольно кропотливым, вычислениям, многократно использующим соотношения (5.4) и (5.6).

Мы опустим эти вычисления и обратимся к предэкспоненциальному множителю.

Заметим, что стоящее в предэкспоненциальном множителе выражение $\det \bar{P}_n \bar{\Psi}\Phi^{-1}P_n$ есть определитель матрицы билинейной формы $\alpha\bar{\Psi}\Phi^{-1}\beta$, $\alpha, \beta \in P_n F$. Аналогичный смысл имеет $\det P_n\Phi^{*-1}\Psi'\bar{P}_n$. Пользуясь перестановочностью P_n и $\Phi = \Phi^*$, находим

$$\det \bar{P}_n \bar{\Psi}\Phi^{-1}P_n \det P_n \Phi^{*-1}\Psi'\bar{P}_n =$$
$$= \det \bar{P}_n \bar{\Psi} P_n \det P_n \Psi' \bar{P}_n \det P_n \Phi^{-1}\Phi^{*-1} P_n.$$

Так же как и в бозевском случае, нетрудно показать, что

$$\bar{\Psi}P_n = \bar{P}_n \bar{\Psi}. \quad (5.25)$$

Поэтому $\det \bar{P}_n \bar{\Psi} P_n \det P_n \Psi' \bar{P}_n = \det \bar{P}_n \bar{\Psi}\Psi' \bar{P}_n$. Очевидно, что $\bar{P}_n \bar{\Psi}\Psi'\bar{P}_n$ — эрмитов оператор. Поэтому его детерминант — вещественное число. Следовательно,

$$\det \bar{P}_n \bar{\Psi}\Psi' \bar{P}_n = \det P_n \Psi\Psi^* P_n.$$

Заметим, наконец, что $\lim\limits_{n\to\infty} \det P_n \Phi^{-1}\Phi^{*-1} P_n = (\det \Phi\Phi^*)^{-1}$. Поэтому функционал $B(a^*, a)$ равен не только пределу $B_n(a^*, a)$, но и пределу функционалов

$$\int \mathscr{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) A(\alpha^*, \alpha)\, d^n\alpha^*\, d^n\alpha,$$

где

$$\mathscr{K}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) = \left(\frac{\det \Phi\Phi^*}{\det P_n \Phi\Phi^* P_n}\right)^{1/2} \tilde{\mathscr{K}}_n(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha).$$

Из сказанного выше ясно, что определяемый этой формулой функционал $\mathscr{K}_n$ совпадает с (5.20).

Таким образом, для случая, когда существует Φ^{-1}, теорема доказана. Общий случай может быть получен с помощью предельного перехода, поскольку оператор Φ^{-1} не входит в формулу (5.20). Подробно мы на этом останавливаться не будем, напомним лишь, что, согласно лемме 5, если собственное подпространство со значением 0 оператора Φ четномерно, то матрица канонического преобразования $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ может быть аппроксимирована матрицами $\begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix}$, для которых существует Φ_t^{-1}.

7. Другое доказательство теоремы 3. Из приведенного выше доказательства теоремы не видно, откуда берется окончательное выражение для функционала $\mathcal{K}_n$. Приведем другое доказательство, при котором ядро $\mathcal{K}_n$ получается сразу в окончательном виде, но которое имеет силу только для случая, когда число степеней свободы конечно. Очевидно, что, когда число степеней свободы конечно, функционал $B(a^*, a)$ выражается через $A(a^*, a)$ без помощи предельного перехода. Предположим число степеней свободы n четным и будем искать выражение для B в виде

$$B(a^*, a) = \int \mathcal{K}(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha)\, A(\alpha^*, \alpha)\, d^n\alpha\, d^n\alpha^*, \tag{5.26}$$

где $\mathcal{K}$ — четный элемент грассмановой алгебры с $4n$ образующими a_k, a_k^*, α_k, α_k^*.

Заменим оператор $\hat{A}$ на $\hat{a}_k\hat{A}$. Тогда оператор $\hat{B} = \hat{U}A\hat{U}^{-1}$ заменится на $\hat{U}\hat{a}_k\hat{U}^{-1}\hat{B} = \sum (\Phi_{kp}\hat{a}_p + \Psi_{kp}\hat{a}_p^*)\hat{B}$, функционалы A и B заменяются на $\left(\frac{\partial}{\partial a_k^*} + a_k\right) A$ и $\sum\limits_p \left[\Phi_{kp}\left(\frac{\partial}{\partial a_p^*} + a_p\right) + \Psi_{kp}a_p^*\right] B$. Таким образом, из (5.26) получаем тождество

$$\int \sum_p \left(\Phi_{kp}a_p + \Psi_{kp}a_p^* + \Phi_{kp}\frac{\partial}{\partial a_p^*}\right) \mathcal{K} A d^n\alpha^*\, d^n\alpha = \int \mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} + \alpha_k\right) A d^n\alpha^*\, d^n\alpha. \tag{5.27}$$

Интегрируя в правой части (5.27) по частям, находим, что тождество (5.27) выполняется, если $\mathcal{K}$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_p \left(\Phi_{kp}a_p + \Psi_{kp}a_p^* + \Phi_{kp}\frac{\partial}{\partial a_p^*}\right)\mathcal{K} = \mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} + \alpha_k\right). \tag{5.28}$$

Аналогично, заменяя $\hat{A}$ на $\hat{a}_k^*\hat{A}$, на $\hat{A}\,\hat{a}_k$ и на $\hat{A}\,\hat{a}_k^*$, получим для $\mathcal{K}$ еще три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_p \left(\overline{\Psi}_{kp}a_p + \overline{\Phi}_{kp}a_p^* + \overline{\Psi}_{kp}\frac{\partial}{\partial a_p^*}\right)\mathcal{K} = \mathcal{K}\alpha_k^*, \\ &\mathcal{K}\sum_p \left(\Phi_{kp}a_p + \Psi_{kp}a_p^* + \Psi_{kp}\frac{\partial}{\partial a_p}\right) = \alpha_k\mathcal{K}, \\ &\mathcal{K}\sum_p \left(\overline{\Psi}_{kp}a_p + \overline{\Phi}_{kp}a_p^* + \overline{\Phi}_{kp}\frac{\partial}{\partial a_p}\right) = \left(\alpha_k^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)\mathcal{K} \end{aligned}\right\} \tag{5.28'}$$

(при выводе последних двух уравнений использовано предположение о четности $\mathcal{K}$).

Кроме уравнений (5.28), (5.28′), $\mathcal{K}$ удовлетворяет нормировочному условию

$$\int \mathcal{K}(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha)\, d^n\alpha^*\, d^n\alpha = 1, \tag{5.29}$$

которое выражает то обстоятельство, что при каноническом преобразовании единичный оператор переходит в единичный.

Нетрудно показать, что если уравнения (5.28), (5.28′) совместно с условием (5.29) имеют решение, то это решение единственно [1]).

Введем новые переменные $x_k = \sum_p (\Phi_{kp} a_p + \Psi_{kp} a_p^*) - \alpha_k$, $x_k^* = \sum_p (\overline{\Psi}_{kp} a_p + \overline{\Phi}_{kp} a_p^*) - \alpha_k^*$ и будем искать $\mathscr{K}$ в виде $\mathscr{K}(a^*, a \mid \alpha^*, \alpha) = F(x^*, x)$. Нетрудно видеть, что первые два уравнения (5.28′) превращаются в следующие уравнения для F:

$$\left.\begin{aligned} x_k F + \sum_{p,s} \overline{\Phi}_{kp} \left(\Psi_{sp} \frac{\partial}{\partial x_s} + \overline{\Phi}_{sp} \frac{\partial}{\partial x_s^*} \right) F - \frac{\partial}{\partial x_k^*} F = 0, \\ x_k^* F + \sum_{p,s} \Psi_{kp} \left(\Psi_{sp} \frac{\partial}{\partial x_s} + \overline{\Phi}_{sp} \frac{\partial}{\partial x_s^*} \right) F = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Что же касается остальных уравнений (5.28′), то они оказываются следствием этих [2]).

Решение уравнений (5.30) ищем в виде

$$F = c \exp \left[\frac{1}{2} (x A_{11} x + 2x A_{12} x^* + x^* A_{22} x^*) \right].$$

Подставляя F в уравнения (5.30), получаем для определения матриц A_{ik} четыре соотношения, из которых находим

$$A_{11} = \overline{\Phi} \Psi^{-1}, \quad A_{22} = -\Phi \overline{\Psi}^{-1}, \quad A_{12} = -E.$$

Из условия (5.29) находим, что предэкспоненциальный множитель c равен $\sqrt{\det \Psi\Psi^*}$.

Аналогично может быть проведено доказательство соответствующей теоремы для бозевского случая, когда число степеней свободы конечно.

К сожалению, этот вывод не удается провести в общем случае.

8. Пример. В качестве примера рассмотрим каноническое преобразование оператора, нормальной форме которого отвечает функционал вида

$$A = \exp \left[\frac{1}{2} (a A_{11} a + 2a A_{12} a^* + a^* A_{22} a^*) \right], \quad A_{ij} = - A'_{ji}. \tag{5.31}$$

Применение формулы (5.19) сводится в этом случае к вычислению гауссова интеграла. В результате получаем

$$B(a^*, a) = (\det C)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} (b \; b^*) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A'_{12} & A_{22} \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} \right], \tag{5.32}$$

---

[1]) Обозначим через K оператор над операторами, порожденный решением уравнений (5.28), (5.28′), (5.29), и через $\mathfrak{A}$ оператор над операторами, порожденный унитарным преобразованием $\hat{U}$: $\mathfrak{A}(\hat{A}) = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^{-1}$. Очевидно, что оператор $\mathfrak{A}^{-1} K$ перестановочен с операторами левого и правого умножения на $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$. Нетрудно показать, что операторы левого и правого умножения на $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ образуют неприводимое семейство в пространстве операторов. Поэтому $\mathfrak{A}^{-1} K = \lambda E$, $K = \lambda \mathfrak{A}$. Из (5.29) вытекает, что $\lambda = 1$.

[2]) При доказательстве этих утверждений следует иметь в виду, что в силу четности F имеем $\frac{\partial}{\partial x_p} F = -F \frac{\partial}{\partial x_p}$.

где

$$C = \begin{pmatrix} \Phi^* - \Psi' A_{11} & \Psi' (E - A_{12}) \\ \Psi^* (E - A_{12}') & \Phi' + \Psi^* A_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \Phi a + \Psi a^*, \quad b^* = \overline{\Psi} a + \overline{\Phi} a^*.$$

Мы не будем приводить вычислений, так как они вплоть до мелких деталей повторяют аналогичные вычисления для бозевского случая. Отметим лишь, что при преобразовании предэкспоненциального множителя приходится пользоваться тем, что подпространства $P_n L$ четномерны.

Формула (5.32) выводится в предположении, что оператор Φ эрмитов и неотрицателен, а оператор Ψ имеет обратный. Так как эта формула не содержит явно Ψ^{-1}, то она остается справедливой для преобразований, для которых Ψ^{-1} не существует, но которые могут быть получены из тех, у которых Ψ^{-1} существует, предельным переходом. Нетрудно видеть также, что формула (5.32) сохраняет силу в случае, когда Φ не эрмитов, но представим в виде $\Phi = SU$, где S — эрмитов неотрицательный оператор, а U — унитарный такой, что $U - E$ — ядерный оператор.

В более общем случае, когда $\Phi = \sqrt{\Phi\Phi^*}U$, где U — произвольный унитарный оператор, $\det C$ может не существовать из-за того, что не существует $\det \Phi$.

Если, однако, заменить в (5.32) $\det C$ на $\det C_1$, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} S - \Psi_1' A_{11} & \Psi_1' (E - A_{12}) \\ \Psi_1^* (E - A_{12}') & S' + \Psi_1^* A_{22} \end{pmatrix}, \quad S = \sqrt{\Phi\Phi^*}, \quad \Psi_1 = \Psi U^{-1},$$

то измененная таким образом формула (5.32) сохранит свою силу и в этом случае.

Глава III

КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе исследуются операторы, выражающиеся через операторы рождения и уничтожения с помощью многочленов не выше второй степени. В § 6 исследуются операторы, приведенные к нормальной форме, в § 7 — не приведенные к нормальной форме, в § 8 найден канонический вид квадратичных операторов, к которому они могут быть приведены собственным линейным каноническим преобразованием.

Ограничения, накладываемые на оператор в § 8, являются весьма жесткими. Было бы очень интересно исследовать приведение квадратичных операторов к каноническому виду более полно.

Отметим, что уже на примере квадратичных операторов мы встречаемся с явлениями, характерными для операторов и более общего вида: не всякое квадратичное выражение по операторам рождения и уничтожения вообще определяет оператор в пространстве состояний, с помощью канонического преобразования можно превратить оператор в выражение, не имеющее операторного смысла, и наоборот. Простейшие примеры такого рода рассмотрены в конце § 7.

Описываемые явления (в более сложной ситуации, когда оператор является неквадратичным, но полиномиальным более высокой степени) характерны для теории поля. Они приводят к бесконечностям, которые устраняются так называемыми перенормировками массы и волновых функций.

§ 6. Квадратичные операторы, приведенные к нормальной форме

1. Определение. Обозначим, как всегда, через L гильбертово пространство с инволюцией. Реализуем L согласованным с инволюцией образом в виде пространства функций с суммируемым квадратом на множестве M, снабженном мерой. Пусть далее $\mathscr{H}$ — пространство состояний (бозевское или фермиевское). Оператор

$\hat{H}$ в $\mathscr{H}$ называется квадратичным, если он имеет вид

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int[A(x, y)\hat{a}^*(x)\hat{a}^*(y)+B(x, y)\hat{a}(x)\hat{a}(y)+ +2C(x, y)\hat{a}^*(x)\hat{a}(y)]\,dx\,dy+ +\int f(x)\hat{a}^*(x)\,dx+\int g(x)\hat{a}(x)\,dx+k. \quad (6.1)$$

Функции A, B, C (вообще говоря, обобщенные) являются ядрами операторов в пространстве L, которые мы будем обозначать теми же буквами; f, g — некоторые функции на M; k — константа. Если $k=f=g=0$, оператор $\hat{H}$ будем называть *однородным квадратичным*. $\hat{a}^*$, $\hat{a}$ в (6.1) и на протяжении всего параграфа означают как бозевские, так и фермиевские операторы рождения и уничтожения.

Если (6.1) есть нормальная форма, то оператор $\hat{H}$ будем называть *квадратичной нормальной формой*.

Напомним, что в область определения оператора в нормальной форме входит вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$.

Пусть $\hat{H}$ — квадратичная нормальная форма. Применим оператор $\hat{H}$ к $\hat{\Phi}_0$. В результате получим

$$\hat{H}\hat{\Phi}_0=\left[\frac{1}{2}\int A(x, y)\hat{a}^*(x)\hat{a}^*(y)\,dx\,dy+\int f(x)\hat{a}^*(x)\,dx+k\right]\hat{\Phi}_0. \quad (6.2)$$

Так как $\hat{H}\hat{\Phi}_0\in\mathscr{H}$, то из (6.2) следует, что $\int|A(x,y)|^2dx\,dy<\infty$, $\int|f(x)|^2dx<\infty$. Другими словами, A — оператор Гильберта — Шмидта и $f\in L$.

2. Самосопряженные квадратичные операторы. Дадим одно общее определение. Пусть H — формальный ряд от операторов $\hat{a}(x)$, $\hat{a}^*(x)$:

$$\hat{H}=\sum\int K\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}\,\middle|\,x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}\,\middle|\,\ldots\,\middle|\,x_1^{(p)}, \ldots, x_{n_p}^{(p)}\right)\times \times\hat{a}^*(x_1^{(1)})\ldots\hat{a}^*(x_{n_1}^{(1)})\,\hat{a}(x_1^{(2)})\ldots\hat{a}(x_{n_p}^{(p)})\,d^{n_1+\ldots+n_p}x_1^{(1)}\ldots x_{n_p}^{(p)},$$

где $K(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_p}^{(p)})$ — обобщенные функции. Считая $\hat{H}$ оператором, применим его к вектору $\hat{\Phi}\in\mathscr{H}$.

В результате получим формальное выражение вида

$$\hat{\Phi}'=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}\int K_n(x_1, \ldots, x_n)\hat{a}^*(x_1)\ldots\hat{a}^*(x_n)\,d^nx\hat{\Phi}_0.$$

Множество $D_{\hat{H}}$, состоящее из векторов $\hat{\Phi}\in\mathscr{H}$, для которых $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — функции с суммируемым квадратом, удовлетворяющие условию $\sum\limits_n\int|K_n|^2d^nx<\infty$, назовем *естественной областью определения* $\hat{H}$.

Может, вообще говоря, случиться, что $D_{\hat{H}}$ состоит лишь из одного нуля. В этом случае $\hat{H}$ не имеет операторного смысла.

Вернемся к квадратичным операторам. Очевидно, что если $\hat{H}$ — самосопряженный оператор вида (6.1), то $B = A^*$, C — эрмитов оператор и $g = f^*$.

Оказывается, что этих условий достаточно для самосопряженности квадратичной нормальной формы.

Теорема 1. *Пусть A — оператор Гильберта—Шмидта в L, $C = C^*$ — эрмитов оператор в L и $f \in L$. Тогда*

1) *Оператор*

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int [A(x, y)\, \hat{a}^*(x)\, \hat{a}^*(y) + \overline{A}(y, x)\, \hat{a}(x)\, \hat{a}(y) +$$

$$+ 2C(x, y)\, \hat{a}^*(x)\, \hat{a}(y)]\, dx\, dy + \int f(x)\, \hat{a}^*(x)\, dx + \int f^*(x)\, \hat{a}(x)\, dx, \quad (6.3)$$

рассматриваемый на естественной области определения, самосопряжен.

2) *Оператор $\hat{H}$, рассматриваемый на множестве финитных векторов, входящих в область определения оператора $\hat{C} = \int C(x, y)\, \hat{a}^*(x)\, \hat{a}(y)\, dx\, dy$, симметричен и имеет индексы дефекта* (0, 0).

Ограничимся доказательством второго утверждения, так как первое из него очевидным образом следует. Заметим прежде всего, что оператор

$$\hat{C} = \int C(x, y)\, \hat{a}^*(x)\, \hat{a}(y)\, dx\, dy$$

имеет диагональную матричную форму

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & C_1 & & 0 \\ & & C_2 & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Операторы C_n определены естественным образом на множестве $D \cap \mathcal{H}^n$, где D — область определения $\hat{H}$, описанная в условии теоремы. Покажем, что операторы C_n самосопряжены.

Согласно теореме о спектральных типах, пространство L может быть так реализовано с помощью функций с суммируемым квадратом, чтобы оператор C был оператором умножения на функцию. Обозначим эту функцию $c(x)$ и будем считать, что пространство L реализовано указанным образом. В этой реализации C_n есть оператор умножения на $c(x_1) + \ldots + c(x_n)$. Отсюда вытекает самосопряженность оператора C_n.

Рассмотрим матрицу оператора $\hat{H}$. Нетрудно видеть, что она имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 0 & f_1^* & A_1^* & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ f_1 & C_1 & f_2^* & A_2^* & 0 & 0 & \ldots \\ A_1 & f_2 & C_2 & f_3^* & A_3^* & 0 & \ldots \\ 0 & A_2 & f_3 & C_3 & f_4^* & A_4^* & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Согласно замечанию, сделанному ранее, C_n — самосопряженные операторы.

Матрица K по форме близка к якобиевской матрице. Поэтому, не уточняя пока вида операторов f_n, A_n, служащих элементами K, докажем, следуя Карлеману[1]), следующую лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы оператор, задаваемый матрицей K на финитных векторах, входящих в область определения C, имел нулевые индексы дефекта, достаточно, чтобы*

$$\sum_n \frac{1}{\max(\|A_n\|, \|A_{n+1}\|, \|f_{n+1}\|)} = \infty \tag{6.5}$$

Оператор, сопряженный тому, о котором говорится в условии леммы, также задается матрицей (6.4), но только его область определения состоит из всех векторов, которые матрица K не выводит из гильбертова пространства. Поэтому лемма будет доказана, если мы проверим, что из (6.5) и условий

$$K\hat{\Phi} = z\hat{\Phi}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad (\hat{\Phi}, \hat{\Phi}) < \infty \tag{6.6}$$

вытекает, что $\hat{\Phi} = 0$.

Пусть

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Из уравнения $K\hat{\Phi} = z\hat{\Phi}$ получаем

$$z\Phi_k = A_{k-1}\Phi_{k-2} + f_k\Phi_{k-1} + C_k\Phi_k + f_{k+1}^*\Phi_{k+1} + A_{k+1}^*\Phi_{k+2}.$$

Умножая это равенство справа и слева скалярно на Φ_k и вычитая одно из другого, получаем

$$\begin{aligned}(z - \bar{z})(\Phi_k, \Phi_k) = (A_{k-1}\Phi_{k-2}, \Phi_k) + (f_k\Phi_{k-1}, \Phi_k) + \\ + (f_{k+1}^*\Phi_{k+1}, \Phi_k) + (A_{k+1}^*\Phi_{k+2}, \Phi_k) - (\Phi_k, A_{k-1}\Phi_{k-2}) - \\ - (\Phi_k, f_k\Phi_{k-1}) - (\Phi_k, f_{k+1}^*\Phi_{k+1}) - (\Phi_k, A_{k+1}^*\Phi_{k+2}).\end{aligned} \tag{6.7}$$

(Слагаемое $(C_k\Phi_k, \Phi_k)$ уничтожается вследствие самосопряженности C_k.) Из (6.7) далее имеем

$$\begin{aligned}(z - \bar{z}) \sum_{k=0}^{n} (\Phi_k, \Phi_k) = \\ = (A_n^*\Phi_{n+1}, \Phi_{n-1}) + (A_{n+1}^*\Phi_{n+2}, \Phi_n) - (A_n\Phi_{n-1}, \Phi_{n+1}) - \\ - (A_{n+1}\Phi_n, \Phi_{n+2}) + (f_{n+1}^*\Phi_{n+1}, \Phi_n) - (f_{n+1}\Phi_n, \Phi_{n+1}).\end{aligned}$$

---

[1]) См. Карлеман [1] или Н. И. Ахиезер [1].

Отсюда

$$2|\operatorname{Im} z| \sum_{k=0}^{n} (\Phi_k,\ \Phi_k) \leqslant \max(\|A_n\|,\ \|A_{n+1}\|,\ \|f_{n+1}\|) \times \\ \times (\|\Phi_{n-1}\|^2 + \|\Phi_{n+2}\|^2 + 2\|\Phi_n\|^2 + 2\|\Phi_{n+1}\|^2).$$

Если $\hat{\Phi} \neq 0$, то существует n_0 такое, что $\sum_{k=0}^{n_0} (\Phi_k,\ \Phi_k) = c > 0$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$\|\Phi_{n-1}\|^2 + \|\Phi_{n+2}\|^2 + 2\|\Phi_n\|^2 + 2\|\Phi_{n+1}\|^2 > \\ > \frac{2|\operatorname{Im} z| c}{\max(\|A_n\|, \|A_{n+1}\|, \|f_{n+1}\|)}. \qquad (6.8)$$

Суммируя в пределах от n_0 до N и добавляя в левую часть недостающие слагаемые, получаем

$$6 \sum_{n=n_0}^{N} \|\Phi_n\|^2 > 2c |\operatorname{Im} z| \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{\max(\|A_n\|, \|A_{n+1}\|, \|f_{n+1}\|)}.$$

Таким образом, если выполнено (6.5), то $\sum_n \|\Phi_n\|^2 = \infty$. Лемма доказана.

Чтобы применить эту лемму для доказательства теоремы, следует оценить $\|A_n\|$ и $\|f_n\|$. Переходя к функционалам, получаем, что операторы $\int A(x,\ y)\, \hat{a}^*(x)\, \hat{a}^*(y)\, dx\, dy$ и $\int f(x)\, \hat{a}^*(x)\, dx$ являются операторами умножения на $\int A(x,\ y)\, a^*(x)\, a^*(y)\, dx\, dy$ и $\int f(x)\, a^*(x)\, dx$. Отсюда легко получить, что

$$\|A_n\| \leqslant \sqrt{n(n+1)}\, \|A\|_2,\quad \|f_n\| \leqslant \sqrt{n}\, \|f\|,$$

где

$$\|A\|_2 = \left(\int |A(x,\ y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2},\quad \|f\| = \left(\int |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Таким образом, условие (6.5) выполнено. Теорема доказана.

3. Нормальная форма оператора $e^{it\hat{H}}$. Бозевский случай. Пусть $\hat{H}$ — самосопряженный квадратичный оператор. Оператор $e^{it\hat{H}}$ является унитарным, следовательно, он ограничен и приводим к нормальной форме. Прежде чем формулировать основную теорему о нормальной форме оператора $e^{it\hat{H}}$, докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 2. *Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H имеет вид $A = S + T$, где S — самосопряженный и T — ограниченный операторы. Тогда*

1) *Существует ограниченный оператор $U(t) = e^{itA}$, являющийся единственным в классе ограниченных операторов решением уравнения*

$$\frac{1}{i} \frac{dU}{dt} = UA \qquad (6.9)$$

с начальным условием $U(0) = E$.

2) *Если*

$$W(t)=\int_0^t e^{i\tau S}Te^{-i\tau S}\,d\tau$$

является оператором Гильберта—Шмидта и функция

$$\rho(t)=[\operatorname{Sp} W(t)\,W^*(t)]^{1/2}$$

локально суммируема, то

$$e^{it(S+T)}=e^{itS}+K,$$

где K—оператор Гильберта—Шмидта.

Рассмотрим оператор $V(t)=U(t)\,e^{-itS}$. Легко видеть, что первое утверждение леммы будет доказано, если мы проверим, что $V(t)$ является единственным решением в классе ограниченных операторов уравнения

$$\frac{1}{i}\frac{dV}{dt}=V(t)\,T(t) \tag{6.10}$$

с начальным условием $V(0)=E$. Через $T(t)$ обозначен оператор $T(t)=e^{itS}Te^{-itS}$. Учитывая начальное условие $V(0)=E$, получаем из (6.10) интегральное уравнение

$$V(t)=E+i\int_0^t V(\tau)\,T(\tau)\,d\tau. \tag{6.11}$$

Единственность решения этого уравнения в классе ограниченных операторов доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Представим решение уравнения (6.11) в виде ряда последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} V(t)&=\sum V_n(t),\\ V_n(t)&=i\int_0^t V_{n-1}(\tau)\,T(\tau)\,d\tau,\quad V_0=E. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Заметим, что

$$\|T(\tau)\|=\|T\|. \tag{6.13}$$

Используя (6.13), получаем для $\|V_n\|$ неравенства

$$\|V_n(t)\|\leqslant\|T\|\int_0^t\|V_{n-1}(\tau)\|\,d\tau. \tag{6.14}$$

Из (6.14), учитывая, что $V_0=E$ и, следовательно, $\|V_0\|=1$, получаем

$$\|V_n(t)\|\leqslant\frac{t^n\,\|T\|^n}{n!}.$$

Таким образом, ряд $\sum_n V_n(t)$ сходится по норме, и для нормы его суммы получаем оценку

$$\|V(t)\| \leqslant e^{t\|T\|}. \tag{6.15}$$

Очевидно, что построенный оператор $V(t)$ удовлетворяет уравнению (6.11) и, следовательно, дифференциальному уравнению (6.10) с начальным условием $V(0)=E$.

Заметим, что из единственности решения уравнения (6.9) при начальном условии $U(0)=E$ вытекает, что $U(t)=e^{itA}$ обладает всеми обычными свойствами экспоненты.

Перейдем ко второму утверждению леммы. Пусть K — оператор Гильберта—Шмидта, $\|K\|_2=(\mathrm{Sp}\, KK^*)^{1/2}$. Возвращаясь к (6.12), находим, что

$$\|V_1(t)\|_2 = [\mathrm{Sp}\, W(t)\, W^*(t)]^{1/2} = \rho(t)$$

и при $n \geqslant 2$

$$\|V_n(t)\|_2 \leqslant \|T\| \int_0^t \|V_{n-1}(\tau)\|_2\, d\tau. \tag{6.16}$$

Отсюда

$$\|V_n(t)\|_2 \leqslant \|T\|^{n-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\rho(\tau)\, d\tau, \quad n \geqslant 2. \tag{6.17}$$

Таким образом, $V(t)=E+K_1$, где $K_1=\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)$,

$$\|K_1\|_2 \leqslant \rho(t) + \|T\| \int_0^t e^{(t-\tau)\|T\|}\rho(\tau)\, d\tau < \infty.$$

Переходя к оператору $e^{it(S+T)}$, находим, что $e^{it(S+T)}=(E+K_1)\,e^{itS}=$ $=e^{itS}+K$, где K — оператор Гильберта—Шмидта. Лемма полностью доказана.

Лемма 3. *Пусть $C=C^*$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве с инволюцией L и $A=A'$ — ограниченный оператор, обладающий тем свойством, что*

$$F(t)=\int_0^t e^{-iC\tau} A e^{-i\overline{C}\tau} d\tau \tag{6.18}$$

является оператором Гильберта—Шмидта и функция $\rho(t)=$ $=[\mathrm{Sp}\, F(t)\, F^*(t)]^{1/2}$ локально суммируема. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{E}=L \oplus L^*$ оператор, задаваемый матрицей

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор $e^{it\mathcal{A}}$ существует и имеет матрицу $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, являющуюся матрицей собственного бозевского канонического преобразования.

Существование $e^{it\mathcal{A}}$ следует очевидным образом из леммы 2.

Покажем, что $e^{it\mathcal{A}}$ есть матрица канонического преобразования. Рассмотрим матрицу $I=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}$. Легко видеть, что $I\mathcal{A}'+\mathcal{A}I=0$. Используя это тождество, находим

$$\frac{d}{dt}e^{it\mathcal{A}}Ie^{it\mathcal{A}'}=0.$$

Следовательно,

$$I(t)=e^{it\mathcal{A}}Ie^{it\mathcal{A}'}=I(0)=I.$$

Так как $e^{it\mathcal{A}'}=(e^{it\mathcal{A}})'$ и матрица $e^{it\mathcal{A}}$ обладает двусторонней обратной, то согласно п. 2 § 4, $e^{it\mathcal{A}}$ является матрицей канонического преобразования.

Используя утверждение 2) леммы 2, находим $e^{it\mathcal{A}}=\exp\left[it\begin{pmatrix}-C & 0\\ 0 & \overline{C}\end{pmatrix}\right]+K$, где K — оператор Гильберта—Шмидта. Очевидно, что $K=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}_1\end{pmatrix}$, $\Phi_1=\Phi-e^{-itC}$. Следовательно, Ψ есть оператор Гильберта—Шмидта и $e^{it\mathcal{A}}$ — матрица собственного канонического преобразования.

Лемма 4. *Пусть A и C — те же, что и в лемме 3, и в дополнение к условию леммы 3, $F(t)\overline{A}$ — ядерный оператор, причем функция $\rho_1(t)=\operatorname{Sp}\sqrt{F(t)\overline{A}[F(t)\overline{A}]^*}$ локально суммируема. Тогда оператор $\Phi e^{iCt}-E$ является ядерным.*

Пусть

$$V(t)=\begin{pmatrix}E+\tilde{\Phi}(t) & \tilde{\Psi}(t)\\ \overline{\tilde{\Psi}}(t) & E+\overline{\tilde{\Phi}}(t)\end{pmatrix}=e^{it(S+T)}e^{-itS},$$

где

$$S=\begin{pmatrix}-C & 0\\ 0 & \overline{C}\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & -A\\ \overline{A} & 0\end{pmatrix}.$$

Обратимся к методу последовательных приближений (6.12), определяющему $V(t)$. Для элементов

$$V_n(t)=\begin{pmatrix}E+\tilde{\Phi}_n & \tilde{\Psi}_n\\ \overline{\tilde{\Psi}}_n & E+\overline{\tilde{\Phi}}_n\end{pmatrix}$$

получаем рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\Phi}_n(t)=i\int_0^t\tilde{\Psi}_{n-1}(\tau)\overline{A}(\tau)\,d\tau,\quad \tilde{\Psi}_n(t)=i\int_0^t\tilde{\Phi}_{n-1}(\tau)A(\tau)\,d\tau,\\ &\tilde{\Phi}_1(t)\equiv 0,\quad \tilde{\Psi}_1(t)=i\int_0^t A(\tau)\,d\tau,\end{aligned}\right\}\qquad(6.19)$$

где $A(\tau)=e^{-i\tau C}Ae^{-i\tau\overline{C}}$, $\overline{A}(\tau)=e^{i\tau\overline{C}}\overline{A}e^{i\tau C}$. Пусть $\|K\|_1=\operatorname{Sp}\sqrt{KK^*}$. Из (6.19) и (6.18) непосредственно получаем, что $\tilde{\Psi}_1(t)=iF(t)$,

$\tilde{\Psi}_2(t) \equiv 0, \quad \tilde{\Phi}_2(t) = -\int_0^t F(\tau)\bar{A}(\tau)\,d\tau$; следовательно,

$$\|\tilde{\Phi}_2(t)\|_1 \leqslant \int_0^t \rho_1(\tau)\,d\tau = \rho_2(t).$$

При $n > 2$, используя известное неравенство $\|KQ\|_1 \leqslant \|K\|_1 \|Q\|$, получаем оценки

$$\|\tilde{\Phi}_n(t)\|_1 \leqslant \|A\| \int_0^t \|\tilde{\Psi}_{n-1}(\tau)\|_1\,d\tau, \quad \|\tilde{\Psi}_n(t)\|_1 \leqslant \|A\| \int_0^t \|\tilde{\Phi}_{n-1}(\tau)\|_1\,d\tau.$$

Отсюда

$$\|\tilde{\Phi}_n(t)\|_1 \leqslant \|A\|^{n-2} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-3}}{(n-3)!}\rho_2(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, $\tilde{\Phi}$ — ядерный оператор.

Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 2. *Пусть*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int (\hat{a}^* A \hat{a}^* + \hat{a}\bar{A}\hat{a} + 2\hat{a}^* C\hat{a})\,dx\,dy + \int (\hat{a}^* f + f^* \hat{a})\,dx \tag{6.20}$$

— самосопряженная квадратичная нормальная форма. Пусть далее

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -C & -A \\ \bar{A} & \bar{C} \end{pmatrix}, \quad e^{it\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор $e^{it\hat{H}}$ *имеет нормальную и матричную формы которым отвечают функционалы*[1])

$$U(a^*, a) = \tilde{U}(a^*, a)\,e^{-a^* a}, \tag{6.21}$$

$$\tilde{U}(a^*, a) = c\exp\left\{\frac{1}{2}(a\ a^*)\begin{pmatrix} \bar{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi'^{-1} \\ \Phi^{-1} & -\Phi^{-1}\Psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} + a(g^* - \bar{\Psi}\Phi^{-1}g) - a^*\Phi^{-1}g\right\}, \tag{6.22}$$

где

$$c = (\det \Phi e^{iCt})^{-1/2} \exp\left\{ i\int_0^t (g\Phi'^{-1}\bar{A}\Phi^{-1}g - f^*\Phi^{-1}g)\,d\tau \right\}, \tag{6.23}$$

$$\begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix} = i\int_0^t \exp\left\{ i\tau\begin{pmatrix} -C & -A \\ \bar{A} & \bar{C} \end{pmatrix}\right\} d\tau \begin{pmatrix} -f \\ f^* \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Доказательство. Сопоставляя формулы (6.22) и (4.26), находим, что функционалу (6.22) соответствует оператор $\hat{U}$, который с точностью до множителя является унитарным. Достаточно

[1]) Детерминант в (6.23) существует, поскольку в силу леммы 4 оператор $\Phi e^{iCt} - E$ является ядерным.

проверить, что $\hat{U}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{i}\frac{d\hat{U}}{d}=\hat{H}\hat{U} \tag{6.25}$$

и начальному условию $\hat{U}(0)=E$. Начальное условие следует из (6.22)—(6.24) очевидным образом. При проверке уравнения (6.25) следует иметь в виду, что, согласно (1.22), оно эквивалентно уравнению относительно функционала $\tilde{U}$

$$\frac{1}{i}\frac{d\tilde{U}}{dt}=\left\{\frac{1}{2}\left(a^*Aa^*+\frac{\delta}{\delta a^*}\bar{A}\frac{\delta}{\delta a^*}+2a^*C\frac{\delta}{\delta a^*}\right)+fa^*+f^*\frac{\delta}{\delta a^*}\right\}\tilde{U}, \tag{6.26}$$

отвечающего матричной форме оператора $\hat{U}$. Соответствующие вычисления очень громоздки, хотя по идее просты. Поэтому мы их опустим, тем более что в следующем пункте дается другое доказательство в обход этих вычислений.

4. Другое доказательство теоремы 2. Рассмотрим доказательство теоремы 2 не вполне строгое, однако сразу приводящее к формулам (6.22)—(6.24).

Покажем, что оператор $\hat{U}(t)=e^{it\hat{H}}$ порождает линейное каноническое преобразование. Рассмотрим операторы

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}(\varphi,\ t)&=e^{it\hat{H}}\hat{a}(\varphi)\,e^{-it\hat{H}},\\ \hat{a}^*(\varphi,\ t)&=e^{it\hat{H}}\hat{a}^*(\varphi)\,e^{-it\hat{H}}.\end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

Дифференцируя по t, находим, что $\hat{a}(\varphi,\ t)$, $\hat{a}^*(\varphi,\ t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{d\hat{a}(\varphi,\ t)}{dt}&=[\hat{H},\ \hat{a}(\varphi,\ t)],\\ \frac{1}{i}\frac{d\hat{a}^*(\varphi,t)}{dt}&=[\hat{H},\ \hat{a}^*(\varphi,\ t)].\end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

Пусть

$$\hat{A}=\sum_{m,\,n}\int K_{mn}(x_1,\ \ldots,\ x_m\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_n)\times \\ \times\hat{a}^*(x_1)\ldots\hat{a}^*(x_m)\,\hat{a}(y_1)\ldots\hat{a}(y_n)\,d^mx\,d^ny$$

— произвольный оператор в нормальной форме. Обозначим через $\hat{A}(t)$ оператор

$$\hat{A}(t)=\sum_{m,\,n}\int K_{mn}(x_1,\ \ldots,\ x_m\,|\,y_1,\ \ldots,\ y_n)\times \\ \times\hat{a}^*(x_1,\ t)\ldots\hat{a}^*(x_m,\ t)\,\hat{a}(y_1,\ t)\ldots\hat{a}(y_n,\ t)\,d^mx\,d^ny,$$

где $\hat{a}(x,\ t)$, $\hat{a}^*(x,\ t)$ определяются формулой (6.27). Очевидно, что $\hat{A}(t)=e^{it\hat{H}}\hat{A}e^{-it\hat{H}}$. Рассмотрим, в частности, оператор $\hat{A}=\hat{H}$. Очевидно, что $\hat{H}(t)=e^{it\hat{H}}\hat{H}e^{-it\hat{H}}=\hat{H}$.

Используя это обстоятельство, подставим в (6.28) вместо оператора $\hat{H}$ оператор $\hat{H}(t)$. Очевидно, что операторы $\hat{a}(\varphi, t)$, $\hat{a}^*(\varphi, t)$ при всех t удовлетворяют одним и тем же соотношениям коммутации. Поэтому в правых частях (6.28) можно выполнить коммутирование. В результате получаем окончательно систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\,\hat{a}(\varphi) &= -\hat{a}(\varphi C) - \hat{a}^*(\varphi A) - \varphi f, \\ \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\,\hat{a}^*(\varphi) &= \hat{a}(\varphi \bar{A}) + \hat{a}^*(\varphi \bar{C}) + \varphi f^*. \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Интегрируя эту систему, находим

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(\varphi, t) &= \hat{a}(\varphi\Phi) + \hat{a}^*(\varphi\Psi) + \varphi g, \\ \hat{a}^*(\varphi, t) &= \hat{a}(\varphi\bar{\Psi}) + \hat{a}^*(\varphi\bar{\Phi}) + \varphi g^*, \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

где

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} = \exp\left\{it\begin{pmatrix} -C & -A \\ \bar{A} & \bar{C} \end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix} = i\int_0^t \exp\left[i\tau\begin{pmatrix} -C & -A \\ \bar{A} & \bar{C} \end{pmatrix}\right]d\tau\begin{pmatrix} -f \\ f^* \end{pmatrix}.$$

Итак, (6.27) есть линейное каноническое преобразование. Поэтому функционал $\tilde{U}(a^*, a)$, отвечающий матричной записи оператора $\hat{U} = e^{it\hat{H}}$ с точностью до множителя, не зависящего от a, a^*, определяется формулой (4.26). Таким образом, для $\tilde{U}(a^*, a)$ получается формула (6.22) с неопределенным пока коэффициентом c. Чтобы найти c, подставим (6.22) в уравнение (6.26) и положим $a = a^* = 0$.

В результате получим

$$\frac{1}{i}\frac{dc}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\Phi^{-1}\Psi\bar{A} + g\Phi'^{-1}\bar{A}\Phi^{-1}g - f^*\Phi^{-1}g\right)c.$$

Положим

$$c = c_1 e^{i\int_0^t (g\Phi'^{-1}\bar{A}\Phi^{-1}g - f^*\Phi^{-1}g)\,d\tau}.$$

Тогда для c_1 получается уравнение

$$\frac{1}{i}\frac{dc_1}{dt} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\Phi^{-1}\Psi\bar{A})\,c_1. \tag{6.31}$$

Будем искать c_1 в виде $c_1 = (\det M)^{-1/2}$. Из формулы $\det M = e^{\mathrm{Sp}\ln M}$ находим

$$\frac{d}{dt}\det M = \mathrm{Sp}\left(\frac{d}{dt}\ln M\right)\det M = \mathrm{Sp}\left(M^{-1}\frac{dM}{dt}\right)\det M.$$

Таким образом, для оператора M получаем уравнение

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{Sp}\,M^{-1}\frac{dM}{dt} = \mathrm{Sp}\,\Phi^{-1}\Psi\bar{A}. \tag{6.32}$$

Вспомним, что операторы Φ, Ψ являются решением уравнения

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C & -A\\ \overline{A} & \overline{C}\end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

Из (6.33) находим

$$\frac{1}{i}\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}=-C+\Phi^{-1}\Psi\overline{A}. \tag{6.34}$$

Положим теперь $M=\Phi e^{itC}$. Используя (6.34), находим, что M удовлетворяет уравнению (6.32). Таким образом,

$$c_1=(\det\Phi e^{itC})^{-1/2}, \tag{6.35}$$

$$c=(\det\Phi e^{itC})^{-1/2}\exp\left[i\int_0^t(g\Phi'^{-1}\overline{A}\Phi^{-1}g-f^*\Phi^{-1}g)\,d\tau\right]. \tag{6.36}$$

5. Нормальная форма оператора $\hat{U}(t)=e^{it\hat{H}}$. Фермиевский случай. Прежде чем формулировать основную теорему этого пункта, отметим следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть C — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве с инволюцией L и $A=-A'$ кососимметрический оператор, обладающий тем свойством, что оператор*

$$F(t)=\int_0^t e^{-iC\tau}Ae^{-i\overline{C}\tau}\,d\tau$$

является оператором Гильберта — Шмидта, оператор $F(t)\overline{A}$ является ядерным, функции $\rho(t)=[\operatorname{Sp}A(t)A^*(t)]^{1/2}$ и $\rho_1(t)=$ $=\operatorname{Sp}\sqrt{F(t)\overline{A}\,[F(t)\overline{A}]^*}$ локально суммируемы. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{E}=L\oplus L^*$ оператор

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-C & -A\\ -\overline{A} & \overline{C}\end{pmatrix}.$$

Тогда

1) *Существует оператор $e^{it\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$, причем $e^{it\mathcal{A}}$ есть матрица собственного фермиевского канонического преобразования.*

2) *Оператор $\Phi e^{itC}-E$ является ядерным.*

Доказательство этой леммы, по существу, не отличается от доказательства лемм 3 и 4. Сформулируем теперь теорему.

Теорема 3. *Пусть*

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int(\hat{a}^*A\hat{a}^*-\hat{a}\overline{A}\hat{a}+2\hat{a}^*Ca)\,dx\,dy \tag{6.37}$$

— самосопряженная квадратичная нормальная форма. Тогда нормальная и матричная формы оператора $\hat{U}=e^{it\hat{H}}$ задаются

формулами

$$\left.\begin{aligned} &U(a^*, a) = \tilde U(a^*, a)\, e^{-a^*a},\\ &\tilde U(a^*, a) =\\ &= (\det \Phi e^{iCt})^{1/2} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(a\,a^*)\begin{pmatrix}\overline{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi'^{-1}\\ -\Phi^{-1} & \Phi^{-1}\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ a^*\end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

где операторы Φ, Ψ *определяются равенством*

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix} = \exp\left\{it\begin{pmatrix}-C & -A\\ \overline{A} & \overline{C}\end{pmatrix}\right\}. \tag{6.39}$$

Формула (6.38) справедлива при условии, что существует оператор Φ^{-1}. В случае, если Φ^{-1} не существует, но преобразование $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$ обладает свойством **A**, соответствующая формула может быть получена из (6.38) предельным переходом. Доказательство теоремы 3 отличается от доказательства теоремы 2 лишь упрощениями, связанными с однородностью оператора $\hat H$.

6. Резольвента квадратичного оператора. Пусть $\hat H$ — простейший квадратичный оператор $\hat H = \hat a^* C \hat a$. Матричной форме резольвенты оператора $\hat H$ отвечает функционал

$$\tilde R(z) = \int_0^1 e^{a^*\xi^C a}\xi^{-z-1}\,d\xi, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{6.40}$$

Формула (6.40) справедлива в равной мере для фермиевского и для бозевского случаев.

Для доказательства реализуем пространство L таким образом, чтобы оператор C был оператором умножения на функцию, после этого разлагаем функционал (6.40) в ряд и убеждаемся непосредственно в справедливости формулы (6.40).

§ 7. Квадратичные операторы, не приведенные к нормальной форме

Рассмотрим формальное выражение

$$\begin{aligned}\hat H = \frac{1}{2}\int [A(x, y)\,\hat a^*(x)\,\hat a^*(y) + \overline{A}(y, x)\,\hat a(x)\,\hat a(y) +\\ + 2C(x, y)\,\hat a^*(x)\,\hat a(y)]\,dx\,dy +\\ + \int (f(x)\,\hat a^*(x) + f^*(x)\,\hat a(x))\,dx + k.\end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь $A(x, y)$, $C(x, y)$ — обобщенные функции, служащие ядрами операторов A и C в пространстве L, причем C — самосопряженный оператор, $f(x)$ — обобщенная функция и k — константа. В фермиевском случае $f(x) \equiv 0$.

В этом разделе мы найдем условия, при которых существует плотная область в пространстве состояний, на которой оператор, задаваемый формулой (7.1), определен и является самосопряженным.

1. Необходимые условия. Рассмотрим дифференциальные уравнения относительно функций $a(x, t)$, $a^*(x, t)$[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{da(t)}{dt} &= -Ca(t) - Aa^*(t) - f, \\ \frac{1}{i}\frac{da^*(t)}{dt} &= \bar{A}a(t) + \bar{C}a^*(t) + f^*. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

(В фермиевском случае $f=0$.)

Решение системы (7.2) при начальных условиях $a(x, 0)=a(x)$, $a^*(x, 0)=a^*(x)$ имеет вид $a(t)=\Phi(t)a+\Psi(t)a^*+g(t)$, $a^*(t)= =\bar{\Psi}(t)a+\bar{\Phi}(t)a^*+g^*(t)$. Заменяя функции a, a^* операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^*$ соответственно, получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \Phi(t)\hat{a} + \Psi(t)\hat{a}^* + g(t), \\ \hat{a}^*(t) &= \bar{\Psi}(t)\hat{a} + \bar{\Phi}(t)\hat{a}^* + g^*(t). \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

(В фермиевском случае $g(t)=0$.)

В пп. 4, 5 предыдущего параграфа показано, что (7.3) есть каноническое преобразование.

Теорема 1. *Пусть операторы A, C и функция f таковы, что уравнения* (7.2) *имеют единственное решение. Тогда, для того чтобы существовала плотная область D в пространстве состояний, на которой оператор, задаваемый формулой* (7.1), *был бы определен и самосопряжен, необходимо, чтобы каноническое преобразование* (7.3) *было собственным.*

Пусть формула (7.1) задает самосопряженный оператор. В таком случае существует унитарный оператор $e^{it\hat{H}}=\hat{U}(t)$.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что операторы $\hat{a}(t)=\hat{U}(t)\hat{a}\hat{U}^{-1}(t)$, $\hat{a}^*(t)=\hat{U}(t)\hat{a}^*\hat{U}^{-1}(t)$ выражаются через $\hat{a}$, $\hat{a}^*$ по формулам (7.3). Приведем эвристическое рассуждение.

Дифференцируя, получаем, как на с. 124, что $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^*(t)$ удовлетворяют уравнениям (7.2). Интегрируя их, получаем (7.3). Обоснование этого рассуждения трудно, так как неизвестно, в каком смысле дифференцируемы $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^*(t)$. Ниже следует набросок доказательства, обходящего эту трудность.

Рассмотрим вначале бозевский случай.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ гильбертово пространство операторов Гильберта—Шмидта в пространстве состояний. Скалярное произведение в $\mathfrak{K}$ задается формулой $(\hat{A}_1, \hat{A}_2)=\operatorname{Sp}\hat{A}_1\hat{A}_2^*$. В $\mathfrak{K}$ существует плотная область $\mathfrak{D}$, на которой определен и самосопряжен оператор $\mathfrak{H}$, равный $\mathfrak{H}\hat{A}=\hat{H}\hat{A}-\hat{A}\hat{H}$. Очевидно далее, что унитар-

---

[1]) В системе (7.2) и далее аргумент x у $a(x, t)$, $a^*(x, t)$, $\hat{a}(x, t)$, $\hat{a}^*(x, t)$ опускаем: $Ca(t)=\int C(x, y)\,a(y, t)\,dy$ и т. д.

ный оператор $\mathfrak{U}(t)=e^{it\hat{\mathfrak{H}}}$ задается формулой $\mathfrak{U}(t)\hat{A}=\hat{U}(t)\hat{A}\hat{U}^{-1}(t)$. Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $\tilde{E}$, состоящее из пар функций $r=(p(x),\ q(x))$, $(r,\ r)=\int(p^2(x)+q^2(x))\,dx$. Каждому оператору Гильберта—Шмидта $\hat{A}$ можно поставить в соответствие функционал в $\hat{E}$

$$\mathcal{A}(p,\ q)=\int e^{\int\left[\left(p-i\frac{b+b^*}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(q+\frac{b^*-b}{\sqrt{2}}\right)^2\right]dx} A(ib^*,\ ib)\,\Pi\,db^*\,db, \tag{7.4}$$

где $A(a^*,\ a)$—функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{A}$. Формула (7.4) допускает обращение

$$A(a^*,\ a)=\int e^{-\int\left[\left(p-\frac{a+a^*}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(q-i\frac{a^*-a}{\sqrt{2}}\right)^2\right]dx}\mathcal{A}(p,\ q)\,\Pi\,dp\,dq. \tag{7.4$'$}$$

Оператор $\hat{\mathfrak{H}}$ с помощью функционалов $\mathcal{A}(p,\ q)$ записывается как дифференциальный оператор $\mathfrak{H}$ *первого порядка*:

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathcal{A}}\leftrightarrow\mathfrak{H}\mathcal{A}=\Big[2\int\Big\{&A(x,\ y)(p(x)-iq(x))\left(i\frac{\delta}{\delta q(y)}-\frac{\delta}{\delta p(y)}\right)+\\&+\bar{A}(x,\ y)(p(x)+iq(x))\left(i\frac{\delta}{\delta q(y)}+\frac{\delta}{\delta p(y)}\right)+\\&+C(x,\ y)\Big[(p(y)+iq(y))\left(-\frac{\delta}{\delta p(x)}+i\frac{\delta}{\delta q(x)}\right)+\\&+(p(x)-iq(x))\left(\frac{\delta}{\delta p(y)}+i\frac{\delta}{\delta q(y)}\right)\Big]\Big\}\,dx\,dy+\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\int f(x)\left(-\frac{\delta}{\delta p(x)}+i\frac{\delta}{\delta q(x)}\right)dx+\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\int f^*(x)\left(\frac{\delta}{\delta p(x)}+i\frac{\delta}{\delta q(x)}\right)dx\Big]\mathcal{A}(p,\ q).\end{aligned} \tag{7.5}$$

Если $\hat{A}$ принадлежит области определения оператора $\hat{\mathfrak{H}}$, то функционал $\mathcal{A}(p,\ q\,|\,t)$, отвечающий оператору $e^{it\hat{\mathfrak{H}}}\hat{A}$, принадлежит области определения оператора $\mathfrak{H}$ и, следовательно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}=\mathfrak{H}\mathcal{A}. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) аналогично линейному уравнению с частными производными первого порядка. Так же как уравнение с частными производными первого порядка, (7.6) решается с помощью характеристик

$$\mathcal{A}(p,\ q\,|\,t)=\mathcal{A}(\mathcal{P}(p,\ q,\ t),\ \mathcal{Q}(p,\ q,\ t)), \tag{7.7}$$

где $\mathcal{P}(p,\ q,\ t)$, $\mathcal{Q}(p,\ q,\ t)$ удовлетворяют уравнениям и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{d\mathcal{P}}{dt}&=\alpha_{11}\mathcal{P}+\alpha_{12}\mathcal{Q}+\gamma_1, &\mathcal{P}(p,\ q,\ 0)&=p,\\ \frac{1}{i}\frac{d\mathcal{Q}}{dt}&=\alpha_{21}\mathcal{P}+\alpha_{22}\mathcal{Q}+\gamma_2, &\mathcal{Q}(p,\ q,\ 0)&=q.\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Операторы α_{ik} и функции γ_i связаны с A, C и функциями f, f^* соотношениями

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C & -A\\ \bar{A} & \bar{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-f\\ f^*\end{pmatrix}. \qquad (7.9)$$

Очевидно, что из единственности решения системы (7.2) следует единственность решения системы (7.8).

Из (7.9) следует, что решение уравнений (7.8) выражается через операторы Φ, Ψ и функции g, g^*, входящие в (7.3), согласно формулам

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}(p, q, t)&=\mu_{11}(t)p+\mu_{12}(t)q+\sigma_1,\\ \mathcal{Q}(p, q, t)&=\mu_{21}(t)p+\mu_{22}(t)q+\sigma_2,\end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\\ g^*\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\} \qquad (7.10')$$

Единственность решения задачи Коши для уравнения (7.6) следует из единственности решения системы (7.8) точно так же, как единственность решения задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка следует из единственности решения системы уравнений для характеристик.

Перейдем теперь обратно от функционалов $\mathcal{A}(p, q)$ к функционалам $A(a^*, a)$. Используя формулу (7.7), нетрудно получить, что оператору $\hat{B}=\hat{U}(t)\hat{A}\hat{U}^{-1}(t)$ отвечает функционал $B(a^*, a)$, задаваемый формулами (4.38)—(4.40). Рассмотрим теперь последовательность $\hat{a}_N$ операторов Гильберта—Шмидта, сильно сходящуюся к $\hat{a}(\varphi)=\int \hat{a}(x)\varphi(x)\,dx$ на области определения $\hat{a}(\varphi)$. Очевидно, что операторы $\hat{b}_N=\hat{U}(t)\hat{a}_N\hat{U}^{-1}(t)$ сходятся к $\hat{b}(\varphi)=$ $=\hat{U}(t)\hat{a}(\varphi)\hat{U}^{-1}(t)$ в сильном смысле и что функционалы b_N, отвечающие нормальной форме $\hat{b}_N$, сходятся к функционалу $b(\varphi)$, отвечающему оператору $\hat{b}(\varphi)$. Следовательно, функционал $b(\varphi)$ выражается через a, a^* по формулам (4.38)—(4.40). В случае, когда $A(a^*, a)=a(\varphi)$, интеграл в (4.38) может быть легко вычислен; в результате получаем $b=\Phi(t)a+\Psi(t)a^*+g(t)$. Следовательно, оператор $\hat{b}=\hat{a}(t)$ задается формулой (7.3). Аналогично устанавливается, что оператор $\hat{U}(t)\hat{a}^*\hat{U}^{-1}(t)$ задается формулой (7.3).

В фермиевском случае доказательство основано на тех же соображениях. Разница состоит лишь в том, что вместо преобразования (7.4) рассматривается преобразование

$$\mathcal{A}(p, q)=\int e^{-i\int[q+i(a-a^*)][p-a-a^*]\,dx}A(a^*, a)\,\Pi\, da^*\,da, \qquad (7.11)$$

где $p(x)$, $q(x)$ антикоммутируют между собой и с $a(x)$, $a^*(x)$. Обратное к (7.11) преобразование задается формулой

$$A(a^*, a) = \int e^{i \int [q+i(a-a^*)][p-a-a^*]\,dx} \mathcal{A}(p, q) \Pi\, dp\, dq. \qquad (7.11')$$

Если

$$\mathcal{A}_j(p, q) = \sum_{m, n} \frac{1}{\sqrt{m!\, n!}} \int K_{mn}^{(j)}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times p(x_1) \ldots p(x_m)\, q(y_1) \ldots q(y_n)\, d^m x\, d^n y$$

— функционалы, отвечающие операторам $\hat{A}_j$, то[1])

$$\operatorname{Sp} \hat{A}_1 \hat{A}_2^* = \sum_{m, n} \int K_{mn}^{(1)}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times K_{mn}^{(2)}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\, d^m x\, d^n y.$$

2. Достаточные условия.

Теорема 2. *Для того чтобы существовала плотная область D, на которой оператор $\hat{H}$, задаваемый формулой* (7.1), *самосопряжен, достаточно, чтобы, кроме условий теоремы* 1, *были выполнены условия*

1) Φe^{iCt} — *ядерный оператор.*

2) *Скалярные произведения* $g\Phi'^{-1}\bar{A}\Phi^{-1}g$ и $f^*\Phi^{-1}g$, *встречающиеся в* (6.23), *имеют смысл и являются локально суммируемыми функциями* t.

При выполнении этих условий матричная и нормальные формы операторов $e^{it\hat{H}}$ в бозевском случае задаются формулами (6.21)—(6.24), в фермиевском — формулой (6.38).

При выполнении условий теоремы существуют функционалы, определяемые формулами (6.21)—(6.24) или (6.38). Нетрудно проверить, используя формулы для произведения операторов, что определяемые этими функционалами операторы унитарны и образуют однопараметрические группы $\hat{U}(t)$. Так как $\hat{U}(t)$ — однопараметрическая группа, то существует самосопряженный

[1]) Преимущество функционалов $\mathcal{A}(p, q)$ перед функционалами $A(a^*, a)$ состоит в том, что канонические преобразования операторов через функционалы $\mathcal{A}(p, q)$ выражаются с помощью замены переменных, тогда как через $A(a^*, a)$ — с помощью довольно громоздких формул (4.38), (5.19). Однако в отличие от функционалов $A(a^*, a)$ функционалы $\mathcal{A}(p, q)$ не описывают всех ограниченных операторов; так, например, из формул (7.4), (7.11) следует, что единичный оператор не может быть записан с помощью функционала $\mathcal{A}(p, q)$ ни в бозевском, ни в фермиевском случаях. Можно изменить определение функционалов $\mathcal{A}(p, q)$ так, чтобы с их помощью описывался некоторый класс $\mathcal{K}$ операторов, в который входит единичный оператор E. Для этого достаточно в формулах (7.4), (7.11) сделать замену в подынтегральном выражении (но не в произведении дифференциалов!) $b \to \frac{b}{\sqrt{2}}$, $b^* \to \frac{b^*}{\sqrt{2}}$, $a \to \frac{a}{\sqrt{2}}$, $a^* \to \frac{a^*}{\sqrt{2}}$. Нетрудно проверить, что в класс $\mathcal{K}$ не входит ни один оператор Гильберта — Шмидта. (Более подробно об этом классе операторов см. работу автора [5].)

оператор $\hat{K}$ такой, что $e^{it\hat{K}}=\hat{U}(t)$. Можно проверить, кроме того, что функционал $\tilde{U}(t)$ удовлетворяет уравнению (6.26). Отсюда очевидно, что $\hat{K}=\hat{H}$.

Соответствующие вычисления очень громоздки, и мы их опустим, тем более что в следующем пункте дается более удобное достаточное условие, по-видимому, достаточно близкое к необходимому.

Можно показать, что если выполнены условия теоремы 1, но не выполнены условия теоремы 2, то оператор $\hat{H}$ отличается от самосопряженного бесконечным слагаемым. Подробнее об этом явлении см. в следующих пунктах[1]).

3. Приведение оператора (7.1) к нормальной форме. Напомним, что (7.1) есть нормальная форма, если

$$\int |A(x, y)|^2\,dx\,dy < \infty, \quad \int |f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Обозначим через D_1 множество функций, на которых обобщенная функция $f(x)$ задает функционал, и через D_2 множество операторов X в L таких, что оператор AX имеет абсолютно сходящийся след. Обозначим далее через $\tilde{C}$ оператор в пространстве операторов: $\tilde{C}X=CX+XC'$.

Теорема 3. *Пусть оператор A и обобщенная функция f удовлетворяют условиям*

$$1)\ (C-z)^{-1}f\in D_1,\quad (\tilde{C}-z)^{-1}A\in D_2\quad (\operatorname{Im} z\neq 0), \tag{7.12}$$

2) $\|A\|<\infty$.

Тогда существует собственное линейное каноническое преобразование, переводящее оператор (7.1) *в квадратичную нормальную форму*[2]).

Так как квадратичная нормальная форма задает самосопряженный оператор на естественной области определения, то из теоремы 3 получаем.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 3 *естественная область определения $D_{\hat{H}}$ оператора* (7.1) *плотна и оператор* (7.1) *с областью определения $D_{\hat{H}}$ самосопряжен.*

При доказательстве теоремы ограничимся бозевским случаем. Доказательство теоремы в фермиевском случае отличается лишь упрощениями, связанными с тем, что в фермиевском случае $f=0$.

---

[1]) Хотя в этом случае $\hat{H}$ не имеет непосредственного операторного смысла (т. е. без добавления бесконечной константы), тем не менее, $\hat{H}$ имеет смысл билинейной формы (см. с. 26—28). Вообще квадратичное выражение, не являющееся оператором, очень часто задает билинейную форму (см. примеры на с. 138 и 139).

[2]) Нетрудно проверить, что из условий (7.12) непосредственно вытекает второе условие теоремы 2, а также условия лемм 3, 4, 5 § 6 и тем самым первое условие теоремы 2. Поэтому, если оператор удовлетворяет условиям (7.12), то для него сохраняют силу теоремы 2 и 3 § 6.

Заметим, что если пространство L реализовано таким образом, что C есть оператор умножения на функцию $c(x)$, то условия (7.12) означают, что

$$\int \frac{|f(x)|^2}{|c(x)-z|}\,dx < \infty, \quad \int \frac{|A(x, y)|^2\,dx\,dy}{|c(x)+c(y)-z|} < \infty. \qquad (7.12')$$

Очевидно, что если условия (7.12') (и тем самым (7.12)) выполнены хотя бы при одном комплексном z, то они выполнены при всех z, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Из (7.12') вытекает, что если C есть оператор умножения на функцию, то $f(x)$ и $A(x, y)$ — функции с локально суммируемым квадратом.

Отметим, что из условий теоремы следует, что $(C-z)^{-1} f \in L$ и что $(\tilde{C}-z)^{-1} A$ — оператор Гильберта—Шмидта. Для доказательства этих утверждений достаточно обратиться к записи условий (7.12) в виде (7.12').

Для доказательства теоремы рассмотрим прежде всего функции σ, σ^*, определяемые из уравнений

$$(C-z)\,\sigma + A\sigma^* + f = 0, \quad \bar{A}\sigma + (\bar{C}-\bar{z})\,\sigma^* + f^* = 0. \qquad (7.13)$$

Исключая из второго уравнения σ^*, получаем для σ уравнение

$$[C - A(\bar{C}-\bar{z})^{-1}\bar{A} - z]\,\sigma = A(\bar{C}-\bar{z})^{-1} f^* - f. \qquad (7.13')$$

Обозначим правую часть (7.13') через g, $g = A(\bar{C}-\bar{z})^{-1} f^* - f$. Так как $\|A\| < \infty$, $(C-z)^{-1} f \in L$, то $\bar{A}(C-z)^{-1} f \in L$ и $A(\bar{C}-\bar{z})^{-1} \times f^* \in L$. Следовательно, $(C-z)^{-1} g \in L$. Решение уравнения (7.13') может быть формально записано в виде

$$\sigma = \sum [(C-z)^{-1} A(\bar{C}-\bar{z})^{-1}\bar{A}]^n (C-z)^{-1} g. \qquad (7.14)$$

При достаточно большом $|\operatorname{Im} z|$ имеем

$$\|(C-z)^{-1} A(\bar{C}-\bar{z})^{-1} A\| < 1.$$

Поэтому при достаточно большом $|\operatorname{Im} z|$ ряд (7.14) определяет функцию $\sigma \in L$. Очевидно, что определенная этим рядом функция служит решением уравнения (7.13').

В дальнейшем z считаем фиксированным так, чтобы функции σ, σ^* принадлежали L.

Рассмотрим каноническое преобразование

$$\hat{a}(x) \to \hat{a}(x) + \sigma(x), \quad \hat{a}^*(x) \to \hat{a}^*(x) + \sigma^*(x). \qquad (7.15)$$

Согласно теореме 1 § 4, преобразование (7.15) является собственным. Применим преобразование (7.15) к оператору $\hat{H}$.

В результате получим оператор

$$\hat{H}_1 = \int C(x, y)\,(\hat{a}^*(x) + \sigma^*(x))\,(\hat{a}(y) + \sigma(y))\,dx\,dy + \ldots$$

Раскрывая формально в этом выражении скобки, мы приведем $\hat{H}_1$ к виду[1])

$$\hat{H}_1 = \hat{a}^* C\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^* A\hat{a}^* + \frac{1}{2}\hat{a}\bar{A}\hat{a} + \bar{z}\sigma^*\hat{a} + z\sigma\hat{a}^* + k + k_1, \tag{7.16}$$

$$k_1 = \sigma^* C\sigma + \frac{1}{2}\sigma^* A\sigma^* + \frac{1}{2}\sigma\bar{A}\sigma + f^*\sigma + f\sigma^*.$$

Чтобы обосновать раскрытие скобок, следует проверить, что константа k_1 конечна.

Из (7.14), (7.13) вытекает, что функция σ имеет вид $\sigma = -(C-z)^{-1} f + (C-z)^{-1} f_1$, где $f_1 \in L$. Так как по условию теоремы $(C-z)^{-1} f \in D_1$, то $|f^*\sigma| \leqslant |f^*(C-z)^{-1} f| + |f^*(C-z)^{-1} f_1| < \infty$. Далее, $|\sigma\bar{A}\sigma| < \infty$, так как $\|A\| < \infty$ и $\sigma \in L$,

$$\begin{aligned}\sigma^* C\sigma &= \sigma^*(C-z)\sigma + z\sigma^*\sigma = \sigma^*(-f+f_1) + z\sigma^*\sigma = \\ &= (-f^*(C-\bar{z})^{-1} + f_1^*(C-\bar{z})^{-1})(-f+f_1^*) + z\sigma^*\sigma = \\ &= f^*(C-\bar{z})^{-1} f - f^*(C-\bar{z})^{-1} f_1^* - f_1^*(C-\bar{z})^{-1} f + \\ &\qquad + f_1^*(C-\bar{z})^{-1} f_1^* + z\sigma^*\sigma.\end{aligned}$$

Все эти слагаемые имеют смысл в силу условий теоремы.

Таким образом, получающийся в результате канонического преобразования оператор $\hat{H}_1$ имеет тот же вид, что и $\hat{H}$, с той лишь разницей, что линейные члены $\hat{H}_1$ имеют вид $\bar{z}\sigma^*\hat{a} + z\sigma\hat{a}^*$, $\sigma \in L$.

Рассмотрим теперь однородное каноническое преобразование

$$\hat{a} \to \Phi\hat{a} + \Psi\hat{a}^*, \quad \hat{a}^* \to \bar{\Psi}\hat{a} + \bar{\Phi}\hat{a}^*, \tag{7.17}$$

где

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -B \\ -\bar{B} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{B\bar{B}} & -B\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\bar{B}B}}{\sqrt{\bar{B}B}} \\ -\bar{B}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{B\bar{B}}}{\sqrt{B\bar{B}}} & \operatorname{ch}\sqrt{\bar{B}B} \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

$$B = (\bar{C} - z)^{-1} A. \tag{7.19}$$

Из условия теоремы вытекает, что операторы BA, $\bar{B}A$, AB, $A\bar{B}$ имеют абсолютно сходящиеся следы и что B — оператор Гильберта—Шмидта. Из последнего обстоятельства следует, что операторы $\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\bar{B}B}}{\sqrt{\bar{B}B}}$ и $B\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\bar{B}B}}{\sqrt{\bar{B}B}}$ также являются операторами Гильберта—Шмидта. Таким образом, согласно теореме 1 § 4, преобразование (7.17) является собственным.

[1]) В (7.16) и далее использована сокращенная запись $\hat{a}^* C\hat{a} = \int C(x, y)\,\hat{a}^*(x) \times \hat{a}(y)\,dx\,dy$ и т. п.

Применим каноническое преобразование (7.17) к оператору $\hat{H}_1$. В результате получим оператор

$$\hat{H}_2 = (\hat{a}\Psi^* + \hat{a}^*\Phi^*)\, C\, (\Phi\hat{a} + \Psi\hat{a}^*) + \ldots$$

Раскроем в этом выражении скобки и поставим $\hat{a}$ и $\hat{a}^*$ в обычном порядке. Для того чтобы эта процедура приводила к тождественному преобразованию, надо, чтобы возникающая при этом константа

$$k_2 = \mathrm{Sp}\left(\Psi^* C \Psi + \frac{1}{2}\Psi^* A\overline{\Phi} + \frac{1}{2}\Phi'\overline{A}\Psi\right) \tag{7.20}$$

имела смысл. Исследование константы k_2 удобно отложить на конец доказательства теоремы.

Оказывается, что каноническое преобразование (7.17) переводит $\hat{H}_1$ в квадратичную нормальную форму.

Выведем одну важную формулу. Из равенства (7.19), учитывая, что в силу самосопряженности $\tilde{C} = C'$, находим [1]: $CB + BC' = zB + A$, $\overline{B}C + C'\overline{B} = \overline{zB} + \overline{A}$. Отсюда получаем

$$CB\overline{B} = B\overline{B}C + R_1, \quad R_1 = A\overline{B} - B\overline{A} + (z - \overline{z})\, B\overline{B}. \tag{7.21}$$

Очевидно, что R_1 — оператор Гильберта—Шмидта. Обозначим через $\|\ \|_2$ норму в пространстве операторов Гильберта—Шмидта: $\|X\|_2 = \sqrt{\mathrm{Sp}\, XX^*}$. Из (7.21) находим

$$C(B\overline{B})^n = (B\overline{B})^n C + R_n, \quad \|R_n\|_2 \leqslant n\|B\overline{B}\|^{n-1}\|R_1\|_2. \tag{7.22}$$

Пусть $f(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ — аналитическая функция, радиус сходимости которой больше, чем $\|B\overline{B}\|$. Пользуясь (7.22), получаем

$$Cf(B\overline{B}) = f(B\overline{B})\, C + R_f, \tag{7.23}$$

где R_f — оператор Гильберта—Шмидта, причем

$$\|R_f\|_2 \leqslant \|R_1\|_2\, \tilde{f}'(\|\overline{B}B\|).$$

Через $\tilde{f}(z)$ обозначена функция

$$\tilde{f}(z) = \sum_n |a_n|\, z^n.$$

Рассмотрим теперь слагаемые в $\hat{H}_2$, содержащие два оператора рождения. Эти слагаемые имеют вид $\hat{a}^* A_2 \hat{a}^*$, где

$$A_2 = \frac{1}{2}(\Phi^* C\Psi + \Psi' C'\overline{\Phi}) + \frac{1}{2}\Phi^* A\overline{\Phi} + \frac{1}{2}\Psi'\overline{A}\Psi. \tag{7.24}$$

[1]) Напомним, что $\tilde{C}$ есть оператор над операторами: $\tilde{C}X = CX + XC'$. Таким образом, из (7.19) вытекает, что $CB + BC' = zB + A$. Отметим, что из условия $A = A'$ следует, что $B = B'$.

Последнее слагаемое в (7.24) является оператором Гильберта — Шмидта, поскольку A — ограниченный оператор, а Ψ — оператор Гильберта — Шмидта.

Для исследования первых слагаемых воспользуемся равенством (7.18):

$$\Phi^* C\Psi + \Psi' C'\Phi + \overline{\Phi}^* A\overline{\Phi} =$$
$$= -\left(\operatorname{ch}\sqrt{B\overline{B}}\,CB\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,BC'\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}\right) +$$
$$+ \operatorname{ch}\sqrt{B\overline{B}}\,A\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}. \quad (7.25)$$

Обозначим выражение в скобках во второй строчке (7.25) через K. Преобразуем K с помощью равенств (7.19) и (7.23):

$$K = C\operatorname{ch}\sqrt{B\overline{B}}\,B\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} - R_{\mathrm{ch}}B\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} - C\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,B\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B} +$$
$$+ R_{\mathrm{sh}}\,B\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B} + z\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,B\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,A\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}.$$

Все слагаемые в этом выражении, кроме слагаемых, содержащих C, и последнего, являются операторами Гильберта — Шмидта. Обозначим их сумму через R. Слагаемые, содержащие C, взаимно уничтожаются, что видно из цепочки равенств[1])

$$\operatorname{ch}\sqrt{B\overline{B}}\,B\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} = B\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} =$$
$$= B\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,B\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}.$$

Заметим теперь, что $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,A\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B} = A + R_1$, где R_1 — оператор Гильберта — Шмидта. В этом легко убедиться, раскладывая, например, $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}$ и $\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}$ в ряды. Аналогичным образом убеждаемся в том, что последнее слагаемое в формуле (7.25) имеет вид $A + R_2$, где R_2 — оператор Гильберта — Шмидта. Таким образом, после уничтожения слагаемых, встречающихся с разными знаками, (7.25) приобретает вид

$$\Phi^* C\Psi + \Psi' C'\overline{\Phi} + \Phi^* A\overline{\Phi} = R + R_1 + R_2$$

Следовательно, A_2 есть оператор Гильберта — Шмидта.

---

[1]) Эти равенства основаны на том, что $f(B\overline{B})B = Bf(\overline{B}B)$. Для случая, когда f — аналитическая функция в круге с радиусом больше $\|B\overline{B}\|$, тождество $f(B\overline{B})B = Bf(\overline{B}B)$ может быть установлено с помощью разложения в ряд левой и правой частей.

Слагаемые в $\hat{H}_2$, содержащие операторы рождения и уничтожения в первой степени, имеют вид $f_2\hat{a}^* + f_2^*\hat{a}$, где

$$f_2 = z\sigma\overline{\Phi} + \bar{z}\sigma^*\Psi. \tag{7.26}$$

Так как $\overline{\Phi}$, Ψ — ограниченные операторы, то $f_2 \in L$.

Слагаемые в $\hat{H}_2$, содержащие $\hat{a}^*\hat{a}$, имеют вид $\hat{a}^*C_2\hat{a}$, где

$$C_2 = \Phi^*C\Phi + \Psi'C'\overline{\Psi} + \Phi^*A\overline{\Psi} + \Psi'\bar{A}\Phi. \tag{7.27}$$

Исходя из (7.18), (7.19) и (7.23), находим, что $\Phi^*C\Phi = C\left(\operatorname{ch}\sqrt{B\overline{B}}\right)^2 + R_1$, $\Psi'C'\overline{\Psi} = -C\left(\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}\right)^2 + R_2$, где R_1, R_2 — ограниченные операторы. Таким образом, $C_2 = C + R$, где $\|R\| < \infty$ и $R = R^*$. Следовательно, C_2 — самосопряженный оператор. Перейдем к исследованию константы (7.20).

Покажем прежде всего, что оператор $\Psi^*A\overline{\Phi}$ имеет след. Используя (7.18), получаем для $\Psi^*A\overline{\Phi}$ выражение

$$\Psi^*A\overline{\Phi} = -\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}\,\overline{B}A\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}.$$

Операторы $\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}$ и $\operatorname{ch}\sqrt{\overline{B}B}$ ограничены. Оператор $\overline{B}A$ имеет абсолютно сходящийся след в силу условий теоремы. Таким образом, у оператора $\Psi^*A\overline{\Phi}$ имеется след. Аналогично устанавливается наличие следа у оператора $\Phi'\bar{A}\Psi$.

Перейдем к оператору $\Psi^*C\Psi$. Заметим, что если он имеет след, то имеет след также оператор $(\Psi^*C\Psi)' = \Psi'C'\overline{\Psi}$ и $\operatorname{Sp}\Psi^*C\Psi = \operatorname{Sp}\Psi'C'\overline{\Psi}$. Совершим теперь формальные преобразования:

$$\operatorname{Sp}\Psi^*C\Psi = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\Psi^*C\Psi + \Psi'C'\overline{\Psi}) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}\,\overline{B}CB\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\,BC'\overline{B}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[CB\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}\right)^2\overline{B} + (-CB + zB + A)\overline{B}\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\right)^2\right].$$

Легко видеть, что[1] $\left(\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\overline{B}B}}{\sqrt{\overline{B}B}}\right)^2\overline{B} = \overline{B}\left(\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\right)^2$. Поэтому в результате преобразований получаем, что

$$\operatorname{Sp}\Psi^*C\Psi = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[(A + zB)\overline{B}\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\right)^2\right]. \tag{7.28}$$

В силу предположений теоремы стоящий под знаком следа оператор имеет абсолютно сходящийся след.

---

[1]) См. примечание на с. 135.

Проведенные преобразования законны, если оператор $\overline{B}CB$ имеет абсолютно сходящийся след. Таким образом, для $\hat{H}_2$ в этом случае получается выражение

$$\hat{H}_2 = \hat{a}^* C_2 \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{a}^* A_2 \hat{a}^* + \hat{a}\overline{A}_2 \hat{a}) + f_2 \hat{a}^* + f_2^* \hat{a} + k_2, \tag{7.29}$$

где

$$k_2 = k + k_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[(A + zB)\overline{B}\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{B\overline{B}}}{\sqrt{B\overline{B}}}\right)^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\Psi^* A\overline{\Phi} + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\Phi'\overline{A}\Psi, \tag{7.30}$$

A_2 — оператор Гильберта—Шмидта и $f_2 \in L$. Избавимся теперь от предположения, что оператор $\overline{B}CB$ имеет абсолютно сходящийся след. Рассмотрим реализацию пространства L в виде функций с суммируемым квадратом на множестве M, в которой C есть умножение на функцию. В этой реализации оператор A задается ядром с локально суммируемым квадратом $A(x, y)$. Рассмотрим семейство множеств конечной меры $D_n \subset D_{n+1} \subset M$, $\bigcup D_n = M$. Обозначим через $A(n)$ оператор с ядром $A(n \mid x, y) = \chi_n(x)\chi_n(y)A(x, y)$, где $\chi_n(x)$ — характеристическая функция множества D_n. Через $\hat{H}(n)$, $\Phi(n)$, $B(n)$ и т. д. обозначим операторы, получаемые из $\hat{H}$, Φ, B и т. д. заменой A на $A(n)$. Очевидно, что оператор $\overline{B}(n)CB(n)$ имеет абсолютно сходящийся след. Поэтому для оператора $\hat{H}(n)$ все преобразования законны: $\hat{H}(n) = \hat{U}(n)\hat{H}_2(n)\hat{U}^{-1}(n)$, где $\hat{U}(n)$ — унитарный оператор, определяемый произведением канонических преобразований (7.15) и (7.17) с заменой Φ на $\Phi(n)$, Ψ на $\Psi(n)$.

Из формул (7.18), (7.24), (7.26), (7.27) следует, что при $n \to \infty$ операторы $C_2(n)$, $A_2(n)$ и функции $f_2(n)$ сильно сходятся соответственно к C_2, A_2, f_2. Из (7.30) следует, что $k_2(n) \to k_2$. Следовательно, операторы $\hat{H}_2(n)$ сильно сходятся к $\hat{H}_2$ на множестве финитных векторов и $\hat{U}(n)$ сильно сходятся к $\hat{U}$. Поэтому последовательность операторов $\hat{H}(n) = \hat{U}(n)\hat{H}_2(n)\hat{U}^{-1}(n)$ сильно сходится на некотором плотном множестве. Очевидно, что ее пределом служит оператор $\hat{H}$. Таким образом, $\hat{H} = \hat{U}\hat{H}_2\hat{U}^{-1}$, где $\hat{U}$ — унитарный оператор, определяемый произведением канонических преобразований (7.15), (7.17). Теорема доказана.

Замечание. Заменим условие теоремы более слабым условием

$$\left.\begin{aligned} &(C - z)^{-1} f \in L, \\ &(\tilde{C} - z)^{-1} A \text{ — оператор Гильберта—Шмидта}^{1)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

[1]) Нетрудно проверить, что из (7.31) следуют условия лемм 3, 4 § 6 и условия теоремы 1 настоящего параграфа. То обстоятельство, что условия (7.31) следуют из (7.12), становится непосредственно очевидным, если записать условия (7.12) в форме (7.12').

Рассмотрим унитарный оператор $\hat{U}$, определяемый произведением канонических преобразований (7.15), (7.17), и оператор $\hat{H}_2 = \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U}$. Из доказательства теоремы следует, что $\hat{H}_2$ по-прежнему задается формулой (7.29), причем A_2 — оператор Гильберта — Шмидта и $f \in L$. Разница состоит лишь в том, что константа k_2 может в этом случае оказаться бесконечной. Очевидно, что если $k_2 = \infty$, то (7.29) и исходное выражение (7.1) операторов не определяют. Естественно, однако, связать с ним регуляризованный оператор $\hat{H}_{2\,\mathrm{reg}}$, получаемый из $\hat{H}_2$ заменой «бесконечной константы» k_2 каким-либо вещественным числом и $\hat{H}_{\mathrm{reg}} = \hat{U}\hat{H}_{2\,\mathrm{reg}}\hat{U}^{-1}$.

4. Примеры. В этом пункте k пробегает вещественное евклидово пространство, dk — мера Лебега.

I. Рассмотрим выражение

$$\hat{H} = \int \omega(k)\,\hat{a}^*(k)\,\hat{a}(k)\,dk + \\ + \int (f(k)\,\hat{a}^*(k)\,\hat{a}^*(-k) + f^*(k)\,\hat{a}(-k)\,\hat{a}(k))\,dk. \qquad (7.32)$$

В этом случае операторы C и A задаются ядрами

$$C(k, k') = \omega(k)\,\delta(k-k'), \quad A(k, k') = f(k)\,\delta(k+k').$$

Операторы $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, получаемые решением системы (7.2), задаются аналогичными ядрами

$$\Phi(t, k, k') = \varphi(t, k)\,\delta(k-k'), \quad \Psi(t, k, k') = \psi(t)\,\delta(k+k'). \qquad (7.33)$$

Из (7.33) следует, что каноническое преобразование, определяемое операторами Φ и Ψ, является несобственным. Таким образом, выражение (7.32) ни в фермиевском, ни в бозевском случаях не определяет самосопряженного оператора [1]).

II. Рассмотрим простейшее бозевское выражение

$$\hat{H} = \int \omega(k)\,\hat{a}^*(k)\,\hat{a}(k)\,dk + \\ + g\int (f(k)\,\hat{a}^*(k) + f^*(k)\,\hat{a}(k))\,dk, \quad \omega(k) > \omega_0 > 0. \qquad (7.34)$$

а) Пусть сначала

$$\int |f(k)|^2\,dk < \infty. \qquad (7.35)$$

В этом случае, согласно теореме 1 § 6, $\hat{H}$ есть самосопряженный оператор, в область определения которого входят финитные векторы. Если рассмотреть $\hat{H}$ только на финитных векторах, то получится симметрический оператор с нулевыми индексами дефекта.

[1]) По-видимому, естественная область определения (см. § 6, п. 2) квадратичной формы (7.32) состоит лишь из нуля. Нетрудно показать, однако, что выражение (7.32) имеет смысл билинейной формы с всюду плотной областью определения (см. с. 26—28).

b) Пусть условие (7.35) не выполнено, но вместо него выполнено условие

$$\int \frac{|f(k)|^2}{\omega(k)} dk < \infty. \tag{7.36}$$

В этом случае, как легко проверить, выполнены условия теоремы 3. Заметим, что и в первом, и во вторых случаях с помощью канонического преобразования

$$\hat{a}(k) = \hat{b}(k) - g\frac{f(k)}{\omega(k)}, \quad \hat{a}^*(k) = \hat{b}^*(k) - g\frac{f^*(k)}{\omega(k)} \tag{7.37}$$

оператор $\hat{H}$ приводится к виду

$$\hat{H}_1 = \int \omega(k)\, \hat{b}^*(k)\, b(k) dk + g^2 \int \frac{|f(k)|^2}{\omega(k)} dk. \tag{7.38}$$

Используя каноническое преобразование (7.37) и формулу (4.26), нетрудно найти область определения D_g оператора (7.34). В случае b) D_g состоит из векторов, которым отвечают функционалы вида

$$e^{\frac{f}{\omega} a^*} \Phi\left(a^* - g\frac{f}{\omega}\right), \tag{7.39}$$

где Φ—функционал, отвечающий вектору

$$\hat{\Phi} = \sum_k \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Phi_n(k_1, \ldots, k_n)\, \hat{a}^*(k_1) \ldots \hat{a}^*(k_n)\, d^n k \hat{\Phi}_0$$

из области определения $\hat{H}_1$:

$$\sum_n \int (\omega(k_1) + \ldots + \omega(k_n))^2 |\Phi_n(k_1, \ldots, k_n)|^2 d^n k < \infty. \tag{7.40}$$

Из формул (7.39) и (7.40) легко следует, что область D_g существенно зависит от g: если $g \neq g'$, то $D_g \cap D_{g'} = 0$ $\left(\text{при } \int |f(k)|^2 dk = \infty\right)$.

c) Пусть теперь не выполнено ни условие (7.35), ни условие (7.36), но

$$\int \frac{|f(k)|^2}{\omega^2(k)} dk < \infty. \tag{7.41}$$

В этом случае выполнены условия теоремы 1 и условия (7.31), но не выполнены условия теорем 2 и 3. Каноническое преобразование (7.37) остается собственным. Совершая его, получаем (7.38), однако константа в этом случае бесконечна, так как

$$\int \frac{|f(k)|^2}{\omega(k)} dk = \infty.$$

Отсюда очевидно, что выражение (7.34) не имеет непосредственного операторного смысла. Имеет, однако, смысл регуляризованный оператор

$$\hat{H}_{\text{reg}} = \int \omega(k) \left(\hat{a}^* + g\frac{f^*}{\omega}\right)\left(\hat{a} + g\frac{f}{\omega}\right) dk \tag{7.42}$$

(скобки раскрывать нельзя!).

Область определения оператора (7.42) по-прежнему задается формулами (7.39), (7.40).

Оператору (7.34) посвящена довольно обширная литература[1]). Этот оператор и некоторые его обобщения представляют интерес как простейшие модели квантовой теории поля. Для этих моделей, однако, характерен случай, когда условие (7.41) также не выполняется. Поэтому каноническое преобразование (7.37) уже не является собственным.

Оно, однако, становится собственным, если расширить пространство состояний путем введения индефинитной метрики, как это делается в работах автора [3, 4]. Обсуждение возникающих здесь вопросов выходит, однако, за рамки этой книги.

§ 8. Каноническая форма квадратичного оператора

В этом параграфе мы найдем простейший вид, к которому можно привести квадратичный оператор собственным линейным каноническим преобразованием.

Эта задача решается в настоящем параграфе не в полном объеме: мы ограничиваемся случаем, когда исходный оператор является вещественным, однородным, самосопряженным и приведенным к нормальной форме. Впрочем, последнее ограничение до некоторой степени снимается теоремой 3 § 7.

В бозевском и в фермиевском случаях канонический вид один и тот же, однако изложение удобно вести раздельно.

1. Бозевский случай.

Теорема 1. *Пусть самосопряженный оператор $\hat{H}$, приведенный к нормальной форме, имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} &\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^*T\hat{a}^* + \hat{a}\overline{T}\hat{a} + 2\hat{a}^*S\hat{a}), \\ &T = \overline{T}, \quad S = \overline{S}, \quad \|S\| < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

тогда, если

$$S \pm T > \mu E > 0,$$

где μ — вещественное число, то оператор $\hat{H}$ приводится собственным линейным каноническим преобразованием к виду

$$\hat{H} = \hat{a}^*\Omega\hat{a} + k, \tag{8.2}$$

где Ω — самосопряженный оператор и k — константа.

Забудем временно о том, что $S = \overline{S}$, $T = \overline{T}$, $\|S\| < \infty$. Прежде чем доказывать теорему, заметим, что при линейных канонических преобразованиях оператор (8.1) переходит в оператор такого же вида плюс константа, причем матрица квадратичной части оператора (8.1) преобразуется согласно правилу

$$\begin{pmatrix} \overline{T} & \overline{S} \\ S & T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \overline{T} & \overline{S} \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

---

[1]) См. работы Томонага [1], Эдвардса и Пайерлса [1], Ван Хова [1], Гринберга и Швебера [1]. Подробное обсуждение вопросов теории поля, связанных с этим оператором, имеется в книгах Швебера [1] и Хенли и Тирринга [1].

Из (8.3) следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{T} & \bar{S} \\ S & T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}$$

преобразуется по правилу

$$\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Пусть

$$U=\exp\left\{it\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}\right\}. \tag{8.5}$$

Согласно лемме 3 § 6, U есть матрица собственного канонического преобразования.

Обозначим через G_0 группу канонических преобразований, задаваемых матрицами вида $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$. Мы докажем, что при выполнении условий теоремы 1 существует собственное каноническое преобразование с матрицей σ такое, что $\sigma U(t)\sigma^{-1}\in G_0$. Отсюда очевидно утверждение теоремы.

Доказательство того, что существует такое σ, будем производить следующим образом. Мы укажем множество $\boldsymbol{Z}$, на котором действует группа собственных канонических преобразований, причем подгруппа G_0 состоит из всех преобразований, оставляющих неподвижной некоторую точку $Z_0\in\boldsymbol{Z}$. Далее мы покажем, что при выполнении условий теоремы 1 для преобразований $U(t)$ также существует не зависящая от t неподвижная точка $Z\in\boldsymbol{Z}$.

Затем мы найдем преобразование σ, переводящее Z в Z_0. Очевидно, что это преобразование обладает нужным свойством: $\sigma^{-1}U(t)\sigma$ оставляет неподвижной точку Z_0 и, следовательно, принадлежит G_0. Нам удобно будет в этом пункте задавать канонические преобразования вещественными матрицами (см. (4.11))

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=U\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}U^{-1},\quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

При таком задании группа G_0 состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Отметим, что из (8.6) вытекает равенство

$$\Psi=\frac{1}{2}(A-D)+\frac{i}{2}(B+C).$$

Поэтому, если каноническое преобразование является собственным, то $A-D$ и $B+C$ — операторы Гильберта — Шмидта.

Обозначим через $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ множество симметричных операторов Z в L вида $Z=X+iY$, где X, Y — вещественные операторы и $Y>0$.

Обозначим через $\boldsymbol{Z}\subset\tilde{\boldsymbol{Z}}$ подмножество $\tilde{\boldsymbol{Z}}$, состоящее из операторов, обладающих дополнительным свойством: $Z-iE$ — оператор Гильберта — Шмидта. Пусть $\sigma=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — матрица, отвечающая каноническому преобразованию, $Z\in\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Определим действие элемента σ на множестве $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ с помощью формулы

$$\sigma Z=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}. \tag{8.8}$$

Используя соотношения между A, B, C, D, следующие из (4.13), нетрудно показать, что $(\sigma Z)'=\sigma Z$. Найдем мнимую часть σZ:

$$\frac{1}{2i}(\sigma Z-\overline{\sigma Z})=\frac{1}{2i}((\sigma Z)'-\overline{\sigma Z})=$$
$$=\frac{1}{2i}[(ZC'+D')^{-1}(ZA'+B')-(A\overline{Z}+B)(C\overline{Z}+D)^{-1}]=$$
$$=\frac{1}{2i}(ZC'+D')^{-1}[(ZA'+B')(C\overline{Z}+D)-(ZC'+D')(A\overline{Z}+B)](C\overline{Z}+D)^{-1}=$$
$$=(ZC'+D')^{-1}Y(C\overline{Z}+D)^{-1}, \tag{8.9}$$

где $Y=\frac{1}{2i}(Z-\overline{Z})$. Последнее равенство в (8.9) получено с помощью (4.13). Из (8.9) следует, что $\frac{1}{2i}(\sigma Z-\overline{\sigma Z})>0$, т. е. $\sigma Z\in\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Таким образом, σ является преобразованием множества $\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Нетрудно проверить, что точку $Z=iE\in\boldsymbol{Z}$ оставляют неподвижной те и только те преобразования σ, которые имеют вид (8.7). Найдем условие того, что $Z\in\tilde{\boldsymbol{Z}}$ является неподвижной точкой относительно преобразований, задаваемых матрицами (8.5).

Пусть

$$V(t)=\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}=\exp\left\{it\begin{pmatrix}-S & -T\\ \overline{T} & \overline{S}\end{pmatrix}\right\},\quad W(t)=UV(t)U^{-1},$$

где U определяется формулой (8.6). Очевидно, что

$$W(t)=\exp\left\{t\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\gamma & \delta\end{pmatrix}\right\},\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\gamma & \delta\end{pmatrix}=iU\begin{pmatrix}-S & -T\\ \overline{T} & \overline{S}\end{pmatrix}U^{-1},$$

α, β, γ, δ выражаются через S и T согласно формулам

$$\alpha=\operatorname{Im}(S+T),\quad \beta=\operatorname{Re}(S-T),\quad \gamma=\operatorname{Re}(S+T),\quad \delta=-\alpha'. \tag{8.10}$$

(Последнее равенство справедливо благодаря тому, что $\overline{S}=S'$, $T=T'$.) Пусть теперь $Z\in\tilde{\boldsymbol{Z}}$, $Z(t)=U(t)Z$:

$$Z(t)=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}. \tag{8.11}$$

Найдем производную $\frac{dZ(t)}{dt}$:

$$\frac{dZ(t)}{dt}=$$
$$=(\dot{A}Z+\dot{B})(CZ+D)^{-1}-(AZ+B)(CZ+D)^{-1}(\dot{C}Z+\dot{D})(CZ+D)^{-1}=$$
$$=(\dot{A}Z+\dot{B})(CZ+D)^{-1}-(ZC'+D')^{-1}(ZA'+B')(\dot{C}Z+\dot{D})(CZ+D)^{-1}=$$
$$=(ZC'+D')^{-1}[(ZC'+D')(\dot{A}Z+\dot{B})-(ZA'+B')(\dot{C}Z+\dot{D})](CZ+D)^{-1}. \tag{8.12}$$

Точками для краткости обозначены производные по t. При выполнении преобразований мы воспользовались тем, что

$$(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=[(AZ+B)(CZ+D)^{-1}]'.$$

Из (8.10) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\gamma & -\alpha'\end{pmatrix}.$$

Пользуясь этим равенством и соотношениями между A, B, C, D, вытекающими из (4.13), внутреннюю скобку в (8.12) можно упростить. В результате для $\frac{dZ(t)}{dt}$ получаем окончательное выражение

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (ZC' + D')^{-1}(-Z\gamma Z + \alpha Z + Z\alpha' - \beta)(CZ + D)^{-1}. \tag{8.13}$$

Очевидно, что условие $\frac{dZ(t)}{dt} = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $Z(t) = Z(0)$, т. е. чтобы точка $Z = Z(0)$ была неподвижной относительно преобразований $U(t)$. Таким образом, из (8.13) находим, что для того, чтобы точка Z была неподвижной относительно $U(t)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор Z удовлетворял уравнению

$$Z\gamma Z + \alpha Z + Z\alpha' + \beta = 0. \tag{8.14}$$

Вспомним теперь, что S и T — симметричные операторы и $S \pm T > \mu E > 0$. Из (8.10) вытекает, что эти условия эквивалентны следующим:

$$\alpha = 0, \ \beta > \mu E > 0, \ \gamma > \mu E > 0. \tag{8.15}$$

Решая уравнение (8.14) с учетом (8.15), находим[1])

$$Z = i\gamma^{-1/2}(\gamma^{1/2}\beta\gamma^{1/2})^{1/2}\gamma^{-1/2}. \tag{8.16}$$

Покажем теперь, что Z принадлежит не только $\tilde{\boldsymbol{Z}}$, но и $\boldsymbol{Z}$. Заметим, что из (8.10) при условии $S = \overline{S}$, $T = \overline{T}$ следует, что $T = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$. Вспомним, что $\hat{H}$ есть нормальная форма и, следовательно, T — оператор Гильберта — Шмидта. Подставим $\beta = \gamma - 2T$ в правую часть (8.16):

$$\gamma^{1/2}\beta\gamma^{1/2} = \gamma^2 - 2\gamma^{1/2}T\gamma^{1/2} = \gamma^2 + K_1.$$

Так как $\|\gamma\| < \infty$, то K_1 — оператор Гильберта — Шмидта.

Используя неравенства (8.15) для β и γ, находим, что $\gamma^2 + K_1 > \mu_1 E > 0$.

В п. 3 будет доказано, что из условий $\gamma > \mu E > 0$, $\gamma^2 + K_1 > \mu_1 E > 0$, где K_1 — оператор Гильберта — Шмидта, следует, что $\sqrt{\gamma^2 + K_1} = \gamma + K_2$, где K_2 — оператор Гильберта — Шмидта.

Легко видеть, что эти условия выполнены. Далее из (8.15) вытекает, что $\gamma^{-1/2}$ — ограниченный оператор. Поэтому $Z = i\gamma^{-1/2}(\gamma^{1/2}\beta\gamma^{1/2})^{1/2}\gamma^{-1/2} = iE + K$, где K — оператор Гильберта — Шмидта.

Таким образом, установлено, что $Z \in \boldsymbol{Z}$. Пусть теперь $Z_1 = X_1 + iY_1$ — фиксированный элемент $\boldsymbol{Z}$, а X_1 и $Y_1 - E$ — вещественные симметричные операторы Гильберта — Шмидта ($Y_1 > 0$). Положим

$$A = Y_1^{-1/2}, \ D = Y_1^{1/2}, \ B = -Y_1^{-1/2}X_1, \ C = 0.$$

Очевидно, что $(AZ_1 + B)D^{-1} = iE$. Кроме того, B — оператор Гильберта — Шмидта, $A - D$ — также оператор Гильберта — Шмидта и матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям (4.13).

Таким образом, существует собственное каноническое преобразование такое, что соответствующее ему преобразование множества $\boldsymbol{Z}$ переводит Z_1 в $Z_0 = iE$. Теорема доказана.

2. Фермиевский случай.

Теорема 2. *Пусть самосопряженный оператор $\hat{H}$, приведенный к нормальной форме, имеет вид*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^*T\hat{a}^* - \hat{a}\overline{T}\hat{a} + 2\hat{a}^*S\hat{a}), \quad T = \overline{T}, \ S = \overline{S}, \tag{8.17}$$

---

[1]) Остальные решения уравнения (8.14) не принадлежат $\tilde{\boldsymbol{Z}}$.

$[S, T]$ — *оператор Гильберта — Шмидта*, $S > \mu E > 0$, $S^2 - [S, T] - T^2 > \mu E > 0$; *тогда оператор* $\hat{H}$ *собственным линейным каноническим преобразованием приводится к виду*

$$\hat{H} = \hat{a}^* \Omega \hat{a} + k, \tag{8.18}$$

где k — *константа.*

Доказательство основано на той же идее, что и доказательство теоремы 1. Рассмотрим матрицу

$$V(t) = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \exp\left\{ it \begin{pmatrix} -S & -T \\ \overline{T} & \overline{S} \end{pmatrix} \right\}. \tag{8.19}$$

Согласно лемме 5 § 6, $V(t)$ есть матрица собственного канонического преобразования.

Обозначим через G_0 группу канонических преобразований, задаваемых матрицами вида $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$. Точно так же, как в бозевском случае, устанавливается, что доказываемая теорема эквивалентна следующему утверждению: при выполнении условий теоремы 2 существует собственное линейное каноническое преобразование с матрицей σ такое, что $\sigma U(t) \sigma^{-1} \in G_0$.

Доказательство этого последнего утверждения производится с помощью теоремы о неподвижной точке по тому же плану, что и доказательство аналогичного утверждения в бозевском случае.

Перейдем от матриц $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ к вещественным матрицам

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -iE \\ E & iE \end{pmatrix}. \tag{8.20}$$

Согласно (5.10),

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

Отметим, что матрицам вида $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ отвечают вещественные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

Точно так же, как и в бозевском случае, из того, что $V(t)$ имеет вид (8.19), следует, что $W(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix} V(t) \begin{pmatrix} E & -iE \\ E & iE \end{pmatrix}$ имеет вид

$$W(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \exp\left\{ t \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\}, \tag{8.23}$$

где

$$\alpha = \operatorname{Im}(T + S),\ \beta = \operatorname{Re}(S - T),\ \delta = \operatorname{Im}(S - T),\ \gamma = \beta'. \tag{8.24}$$

(Последнее равенство справедливо благодаря тому, что $\overline{S} = S'$, $T' = -T$.)

Рассмотрим множество $\tilde{Z}$ операторов в L, удовлетворяющих условиям

$$Z'Z = ZZ' = -E. \tag{8.25}$$

Обозначим через $Z \subset \tilde{Z}$ множество $\tilde{Z}$, состоящее из элементов вида $Z = iE + K$, где K — оператор Гильберта — Шмидта.

Из соотношений между A, B, C, D, следующих из (8.21), вытекает, что если $Z \in \tilde{Z}$, то также и $Z_1 \in \tilde{Z}$, где

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \tag{8.26}$$

Таким образом, каждому каноническому преобразованию отвечает преобразование в $\tilde{\mathbf{Z}}$. Обозначим через G_0 группу преобразований (8.26), оставляющих неподвижной точку $Z_0 = iE$.

Нетрудно проверить, что G_0 состоит из преобразований, порожденных матрицами вида (8.22).

Найдем теперь условие того, что точка $Z \in \tilde{\mathbf{Z}}$ является неподвижной относительно преобразований, порожденных операторами (8.23). Пусть

$$Z(t) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Продифференцируем $Z(t)$ по t:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (\dot{A}Z + \dot{B})(CZ + D)^{-1} - (AZ + B)(CZ + D)^{-1}(\dot{C}Z + \dot{D})(CZ + D)^{-1} =$$
$$= (\dot{A}Z + \dot{B})(CZ + D)^{-1} + (Z'A' + B')^{-1}(Z'C' + D')(\dot{C}Z + \dot{D})(CZ + D)^{-1} =$$
$$= (Z'A' + B')^{-1}[(Z'C' + D')(\dot{C}Z + \dot{D}) + (Z'A' + B')(\dot{A}Z + \dot{B})](CZ + D)^{-1}. \quad (8.27)$$

При проведении преобразований мы воспользовались тем, что оператор Z_1 вида (8.26) обладает свойством $-Z_1 = (Z_1')^{-1}$. Точками для краткости обозначены производные по t. Из (8.23) следует, что

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Пользуясь (8.28), а также соотношениями (8.25) и (8.21), квадратную скобку в (8.27) преобразуем к виду

$$Z'\alpha Z + \gamma Z - Z'\beta + \delta.$$

Чтобы точка $Z = Z(0)$ была неподвижной при преобразовании, задаваемом матрицей (8.23), необходимо и достаточно, чтобы $\frac{dZ(t)}{dt} = 0$. Таким образом, для того чтобы точка Z была неподвижной, необходимо и достаточно, чтобы оператор Z удовлетворял уравнению

$$Z'\alpha Z + \gamma Z - Z'\beta + \delta = 0. \quad (8.29)$$

Вспомним теперь, что, согласно условию теоремы имеем $S = \overline{S}$ $T = \overline{T}$. Согласно (8.24), отсюда следует, что $\alpha = \delta = 0$. Учитывая, кроме того, что $\beta = \gamma'$, находим окончательное уравнение для Z:

$$\gamma Z = Z'\gamma'. \quad (8.30)$$

Из (8.30) находим Z:

$$Z = i\gamma^{-1}(\gamma\gamma')^{1/2}.$$

Легко видеть, что Z удовлетворяет условиям (8.25) и, следовательно, принадлежит $\tilde{\mathbf{Z}}$. Покажем, что $Z \in \mathbf{Z}$. Выражая γ через S и T, получаем

$$\gamma\gamma' = S^2 - T^2 - [S, T].$$

Согласно условию теоремы 2, $K_1 = T^2 + [S, T]$ — оператор Гильберта — Шмидта, $S > \mu E > 0$ и $S^2 - K_1 > \mu E > 0$. Поэтому $\sqrt{\gamma\gamma'} = \sqrt{S^2 - K_1^2} = S + K_2$, где K_2 — оператор Гильберта — Шмидта[1]). Далее $\gamma^{-1}S = (S + T)^{-1}S = E + Y$. Из условия теоремы вытекает, что $\gamma^{-1} = (S + T)^{-1}$ — ограниченный оператор. Поэтому $Y = (S + T)^{-1}S - E = -(S + T)^{-1}T$ является оператором Гильберта — Шмидта. Далее из ограниченности оператора $(S + T)^{-1}$ вытекает, что $(S + T)^{-1}K_2$ является оператором Гильберта — Шмидта. Таким образом, мы приходим

---

[1]) См. п. 3.

к выводу, что

$$Z = i(E+K), \quad K = \overline{K}, \tag{8.31}$$

где K — оператор Гильберта — Шмидта, т. е. что $Z \in \boldsymbol{Z}$.

Покажем теперь, что каждый элемент $\boldsymbol{Z}$ вида (8.31) может быть переведен в точку $Z_0 = iE$ движением, которому отвечает собственное каноническое преобразование. Потребуем, чтобы преобразование, задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, переводило элемент (8.31) в $Z_0 = iE$. Для операторов A и D получается уравнение

$$A(E+K)D^{-1} = E. \tag{8.32}$$

Заметим, что из (8.25) следует, что операторы $E+K$ и $E+K'$ перестановочны. Так как, кроме того, $K = \overline{K}$, то K — нормальный оператор. Поэтому у оператора $E+K$ имеется квадратный корень $\sqrt{E+K}$, определяемый обычным образом с помощью спектрального разложения. Положим

$$A = (E+K)^{-1/2}, \quad D = (E+K)^{1/2}. \tag{8.33}$$

Из сказанного выше ясно, что $AA' = A'A = DD' = D'D = E$. Поэтому матрица $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ задает каноническое преобразование. Покажем, что оператор $(E+K)^{-1}$ ограничен. В самом деле, $Z^{-1} = -Z'$. Поэтому $(E+K)^{-1} = E+K'$. Так как K — оператор Гильберта — Шмидта, то K' обладает тем же свойством и, следовательно, ограничен. Из ограниченности оператора $(E+K)^{-1}$ очевидным образом следует ограниченность оператора $(E+K)^{-1/2}$.

Из (8.20) легко получить, что при условии $B = C = 0$ для того, чтобы каноническое преобразование было собственным, необходимо и достаточно, чтобы $A - D$ был оператором Гильберта — Шмидта. Этот факт легко следует из (8.33) и из ограниченности оператора $(E+K)^{-1/2}$. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что рассмотренные при доказательстве теорем 1 и 2 множества, на которых действуют группы канонических преобразований, являются бесконечномерными аналогами классических комплексных симметрических пространств. (Наиболее близкое к использованному в пп. 1, 2 описание этих пространств см. в книге Зигеля [1].)

3. Завершение доказательства теорем 1 и 2.

Лемма. *Пусть C, K — самосопряженные операторы, причем $C > \mu E$, $C^2 + K > \mu_1^2 E$, μ, $\mu_1 > 0$. Рассмотрим оператор*

$$X = \sqrt{C^2+K} - C. \tag{8.34}$$

1. *Если K — ядерный оператор, то X также ядерный оператор.*
2. *Если K — оператор Гильберта — Шмидта, то X также оператор Гильберта — Шмидта.*

Утверждение 2 этой леммы служит завершением доказательства теорем 1 и 2. Докажем вначале первое утверждение.

Рассмотрим частные случаи. Пусть $K \geqslant 0$ и C имеет чисто точечный спектр. Заметим, что если $K \geqslant 0$, то также и $X \geqslant 0$. В самом деле, из очевидного неравенства $C^2 + K \geqslant C^2$, согласно известной теореме Гейнца [1], следует, что $\sqrt{C^2+K} \geqslant C$.

Перепишем теперь равенство (8.34) в виде

$$X^2 + CX + XC = K. \tag{8.35}$$

Пусть ξ_n — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора C, и P_n — оператор проектирования на подпространство, натянутое на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Пусть A — произвольный оператор. Через A_n обозначим оператор $A_n = P_n A P_n$. Умножим (8.35) слева и справа на P_n. В результате получим

$$(X^2)_n + C_n X_n + X_n C_n = K_n. \tag{8.36}$$

Вычисляя след операторов C_nX_n и X_nC_n в базисе $\{\xi_k\}$, получаем, что $\mathrm{Sp}\, C_nX = \mathrm{Sp}\, X_nC_n \geqslant \mu\, \mathrm{Sp}\, X_n$, где μ — константа, ограничивающая снизу оператор C. (При получении этого неравенства использовано то обстоятельство, что $X_n \geqslant 0$ и что поэтому диагональные элементы X_n в любом базисе не отрицательны.) Приравнивая следы в левой и правой частях (8.36) и учитывая, что $\mathrm{Sp}\,(X^2)_n \geqslant 0$, получаем неравенство

$$\mathrm{Sp}\, X_n \leqslant \frac{1}{2\mu}\, \mathrm{Sp}\, K_n.$$

Так как $X \geqslant 0$, $X_n = P_nXP_n$, $K_n = P_nKP_n$ и K — ядерный оператор, то отсюда вытекает, что X — ядерный оператор.

Переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, находим, что

$$\mathrm{Sp}\, X \leqslant \frac{1}{2\mu}\, \mathrm{Sp}\, K. \tag{8.37}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $K \leqslant 0$. В этом случае из (8.34) следует, что $X \leqslant 0$. Пусть $K_1 = -K$, $X_1 = -X$, $C_1 = \sqrt{C^2 - K_1}$. В новых обозначениях (8.34) может быть переписано в виде

$$X_1 = \sqrt{C_1^2 + K_1} - C_1.$$

Применяя предыдущий результат, находим, что X_1 — ядерный оператор, причем

$$\mathrm{Sp}\, X_1 \leqslant \frac{1}{2\mu_1}\, \mathrm{Sp}\, K_1. \tag{8.37'}$$

Пусть теперь K — произвольный ядерный оператор. Представим его в виде $K = K_1 - K_2$, $K_1 \geqslant 0$, $K_2 \geqslant 0$. Исходя из (8.34), получаем для X выражение

$$X = \sqrt{(\sqrt{C^2 + K_1})^2 - K_2} - C = \sqrt{C^2 + K_1} - C - X_2 = X_1 - X_2,$$

где X_1 и X_2 — ядерные операторы, причем из (8.37) и (8.37′) следует, что

$$\mathrm{Sp}\, X_2 \leqslant \frac{1}{2\mu_1}\, \mathrm{Sp}\, K_2, \quad \mathrm{Sp}\, X_1 \leqslant \frac{1}{2\mu}\, \mathrm{Sp}\, K_1.$$

Пусть A — произвольный самосопряженный ядерный оператор, $\mathrm{Sp}\, |A| = \sum |\lambda_k|$, где λ_k — собственные числа оператора A. Очевидно, что если $A = A_1 - A_2$, $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$, то $\mathrm{Sp}\, |A| \leqslant \mathrm{Sp}\, A_1 + \mathrm{Sp}\, A_2$, причем A_1 и A_2 можно выбрать так, чтобы это неравенство обратилось в равенство. Пусть K_1, K_2 подобраны в соответствии с условием $\mathrm{Sp}\, |K| = \mathrm{Sp}\, K_1 + \mathrm{Sp}\, K_2$. Тогда для $\mathrm{Sp}\, |X|$ получаем оценку

$$\mathrm{Sp}\, |X| \leqslant \frac{1}{\min(\mu, \mu_1)}\, \mathrm{Sp}\, |K|. \tag{8.38}$$

Освободимся теперь от условия, что C имеет чисто точечный спектр. Рассмотрим с этой целью последовательность операторов C_n с чисто точечным спектром такую, что

1) Область определения D_n оператора C_n включает в себя область определения D оператора C.

2) Последовательность C_n сильно сходится к C на элементах D.

3) $C_n > \mu(n)E$, $C_n^2 + K > \mu_1^2(n)\, E$, $\mu(n) \longrightarrow \mu$, $\mu_1(n) \longrightarrow \mu_1$ при $n \longrightarrow \infty$ [1])

---

[1]) Такую последовательность можно построить следующим образом: пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ ($\xi_n \in D$) — ортонормированный базис в пространстве, P_n — оператор проектирования на подпространство, натянутое на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. В качестве C_n можно рассмотреть оператор $C_n = P_nCP_n + \mu(E - P_n)$ (при достаточно большом n).

Очевидно, что последовательность операторов $X_n = \sqrt{C_n^2 + K} - C_n$ на элементах D сильно сходится к $X = \sqrt{C^2 + K} - C$, причем X — ядерный оператор и для $\operatorname{Sp} |X|$ выполняется неравенство (8.38).

Перейдем к утверждению 2). Пусть K — оператор Гильберта — Шмидта, $\| K \|_2 = \sqrt{\operatorname{Sp} KK^*}$. Рассмотрим в начале случай, когда $\| K \|_2 < \mu - \delta/2$, $\delta > 0$, μ — константа, ограничивающая оператор C. Очевидно, что без ограничения общности можно считать, что $\mu = 1 + \delta/2$.

Обозначим оператор $X \longrightarrow CX + XC$ в пространстве операторов Гильберта — Шмидта через Γ. Очевидно, что $\Gamma > (2 + \delta) E$. Из уравнения (8.35) имеем $X = \Gamma^{-1} (K - X^2)$. Покажем, что стоящий в правой части равенства оператор удовлетворяет условию принципа сжатых отображений внутри шара $\| X \|_2 < 1$. Заметим прежде всего, что $\| A^2 - B^2 \|_2 \leqslant \| A - B \|_2 (\| A \|_2 + \| B \|_2)$. В самом деле, очевидно, что $A^2 - B^2 = (A - B) A + B (A - B)$. Переходя к нормам, получаем отсюда нужное неравенство. Пусть теперь $X_1 = \Gamma^{-1} (K - Y_1^2)$, $X_2 = \Gamma^{-1} (K - Y_2^2)$, $\| Y_1 \|_2 < 1$, $\| Y_2 \|_2 < 1$. Пользуясь полученным только что неравенством, находим

$$\| X_1 - X_2 \|_2 \leqslant \| \Gamma^{-1} \| \| Y_2 - Y_1 \|_2 (\| Y_2 \|_2 + \| Y_1 \|_2) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \| \Gamma^{-1} \| \| Y_2 - Y_1 \|_2 = \varepsilon \| Y_2 - Y_1 \|_2, \quad \varepsilon < 1$$

$\| \Gamma^{-1} \|$ означает норму оператора Γ^{-1} в гильбертовом пространстве операторов Гильберта — Шмидта ($\varepsilon < 1$), потому что $\Gamma > (2 + \delta) E$, и, следовательно, $\| \Gamma^{-1} \| < 1/2$.

Положим теперь $X_n = \Gamma^{-1} (K - X_{n-1}^2)$, $X_1 = \Gamma^{-1} K$. Очевидно, что $\| X_n \|_2 < 1$. Поэтому последовательность X_n сходится по норме $\| \; \|_2$ к оператору Гильберта — Шмидта X, который является решением уравнения (8.35).

Перейдем к общему случаю. Пусть k_i — собственные числа оператора K, упорядоченные так, что $| k_i | \geqslant | k_{i+1} |$. Обозначим через P_n оператор проектирования на подпространство H_n, натянутое на собственные векторы K с собственными значениями $k_1, \ldots, k_n$. Представим оператор K в виде $K = K'_n + K''_n$, где $K'_n = P_n K P_n$, $K''_n = Q_n K Q_n$, $P_n + Q_n = E$. Очевидно, что $\| K''_n \|_2 \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, а оператор K'_n при всех n является конечномерным и, следовательно, ядерным.

Выберем n настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $C^2 + K'_n > (\mu_1^2 - \delta/2) E > 0$, $\| K''_n \|_2 < \mu - \delta/2$. При этих условиях

$$\sqrt{C^2 + K} = \sqrt{\left(\sqrt{C^2 + K''_n}\right)^2 + K'_n} = \sqrt{C^2 + K''_n} + X_1 = C + X_2 + X_1,$$

оператор X_1 является ядерным и, следовательно, оператором Гильберта — Шмидта в силу первого утверждения леммы. Оператор X_2 есть оператор Гильберта — Шмидта, поскольку $\| K''_n \|_2 < \mu - \delta/2$. Таким образом, $\sqrt{C^2 + K} - C$ — оператор Гильберта — Шмидта. Лемма доказана.

Добавление 1

ТЕОРЕМА ВИКА[1])

Операторы энергии физических систем обычно имеют вид $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}$, где $\hat{H}_0$ — простейший квадратичный оператор, описывающий свободную систему, и $\hat{V}$ — оператор взаимодействия, который обычно является полиномиальным оператором третьей или четвертой степени по совокупности $\hat{a}$ и a^*.

В ряде задач возникает необходимость вычислять оператор $e^{it\hat{H}}$. Для вычисления этого оператора применяется так называемая теорема Вика, которая приводит или к сравнительно удобному ряду теории возмущений, или к интегральному представлению (в виде континуального интеграла) для оператора $e^{it\hat{H}}$. В этом Добавлении излагается метод построения оператора $e^{it\hat{H}}$, основанный на теореме Вика. Изложение ведется формально-алгебраически. Аналитическое обоснование опущено.

В дальнейшем предполагается, что

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \int \omega(k)\hat{a}^*(k)\hat{a}(k)\,dk, \\ \hat{V} &= \sum \int V(p_1, \ldots, p_r \mid q_1, \ldots, q_s)\times \\ &\qquad \times \hat{a}^*(p_1)\ldots\hat{a}^*(p_r)\hat{a}(q_1)\ldots\hat{a}(q_s)\,d^rp\,d^sq. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Особо отметим простейший случай, когда $k=(k_1, k_2, k_3)$ — вектор трехмерного пространства,

$$\left.\begin{aligned} \omega(k) &= k^2 = k_1^2+k_2^2+k_3^2, \\ \hat{V} &= \int v(p_1-q_1)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\hat{a}^*(p_1)\hat{a}^*(p_2)\hat{a}(q_1)\hat{a}(q_2)\,d^2p\,d^2q. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) По характеру изложения это Добавление ближе всего примыкает к статье Берестецкого и Галанина [1]. Существенное отличие состоит в последовательном применении функционалов и применении фермиевского континуального интеграла, благодаря чему достигается полное единообразие в бозевском и фермиевском случаях.

В этом случае оператор $\hat{H}$ после пресбразования Фурье приобретает вид

$$\hat{H} = -\int \hat{\varphi}^*(x)\, \Delta\hat{\varphi}(x)\, dx + \\ + \int u(x_1 - x_2)\, \hat{\varphi}^*(x_1)\, \hat{\varphi}^*(x_2)\, \hat{\varphi}(x_2)\, \hat{\varphi}(x_1)\, dx_1\, dx_2, \tag{3}$$

где

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \hat{a}(p)\, dp, \quad \hat{\varphi}^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \hat{a}^*(p)\, dp,$$

$$u(x) = \int e^{-ipx} v(p)\, dp,$$

Δ — оператор Лапласа. Оператор $\hat{H}$ оставляет очевидно инвариантными подпространства с фиксированным числом частиц. Его значение в n-частичном пространстве обозначим $\hat{H}_n$. Оператор $\hat{H}_n$ задается формулой

$$\hat{H}_n K = \left[-\Delta_{x_1} - \ldots - \Delta_{x_n} + 2\sum u(x_i - x_j)\right] K, \tag{4}$$

т. е. является оператором энергии системы n частиц с попарным взаимодействием.

Функция $K = K(x_1, \ldots, x_n)$ является симметрической или кососимметрической в зависимости от того, бозевский или фермиевский случай рассматривается [1]).

1. *T*-произведение. Пусть оператор $\hat{H}$ имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Представим $e^{it\hat{H}}$ в виде $e^{it\hat{H}} = e^{it\hat{H}_0}\hat{U}(t)$, где $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}_0}e^{it\hat{H}}$. Наряду с оператором $\hat{U}(t)$ рассмотрим более общий оператор [2])

$$\hat{U}(t, \tau) = e^{-it\hat{H}_0} e^{i(t-\tau)\hat{H}} e^{i\tau\hat{H}_0} = \hat{U}(t)\ \hat{U}^*(\tau).$$

Дифференцируя по t, находим для $\hat{U}(t, \tau)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{i}\frac{d\hat{U}(t, \tau)}{dt} = \hat{V}(t)\hat{U}(t, \tau), \text{ где } \hat{V}(t) = e^{-it\hat{H}_0}\hat{V}e^{it\hat{H}_0}. \tag{5}$$

Используя это уравнение и начальное условие $\hat{U}(\tau, \tau) = 1$, получаем для $\hat{U}(t, \tau)$ интегральное уравнение

$$\hat{U}(t, \tau) = 1 + i\int_{\tau}^{t} \hat{V}(t_1)\, \hat{U}(t_1, \tau)\, dt_1. \tag{6}$$

---

[1]) Формула (4) получается, если применить оператор (3) к вектору вида

$$\hat{\Phi} = \int K(x_1, \ldots, x_n)\, \hat{\varphi}^*(x_1) \ldots \hat{\varphi}^*(x_n)\, d^n x \hat{\Phi}_0.$$

[2]) Оператор $\hat{U}(t, \tau)$ тесно связан с оператором рассеяния: предел в сильном смысле (если он существует) $\hat{S} = \lim\limits_{\substack{t \to +\infty \\ \tau \to -\infty}} \hat{U}(t, \tau)$ есть упругая часть оператора рассеяния.

Исходя из (6), получаем для $\hat{U}(t, \tau)$ разложение в ряд:

$$\hat{U}(t, \tau)=\sum \hat{U}_n(t, \tau), \text{ где } \hat{U}_0(t, \tau)=1, \text{ и при } n>1$$

$$\hat{U}_n(t, \tau)=i^n \int_{t>t_1>\ldots>t_n>\tau} \ldots \int \hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)\,dt_1\ldots dt_n. \qquad (7)$$

Рассмотрим оператор над операторами T, который определим пока только для операторов вида $\hat{V}(t_1), \hat{V}(t_2), \ldots, \hat{V}(t_n)$:

$$T[\hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)]=\sum \theta(t_{i_1}>t_{i_2}>\ldots>t_{i_n})\hat{V}(t_{i_1})\ldots\hat{V}(t_{i_n}), \qquad (8)$$

где

$$\theta(t_1>\ldots>t_n)=\begin{cases}1 \text{ при } t_1\geqslant t_2\geqslant\ldots\geqslant t_n,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Сумма распространена на все перестановки $i_1\ldots i_n$ индексов $1, \ldots, n$. Выпишем для наглядности $T[\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)]$:

$$T[\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)]=\theta(t_1>t_2)\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)+\theta(t_2>t_1)\hat{V}(t_2)\hat{V}(t_1).$$

Заметим, что под знаком T операторы можно переставлять:

$$T[\hat{V}(t_{i_1})\ldots\hat{V}(t_{i_n})]=T[\hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)].$$

Используя оператор T, формулу (7) можно записать в виде

$$\hat{U}_n(t, \tau)=\frac{i^n}{n!}\int_\tau^t\ldots\int_\tau^t T[\hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)]\,dt_1\ldots dt_n. \qquad (9)$$

В самом деле, подставляя в (9) значение $T[\hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)]$, мы получим в правой части (9) $n!$ слагаемых, каждое из которых отличается от правой части (7) лишь обозначением переменных интегрирования. Выражение (8), стоящее под знаком интеграла в (9), называется T-произведением операторов $\hat{V}(t_1), \ldots, \hat{V}(t_n)$.

Дальнейшая задача состоит в преобразовании T-произведения к нормальной форме. Оператор $\hat{V}(t)$ имеет вид (см. (1))

$$\hat{V}(t)=e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{V}e^{i\hat{H}_0 t}=e^{-i\hat{H}_0 t}\sum\int V(p_1, \ldots, p_r|q_1, \ldots, q_s)\times$$
$$\times\hat{a}^*(p_1)\ldots\hat{a}^*(p_r)\hat{a}(q_1)\ldots\hat{a}(q_s)\,d^r p\,d^s q e^{i\hat{H}_0 t}=$$
$$=\sum\int V(p_1, \ldots, p_r|q_1, \ldots, q_s)\times$$
$$\times\hat{a}^*(p_1, t)\ldots\hat{a}^*(p_r, t)\hat{a}(q_1, t)\ldots\hat{a}(q_s, t)\,d^r p\,d^s q, \qquad (10)$$

где

$$\hat{a}^*(p, t)=e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{a}^*(p)e^{i\hat{H}_0 t}, \quad \hat{a}(p, t)=e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{a}(p)e^{i\hat{H}_0 t}.$$

Используя явный вид оператора $\hat{H}_0$ (см. (1)), находим $\hat{a}(p, t)$ и $\hat{a}^*(p, t)$:

$$\hat{a}(p, t)=e^{it\omega(p)}\hat{a}(p), \quad \hat{a}^*(p,t)=e^{-it\omega(p)}\hat{a}^*(p). \qquad (11)$$

В дальнейшем нам придется рассматривать выражения вида

$$\int c(p_1, t_1, \ldots, p_r, t_r \mid q_1, \tau_1, \ldots, q_s, \tau_s) \times \\ \times \hat{a}^*(p_1, t_1) \ldots \hat{a}(q_s, \tau_s)\, d^r p\, d^s q\, d^r t\, d^s \tau. \quad (12)$$

Благодаря специфической зависимости операторов $\hat{a}(p, t)$ и $\hat{a}^*(p, t)$ от t функция c определяется выражением (12) не однозначно, даже если она удовлетворяет необходимым условиям симметрии. Это создает неудобство, которое мы обойдем, введя вместо операторов $\hat{a}(p, t)$, $\hat{a}^*(p, t)$ символы $\tilde{a}(p, t)$, $\tilde{a}^*(p, t)$, от которых потребуем лишь выполнения определенных соотношений коммутации. Равенство

$$\int c(p_1, t_1, \ldots, p_r, t_r \mid q_1, \tau_1, \ldots, q_s, \tau_s) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}(q_s, \tau_s)\, d^r p\, d^s q\, d^r t\, d^s \tau = 0$$

при условии, что c удовлетворяет обычным условиям симметрии, возможно только если $c \equiv 0$, поэтому выражение вида (12), в котором операторы заменены символами, определяет функцию c однозначно. Все промежуточные вычисления будут проведены с помощью символов $\tilde{a}^*$, $\tilde{a}$. Для получения окончательного ответа надо будет после проведения всех вычислений заменить символы $\tilde{a}^*(p, t)$, $\tilde{a}(p, t)$ операторами $\hat{a}^*(p, t)$, $\hat{a}(p, t)$ соответственно.

2. T-произведение символов. Пусть $\tilde{a}(p, t)$, $\tilde{a}^*(p, t)$ — символы, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} [\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)] &\equiv [\hat{a}(p_1, t_1), \hat{a}^*(p_2, t_2)] = \\ &= D(p_1, t_1 | p_2, t_2), \\ [\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] &\equiv [\hat{a}(p_1, t_1), \hat{a}(p_2, t_2)] = 0, \\ [\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)] &\equiv [\hat{a}^*(p_1, t_1), \hat{a}^*(p_2, t_2)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13_B)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \{\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)\} &\equiv \{\hat{a}(p_1, t_1), \hat{a}^*(p_2, t_2)\} = \\ &= D(p_1, t_1 \mid p_2, t_2), \\ \{\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)\} &\equiv \{\hat{a}(p_1, t_1), \hat{a}(p_2, t_2)\} = 0, \\ \{\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)\} &\equiv \{\hat{a}^*(p_1, t_1), \hat{a}^*(p_2, t_2)\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13_F)$$

Исходя из формул (11), для функции D в бозевском и фермиевском случаях получаем выражение

$$D(p_1, t_1 \mid p_2, t_2) = \delta(p_1 - p_2)\, e^{i(t_1 - t_2)\,\omega(p_1)}. \quad (14)$$

В этом и следующем пунктах мы определяем T-произведение символов и приводим его к нормальной форме. В п. 4 полученные результаты применяются к преобразованию T-произведения операторов. Символы, удовлетворяющие соотношениям (13_B), будем называть бозевскими, (13_F) — фермиевскими.

Пусть для определенности символы $\tilde{a}$, $\tilde{a}^*$ удовлетворяют соотношениям (13_B). Рассмотрим линейную комбинацию произведений $\tilde{a}(p, t)$, $\tilde{a}^*(p, t)$ с различными p и t. Используя соотношения (13_B), можно добиться того, чтобы в каждом слагаемом сомножители, содержащие $*$, стояли слева от сомножителей, не имеющих звездочки:

$$\tilde{A} = \sum c(p_1, t_1, \ldots, p_r, t_r \mid q_1, \tau_1, \ldots, q_s, \tau_s) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r)\, a(q_1, \tau_1) \ldots a(q_s, \tau_s). \quad (15)$$

Запись линейной комбинации произведений в таком виде будем называть нормальной формой. Определение нормальной формы без изменений переносится на фермиевский случай.

Запись $\tilde{A}$ в виде (15) однозначна, если коэффициенты $c(p_1, t_1, \ldots, p_r, t_r \mid q_1, \tau_1, \ldots, q_s, \tau_s)$ в бозевском случае симметричны отдельно по первой группе переменных p_i, t_i и отдельно по второй группе и в фермиевском случае антисимметричны по этим переменным.

Определим T-произведение символов $\tilde{a}(p, t)$, $\tilde{a}^*(p, t)$. В бозевском случае при $t_i \neq t_j$

$$T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \ldots, \tilde{a}^*(p_r, t_r), \tilde{a}(p_{r+1}, t_{r+1}), \ldots, \tilde{a}(p_n, t_n)] = \\ = \sum \theta(t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n})\, \alpha(p_{i_1}, t_{i_1}) \ldots \alpha(p_{i_n}, t_{i_n}), \quad (16_B)$$

где

$$\alpha(p_k, t_k) = \begin{cases} \tilde{a}^*(p_k, t_k) & \text{при } k \leqslant r, \\ \tilde{a}(p_k, t_k) & \text{при } k > r \end{cases}$$

и

$$\theta(t_1 > t_2 > \ldots > t_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В фермиевском случае при $t_i \neq t_j$

$$T\{\tilde{a}^*(p_1, t_1), \ldots, \tilde{a}^*(p_r, t_r), \tilde{a}(p_{r+1}, t_{r+1}), \ldots, \tilde{a}(p_n, t_n)\} = \\ = \sum \pm \theta(t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n})\, \alpha(p_{i_1}, t_{i_1}) \ldots \alpha(p_{i_n}, t_{i_n}), \quad (16_F)$$

где $\alpha(p, t)$ и $\theta(t_1 > \ldots > t_n)$ имеют тот же смысл, что в бозевском случае. Суммы в обоих случаях распространены на все перестановки $i_1, \ldots, i_n$ индексов $1, \ldots, n$, знак «$+$» или «$-$» в фермиевском случае ставится в зависимости от четности перестановки.

В случае, если некоторые моменты времени $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ совпадают, то как в бозевском, так и в фермиевском случаях положим, что соответствующие им символы $\tilde{a}^*$, $\tilde{a}$ стоят в нормальном порядке.

Отметим, что символы $\tilde{a}$, $\tilde{a}^*$ под знаком T-произведения в бозевском случае коммутируют, в фермиевском — антикоммутируют;

например,

$$T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] = T[\tilde{a}(p_2, t_2), \tilde{a}^*(p_1, t_1)] \text{ в бозевском случае,}$$

$$T\{\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)\} = \\ = -T\{\tilde{a}(p_2, t_2), \tilde{a}^*(p_1, t_1)\} \text{ в фермиевском случае.}$$

3. Приведение T-произведения символов к нормальной форме. (Теорема Вика.) А. Бозевский случай. Рассмотрим вначале простейшие выражения. При $t_1 \neq t_2$

$$\begin{aligned} T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] &= \\ = \theta(t_1 > t_2)\tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2) &+ \theta(t_2 > t_1)\tilde{a}(p_2, t_2)\tilde{a}^*(p_1, t_1) = \\ &= \theta(t_1 > t_2)\tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2) + \\ &+ \theta(t_2 > t_1)[D(p_2, t_2 \mid p_1, t_1) + \tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2)] = \\ &= \tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2) + \theta(t_2 > t_1) D(p_2, t_2 \mid p_1, t_1). \end{aligned}$$

При $t_1 = t_2$ в силу определения

$$T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_1)] = \tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_1).$$

Введем для краткости новую функцию:

$$\Delta(p_1, t_1 \mid p_2, t_2) = \begin{cases} D(p_1, t_1 \mid p_2, t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ 0 \quad \text{при} & t_1 \leqslant t_2. \end{cases} \tag{17}$$

Используя эту функцию, получаем при всех t_1, t_2:

$$T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] = \tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2) + \Delta(p_2, t_2 \mid p_1, t_1). \tag{18}$$

Используя то обстоятельство, что $[\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] = 0$, $[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)] = 0$, находим

$$\left.\begin{aligned} T[\tilde{a}^*(p_1, t_1), \tilde{a}^*(p_2, t_2)] &= \tilde{a}^*(p_1, t_1)\tilde{a}^*(p_2, t_2), \\ T[\tilde{a}(p_1, t_1), \tilde{a}(p_2, t_2)] &= \tilde{a}(p_1, t_1)\tilde{a}(p_2, t_2). \end{aligned}\right\} \tag{18$_1$}$$

Пусть теперь под знаком T-произведения стоит n символов и $t_i \neq t_j$ (см. (16_B)). Разобьем n-мерное пространство переменных $t_1, \ldots, t_n$ плоскостями $t_i = t_j$ на $n!$ многогранных углов $t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n}$. Каждому углу сопоставим слагаемое из правой части (16_B): если угол определяется неравенством $t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n}$, то ему соответствует слагаемое $\theta(t_{i_1} > \ldots > t_{i_n}) \times \alpha(p_{i_1}, t_{i_1}) \ldots \alpha(p_{i_n}, t_{i_n})$. Переставим в нормальный порядок слагаемое, отвечающее углу $t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n}$. Среди слагаемых, возникающих в результате перестановки, будет, во-первых,

$$\theta(t_{i_1} > \ldots > t_{i_n})\tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r)\tilde{a}(p_{r+1}, t_{r+1}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n).$$

Сумма всех слагаемых такого вида по всем углам дает, очевидно,

$$\tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r)\tilde{a}(p_{r+1}, t_{r+1}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n).$$

Допустим для определенности, что внутри выбранного угла $t_1 < t_{r+1}$. В таком случае, среди слагаемых, возникающих от приведения к нормальной форме, будет

$$\theta(t_{i_1} > \ldots > t_{i_n}) D(p_{r+1}, t_{r+1} \mid p_1, t_1) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_2, t_2) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(q_{r+2}, t_{r+2}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n).$$

Очевидно, что слагаемые такого же вида будут во всех углах, расположенных в полупространстве $t_1 < t_{r+1}$. Поэтому сумма их всех равна

$$\theta(t_{r+1} > t_1) D(p_{r+1}, t_{r+1} \mid p_1, t_1) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_2, t_2) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(p_{r+2}, t_{r+2}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n).$$

Пусть, далее, внутри угла выполнено также неравенство $t_2 < t_{r+2}$. Тогда среди слагаемых, возникающих от перестановки, будет

$$\theta(t_{i_1} > t_{i_2} > \ldots > t_{i_n}) D(p_{r+1}, t_{r+1} \mid p_1, t_1) D(p_{r+2}, t_{r+2} \mid p_2, t_2) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_3, t_3) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(p_{r+3}, t_{r+3}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n),$$

причем такие слагаемые будут во всех углах, расположенных в пересечении полупространств $t_1 < t_{r+1}$ и $t_2 < t_{r+2}$. Поэтому сумма всех этих слагаемых по всем углам дает

$$\theta(t_{r+1} > t_1) \theta(t_{r+2} > t_2) D(p_{r+1}, t_{r+1} \mid p_1, t_1) D(p_{r+2}, t_{r+2} \mid p_2, t_2) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_3, t_3) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(p_{r+3}, t_{r+3}) \ldots \tilde{a}(p_n, t_n). \quad (19)$$

Очевидно, что, продолжая этот процесс дальше, мы переберем все слагаемые, возникающие от приведения T-произведения к нормальной форме. Полученный результат может быть записан в виде формулы

$$T[\tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(q_1, \tau_1) \ldots \tilde{a}(q_s, \tau_s)] = \\ = \tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(q_1, \tau_1) \ldots \tilde{a}(q_s, \tau_s) + \\ + \sum \{\Delta(q_i, \tau_i \mid p_j, t_j) \tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_{j-1}, t_{j-1}) \tilde{a}^*(p_{j+1}, t_{j+1}) \ldots \\ \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \tilde{a}(q_1, \tau_1) \ldots \tilde{a}(q_{i-1}, \tau_{i-1}) \tilde{a}(q_{i+1}, \tau_{i+1}) \ldots \tilde{a}(q_s, \tau_s)\} + \\ + \frac{1}{2!} \sum \{\Delta(q_{i_1}, \tau_{i_1} \mid p_{j_1}, t_{j_1}) \Delta(q_{i_2}, \tau_{i_2} \mid p_{j_2}, \tau_{j_2}) \times \\ \times \tilde{a}^*(p_1, t_1) \ldots \tilde{a}^*(p_{j_1-1}, t_{j_1-1}) \tilde{a}^*(p_{j_1+1}, t_{j_1+1}) \ldots \\ \ldots \tilde{a}^*(p_{j_2-1}, t_{j_2-1}) \tilde{a}^*(p_{j_2+1}, t_{j_2+1}) \ldots \tilde{a}^*(p_r, t_r) \times \\ \times \tilde{a}(q_1, \tau_1) \ldots \tilde{a}(q_{i_1-1}, \tau_{i_1-1}) \tilde{a}(q_{i_1+1}, \tau_{i_1+1}) \ldots \\ \ldots \tilde{a}(q_{i_2-1}, \tau_{i_2-1}) \tilde{a}(q_{i_2+1}, \tau_{i_2+1}) \ldots \tilde{a}(q_s, \tau_s)\} + \ldots \quad (20)$$

Первая сумма распространена на всевозможные пары $(p_j, t_j \mid q_i, \tau_i)$, вторая сумма — на двойки таких пар, третья — на тройки и т. д. Первый и второй индексы, образующие пару, пробегают независимо каждый свое множество значений. Поэтому каждое слагаемое в сумме по k парам встречается $k!$ раз. В связи с этим перед суммой по k парам стоит множитель $\frac{1}{k!}$.

Формула (20) выведена при условии $t_i \neq t_j$, $\tau_i \neq \tau_j$, $t_i \neq \tau_j$, нетрудно проверить, однако, что она справедлива во всех случаях. Если некоторые из чисел t_i, τ_j равны, то, согласно определению T-произведения, соответствующие им символы стоят в нормальной форме, и надобность в их дальнейшей перестановке отсутствует. Это обстоятельство учитывается тем, что $\Delta(t_1, p_1 | t_2, p_2) = 0$ при $t_1 = t_2$. Формула (20) называется формулой Вика [1]).

Формуле (20) можно придать более компактный вид следующим образом. Рассмотрим комплекснозначные функции $a^*(p, t)$, $a(p, t)$ и поставим в соответствие каждому нормальному произведению символов соответствующее произведение функций:

$$\tilde{a}^*(p_1, t_1)\ldots\tilde{a}^*(p_r, t_r)\,\tilde{a}(q_1, \tau_1)\ldots\tilde{a}(q_s, \tau_s) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow a^*(p_1, t_1)\ldots a^*(p_r, t_r)\,a(q_1, \tau_1)\ldots a(q_s, \tau_s).$$

Используя это соответствие, формулу (20) можно переписать в виде

$$T\left[\tilde{a}^*(p_1, t_1)\ldots\tilde{a}^*(p_r, t_r)\,\tilde{a}(q_1, \tau_1)\ldots\tilde{a}(q_s, \tau_s)\right] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow e^{\int \frac{\delta}{\delta a(q, \tau)} \Delta(q, \tau | p, t) \frac{\delta}{\delta a^*(p, t)}\, dp\, dq\, dt\, d\tau} \times \\ \times a^*(p_1, t_1)\ldots a^*(p_r, t_r)\,a(q_1, \tau_1)\ldots a(q_s, \tau_s). \qquad (21_B)$$

Правая часть формулы (21_B) есть результат действия оператора $e^{\int \frac{\delta}{\delta a^*} \Delta \frac{\delta}{\delta a}\, dp\, dq\, dt\, d\tau}$ на произведение $a^*(p_1, t_1)\ldots a(q_s, \tau_s)$.

Проверка формулы (21_B) производится путем разложения экспоненты в ряд: возникающие при этом слагаемые находятся в очевидном соответствии со слагаемыми в правой части формулы (20).

В. Фермиевский случай. Все рассуждения, проведенные выше, дословно переносятся на фермиевский случай и приводят к формуле, почти совпадающей по написанию с (21_B):

$$T\left\{\tilde{a}^*(p_1, t_1)\ldots\tilde{a}^*(p_r, t_r)\,\tilde{a}(q_1, \tau_1)\ldots\tilde{a}(q_s, \tau_s)\right\} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow e^{\int \frac{\delta}{\delta_{\text{пр}} a(q, \tau)} \Delta(q, \tau | p, t) \frac{\delta}{\delta_{\text{л}} a^*(p, t)}\, dp\, dq\, dt\, d\tau} \times \\ \times a^*(p_1, t_1)\ldots a^*(p_r, t_r)\,a(q_1, \tau_1)\ldots a(q_s, \tau_s). \qquad (21_F)$$

Разница состоит в том, что $a^*(p, t)$, $a(p, t)$ являются в этом случае функциями с антикоммутирующими значениями (образующими грассмановой алгебры), $\frac{\delta}{\delta_{\text{пр}} a}$, $\frac{\delta}{\delta_{\text{л}} a^*}$ — операторы правого и левого дифференцирования. Функция Δ определяется так же, как в бозевском случае равенством (17).

4. Применение формулы Вика к вычислению оператора $\hat{U}(t, \tau)$. Рассмотрим сначала бозевский случай. Выше отмечалось, что

[1]) В таком виде формула Вика встречается в учебниках квантовой теории поля. См., например, книгу Ахиезера и Берестецкого [1] или книгу Боголюбова и Ширкова [1].

оператор $\hat{V}(t)$ равен

$$\hat{V}(t)=\sum\int V(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\times$$
$$\times\hat{a}^*(p_1, t)\ldots\hat{a}^*(p_r, t)\hat{a}(q_1, t)\ldots\hat{a}(q_s, t)\,d^rp\,d^sq,$$

где $\hat{a}^*(p, t)=e^{-it\omega(p)}\hat{a}^*(p)$, $\hat{a}(p, t)=e^{it\omega(p)}\hat{a}(p)$. Поставим в соответствие оператору $\hat{V}(t)$ символ

$$\tilde{V}(t)=\sum\int V(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\times$$
$$\times\tilde{a}^*(p_1, t)\ldots\tilde{a}^*(p_r, t)\tilde{a}(q_1, t)\ldots\tilde{a}(q_s, t)\,d^rp\,d^sq.$$

Нам следует найти нормальную форму оператора $T[\hat{V}(t_1), \ldots, \hat{V}(t_n)]$. Решим вспомогательную задачу: найдем нормальную форму символа $T[\tilde{V}(t_1), \ldots, \tilde{V}(t_n)]$. Легко видеть, что если мы приведем $T[\tilde{V}(t_1), \ldots, \tilde{V}(t_n)]$ к нормальной форме и в окончательном ответе заменим $\tilde{a}^*(p, t)$ на $\hat{a}^*(p, t)=e^{-it\omega(p)}\hat{a}(p)$, $\tilde{a}(p, t)$ на $\hat{a}(p, t)=e^{it\omega(p)}\hat{a}(p)$, то мы получим нормальную форму оператора $T(\hat{V}(t_1), \ldots, \hat{V}(t_n))$.

Поэтому мы можем воспользоваться результатом предыдущего пункта. Рассмотрим произвольные функции $a(p, t)$, $a^*(p, t)$ независимых переменных p, t. Поставим в соответствие оператору $\hat{V}(t)$ функционал от $a(p, t)$, $a^*(p, t)$:

$$V(t | a^*, a)=\sum\int\{V(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\times$$
$$\times\delta(t-t_1)\ldots\delta(t-t_r)\delta(t-\tau_1)\ldots\delta(t-\tau_s)\times$$
$$\times a^*(p_1, t_1)\ldots a^*(p_r, t_r)a(q_1, \tau_1)\ldots a(q_s, \tau_s)\}\,d^rp\,d^sq\,d^rt\,d^s\tau.$$

Применяя теорему Вика, находим

$$T[\hat{V}(t_1), \ldots, \hat{V}(t_n)]\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow e^{\int\frac{\delta}{\delta a(q, \tau)}\Delta(q, \tau | p, t)\frac{\delta}{\delta a^*(p, t)}dp\,dq\,dt\,d\tau}V(t_1)\ldots V(t_n). \quad (22)$$

Учитывая связь между нормальной формой оператора и функционалами, находим, что для того, чтобы получить функционал, отвечающий нормальной форме оператора $T[\hat{V}(t_1)\ldots\hat{V}(t_n)]$, следует в правой части (22) после произведения вычислений положить

$$a^*(p, t)=e^{-it\omega(p)}a^*(p), \quad a(p, t)=e^{it\omega(p)}a(p).$$

Интегрируя правую и левую части равенства (22) в пределах от τ до t, находим

$$\int_\tau^t\ldots\int_\tau^t T[\hat{V}(t_1), \ldots, \hat{V}(t_n)]\,dt_1\ldots dt_n\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow e^{\int\frac{\delta}{\delta a(p_1, t_1)}\Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2)\frac{\delta}{\delta a^*(p_2, t_2)}dp_1\,dp_2\,dt_1\,dt_2}\left(\int_\tau^t V(s | a^*, a)\,ds\right)^n. \quad (23)$$

Вспоминая формулу (9), находим окончательное выражение для функционала $U(t, \tau | a^*, a)$, отвечающего нормальной форме оператора $\hat{U}(t, \tau)$: $U(t, \tau | a^*, a)$ есть значение при $a(p, t) = e^{it\omega(p)}a(p)$, $a^*(p, t) = e^{-it\omega(p)}a^*(p)$ функционала $U_1(t, \tau | a^*, a)$ от произвольных функций $a(p, t)$, $a^*(p, t)$, где

$$U_1(t, \tau | a^*, a) =$$

$$= e^{\int \frac{\delta}{\delta a(p_1, t_1)} \Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta a^*(p_2, t_2)} dp_1\, dp_2\, dt_1\, dt_2} e^{i \int_{\tau}^{t} V(s | a^*, a)\, ds}. \tag{24_B}$$

В фермиевском случае справедлива аналогичная формула

$$U_1(t, \tau | a^*, a) =$$

$$= e^{\int \frac{\delta}{\delta_{\text{пр}} a(q, \tau)} \Delta(q, \tau | p, t) \frac{\delta}{\delta_{\text{л}} a^*(p, t)} dp\, dq\, dt\, d\tau} e^{i \int_{\tau}^{t} V(s | a^*, a)\, ds}. \tag{24_F}$$

Формулы (24_B), (24_F) используются для разложения $\hat{U}(t, \tau)$ в ряд теории возмущений и для получения интегрального представления $\hat{U}(t, \tau)$. При $t = \infty$, $\tau = -\infty$ формулы (24_B) и (24_F) дают выражение для упругой части оператора рассеяния.

5. Интегральное представление для операторов $\hat{U}(t, \tau)$ и $e^{it\hat{H}}$. Мы ограничимся в этом пункте случаем, когда оператор $\hat{H}$ имеет простейший вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где

$$\hat{H}_0 = \int \omega(k)\, \hat{a}^*(k)\, \hat{a}(k)\, dk,$$

$$\hat{V} = \int V(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, \hat{a}^*(p_1)\, \hat{a}^*(p_2)\, \hat{a}(q_1)\, \hat{a}(q_2)\, dp_1 \ldots dq_2.$$

Начиная с этого места, мы будем применять сокращенную запись для интегралов, например:

$$a^* f = \int a^*(p, t)\, f(p, t)\, dp\, dt,$$

$$\frac{\delta}{\delta a} \Delta \frac{\delta}{\delta a^*} = \int \frac{\delta}{\delta a(p_1, t_1)} \Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta a^*(p_2, t_2)} dp_1\, dp_2\, dt_1\, dt_2 \quad \text{и т. п.}$$

Вычисления в фермиевском и бозевском случаях совершенно одинаковы, поэтому мы рассмотрим подробно лишь фермиевский случай, а для бозевского случая ограничимся лишь тем, что приведем окончательный ответ.

Для вычисления оператора $\hat{U}(t, \tau)$ следует воспользоваться формулой (24_F). Прежде чем ее применять, решим некоторые вспомогательные задачи.

Прежде всего вычислим функционал

$$T_1(a^*, a) = e^{\frac{\delta}{\delta_{\text{пр}} a} \Delta \frac{\delta}{\delta_{\text{л}} a^*}} e^{f^* a + a^* f}, \tag{25}$$

где f^*, f антикоммутируют с a, a^* и между собой. Заметим, что функционал $e^{f^* a + a^* f}$ является собственным для оператора

$\frac{\delta}{\delta_{пр}a}\Delta\frac{\delta}{\delta_{л}a^*}$ с собственным значением $f^*\Delta f$. Используя это, находим функционал T_1:

$$T_1(a^*,\ a)=e^{f^*\Delta f+a^*f+f^*a}. \tag{26}$$

Найдем теперь функционал T_2:

$$T_2(a^*,\ a)=e^{\frac{\delta}{\delta_{пр}a}\Delta\frac{\delta}{\delta_{л}a^*}}e^{-a^*Ka}.$$

С этой целью воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$e^{-a^*Ka}=(\det K_1)^{-1}\int e^{f^*K_1f+a^*f+f^*a}\Pi\, df^*\, df,$$

где $K_1=K_1(p_1,\ t_1\,|\,p_2,\ t_2)$ — оператор, обратный к оператору, K, $\det K_1$ есть детерминант Фредгольма оператора K_1. Используя формулу (26), находим

$$e^{\frac{\delta}{\delta_{пр}a}\Delta\frac{\delta}{\delta_{л}a^*}}e^{-a^*Ka}=(\det K_1)^{-1}\int e^{f^*K_1f}e^{\frac{\delta}{\delta_{пр}a}\Delta\frac{\delta}{\delta_{л}a^*}}e^{a^*f+f^*a}\Pi\, df^*\, df=$$
$$=(\det K_1)^{-1}\int e^{f^*K_1f+f^*\Delta f+a^*f+f^*a}\Pi\, df^*\, df=$$
$$=(\det K_1)^{-1}\det(K_1+\Delta)\, e^{-a^*(K_1+\Delta)^{-1}a}.$$

Вспоминая, что $K_1=K^{-1}$, получаем окончательное выражение для T_2:

$$T_2(a^*,\ a)=\det(1+K\Delta)\, e^{-a^*(K^{-1}+\Delta)^{-1}a}. \tag{27}$$

Теперь мы в состоянии вычислить наш функционал. Для этого выразим его через функционалы типа T_2, подобно тому как эти функционалы мы выражали через более простые функционалы типа T_1:

$$e^{i\int V(p_1,\ p_2\,|\,q_1,\ q_2)\, a^*(p_1,\ t)\, a^*(p_2,\ t)\, a(q_1,\ t)\, a(q_2,\ t)\, d^2p\, d^2q\, dt}=$$
$$=\int e^{-\int a^*[V_1(s)\, z(s,t)+V_2(s)\, z^*(s,\ t)]\, a ds\, dt-\int z^*z\, ds\, dt}\Pi\, dz^*\, dz,$$

где $z=z(s,\ t)$, $z^*=z^*(s,\ t)$ — комплекснозначные функции, s — некоторый параметр, $V_1(s)=V_1(p,\ q\,|\,s)$, $V_2(s)=V_2(s\,|\,p,\ q)$ — произвольные функции, удовлетворяющие соотношению [1])

$$\int V_1(p_1\ q_1\,|\,s)\, V_2(s\,|\,p_2,\ q_2)\, ds=iV(p_1,\ p_2\,|\,q_1,\ q_2).$$

Применяя полученный ранее результат, находим

$$e^{\frac{\delta}{\delta_{пр}a}\Delta\frac{\delta}{\delta_{л}a^*}}e^{i\int V(p_1,\ p_2\,|\,q_1,\ q_2)\, a^*(p_1,\ t)\, a^*(p_2,\ t)\, a(q_1,\ t)\, a(q_2,\ t)\, d^2p\, d^2q\, dt}=$$
$$=\int\det(1+R\Delta)\, e^{-a^*(R^{-1}+\Delta)^{-1}a-zz^*}\Pi\, dz^*\, dz,$$

[1]) Такое разложение всегда возможно: например, если $s=(p,\ q)$, то можно выбрать $V_1(p_1,\ q_1\,|\,s)=iV(p_1,\ p\,|\,q_1,\ q)$, $V_2(s\,|\,p_2,\ q_2)=\delta(p_2-p)\,\delta(q_2-q)$.

где R — оператор с ядром

$$R(p_1,\ t_1 | p_2,\ t_2) = \\ = \int [V_1(p_1,\ p_2 | s)\, z(s,\ t_1) + V_2(s | p_1,\ p_2)\, z^*(s,\ t_2)]\, ds\, \delta(t_1 - t_2) = \\ = R_1(p_1,\ p_2,\ t_1)\, \delta(t_1 - t_2). \quad (28)$$

Полученная формула дает решение задачи. Прежде чем записать ее в окончательном виде, заметим, что стоящий под знаком интеграла детерминант равен единице. В самом деле,

$$\mathrm{Sp}\, R\Delta = \int R_1(p_1,\ p_2,\ t)\, \Delta(p_1,\ t | p_2,\ t)\, dp_1\, dp_2\, dt = 0,$$

так как $\Delta(p_1,\ t | p_2,\ t) = 0$. Далее

$$\mathrm{Sp}\,(R\Delta)^2 = \\ = \int R_1(p_1, p_2, t_1)\, \Delta(p_2, t_1 | p_3, t_2)\, R_1(p_3, p_4, t_2)\, \Delta(p_4, t_2 | p_1, t_1)\, d^4p\, d^2t.$$

Вспоминая определение функции Δ, находим, что подынтегральное выражение содержит тождественно равный нулю множитель: $\theta(t_1 > t_2)\,\theta(t_2 > t_1)$. Аналогичным образом убеждаемся, что $\mathrm{Sp}\,(R\Delta)^n = 0$. Поэтому $\mathrm{Sp}\ln(1 + R\Delta) = 0$ и, следовательно, $\det(1 + R\Delta) = \exp[\mathrm{Sp}\ln(1 + R\Delta)] = 1$.

Таким образом, мы получаем окончательное выражение для функционала $U_1(t,\ \tau | a^*,\ a)$ в виде континуального интеграла:

$$U_1(t,\ \tau | a^*,\ a) = \int e^{-a^*(R^{-1} + \Delta)^{-1} a - zz^*} \prod dz^* dz,$$

где R — оператор, ядро которого задается формулой (28). Для того чтобы получить функционал $U(t,\ \tau | a^*,\ a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{U}(t,\ \tau)$, следует подставить в эту формулу

$$a(p,\ t) = e^{it\omega(p)} a(p), \quad a^*(p,\ t) = e^{-it\omega(p)} a^*(p).$$

В результате получаем

$$U(t,\ \tau | a^*,\ a) = \int e^{-a^* T(z^*,\ z)\, a - z^* z} \prod dz^* dz, \quad (29)$$

где

$$T(z^*,\ z) = T(z^*,\ z | t,\ \tau | p_1,\ p_2) = \\ = \int_\tau^t \int_\tau^t e^{i(t_2\omega(p_2) - t_1\omega(p_1))} S(p_1,\ t_1;\ p_2,\ t_2 | z^*,\ z)\, dt_1 dt_2, \quad (29_1)$$

$S(p_1,\ t_1;\ p_2,\ t_2 | z,\ z^*)$ — ядро оператора $S = (R^{-1} + \Delta)^{-1} = R(1 + \Delta R)^{-1}$, R определяется формулой (28).

Формула (29) справедлива как в фермиевском, так и в бозевском случаях.

В заключение отметим случай, когда

$$V(p_1,\ p_2 | q_1,\ q_2) = V(p_1 - q_1)\, \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2). \quad (30)$$

Как отмечалось выше, функция (30) порождает оператор взаимодействия в многочастичной задаче. В этом случае функции V_1 и V_2, определяющие оператор R, можно выбрать в виде

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_1(p_1-q_1)\,\delta(p_1-q_1-s), \\ V_2 &= V_2(q_2-p_2)\,\delta(p_2-q_2+s), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где $V_1(p)$, $V_2(p)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию

$$V_1(p)\,V_2(p) = iV(p).$$

Оператор R, соответствующий функциям (31), задается ядром $R(p_1,\ t_1 \mid p_2,\ t_2) = R_1(p_1,\ p_2,\ t_1)\,\delta(t_1-t_2)$, где

$$R_1(p_1,\ p_2,\ t) = \\ = V_1(p_1-p_2)\,z(p_1-p_2,\ t) + V_2(p_2-p_1)\,z^*(p_2-p_1,\ t). \tag{32}$$

6. Оператор $e^{it\hat{H}}$. Оператор $\hat{H}_0$ имеет вид

$$\hat{H}_0 = \int \omega(k)\,\hat{a}^*(k)\,\hat{a}(k)\,dk.$$

Поэтому, согласно формулам (6.22), (6.38), оператор $e^{it\hat{H}_0}$ задается функционалом, отвечающим нормальной форме:

$$e^{it\hat{H}_0} \leftrightarrow e^{\int \left(e^{it\omega(k)}-1\right) a^*(k)\,a(k)\,dk}. \tag{33}$$

Используя это выражение, формулу (29) при $\tau = 0$ и формулу умножения операторов после несложных преобразований, сводящихся к выделению полного квадрата и вычисления гауссова интеграла, находим функционал, отвечающий нормальной форме оператора $e^{it\hat{H}}$:

$$e^{it\hat{H}} \leftrightarrow \int e^{a^*\left(e^{it\omega}(1-T)-1\right)a - zz^*} \prod dz\,dz^*, \tag{34}$$

где $T = T(z,\ z^*)$ определяется формулой (29_1). Формула (34) справедлива как в бозевском, так и в фермиевском случаях.

7. Выражение квантовой статистической суммы в виде континуального интеграла. Квантовой статистической суммой (большой) называется функция

$$\Xi(\beta,\ \mu) = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta(\hat{H}+\mu\hat{N})},$$

где $\hat{H}$ — оператор энергии системы, $\hat{N}$ — оператор числа частиц, β — величина, обратно пропорциональная абсолютной температуре, μ — химический потенциал. Типичным случаем является оператор энергии вида

$$\hat{H} = \sum \omega(k)\,\hat{a}^*(k)\,\hat{a}(k) + \\ + \frac{1}{\Omega}\sum V(p_1-q_1)\,\delta_{p_1+p_2-q_1-q_2}\hat{a}^*(p_1)\,\hat{a}^*(p_2)\,\hat{a}(q_1)\,\hat{a}(q_2),$$

k, p, q пробегают решетку в трехмерном пространстве с объемом элементарной ячейки, равным $1/\Omega$.[1]) Полагая $t = i\beta$ и производя связанные с этим изменения в вычислениях, получаем из (34) и формул для следа (2.34) и (3.72) выражение для статсуммы: в бозевском случае

$$\Xi = \int \det [1 - e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)]^{-1} e^{-zz^*} \Pi \, dz \, dz^*; \qquad (35_B)$$

в фермиевском случае

$$\Xi = \int \det [1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)] e^{-zz^*} \Pi \, dz \, dz^*. \qquad (35_F)$$

Оператор T задается в обоих случаях ядром

$$T(p_1, p_2 | \beta) = \int_0^\beta \int_0^\beta e^{t_1(\omega(p_1)+\mu) - t_2(\omega(p_2)+\mu)} S(p_1, t_1; p_2, t_2) \, dt_1 \, dt_2, \qquad (36)$$

$S(p_1, t_1; p_2, t_2)$ — ядро оператора $S = R(1+\Delta R)^{-1}$; R определяется формулой (32), причем $V_1(p) V_2(p) = -V(p)/\Omega$,

$$\Delta = \Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) = \theta(t_1 - t_2) \delta_{p_1 - p_2} e^{(t_2 - t_1)(\omega(p_2)+\mu)},$$
$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases} \qquad (37)$$

Оператор $e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)$, стоящий под знаком детерминанта в формулах (35_B) и (35_F), допускает любопытное истолкование. Заметим прежде всего, что

$$e^{-\beta(\omega(p_1)+\mu)} \int_0^\beta e^{t_1(\omega(p_1)+\mu)} S(p_1, t_1; p_2, t_2) \, dt_1 =$$
$$= \sum_q \int_0^\infty \Delta(p_1, \beta | q, t_1) S(q, t_1; p_2, t_2) \, dt_1,$$

т. е является ядром оператора $\Delta S = \Delta R(1+\Delta R)^{-1}$. Обозначим ядро этого оператора через $S_1(p_1, \beta; p_2, t_2)$. Из (36) следует, что $e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)$ можно записать в виде

$$\int_0^\infty [\delta(\beta - t_2) \delta_{p_1 - p_2} - \theta(\beta - t_2) S_1(p_1, \beta; p_2, t_2)] e^{-t_2(\omega(p_2)+\mu)} \, dt_2.$$

В квадратных скобках стоит ядро оператора

$$1 - \Delta S = 1 - \Delta R(1+\Delta R)^{-1} = (1+\Delta R)^{-1}.$$

---

[1]) Операторы $\hat{a}(k)$, $\hat{a}^*(k)$ удовлетворяют соотношениям $[\hat{a}(k), \hat{a}^*(k')] = \delta(k-k')$ в бозевском случае и $\{\hat{a}(k), \hat{a}^*(k)\} = \delta_{k-k'}$ в фермиевском, $\delta_k = 1$ при $k=0$ и $\delta_k = 0$ при $k \neq 0$.

Напомним, что оператор числа частиц равен $\hat{N} = \sum \hat{a}^*(k)\hat{a}(k)$. Поэтому оператор $\hat{H} + \mu\hat{N}$ получается из $\hat{H}$ заменой $\omega(k)$ на $\omega(k)+\mu$.

Обозначим это ядро через $\tilde{G}(p_1, t_1; p_2, t_2)$. Таким образом,

$$e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)=\int_0^{\infty}\tilde{G}(p_1, \beta; p_2, t)\, e^{-t(\omega(p_2)+\mu)}\, dt. \tag{38}$$

Пусть функция $f(p, t)$ связана с $g(p, t)=g(p)\, e^{-t(\omega(p)+\mu)}$ $(0\leqslant t\leqslant\beta)$ с помощью интегрального соотношения

$$f(p, t)=\sum_q\int_0^{\infty}\tilde{G}(p, t; q, \tau)\, g(q, \tau)\, d\tau. \tag{39}$$

Разрешая это уравнение относительно g, находим, что $g=(1+\Delta R)f$. Учитывая явный вид функций Δ и R, получаем отсюда

$$f(p, t)+\sum_q\int_0^{t}e^{-(t-\tau)(\omega(p)+\mu)}R_1(p, q, \tau)\, f(q, \tau)\, d\tau=g(p, t). \tag{40}$$

Умножая обе части этого равенства на $e^{t(\omega(p)+\mu)}$ и дифференцируя, находим

$$\frac{df}{dt}+(\omega(p)+\mu)f+\sum_q R_1(p, q, t)\, f(q, t)=0. \tag{41}$$

(При этом учтено, что $g(p, t)=g(p)\, e^{-t(\omega(p)+\mu)}$; следовательно, $\frac{d}{dt}\left[g(p, t)\, e^{t(\omega(p)+\mu)}\right]=0.$)

Интегральное уравнение (40) при $t=0$ дает $f(p, 0)=g(p, 0)=g(p)$. Таким образом, $f(p, t)$ есть решение задачи Коши уравнения (41) с начальным условием $f(p, 0)=g(p)$.

Обозначим через $G(p, q\,|\,t)$ функцию Грина задачи Коши для уравнения (41). Тогда

$$f(p, t)=\sum_q G(p, q\,|\,t)\, g(q).$$

С другой стороны, согласно (39),

$$f(p, t)=\sum_q\int_0^{\beta}\tilde{G}(p, t; q, \tau)\, e^{-\tau(\omega(q)+\mu)}\, g(q)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\beta}\tilde{G}(p, t; q, \tau)\, e^{-\tau(\omega(q)+\mu)}\, d\tau=G(p, q\,|\,t).$$

Это соотношение справедливо при $0\leqslant t\leqslant\beta$, в частности при $t=\beta$.

Вспоминая формулу (38), находим отсюда окончательно, что

$$e^{-\beta(\omega+\mu)}(1-T)=G(p, q\,|\,\beta). \tag{42}$$

Вспоминая формулы (35_B), (35_F), получаем выражение для статистических сумм[1])

$$\Xi = \int \det(1 - G)^{-1} e^{-zz^*} \Pi\, dz\, dz^* \qquad (43_B)$$

для бозевского случая и

$$\Xi = \int \det(1 + G)\, e^{-zz^*} \Pi\, dz\, dz^* \qquad (43_F)$$

для фермиевского случая.

В этих формулах G — зависящий от параметра β оператор с ядром $G(p,\ q\,|\,\beta)$, которое является функцией Грина задачи Коши уравнения (41). Функция $R_1(p,\ q,\ t)$, входящая в уравнение (41), равна

$$R_1(p,\ q,\ t) = V_1(p-q)\, z(p-q,\ t) + V_2(q-p)\, z^*(q-p,\ t),$$

V_1, V_2 — произвольные функции, связанные соотношением

$$V_1(p)\, V_2(p) = -V(p)/\Omega.$$

Добавление 2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ КОММУТИРУЮЩИХ И АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В § 3 гл. 1 изложено построение основных операций анализа на грассмановой алгебре. При этом элемент грассмановой алгебры с образующими $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ рассматривался как функция от «антикоммутирующих переменных» $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$. (Если грассманова алгебра имеет бесконечное число образующих, то ее элемент интерпретируется как функционал от функций с антикоммутирующими значениями.) Может быть определен интеграл по антикоммутирующим переменным $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$; в частности, если элемент грассмановой алгебры ω представлен в виде

$$\omega = \sum_{k \leqslant n} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon^{i_1} \ldots \varepsilon^{i_k}, \qquad (1)$$

то

$$\int \omega\, d^n \varepsilon = a_{1 \ldots n}. \qquad (2)$$

Наряду с функциями от числовых (коммутирующих) переменных и функциями от антикоммутирующих переменных можно рассматривать функции, зависящие от переменных обоих типов (т. е. выражения вида (1), в которых коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}$ являются функциями от числовых переменных). Такие объекты появляются, в частности, при исследовании систем, содержащих как бозоны, так и фермионы. Очевидным образом определяется интеграл функции по коммутирующим и антикоммутирующим

[1]) На возможность представления статсумм в виде (43_B), (43_F) обратил мое внимание Р. А. Минлос.

переменным. Например, если коэффициенты $a_{i_1 \dots i_k}$ в выражении (1) зависят от числовых переменных $x^1, \dots, x^m$, то следует считать, что

$$\int \omega d^m x d^n \varepsilon = \int a_{1 \dots n} d^m x. \tag{3}$$

Мы всегда будем рассматривать только такие функции от числовых и антикоммутирующих переменных, которые гладко зависят от числовых переменных, т. е. коэффициенты $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ будем считать гладкими функциями от переменных $x^1, \dots, x^m$. Функцию от числовых переменных $x^1, \dots, x^m$ и антикоммутирующих переменных $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ можно проинтегрировать только по части этих переменных (например, по $x^1, \dots, x^{m'}$ и $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{n'}$, где $m' \leqslant m$, $n' \leqslant n$). Тогда результат интегрирования будет зависеть от оставшихся переменных (числовых переменных $x^{m'+1}, \dots, x^m$ и антикоммутирующих переменных $\varepsilon^{n'+1}, \dots, \varepsilon^n$).

Важно отметить, что в функцию, зависящую от числовых и антикоммутирующих переменных, можно подставить вместо числовых переменных произвольные четные элементы, а вместо антикоммутирующих переменных произвольные нечетные элементы грассмановой алгебры; при такой подстановке мы получаем в качестве значения функции снова элемент грассмановой алгебры. Возможность подставить вместо $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ нечетные элементы грассмановой алгебры очевидна. Однако необходимо объяснить, как можно подставить вместо числовых переменных $x^1, \dots. x^n$ произвольные четные элементы. Такое объяснение можно дать с помощью разложения в ряд Тейлора по нильпотентным элементам. Если, например, F — гладкая функция от числовой переменной, то можно подставить вместо этой переменной четный элемент x алгебры Грассмана; именно следует положить

$$F(x) = \sum \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi) \gamma^n, \tag{4}$$

где ξ — числовая часть элемента x, а γ — его нильпотентная часть. В силу нильпотентности элемента γ сумма в (4) содержит конечное число членов. (Напомним, что всякий элемент грассмановой алгебры может быть однозначно представлен в виде $x = \xi + \gamma$, где ξ — число, а γ удовлетворяет условию нильпотентности: $\gamma^N = 0$ для некоторого N.)

В связи с отмеченной только что возможностью подставлять вместо чисел четные элементы алгебры Грассмана обычно вместо термина «функции от числовых и антикоммутирующих переменных» употребляют термин «функции от коммутирующих и антикоммутирующих переменных».

В § 3 гл. 1 было рассмотрено поведение интеграла по антикоммутирующим переменным при линейной замене переменных $\varepsilon^i = \sum_j a^{ij} \varepsilon'^j$. Рассмотрим сейчас более общий вопрос о произвольной замене переменной в интеграле по коммутирующим и антикоммутирующим переменным. Предположим, что коммутирующие переменные $x^1, \ldots, x^m$ и антикоммутирующие переменные $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ выражены через новые коммутирующие переменные $x'^1, \ldots, x'^{m'}$ и антикоммутирующие переменные $\varepsilon'^1, \ldots, \varepsilon'^{n'}$:

$$x^i = f^i(x', \varepsilon'), \quad \varepsilon^\alpha = f^\alpha(x', \varepsilon'). \tag{5}$$

Правые части в (5) должны иметь ту же четность, что и левые части (т. е. например, функция $f^i(x', \varepsilon')$ должна быть полиномом по антикоммутирующим переменным, каждый член которого содержит произведение четного числа антикоммутирующих переменных). Будем допускать возможность того, что правые части в (5) зависят также от параметров. При этом параметрами могут быть как коммутирующие, так и антикоммутирующие переменные.

В простейшем случае линейной замены переменных соотношения (5) принимают вид

$$x^i = a^i_j x'^j + b^i_\beta \varepsilon'^\beta, \quad \varepsilon^\alpha = c^\alpha_j x'^j + d^\alpha_\beta \varepsilon'^\beta, \tag{6}$$

где на коэффициенты a^i_j, d^α_β нужно наложить условие четности, а на коэффициенты b^i_β, c^α_j — условие нечетности. (Поскольку коэффициенты b^i_β и c^α_j не содержат переменных ε', эти коэффициенты могут быть ненулевыми только в случае, если они зависят от антикоммутирующих параметров.) Соотношения (6) нам будет удобно коротко записывать в виде

$$x = ax' + b\varepsilon', \quad \varepsilon = cx' + d\varepsilon'$$

или, еще короче, в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ \varepsilon' \end{pmatrix},$$

где $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Если $F(x, \varepsilon)$ — функция от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^m$ и антикоммутирующих переменных $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, то с помощью подстановки (5) можно получить из этой функции функцию $F'(x', \varepsilon')$, зависящую от $x'^1, \ldots, x'^m$ и $\varepsilon'^1, \ldots, \varepsilon'^n$. Рассмотрим прежде всего линейную замену в интеграле по коммутирующим и антикоммутирующим переменным. Оказывается, что в случае, если переменные x^i, ε^α выражены через переменные x'^i, ε'^α по формулам (6), то

$$\int F(x, \varepsilon)\, dx\, d\varepsilon = \int F'(x', \varepsilon')\, \mathrm{Ber}\, M\, dx'\, d\varepsilon', \tag{7}$$

где $\mathrm{Ber}\, M = \det(a - bd^{-1}c) \det d^{-1}$. Выражение $\mathrm{Ber}\, M$ называется березинианом (или супердетерминантом) линейной замены (6). (Говорят также, что $\mathrm{Ber}\, M$ это супердетерминант «суперматрицы» M, состоящей из четных блоков a, d и нечетных блоков b, c.) Доказательство соотношения (7) можно получить, представив замену переменных (6) в виде суперпозиции трех линейных замен переменных, при двух из которых изменяются только коммутирующие или только антикоммутирующие переменные, а третья задается соотношением (6) с $a = d = 1$, $c = 0$.

Из соотношения (7) следует, что березиниан мультипликативен, т. е. березиниан линейной замены, полученной в результате суперпозиции линейной замены (6), с заменой

$$x' = a'x'' + b'\varepsilon'', \quad \varepsilon' = c'x'' + d'\varepsilon'' \tag{8}$$

равен произведению березинианов замен (6) и (8). Можно определить произведение суперматриц таким образом, чтобы суперпозиции линейных замен отвечало произведение соответствующих суперматриц. Тогда, очевидно, $\operatorname{Ber} MM' = \operatorname{Ber} M \cdot \operatorname{Ber} M'$.

В случае, если мы имеем дело с нелинейной заменой переменных (5), можно определить аналог якобиана такой замены как березиниан J суперматрицы, составленной из частных производных:

$$J = \operatorname{Ber} \begin{pmatrix} \partial f^i/\partial x'^j & \partial f^i/\partial \varepsilon'^\beta \\ \partial f^\alpha/\partial x'^j & \partial f^\alpha/\partial \varepsilon'^\beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(Производные по нечетным переменным понимаются как правые производные.) В этом случае формула замены переменных принимает вид

$$\int F(x, \varepsilon)\, dx\, d\varepsilon = \int F'(x', \varepsilon')\, J(x', \varepsilon')\, dx'\, d\varepsilon'. \tag{10}$$

(Для того чтобы гарантировать существование интегралов и справедливость соотношений (7), (10), нужно наложить условие достаточного быстрого убывания коэффициентных функций выражения $F(x, \varepsilon)$ на бесконечности.)

Функции от m числовых переменных можно интерпретировать как функции, заданные на m-мерном пространстве $\mathbf{R}^m$. Удобно дать аналогичную интерпретацию для функций, зависящих от коммутирующих и антикоммутирующих переменных. Для этого следует ввести понятие суперпространства. Под (m, n)-мерным суперпространством $\mathbf{R}^{m,n}$ понимается пространство, точка которого имеет m коммутирующих координат $x^1, \ldots, x^m$ и n антикоммутирующих координат $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$. Функция от m коммутирующих и n антикоммутирующих переменных отождествляется с функцией на $\mathbf{R}^{m,n}$. Интеграл по m коммутирующим и n антикоммутирующим переменным интерпретируется как интеграл по суперпространству $\mathbf{R}^{m,n}$. Замену переменных вида (5) можно рассматривать как отображение суперпространств.

Подобно тому как m-мерное многообразие можно считать склеенным из пространств $\mathbf{R}^m$, супермногообразие размерности (m, n) можно определить как объект, получающийся при склеивании нескольких экземпляров пространства $\mathbf{R}^{m,n}$.

Отметим, что приведенные выше определения и утверждения, по существу, вполне строги, но из соображений краткости и наглядности сформулированы не совсем аккуратно. Для достижения полной строгости удобно рассматривать наряду с алгебрами Грассмана Λ^n алгебры $\mathfrak{A}_U^{m,n}$, состоящие из гладких функций, определенных на области $U \subset \mathbf{R}^m$ и принимающих значение в алгебре Грассмана с n образующими. (Элементы алгебры $\mathfrak{A}_U^{m,n}$ можно рассматривать как выражения вида (1), где коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_k}$ являются гладкими функциями на области U.) Алгебры $\mathfrak{A}_U^{m,n}$ естественно назвать алгебрами Березина. Наиболее важную роль играет алгебра $\mathfrak{A}_U^{m,n}$ для $U=\mathbf{R}^m$. Эта алгебра будет обозначаться просто $\mathfrak{A}^{m,n}$. Интеграл по коммутирующим и антикоммутирующим переменным можно рассматривать как линейный функционал на алгебре $\mathfrak{A}^{m,n}$. (Точнее, этот функционал определен лишь на линейном подпространстве пространства $\mathfrak{A}^{m,n}$, поскольку мы не наложили никаких требований убывания на коэффициентные функции в (1).) Замену переменных (5) можно интерпретировать как сохраняющее четность гомоморфное отображение алгебры $\mathfrak{A}^{m,n}$ в себя.

Строгое определение суперпространства может быть дано различными способами. С формальной точки зрения проще всего отождествить понятия суперпространства $\mathbf{R}^{m,n}$ и алгебры $\mathfrak{A}^{m,n}$. (Это отвечает часто использующейся в математике точке зрения, в соответствии с которой многообразие отождествляется с кольцом функций на нем.) При этом определении под отображением суперпространства $\mathbf{R}^{m,n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{m',n'}$ следует понимать сохраняющий четность гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}^{m',n'}$ в алгебру $\mathfrak{A}^{m,n}$. Понятие супермногообразия может быть тогда сформулировано в рамках теории пучков. (Супермногообразие размерности (m, n) определяется с помощью пучка алгебр $\mathfrak{A}_U^{m,n}$ на m-мерном многообразии.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.

1. Квантовая электродинамика.— М.: Гостехиздат, 1953.

Ахиезер Н. И.

1. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов.— УМН, 1941, вып. IX, с. 126—156.

Ахиезер Н. И., Глазман И. М.

1. Спектральная теория линейных операторов.— М.—Л.: Гостехиздат, 1950.

Баргман В. (Bargmann V.)

1. Remarks on a Hilbert Space of Analytic Functions.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1962, v. 2, p. 199—204.
2. On a Hilbert Space of Analytic Functions. Part 1.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1961, v. 14, p. 187—214.

Березин Ф. А.

1. О модели Тирринга.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, вып. 3, с. 885—894.
2. Канонические преобразования в представлении вторичного квантования.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 311—314.
3. О модели Ли.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 4, с. 811—814.
4. О модели Ли.— Мат. сб., 1963, т. 60, № 4, с. 425—446.
5. О канонических преобразованиях в представлении вторичного квантования.— ДАН СССР, 1963, т. 150, № 5, с. 959—962.
6. Об операторах в представлении вторичного квантования.—ДАН СССР, 1964, т. 154, № 5, с. 1063—1066.
7. Об одной точно решаемой модели квантовой теории поля.— УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 225—226.

Березин Ф. А., Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.

1. Квантовая механика систем с большим числом степеней свободы. Труды IV Всесоюзного математического съезда 1961 г., т. II.— М.: Наука, 1964, с. 532—540.

Берестецкий В. Б., Галанин А. Д.

1. Вводная статья. Проблемы современной физики, вып. 3.— М.: Гостехиздат, 1955.

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.

1. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Гостехиздат, 1957.

Вейль Г.

1. Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947.

Вивье М. М. (Vivier M. M.)

1. Sur quelques théorèmes d'algebre extèrieure.—Ann. Ec. Norm. Sup., 1956, v. 73 (3), p. 203—281.

Гейзенберг В. (Heisenberg W.)

1. Die „beobachten Grössen“ in die Theorie der Elementärteilchen.— Zs. f. Phys., 1943, Bd. 120, S. 513—538, 637—702.

Гейнц Е. (Heinz E.)

1. Beiträge zur Störungs Theorie der Spektralzerlegung.— Math. Ann., 1951, Bd. 123, S. 415—438.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.

1. Обобщенные функции, вып. 4.— М.: Физматгиз, 1958.

Гельфанд И. М., Костюченко А. Г.
1. О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов.— ДАН СССР, 1955, т. 103, № 3, с. 349—352.
Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.
1. Обобщенные функции, вып. 2.— М.: Физматгиз, 1958.
Гельфанд И. М., Яглом А. М.
1. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике.— УМН, 1956, т. 11, вып. 1 (67), с. 77—114.
Глязер В. (Glaser V.)
1. An Explicit solution of the Thirring Model.— Nuovo Cimento, 1958, v. 9, p. 920—1006.
Гординг Л., Уайтман А. С. (Gording L., Wightman A. S.)
1. Representation of the anticommutation relations.—Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, v. 40, № 7, p. 617—621.
2. Representation of the commutation relations.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, v. 40, № 7, p. 622—626.
Гринберг О. В., Швебер С. С., (Greenberg O. W., Schweber S. S.)
1. Clothed Particle Operators in simple Models of Quantum Field Theory.— Nuovo Cimento, 1958, v. 8, p. 378—406.
Данфорд Н., Шварц Дж. Т. (Dunford N., Schwartz J. T.)
1. Linear operators, v. II.— New York: Intersci. publichers, 1963.
Дирак П. А. М. (Dirac P. A. M.)
1. Theory of the Emission and Absorption of Radiation.— Proc. Roy. Soc. A., 1927, v. 144, p. 234—262.
Зигель К. Л.
1. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных.— М.: ИЛ, 1954. 168 с.
Иордан П., Вигнер Е. (Jordan P., Wigner E.)
1. Uber das Paulische Aquivalenzverbot.— Zs. Phys., 1928, Bd. 47, S. 631—658.
Карлеман Т. (Carleman T.)
1. Les fonctions quasi-analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.
1. Квантовая механика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
Минлос Р. А.
1. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, т. VIII, с. 497—518.
Наймарк М. А.
1. Нормированные кольца.—М.: Гостехиздат, 1956.
Нейман Дж. фон (Neumann J. von)
1. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren.— Math. Ann. 1931, v. 104, p. 570—578.
2. On infinite direct product.— Compositio Math., 1938, v. 6, № 1, p. 1—77.
Плеснер А. И., Рохлин В. А.
1 Спектральная теория линейных операторов. II.— УМН, 1946, т. 1, вып. 1 (11), с. 71—191.
Салам А., Маттьюз П. Т. (Salam A., Matthews P. T.)
1. The Green's function of quantized fields.— Nuovo Cimento, 1954, v. 12, p. 563—565.
Сигал И. Е. (Segal I. E.)
1. Distributions in Hilbert Space and Canonical Systems of Operators.— Trans. Am. Math. Soc., 1954, v. 88, № 1, p. 12—41.
Тирринг В. Э. (Thirring W. E.)
1. Asoluble relativistic field theory.— Ann. Phys., 1958, v. 3, p. 91—112.
Томонага С. (Tomonaga S.)
1. On the Effect of the Field Reactions on the Interaction of Mesotrons and Nuclear Particles. I.—Progr. Theoret. Phys., 1946, v. 1, p. 83—91.
Фок В. А. (Fock V. A.)
1. Konfigurationsraum und zweite Quantelung.— Zs. Phys., 1932, v. 75, p. 622—647.
2. Zur Quantenelectrodynamik.— Soviet Phys., 1934, v. 6, p. 425.

Фридрихс К. О. (Friedrichs K. O.)
1. Mathematical aspects of the quantum theory of field.— New York, 1953.
Хааг Р. (Haag R.)
1. On Quantum Field Theories.— Dan. Math. Fys. Medd., 1955, v. 29, № 12, p. 1—37.
Халатников И. М.
1. Представление функций Грина в квантсвой электродинамике в форме континуальных интегралов.— ЖЭТФ, 1954, т. 28, с. 635—638.
Хенли Э., Тирринг В.
1. Элементарная квантовая теория поля.— М.: ИЛ, 1963.
Ван Хов Л. (van Hove L.)
1. Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié.— Physics, 1952, v. 18, p. 145—152.
Швебер С. С.
1. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
Эдвардс С. Ф., Пайерлс Р. Е. (Edvards S. F., Peierls R. E.)
1. Field eguations in functional form.— Proc. Roy. Soc. Acad., 1954, v. 224, p. 24—33. (Имеется русский перевод: Эдвардс С. Ф., Пайерлс Р. Е. Уравнения поля в функциональной форме. Проблемы современной физики, т. 3, 1955)

ЧАСТЬ II

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ МЕТОДА ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Глава 1

НЕВИНЕРОВСКИЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ [1])

В статье рассматриваются континуальные интегралы, не связанные с мерами в функциональных пространствах. По-видимому, впервые интегралы такого типа рассматривал Фейнман ([1, 2]). В последнее время к интегралу, введенному Фейнманом в [2],— так называемому интегралу «по траекториям в фазовом пространстве» — было вновь приковано внимание ряда авторов в связи с надеждой обойти с помощью этого интеграла трудности, встречающиеся при квантовании полей Янга — Миллса [3—5]. При этом иногда высказывается почти мистическая вера в то, что применение этого интеграла является новым способом квантования, избавляющим от мучительного вопроса, в каком порядке расставлять операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ в квантовом выражении, соответствующем классическому.

Фейнмановский интеграл имеет вид

$$\langle x | e^{\frac{it\hat{H}}{h}} | y \rangle = \int e^{\frac{i}{h}\int_0^t S(p(\tau),\, q(\tau))\, d\tau} \Pi\, dp(\tau)\, dq(\tau), \qquad (*)$$

где $p(\tau)$, $q(\tau)$ — траектория в фазовом пространстве с граничными условиями $q(0)=x$, $q(t)=y$.

Предполагается, что этот интеграл равен пределу при $N\to\infty$ конечнократных интегралов, получаемых из (*) заменой интеграла в показателе экспоненты интегральной суммой $\sum_0^N S(p_k,\, q_k)\,\Delta_k$ и последующим интегрированием по $\Pi\, dp_k\, dq_k$ с весом $(2\pi h)^{-N}$. В статье показано, что предел сильно зависит от выбора точек p_k, q_k, участвующих в составлении интегральной суммы. Выбирая эти точки должным образом, можно добиться того, что предел является матричным элементом оператора $e^{\frac{it\hat{H}}{h}}$, соответствующим квантованию, при котором классическому выражению pq ставится в соответствие оператор $\hat{q}\hat{p}$, $\hat{p}\hat{q}$ или $\frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p})$.

[1]) ТМФ, 1971, т. 6, № 2, с. 194—212.

Таким образом, интеграл (*) имеет смысл только при дополнительном указании на конечномерные аппроксимации, пределом которых он является. Это указание для него также необходимо, как задание начальных или граничных условий для дифференциального уравнения[1]). Кроме фейнмановского интеграла (*), в статье рассматриваются аналогичные ему интегралы, связанные со вторичным квантованием. Найдено выражение через континуальные интегралы оператора рассеяния и статсуммы.

§ 1. Квантование и символы операторов

Обозначения. Пусть L — фазовое пространство классической механической системы с n степенями свободы и $q=(q^1, \ldots, q^n)$, $p=(p^1, \ldots, p^n)$ — канонические координаты в L. Выражения qp, qx, p^2 и т. п. служат сокращенными обозначениями для $qp=\sum q^i p^i$, $qx=\sum q^i x_i$, $p^2=\sum (p^i)^2$ и т. п.; выражения dp, dq и т. п. — сокращенные обозначения для произведений дифференциалов: $dp=dp^1 \ldots dp^n$, $dq=dq^1 \ldots dq^n$. Через L_2 обозначается гильбертово пространство функций $f(x)$, $(f, g)=\int f\bar{g}\,dx$. Операторы $\hat{p}_k$ и $\hat{q}_k$ в L_2 имеют вид

$$(\hat{p}_k f)(x)=\frac{h}{i}\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad (\hat{q}_k f)(x)=x_k f(x).$$

Задача квантования состоит в том, чтобы каждой классической наблюдаемой величине, т. е. вещественной функции $f(p, q)$, сопоставить квантовую наблюдаемую, т. е. самосопряженный оператор $\hat{f}$ в некотором гильбертовом пространстве. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) сопоставление $f \to \hat{f}$ зависит от параметра h (планковской постоянной), причем коммутатор $[\hat{f}, \hat{g}]=ih\hat{c}+o(h)$, где $\hat{c}$ — оператор, соответствующий функции $c=[f, g]$, $[f, g]$ — скобка Пуассона;

2) функция $f(p, q)$ служит в каком-нибудь смысле пределом оператора $\hat{f}$ при $h \to 0$.

Очевидно, что «квантование» является в сильной степени неопределенной операцией. Ниже рассматривается несколько вариантов квантования. Условимся в дальнейшем функцию $f(q, p)$, соответствующую оператору $\hat{f}$, называть символом этого оператора.

$\hat{q}\hat{p}$-квантование. Каждому полиному

$$f(p, q)=\sum f_{m_1, \ldots, m_n, m_1', \ldots, m_n'} (p^1)^{m_1} \ldots (p^n)^{m_n} (q^1)^{m_1'} \ldots (q^n)^{m_n'} \quad (1)$$

[1]) То обстоятельство, что континуальный интеграл может зависеть от конечномерных аппроксимаций, было известно раньше. Указание на это имеется уже в работе [11]. Аналогичное явление встречается в теории стохастических интегралов.

сопоставим оператор в L_2, равный

$$\hat{f}=\sum f_{m_1,\,\ldots,\,m_n,\,m'_1,\,\ldots,\,m'_n}\hat{q}_1^{m'_1}\ldots\hat{q}_n^{m'_n}\hat{p}_1^{m_1}\ldots\hat{p}_n^{m_n};$$

$\hat{f}$ является дифференциальным оператором с полиномиальными коэффициентами. Продолжим сопоставление между полиномами и полиномиальными дифференциальными операторами до соответствия между функциями и операторами более общего вида. С этой целью заметим, что если полиному $f(p, q)$ соответствует оператор $\hat{f}$, то

$$\begin{aligned}\hat{p}_k\hat{f}\leftrightarrow\left(p^k-ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f,\quad \hat{f}\hat{p}_k\leftrightarrow fp^k,\\ \hat{q}_k\hat{f}\leftrightarrow q^kf,\quad \hat{f}\hat{q}_k\leftrightarrow\left(q^k-ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)f.\end{aligned}\tag{2}$$

(Доказательство. Заметим, что если $m'_k>0$, то

$$\hat{p}_k^1\hat{q}_k^{m'_k}=(\hat{p}_k\hat{q}_k-\hat{q}_k\hat{p}_k)\,\hat{q}_k^{m'_k-1}+\hat{q}_k\hat{p}_k\hat{q}_k^{m'_k-1}=$$

$$=-ih\hat{q}_k^{m'_k-1}+\hat{q}_k\hat{p}_k\hat{q}_k^{m'_k-1}=-m\,i\,h\,\hat{q}_k^{m'_k-1}+\hat{q}_k^{m'_k}\hat{p}_k;$$

поэтому $\hat{p}_k\hat{f}\leftrightarrow\left(p_k-ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f$. Аналогично доказывается четвертая формула в (2); вторая и третья формулы очевидны.) Потребуем, чтобы формулы (2) оставались справедливыми и в том случае, если f неполином. Пусть $\hat{f}$ — некоторый оператор в L_2, $K(x, y)=\langle x|\hat{f}|y\rangle$ — его ядро (для операторов вида (1) $K(x, y)$ — обобщенная функция). Отметим, что если оператору $\hat{f}$ соответствует ядро $K(x, y)$, то

$$\begin{aligned}\hat{p}_k\hat{f}\leftrightarrow -ih\frac{\partial}{\partial x_k}K,\quad \hat{f}\hat{p}_k\leftrightarrow ih\frac{\partial}{\partial y_k}K,\\ \hat{q}_k\hat{f}\leftrightarrow x_kK,\quad \hat{f}\hat{q}_k\leftrightarrow y_kK.\end{aligned}\tag{3}$$

Соответствие между функциями и операторами будем искать в виде

$$\begin{aligned}f(p, q)&=\int L(p, q\,|\,x, y)\,K(x, y)\,dx\,dy,\\ K(x, y)&=\int L^*(x, y\,|\,p, q)\,f(p, q)\,dp\,dq.\end{aligned}\tag{4}$$

Из соотношений (2), (3) для L и L^* получаются уравнения

$$\begin{aligned}\left(p^k-ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L=ih\frac{\partial L}{\partial x_k},\quad p^kL=-ih\frac{\partial L}{\partial y_k},\\ q^kL=x_kL,\quad \left(q^k-ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L=y_kL;\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}-ih\frac{\partial L^*}{\partial x_k}=\left(p^k+ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L^*,\quad ih\frac{\partial L^*}{\partial y_k}=p^kL^*,\\ x_kL^*=q^kL^*,\quad y_kL^*=\left(q^k+ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L^*.\end{aligned}\tag{5'}$$

Все восемь последних уравнений получаются совершенно одинаково, поэтому поясним их вывод на примере первого уравнения (5). Из (2) и (3) следует, что оператору $\hat{p}_k\hat{f}$ отвечают символ $\left(p^k - ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f$ и ядро $-ih\frac{\partial K}{\partial x_k}$. Пользуясь (4), получаем отсюда тождества

$$\left(p^k - ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f = \int\left(p^k - ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)LK\,dx\,dy = \int L\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_k}K\right)dx\,dy = \\ = ih\int\left(\frac{\partial}{\partial x_k}L\right)K\,dx\,dy$$

(последнее равенство получено интегрированием по частям). Таким образом,

$$\int\left(p^k - ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)LK\,dx\,dy = ih\int\frac{\partial L}{\partial x_k}K\,dx\,dy.$$

Последнее соотношение должно выполняться при произвольном K. Поэтому должно быть справедливо первое равенство в (5). Единственными с точностью до множителя решениями уравнений (5) и (5′) служат функции

$$L = \delta(q-x)\,e^{\frac{i}{h}p(y-q)}, \quad L^* = (2\pi h)^{-n}\delta(q-x)\,e^{-\frac{i}{h}p(y-q)}. \tag{6}$$

Множители определяются из условия, что единичному оператору соответствует, с одной стороны, ядро, равное $\delta(x-y)$, с другой — символ $f\equiv 1$.

Из (6) получаем окончательно связь между символами и ядрами:

$$f(p, q) = \int K(q, y)\,e^{\frac{i}{h}p(y-q)}\,dy, \tag{7}$$

$$K(x, y) = (2\pi h)^{-n}\int f(p, x)\,e^{-\frac{i}{h}p(y-x)}\,dp. \tag{7′}$$

Пусть $\varphi(x)\in L_2$. Из (7′) следует, что функция $(\hat{f}\varphi)(x)$ равна

$$(\hat{f}\varphi)(x) = \int f(p, x)\,\tilde{\varphi}(p)\,e^{\frac{i}{h}px}\,dp,$$

$$\tilde{\varphi}(p) = (2\pi h)^{-n}\int\varphi(y)\,e^{-\frac{i}{h}py}\,dy. \tag{8}$$

Формулы (8) служат основой теории псевдодифференциальных операторов [6][1]).

---

[1]) Читателю, которому приведенные выше рассуждения кажутся неубедительными, предлагается непосредственно проверить с помощью (8), что каждому полиному (1) соответствует оператор

$$(\hat{f}\varphi)(x) = \sum f_{m_1,\,\ldots,\,m_n'}\,x_1^{m_1'}\ldots x_n^{m_n'}\left(\frac{h}{i}\right)^{m_1+\ldots+m_n}\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\varphi.$$

Из формул (7) и (7′) следует, что если $\hat{f}=\hat{f}_1\hat{f}_2$, то символы операторов $\hat{f}$, $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ связаны соотношениями

$$f(p,\ q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f_1(p_1,\ q)\,f_2(p,\ q_1)\,e^{-\frac{i}{h}(p_1-p)(q_1-q)}\,dp_1\,dq_1. \qquad (9)$$

Формула (9) служит основой для получения континуального интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Кроме этой формулы, отметим еще две примечательные формулы, которые, впрочем, в дальнейшем не используются:

$$\operatorname{Sp}\hat{f}=\int K(x,\ x)\,dx=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f(p,\ q)\,dp\,dq, \qquad (10)$$

$$\operatorname{Sp}\hat{f}_1\hat{f}_2^*=\int K_1(x,\ y)\,\overline{K_2(x,\ y)}\,dx\,dy=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f_1(p,\ q)\,\overline{f_2(p,\ q)}\,dp\,dq. \qquad (11)$$

Формула (11) играет роль теоремы Планшереля для преобразования (7) [1]).

$\hat{p}\hat{q}$-квантование. Полиному (1) сопоставим теперь оператор $\hat{f}$ в L_2, равный

$$\hat{f}=\sum f_{m_1,\ \ldots,\ m_n,\ m_1',\ \ldots,\ m_n'}\,\hat{p}_1^{m_1}\ldots\hat{p}_n^{m_n}\hat{q}_1^{m_1'}\ldots\hat{q}_n^{m_n'}. \qquad (12)$$

Как и в предыдущем случае, $\hat{f}$ — полиномиальный дифференциальный оператор в L_2.

Продолжение соответствия между полиномиальными дифференциальными операторами и полиномами на более общие функции и операторы основано на тех же соображениях, что и в случае $\hat{q}\hat{p}$-квантования. Справедливы формулы, аналогичные (2):

$$\begin{gathered}\hat{p}_k\hat{f}\leftrightarrow p^k f,\quad \hat{f}\hat{p}_k\leftrightarrow\left(p^k+ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f,\\ \hat{q}_k\hat{f}\leftrightarrow\left(q^k+ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)f,\quad \hat{f}\hat{q}_k\leftrightarrow fq^k\end{gathered} \qquad (13)$$

(доказательство такое же, как и для формул (2)). Соответствие между символами и ядрами ищется в виде (4). Из (3) и (13) для функций L и L^* получаются уравнения, аналогичные (5), (5′):

$$\begin{gathered}p^k L=ih\frac{\partial L}{\partial x_k},\quad \left(p^k+ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L=-ih\frac{\partial L}{\partial y_k},\\ \left(q^k+ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L=x_k L,\quad q^k L=y_k L,\end{gathered} \qquad (14)$$

---

[1]) Если функция $K(x,\ y)$ гладкая и быстроубывающая, то формулы (7′) и (11) могут быть выведены непосредственно из (7) по образцу формулы для обратного преобразования Фурье и теоремы Планшереля для преобразования Фурье. Таким образом, открывается возможность подойти к формулам (7), (7′) для случая, когда $K(x,\ y)$ — обобщенная функция (соответствующая полиному $f(p,\ q)$), с тех же позиций, с которых обычно рассматривается преобразование Фурье обобщенных функций [7].

$$-ih\frac{\partial L^*}{\partial x_k}=p^kL^*,\quad ih\frac{\partial L^*}{\partial y_k}=\left(p^k-ih\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L^*,$$
$$x_kL^*=\left(q^k-ih\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L^*,\quad y_kL^*=q^kL^*. \qquad (14')$$

Из (14), (14′) находим функции L и L^* с точностью до множителя; множитель определяется из условия, что единичному оператору отвечает ядро $K(x, y)=\delta(x-y)$, и символ $f\equiv 1$. Окончательно получаем

$$L=\delta(q-y)\,e^{-\frac{i}{h}p(x-q)},\quad L^*=(2\pi h)^{-n}\,\delta(q-y)\,e^{\frac{i}{h}p(x-q)}. \qquad (15)$$

Таким образом,

$$f(p,\ q)=\int K(x,\ q)\,e^{-\frac{i}{h}p(x-q)}\,dx, \qquad (16)$$

$$K(x,\ y)=(2\pi h)^{-n}\int f(p,\ y)\,e^{\frac{i}{h}p(x-y)}\,dp. \qquad (16')$$

Из (16) и (16′) получаем формулу умножения: если $\hat f=\hat f_1\hat f_2$, то

$$f(p,\ q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f_1(p,\ q_1)\,f_2(p_1,\ q)\,e^{\frac{i}{h}(q-q_1)(p-p_1)}\,dq_1\,dp_1. \qquad (17)$$

Формула для следа и формула Планшереля имеют прежний вид (10) и (11)[1].

Обозначим временно символ, отвечающий оператору $\hat f$ при $\hat q\hat p$-квантовании ($\hat q\hat p$-символ), через $f_{\hat q\hat p}$, а символ, отвечающий ему же при $\hat p\hat q$-квантовании ($\hat p\hat q$-символ), через $f_{\hat p\hat q}$. Из (7) и (16) вытекает связь между $f_{\hat p\hat q}$ и $f_{\hat q\hat p}$

$$f_{\hat p\hat q}(p,\ q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f_{\hat q\hat p}(p',\ q')\,e^{\frac{i}{h}(p'-p)(q'-q)}\,dp'\,dq', \qquad (18)$$

$$f_{\hat q\hat p}(p,\ q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f_{\hat p\hat q}(p',\ q')\,e^{-\frac{i}{h}(p'-p)(q'-q)}\,dp'\,dq'. \qquad (18')$$

Из (11) вытекает формула Планшереля преобразования (18), (18′):

$$\int f_{\hat p\hat q}(p,\ q)\,\overline{g_{\hat p\hat q}(p,\ q)}\,dp\,dq=\int f_{\hat q\hat p}(p,\ q)\,\overline{g_{\hat q\hat p}(p,\ q)}\,dp\,dq. \qquad (19)$$

Наконец, остановимся на выражении символа сопряженного оператора через символ исходного. Пусть

$$\hat f=\sum f_{m_1,\ldots,m_n,m_1',\ldots,m_n'}\,\hat p_1^{m_1}\ldots\hat p_n^{m_n}\hat q_1^{m_1'}\ldots\hat q_n^{m_n'}.$$

Тогда $\hat f^*=\sum\overline{f}_{m_1,\ldots,m_n'}\,\hat q_n^{m_n'}\ldots\hat p_1^{m_1}$; $\hat p\hat q$- и $\hat q\hat p$-символы оператора $\hat f^*$ обозначим через $f^*_{\hat p\hat q}$ и $f^*_{\hat q\hat p}$ соответственно. Очевидно,

[1]) Относительно вывода формул (16), (16′), (17) справедливы те же соображения, что и в случае $\hat q\hat p$-квантования.

что

$$f^*_{\hat q \hat p}(p, q)=\overline{f}_{\hat p \hat q}(p, q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int \overline{f}_{\hat q \hat p}(p', q')\,e^{-\frac{i}{h}(p-p')(q-q')}\,dp'\,dq'. \tag{20}$$

Аналогично

$$f^*_{\hat p \hat q}(p, q)=\overline{f}_{\hat q \hat p}(p, q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int \overline{f}_{\hat p \hat q}(p', q')\,e^{-\frac{i}{h}(p-p')(q-q')}\,dp'\,dq'. \tag{20'}$$

Симметричное, или вейлевское, квантование. Пусть A, B — некоммутирующие операторы. Рассмотрим оператор $(\alpha A+\beta B)^n$ и разложим его по степеням α, β:

$$(\alpha A+\beta B)^n=\sum \frac{n!}{k!\,l!}\alpha^k\beta^l(A^kB^l). \tag{21}$$

Определяемый этой формулой оператор (A^kB^l) назовем симметричным произведением операторов A^k и B^l.

Примеры: $(AB)=\frac{1}{2}(AB+BA)$, $(A^2B)=\frac{1}{3}(A^2B+ABA+BA^2)$.

Сопоставим многочлену (1) оператор в L_2

$$\hat f=\sum f_{m_1,\dots,m_n,m_1',\dots,m_n'}\left(\hat p_1^{m_1}\hat q_1^{m_1'}\right)\dots\left(\hat p_n^{m_n}\hat q_n^{m_n'}\right). \tag{22}$$

Нетрудно проверить с помощью индукции по степени многочлена f, что получаемое таким образом соответствие между многочленами и полиномиальными дифференциальными операторами взаимооднозначно [8].

Так же как и в предыдущих случаях, для дальнейшего распространения описанного соответствия между многочленами и полиномиальными дифференциальными операторами основную роль играют формулы, выражающие символы операторов $\hat p_k\hat f$, $\hat f\hat p_k$, $\hat q_k\hat f$, $\hat f\hat q_k$ через символ оператора $\hat f$:

$$\begin{aligned}
&\hat p_k\hat f\leftrightarrow\left(p^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f, \quad \hat f\hat p_k\leftrightarrow\left(p^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f,\\
&\hat q_k\hat f\leftrightarrow\left(q^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)f, \quad \hat f\hat q_k\leftrightarrow\left(q^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)f.
\end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство формул (23) содержится в [8]. Оно более сложно, чем доказательство формул (2) и (13).

Из (3) и (23) находим уравнения для функций L и L^*, осуществляющих связь между символами и ядрами операторов:

$$\begin{gathered}
\left(p^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L=ih\frac{\partial L}{\partial x_k}, \quad \left(p^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L=-ih\frac{\partial L}{\partial y_k},\\
\left(q^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L=x_kL, \quad \left(q^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L=y_kL,\\
-ih\frac{\partial L^*}{\partial x_k}=\left(p^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L^*, \quad ih\frac{\partial L^*}{\partial y_k}=\left(p^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)L^*,\\
x_kL^*=\left(q^k-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L^*, \quad y_kL^*=\left(q^k+\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right)L^*.
\end{gathered} \tag{24}$$

Из (24) и условия нормировки

$$f \equiv 1 \leftrightarrow K(x, y) = \delta(x-y)$$

находим, что

$$L = \delta\left(q - \frac{x+y}{2}\right) e^{-\frac{1}{ih} p(y-x)}, \quad L^* = \frac{1}{(2\pi h)^n} \delta\left(q - \frac{x+y}{2}\right) e^{\frac{1}{ih} p(y-x)}; \tag{25}$$

отсюда

$$\begin{gathered} f(p, q) = \int K(q - \xi/2,\ q + \xi/2)\, e^{p\xi/(ih)}\, d\xi, \\ K(x, y) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int f\left(p, \frac{x+y}{2}\right) e^{\frac{1}{ih} p(y-x)}\, dp. \end{gathered} \tag{26}$$

Из (26) вытекает формула $(q_i = q_i^1, \ldots, q_i^n;\ p_i = p_i^1, \ldots, p_i^n)$

$$f(p, q) = \frac{1}{(\pi h)^{2n}} \int f_1(p_1, q_1) f_2(p_2, q_2) \exp\left\{-\frac{2}{ih} \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q \\ p_1 & p_2 & p \end{matrix}\right|\right\} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2. \tag{27}$$

По-прежнему справедливы формула следа (10) и формула順шереля (11).

Для вейлевского квантования в отличие от $\hat{q}\,\hat{p}$- и $\hat{p}\hat{q}$-квантований очень проста связь между символами f и f^* оператора $\hat{f}$ и сопряженного ему $\hat{f}^*$. Используя связь между соответствующими ядрами $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$, находим из первой формулы в (26), что

$$f^*(p, q) = \overline{f(p, q)}. \tag{28}$$

В частности, самосопряженному оператору отвечает вещественный символ.

Вторичное квантование, бозевский случай. В основе лежат операторы рождения и уничтожения $\hat{a}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k - i\hat{p}_k)$, $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k + i\hat{p}_k)$. Возможны различные варианты соответствия между функциями и операторами. Мы ограничимся так называемой виковской нормальной формой. Многочлен $f(p, q)$ перепишем через переменные $a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k + ip_k)$, $a^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k - ip_k)$:

$$f = \sum_{k, k'} \sum_{m_i, m_i'} \varphi_{m_1, \ldots, m_k | m_1', \ldots, m_{k'}'} a^*(m_1) \ldots a^*(m_k)\, a(m_1') \ldots a(m_{k'}'). \tag{29}$$

Многочлену f сопоставляется оператор

$$\hat{f} = \sum_{k, k'} \sum_{m_i, m_i'} \varphi_{m_1, \ldots, m_k | m_1', \ldots, m_{k'}'} \hat{a}^*(m_1) \ldots \hat{a}^*(m_k)\, \hat{a}(m_1') \ldots \hat{a}(m_{k'}'). \tag{30}$$

Коэффициенты $\varphi_{m_1, \ldots, m_k | m_1' \ldots m_{k'}'}$ предположим симметричными отдельно по первой и по второй группам индексов. Дальнейшее расширение этого соответствия и вывод основных формул операторного исчисления могут быть проведены по общему плану[1]).

Основные формулы [9][2]):

если $\hat{f}_i \leftrightarrow f_i(a^*, a)$, то

$$\hat{f}=\hat{f}_1\hat{f}_2 \leftrightarrow \int f_1(a^*, \alpha)\, f_2(\alpha^*, a)\, e^{-\frac{1}{h}(\alpha^*-a^*)(\alpha-a)}\, \Pi\, d\alpha^* d\alpha; \tag{31}$$

если $\hat{g}=\hat{f}^*$, то

$$g(a^*, a)=f^*(a^*, a), \tag{32}$$

где f^* — функция, комплексно сопряженная f (a^*, a — комплексно сопряженные переменные, $(a^*)^*=a$),

$$\mathrm{Sp}\,\hat{f}=\int f(a^*, a)\, \Pi\, da^*\, da. \tag{33}$$

В формуле (33)

$$\Pi\, da^*\, da=(2\pi h)^{-n}\, dp_1\, dq_1 \ldots dp_n\, dq_n.$$

Аналогичный смысл имеет $\Pi\, d\alpha^*\, d\alpha$ в (31) (нормировочный множитель определен условием, что $\int e^{-\frac{1}{h}a^*a}\, \Pi\, da^*\, da=1$. Напомним, что $a(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_k+ip_k)$, $a^*(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_k-ip_k)$; q_k, p_k — вещественные переменные).

Фермиевский случай. Пусть G — алгебра с $2n$ антикоммутирующими образующими $a(1), \ldots, a(n)$; $a^*(1), \ldots, a^*(n)$:

$$a(i)\,a(j)+a(j)\,a(i)=a(i)\,a^*(j)+a^*(j)\,a(i)=a^*(i)\,a^*(j)+a^*(j)\,a^*(i)=0.$$

Элементы G однозначно записываются в виде (29), причем коэффициенты $\varphi_{m_1, \ldots, m_k | m_1', \ldots, m_k'}$, антисимметричны отдельно по первой и по второй группам индексов. Элементу G вида (29) сопоставим оператор (30) в фоковском пространстве фермиевской системы. Таким образом, символом оператора (30) в фермиевском случае служит не функция $2n$ комплексных переменных, как прежде, а элемент грассмановой алгебры. Формула (31) остается в силе[3]). Формула (32) также остается в силе, если учесть, что f^* не комплексно сопряженная функция, что теперь бессмысленно, а элемент G вида

$$f^*=\sum \overline{\varphi}_{m_1, \ldots, m_k | m_1', \ldots, m_k'}\, a^*(m_{k'}') \ldots a^*(m_1')\, a(m_k) \ldots a(m_1).$$

---

[1]) Вторичное квантование изучено гораздо лучше описанных ранее. В частности, известно, что каждому ограниченному оператору соответствует символ, который является целой функцией $2n$ комплексных переменных $a(k)$, $a^*(k)$ (рассматриваемых как независимые). Этот результат, а также следующие ниже формулы удобнее получать, рассматривая реализацию операторов $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ в фоковском пространстве, не апеллируя к записи операторов с помощью ядер в L_2 (см. [9]).

[2]) В [9] рассмотрен лишь случай $h=1$.

[3]) Параметр h в фермиевском случае не имеет такого же ясного физического смысла, как в бозевском.

Формула (33) теряет силу и заменяется на

$$\operatorname{Sp} \hat{f} = \int f(a^*, a) e^{\frac{2}{h} a^* a} \Pi\, da\, da^*. \tag{34}$$

В (31) и (34) $\Pi\, da^*\, da$ включает в себя нормировочный множитель

$$\Pi\, da^*\, da = h^n\, da_1^*\, da_1 \ldots da_n^*\, da_n.$$

Интегралы в (31) и (34) являются так называемыми интегралами по антикоммутирующим переменным [1]).

Ввиду большой аналогии между формальными свойствами функций и элементов грассмановой алгебры G элементы этой алгебры естественно называть функциями с антикоммутирующими переменными. Квантование с помощью виковской нормальной формы (в обоих вариантах) замечательно тем, что хорошо переносится на случай бесконечного числа степеней свободы. При этом (29) превращается в бесконечный ряд (сходящийся при любых a_k, a_k^* с суммируемым квадратом [2]) в бозевском случае и формальный в фермиевском). Формулы (31), (33), (34) сохраняют силу и интегралы в них становятся континуальными; их следует понимать как пределы конечнократных [9].

§ 2. Континуальный интеграл для $\exp\left(\frac{it}{h}\hat{H}\right)$

Общие замечания. Пусть $\hat{H}$ — некоторый гамильтониан и $H(p, q)$ — его символ. Найдем символ $G(p, q \mid t)$ оператора $e^{i\frac{t\hat{H}}{h}}$. Заметим прежде всего, что

$$e^{i\frac{t\hat{H}}{h}} = 1 + \frac{it\hat{H}}{h} + \frac{t^2}{h^2}\hat{R},$$

где $\hat{R}$ — оператор, раскладывающийся по целым степеням t. Переходя к символам находим

$$G(p, q \mid t) = 1 + \frac{itH}{h} + \frac{t^2}{h^2} R = e^{\frac{itH}{h}} + \frac{t^2}{h^2} r(t).$$

Обозначим через $\hat{U}(t)$ и $\hat{r}(t)$ операторы, символами которых служат $e^{\frac{itH}{h}}$ и $r(t)$ соответственно. Заметим, что справедливо тождество

$$e^{\frac{it\hat{H}}{h}} = \left(e^{\frac{it\hat{H}}{Nh}}\right)^N = \left[\hat{U}\left(\frac{t}{N}\right) + \frac{t^2}{N^2 h^2}\hat{r}\left(\frac{t}{N}\right)\right]^N.$$

---

[1]) Определение: $\int a_k\, da_k = \int a_k^*\, da_k^* = 1$, $\int da_k = \int da_k^* = 0$, кратный интеграл понимается как повторный, дифференциалы da_k, da_k^* антикоммутируют между собой и с a_k, a_k^* (см. [9]).

[2]) $\sum |a_k^*|^2 < \infty$, $\sum |a_k|^2 < \infty$, a_k, a_k^* считаются независимыми и никак не связанными переменными.

В пределе при $N \to \infty$ второе слагаемое перестает играть роль, поэтому

$$e^{\frac{it\hat{H}}{h}} = \lim_{N\to\infty} \left[\hat{U}\left(\frac{t}{N}\right)\right]^N. \tag{35}$$

Символ оператора $\hat{U}(t/N)^N$ обозначим через $G_N(p, q \mid t)$.

$\hat{q}\hat{p}$-квантование. Используя формулу (9), находим

$$G_N(p, q \mid t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^{n(N-1)}} \int \exp\left\{ \frac{it}{Nh} \sum_1^n H(p_k, q_{k-1}) - \frac{i}{h} \sum_1^n p_k (q_k - q_{k-1}) \right\} \prod_1^{N-1} dp_\alpha dq_\alpha, \tag{36}$$

$$p_0 = p_N = p, \quad q_0 = q_N = q$$

(p_0 никак не участвует в подынтегральном выражении. Оно добавлено из соображений симметрии между p и q). Положим

$$p_k = p(t_k), \quad q_k = q(t_k), \quad t_k = kt/N, \quad \Delta = t/N.$$

Видно, что показатель в (36) является интегральной суммой для интеграла действия

$$S = \int_0^1 \left[H(p(\tau), q(\tau)) - p\frac{dq}{d\tau} \right] d\tau, \tag{37}$$

где $p(\tau)$, $q(\tau)$ — замкнутая траектория, проходящая через точку p, q: $q(0) = q(t) = q$, $p(0) = p(t) = p$. Относя множитель $[1/(2\pi h)]^{n(N-1)}$ к нормировке дифференциалов, получаем

$$G(p, q \mid t) = \int e^{\frac{i}{h} S} \Pi \, dp \, dq. \tag{38}$$

Интеграл берется по всем замкнутым траекториям, проходящим через точку p, q.

Применяя формулу (7′) к символу $G_N(p, q \mid t)$, находим ядро $K_N(x, y)$ оператора $[\hat{U}(t/N)]^N$. Оно задается по-прежнему интегралом (36); разница лишь в предынтегральном множителе, равном теперь $(2\pi h)^{-nN}$, и в условиях на траекторию, которые оказываются такими: $q_0 = x$, $q_N = y$ (p_N является переменной интегрирования). Переходя к пределу при $N \to \infty$ и относя множитель $(2\pi h)^{-nN}$ к нормировке дифференциалов, получим формулу Фейнмана

$$\langle x \mid e^{\frac{i\hat{H}t}{h}} \mid y \rangle = \int e^{\frac{i}{h} S} \Pi \, dp dq. \tag{39}$$

Интеграл берется по траекториям, удовлетворяющим условиям $q(0) = x$, $q(t) = y$.

$\hat{p}\hat{q}$**-квантование.** Используя формулу (17), находим

$$G_N(p, q \mid t) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{n(N-1)} \int \exp\left\{\frac{it}{hN} \sum_1^N H(p_{k-1} q_k) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{h} \sum_1^N p_{k-1}(q_k - q_{k-1})\right\} \prod_1^{N-1} dp_\alpha, \, dq_\alpha, \quad (40)$$

$$p_0 = p_N = p, \quad q_0 = q_N = q.$$

Пользуясь формулой (16′), находим, что ядро оператора $[\hat{U}(t/N)]^N$ задается формулой, отличающейся от (40) граничными условиями $q_0 = x$, $q_N = y$ и предынтегральным множителем, равным $\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{nN}$.

Формальные выражения для символа и ядра оператора $e^{\frac{it\hat{H}}{h}}$ имеют прежний вид (38) и (40).

Вейлевское квантование. Пользуясь формулой (27), находим[1])

$$G_N(p, q \mid t) = \left(\frac{1}{\pi h}\right)^{2n(N-1)} \int \exp\left\{\frac{it}{hN} \sum_0^{N-1} H(p_k, q_k) - \right.$$

$$\left. - \frac{2i}{h} \sum_1^{N-1} [(p_k - \xi_k)(\eta_{k+1} - \eta_k) - (q_k - \eta_k)(\xi_{k+1} - \xi_k)]\right\} \prod_1^{N-1} dp_\alpha dq_\alpha d\xi_\alpha d\eta_\alpha, \quad (41)$$

$$\xi_1 = p_0, \quad \eta_1 = q_0, \quad \xi_N = p, \quad \eta_N = q.$$

Совершая формальный предельный переход при $N \to \infty$, получаем

$$G(p, q \mid t) = \int \exp\left\{\frac{i}{h} \int_0^t \left[H(p(\tau), q(\tau)) + 2(p(\tau) - \xi(\tau)) \frac{d\eta}{d\tau} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2(q(\tau) - \eta(\tau)) \frac{d\xi}{d\tau}\right] d\tau\right\} \Pi \, dp \, dq \, d\xi \, d\eta, \quad (42)$$

$$\xi(0) = p(0), \quad \eta(0) = q(0), \quad \xi(t) = p, \quad \eta(t) = q.$$

Заметим, что с наивной точки зрения интеграл (42) совпадает с интегралом (38). Заменим в показателе интеграл подходящей интегральной суммой и обозначим полученное выражение через

$$S_N = \frac{i}{hN} \sum_0^{N-1} H(p_k, q_k) - \frac{2i}{h}\left[\sum_2^{N-1} (p_k - \xi_k)(\eta_{k+1} - \eta_k) - \right.$$

$$\left. - \sum_1^{N-1} (q_{k+1} - \eta_{k+1})(\xi_{k+1} - \xi_k) - (q_2 - \eta_2)\xi_1 - (q_N - \eta_N)\xi_N\right].$$

---

[1]) Для получения (41) используется тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_k & q_k & \eta_{k+1} \\ \xi_k & p_k & \xi_{k+1} \end{vmatrix} = -(p_k - \xi_k)(\eta_{k+1} - \eta_k) + (q_k - \eta_k)(\xi_{k+1} - \xi_k).$$

Интегрируя по ξ_k, $k=2, \ldots, N$, находим

$$\left(\frac{1}{\pi h}\right)^{2n(N-1)} \int e^{S_N} \Pi\, dp\, dq\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^{n(N-1)}} \int \exp\left\{ \frac{i}{hN} \sum_{0}^{N-1} H(p_k, q_k) - \frac{i}{h} \sum_{2}^{N-1} p_k (q_{k+1} - q_k) \right\} \Pi\, dp\, dq,$$

$$p_0 = p_N = p, \quad q_0 = q_N = q.$$

В показателе снова стоит интегральная сумма для действия (37). Таким образом, формула (38) нивелирует разницу между $\hat{q}\hat{p}$, $\hat{p}\hat{q}$ и вейлевскими символами. Нетрудно привести пример, когда все три сорта символов для оператора $\hat{H}$ совпадают, а для оператора $\exp\left(\frac{itH}{h}\right)$ различны:

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2), \quad H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \text{ во всех трех случаях},$$

$$G(p, q \mid t) = \frac{1}{\cos ht} \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{p^2+q^2}{2h} \operatorname{tg} ht + ipq \dfrac{1-\cos ht}{h \cos th}\right\} & \text{в } \hat{q}\hat{p}\text{-случае}, \\ \exp\left\{\dfrac{p^2+q^2}{2h} \operatorname{tg} ht - ipq \dfrac{1-\cos ht}{h \cos ht}\right\} & \text{в } \hat{p}\hat{q}\text{-случае}, \\ \exp\left\{\dfrac{p^2+q^2}{2h} \operatorname{tg} ht\right\} & \text{в вейлевском случае.} \end{cases} \tag{43}$$

Ввиду особой простоты оператора $\hat{H}$ равенства (43) легко проверяются непосредственно. Они могут быть также получены с помощью формулы $G(p, q \mid t) = \lim\limits_{N \to \infty} G_N(p, q \mid t)$, где G_N имеет вид (36), (40) или (41). Переходя от символов к ядрам по формуле (27), можно получить выражение для ядра $K_N(x, y)$ оператора $[\hat{U}(t/N)]^N$. Оно, однако, не имеет такого изящного вида, как в предыдущих случаях, и мы его опустим.

Вторичное квантование. Пользуясь формулой (31), получаем, что символ $G_N(a^*, a \mid t)$ оператора $[\hat{U}(t/N)]^N$ равен

$$G_N(a^*, a \mid t) =$$

$$= \int \exp\left\{ \frac{it}{hN} \sum_{0}^{N-1} H(a_k^*, a_{k+1}) + \frac{1}{h} \sum_{0}^{N-1} (a_k^* - a_{k+1}^*)\, a_{k+1} \right\} \prod_{1}^{N-1} da_k^*\, da_k, \tag{44}$$

$$a_0^* = a_N = a^*, \quad a_0 = a_N = a.$$

Формула (44) справедлива равным образом в бозевском и фермиевском случаях. Формальный предельный переход при $N \to \infty$ дает для G формулу

$$G(a^*, a \mid t) = \int \exp\left\{ \frac{i}{h} \int_0^t H(a^*(\tau), a(\tau))\, d\tau + \frac{1}{h} \int_0^t \frac{da^*}{d\tau} a(\tau)\, d\tau \right\} \Pi\, da^* da. \tag{45}$$

§ 3. Континуальные интегралы для S-матрицы

Пусть $\hat{S}(t_2, t_1) = e^{\frac{it_2}{h}\hat{H}_0} e^{-\frac{i}{h}(t_2-t_1)\hat{H}} e^{-\frac{it_1}{h}\hat{H}_0}$. Найдем в первом порядке по $\tau = t_1 - t_2$ символ оператора $\hat{S}(t_1, t_2)$. Воспользуемся интегральным уравнением

$$\hat{S}(t_2, t_1) = 1 - \frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2} \hat{V}(t) S(t, t_1)\, dt,$$
$$\hat{V}(t) = e^{\frac{it}{h}\hat{H}_0} \hat{V} e^{-\frac{it}{h}\hat{H}}, \quad \hat{V} = \hat{H} - \hat{H}_0. \tag{46}$$

Раскладывая $\hat{S}$ в ряд теории возмущений, находим

$$\hat{S}(t_2, t_1) = 1 - \frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2} \hat{V}(t)\, dt + (t_1 - t_2)^2 \hat{R}, \tag{47}$$

где $\hat{R}$ имеет конечный предел при $t_2 \to t_1$. Перейдя в (47) от операторов к символам, находим

$$S(t_2, t_1) = 1 - \frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt + (t_1 - t_2)^2 R = e^{-\frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt} + (t_1 - t_2)^2 r.$$

Возвращаясь к операторам, получаем

$$\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{U}(t_2, t_1) + (t_1 - t_2)^2 \hat{r}.$$

Заметим, что из определения $\hat{S}(t_2, t_1)$ следует тождество

$$\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{S}(t_2, t_2 - \tau)\hat{S}(t_2 - \tau, t_2 - 2\tau) \ldots \hat{S}(t_1 + \tau, t_1), \; \tau = (t_2 - t_1)/N. \tag{48}$$

Рассмотрим оператор

$$\hat{U}_N(t_2, t_1) = \hat{U}(t_2, t_2 - \tau)\hat{U}(t_2 - \tau, t_2 - 2\tau) \ldots \hat{U}(t_1 + \tau, t_1).$$

Так как $\hat{U}(t, t-\tau)$ отличается от $\hat{S}(t, t-\tau)$ на величину порядка $\tau^2 = \left(\frac{t_2 - t_1}{N}\right)^2$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{U}_N(t_2, t_1) = \hat{S}(t_2, t_1)$. Пусть $\hat{p}\hat{q}$-символ оператора $\hat{V}(t)$ равен $V(t \mid p, q)$. Для символа $U_N(t_2, t_1 \mid p, q)$ оператора $\hat{U}_N(t_2, t_1)$ справедлива формула

$$U_N(t_2, t_1 \mid p, q) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{h(N-1)} \int \exp\left\{-\frac{i}{h}\sum_0^{N-1}\int_{t_1 + k\tau}^{t_1 + (k+1)\tau} V(s \mid p_{k+1}, q_k)\, ds - \frac{i}{h}\sum_0^{N-1} p_{k+1}(q_{k+1} - q_k)\right\}\prod_0^{N-1} dp_k\, dq_k, \tag{49}$$

$$p_0 = p_N = p, \quad q_0 = q_N = q.$$

Аналогично получается выражение для $\hat{q}\hat{p}$-символа и для вейлевского символа оператора $\hat{U}_N$. Соответствующих формул мы приводить не будем [1]), отметим лишь, что во всех трех случаях показатель экспоненты является интегральной суммой для интеграла

$$K = -\frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2}\left(V(s\,|\,p(s),\quad q(s)) + p(s)\frac{dq}{ds}\right)ds.$$

В случае вторичного квантования функция U_N определяется интегралом

$$U_N(t_2,\ t_1\,|\,a^*,\ a) = \int \exp\left\{-\frac{i}{h}\sum_0^{N-1}\int_{t_1+k\tau}^{t_1+(k+1)\tau} V(s\,|\,a_k^*,\ a_{k+1})\,ds + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h}\sum_0^{N-1}(a_k^* - a_{k+1}^*)\,a_{k+1}\right\}\prod_1^{N-1} da_k^* da_{k+1}^*, \qquad (50)$$
$$a_0 = a_N = a, \quad a_0^* = a_N^* = a^*.$$

Если гамильтониан $\hat{H}_0$ квадратичен, $\hat{H}_0 = \sum \omega(p)\,\hat{a}^*(p)\,\hat{a}(p)$, то оператор $\hat{V}(s)$ и соответствующий ему символ легко вычисляются. Из формул

$$e^{\frac{it\hat{H}_0}{h}}\hat{a}(p)\,e^{-\frac{itH_0}{h}} = e^{-\frac{it\omega(p)}{h}}\hat{a}(p),\ e^{\frac{it\hat{H}_0}{h}}\hat{a}^*(p)\,e^{-\frac{it\hat{H}_0}{h}} = e^{\frac{it\omega(p)}{h}}\hat{a}^*(p)$$

следует, что

$$V(s\,|\,a^*,\ a) = V(\tilde{a}^*,\ \tilde{a}),\ \tilde{a}^*(p) = e^{\frac{is\omega(p)}{h}}a^*(p),\ \tilde{a}(p) = e^{-\frac{is\omega(p)}{h}}a(p), \quad (51)$$

$V(a^*,\ a)$ — символ оператора взаимодействия $\hat{V}$.

Формулы (50), (51) справедливы в равной мере в бозевском и фермиевском случаях. Показатель в (50) является интегральной суммой для интеграла

$$K = -\frac{i}{h}\int_{t_1}^{t_2} V(s\,|\,a^*(s),\ a(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_2}\frac{da^*(s)}{ds}a(s)\,ds.$$

Символ S оператора рассеяния получается из (49), (50) в результате последовательного предельного перехода [2]):

$$S = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty}}\ \lim_{N\to\infty} U_N.$$

---

[1]) Разница состоит в замене второго слагаемого в экспоненте (49) вторым слагаемым из экспонент подынтегральных выражений (40), (41) или (42) и в замене точек p_{k+1}, q_k в первом слагаемом на $(p_k,\ q_{k+1})$ или $(p_k,\ q_k)$ во втором.

[2]) В случае вторичного квантования $S = 0$ при рассмотренном ранее гамильтониане $\hat{H}_0$. Отличный от 0 предел возможен при гамильтониане

$$H_0 = \int \omega(p)\,a^*(p)\,a(p)\,dp,$$

характерном для систем с бесконечным числом степеней свободы.

§ 4. Выражение для статистической суммы

Заменяя в формулах (36), (40) — (42), (44) параметр t на $i\beta$, получим символ G_N оператора $[\hat{U}(i\beta/N)]^N$. Применяя формулы (10), (33) или (34), получим выражение для $\Xi_N(\beta) = \mathrm{Sp}\,[\hat{U}(i\beta/N)]^N$ в виде многократного интеграла, имеющего своим пределом при $N \to \infty$ статистическую сумму $\Xi(\beta/h) = \lim \Xi_N(\beta/h) = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta\hat{H}/h}$. Приведем окончательную формулу для случая вторичного квантования, являющегося наиболее важным:

$$\Xi_N(\beta/h) = \int \exp\left\{-\frac{\beta}{Nh}\sum_{0}^{N-1} H(a_k^*, a_{k+1}) + \frac{1}{h}\sum_{0}^{N-1}(a_k^* - a_{k+1}^*)\, a_{k+1}\right\} \times \\ \times \prod_{1}^{N} da_k^*\, da_k,$$

причем в фермиевском случае $a^*(N) = -a^*(0)$, $a(N) = -a(0)$ и в бозевском случае $a^*(N) = a^*(0)$, $a(N) = a(0)$. Разница между фермиевским и бозевским случаями вызвана различием формул следов (33) и (34).

§ 5. Формула Вика

В этом параграфе мы получаем выражение (38) для символа оператора $e^{\frac{it\hat{H}}{h}}$ с помощью формулы Вика[1]). Развиваемые здесь соображения условны в той же мере, как и сама формула (38). Ограничимся случаем $\hat{q}\hat{p}$-квантования и одной степенью свободы.

Согласно формуле Вика, $\hat{q}\hat{p}$-символ оператора $e^{\frac{it\hat{H}}{h}}$ равен

$$G(p, q \mid t) = \exp\left\{\int_0^t\int_0^t \frac{\delta}{\delta q(t_1)}\,\Delta(t_1 - t_2)\,\frac{\delta}{\delta p(t_2)}\,dt_1 dt_2\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{h}\int_0^t H(p(\tau), q(\tau))\,d\tau\right\}. \quad (52)$$

Формулу (52) надо понимать следующим образом. Прежде всего в качестве аргументов p, q следует подставить в символ $H(p, q)$ произвольные функции $p(\tau)$, $q(\tau)$. Далее к функционалу

$$\exp\left\{\frac{i}{h}\int_0^t H(p(\tau), q(\tau))\,d\tau\right\},$$

[1]) Наиболее удобный для понимания этого параграфа вывод формулы Вика см. в [9]. Для получения формул (52), (53) следует применить содержащиеся в [9] соображения к операторам $\hat{p}\,\hat{q}$ вместо $\hat{a}$ и $\hat{a}^*$ и положить $\hat{H} = 0$.

применяется оператор

$$\exp\left\{\int_0^t\int_0^t \frac{\delta}{\delta q(t_1)}\Delta(t_1-t_2)\frac{\delta}{\delta p(t_2)}dt_1\,dt_2\right\}.$$

Результатом будет опять функционал от функций $p(\tau)$, $q(\tau)$. Значением этого функционала на функциях $p(\tau)=p$, $q(\tau)=q$, не зависящих от τ, служит функция $G(p, q\,|\,t)$.

Функция Δ является разностью между T-произведением и нормальной формой. В нашем случае

$$T(\hat p(t_1), \hat q(t_2)) = \theta(t_2-t_1)\,\hat p(t_1)\hat q(t_2)+\theta(t_1-t_2)\,\hat q(t_2)\hat p(t_1) = \\ = -ih\theta(t_2-t_1)+\hat q(t_2)\,\hat p(t_1).$$

Таким образом,

$$\Delta(t_1, t_2) = -ih\theta(t_2-t_1). \tag{53}$$

Заменим все интегралы в (52) интегральными суммами и положим $q(t_k)=q_k$, $p(t_k)=p_k$. Тогда функция G заменится функцией $\tilde G = e^R F$, где

$$R=\sum\frac{\partial}{\partial q_k}\Delta(t_k-t_j)\frac{\partial}{\partial p_j}\alpha_l\alpha_j$$

— дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и

$$F=\exp\left\{\frac{i}{h}\sum\alpha_k H(p_k, q_k)\right\}$$

Так как R — оператор с постоянными коэффициентами, то e^R — оператор свертки с функцией Φ, являющейся преобразованием Фурье функции

$$r=\exp\left\{-\sum u_k\Delta_{kj}v_j\right\},\quad \Delta_{kj}=\Delta(t_k-t_j)\,\alpha_k\alpha_j.$$

Непосредственно вычислить преобразование Фурье от функции r нельзя, так как квадратичная форма $\sum u_k\Delta_{kj}v_j$ не положительно определена. Поэтому мы, как всегда в таких случаях, заменим функцию r функцией

$$r_\varepsilon=\exp\left\{-(u, v)\,A_\varepsilon^{(N)}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\right\},$$

где $A_\varepsilon^{(N)}$ — положительно определенная матрица и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u, v)\,A_\varepsilon^{(N)}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\sum u_k\Delta_{kj}v_j.$$

Затем вычислим преобразование Фурье функций r_ε и положим $\varepsilon=0$. Преобразование Фурье функций r_ε равно

$$\tilde r_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A_\varepsilon)}}\,e^{-\frac{1}{4}(q, p)\,A_\varepsilon^{(N)-1}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}}.$$

Предэкспоненциальный множитель отнесем к нормировке дифференциалов $\Pi\,dp\,dq$ и в дальнейшем не будем на него обращать внимания. Матрицу $A_\varepsilon^{(N)}$ выберем таким образом, чтобы при $N \longrightarrow \infty$ она превращалась в оператор

$$A_\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon u(\tau) - \frac{ih}{2} \int\limits_0^t \theta(\tau - \tau') \, v(\tau') \, d\tau' \\ -\frac{ih}{2} \int\limits_0^t \theta(\tau' - \tau) \, u(\tau') \, d\tau' + \varepsilon v(\tau) \end{Bmatrix}. \tag{54}$$

Так как в дальнейшем нас интересует предел при $N \longrightarrow \infty$, вместо матрицы $A_\varepsilon^{(N)}$ обратим сразу оператор (54). Для этого следует решить уравнение

$$A_\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя, находим

$$q'(\tau) = \varepsilon u'(\tau) - \frac{ih}{2} v(\tau), \quad p'(\tau) = \varepsilon v'(\tau) + \frac{ih}{2} u(\tau). \tag{55}$$

Кроме того, из самого уравнения следует, что

$$q(0) = \varepsilon u(0), \quad p(t) = \varepsilon v(t). \tag{56}$$

Полагая в (55) и (56) $\varepsilon = 0$, получаем

$$v(\tau) = \frac{2i}{h} q'(\tau), \quad u(\tau) = -\frac{2i}{h} p(\tau), \quad q(0) = p(t) = 0. \tag{57}$$

Поэтому в пределе при $\varepsilon \longrightarrow 0$ показатель в (53) равен

$$-\frac{1}{4}(q, \ p) \begin{pmatrix} -\frac{2i}{h} p' \\ \frac{2i}{h} q' \end{pmatrix} = -\frac{i}{2h} \int\limits_0^t \left(p \frac{dq}{d\tau} - q \frac{dp}{d\tau} \right) d\tau =$$

$$= -\frac{i}{h} \int\limits_0^t p \frac{dq}{d\tau} \, d\tau \tag{58}$$

(для получения последнего равенства использованы граничные условия (57)).

Заметим, что последний интеграл в (58) является пределом интегральных сумм вида

$$p_1 q_1 + p_2 (q_2 - q_1) + \ldots + p_N (q_N - q_{N-1}).$$

Поэтому интеграл

$$\int\limits_0^t (p(\tau) - p) \frac{d}{d\tau} (q(\tau) - q) \, d\tau$$

является пределом интегральных сумм

$$(p_1 - p)(q_1 - q) + (p_2 - p)(q_2 - q_1) + \ldots + (p_N - p)(q_N - q_{N-1}) =$$
$$= p_1 (q_1 - q) + p_2 (q_2 - q_1) + \ldots + p_N (q_N - q_{N-1}) + p(q - q_N). \tag{59}$$

Правая часть (59) совпадает со вторым слагаемым в показателе формулы (36). Таким образом, мы вновь возвращаемся к (37).

Заключение

Приведем некоторые критерии ограниченности оператора.

А. Если $f(p, q)$ есть $\hat{q}\hat{p}$-символ оператора A, то

$$(A\xi, \eta) = \int f(p, x)\, \tilde{\xi}(p)\, \bar{\eta}(x)\, e^{\frac{i}{h} px}\, dp\, dx = (B\tilde{\xi}, \eta),$$

где B — оператор с ядром, равным $f(x, y)\, e^{\frac{i}{h} xy}$,

$$\tilde{\xi}(p) = (2\pi h)^{-n} \int \xi(y)\, e^{-\frac{i}{h} py}\, dy,$$

$$\int |\tilde{\xi}(p)|^2\, dp = (2\pi h)^{-n} \int |\xi(x)|^2\, dx.$$

Если ξ, η независимо пробегают единичную сферу в L_2, то тем же свойством обладают $(2\pi h)^{n/2}\tilde{\xi}$ и η. Поэтому

$$\|A\| = \sup_{\|\xi\| = \|\eta\| = 1} |(A\xi, \eta)| = (2\pi h)^{-n/2} \|B\|.$$

Б. Если $f(p, q)$ — $\hat{p}\hat{q}$-символ оператора A, то те же соображения показывают, что

$$\|A\| = (2\pi h)^{-n/2} \|B\|,$$

где B — оператор с ядром, равным $f(x, y)\, e^{-\frac{i}{h} xy}$.

В. Если $f(p, q)$ — вейлевский символ оператора A, то

$$(A\xi, \eta) = (2\pi h)^{-n} \int f(p, q)\, e^{\frac{ps}{ih}}\, \xi\left(q - \frac{s}{2}\right) \bar{\eta}\left(q + \frac{s}{2}\right) dp\, dq\, ds.$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского,

$$\left| \int \xi\left(q - \frac{s}{2}\right) \bar{\eta}\left(q + \frac{s}{2}\right) ds \right| \leqslant 2^n \left(\int |\xi(x)|^2\, dx \int |\eta(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$|(A\xi, \eta)| \leqslant (\pi h)^{-n} \int |f(p, q)|\, dp\, dq\, \|\xi\|\, \|\eta\|,$$

$$\|A\| \leqslant (\pi h)^{-n} \int |f(p, q)|\, dp\, dq.$$

Сформулируем несколько вопросов, решение которых помогло бы прояснению математической природы затронутых в настоящей статье задач.

1. Высказываемые в статье утверждения о том, что тот или иной конечнократный интеграл G_N имеет своим пределом при $N \to \infty$ символ оператора $e^{\frac{it\hat{H}}{h}}$ или оператора рассеяния, являются не более чем вероятными гипотезами[1]). Доказательство этих гипотез, а также выяснение, в какой мере окончательный

[1]) Соображения по этому поводу, высказываемые в § 2, кажутся убедительными, однако не имеют силы математического доказательства.

результат не зависит от деталей конечномерной аппроксимации, является актуальной задачей[1]). Отмечу в связи с этим, что интеграл по мере Винера гораздо устойчивее по отношению к изменению конечномерных аппроксимаций, чем рассматриваемые в этой статье интегралы Фейнмана.

2. За исключением вейлевских и виковских символов, детально изученных в [8—10], ни для каких других нет теорем об аппроксимации оператора, заданного произвольным символом, операторами с полиномиальными символами.

3. Рассмотренные в этой статье символы очень по-разному ведут себя при переходе к бесконечному числу степеней свободы. В работе [8] показано, что с помощью вейлевского квантования в случае бесконечного числа степеней свободы нельзя сопоставить никакой символ оператору Гильберта—Шмидта (или, несколько видоизменив определение квантования, можно ядерные, но нельзя единичный). С другой стороны, из [9] известно, что с помощью виковского квантования можно сопоставить символ любому ограниченному оператору. Как обстоит дело с $\hat{p}\hat{q}$- и $\hat{q}\hat{p}$-квантованиями, не известно.

4. Соответствие между операторами и символами полностью определяется формулами, выражающими символы операторов $\hat{p}\hat{A}$, $\hat{A}\hat{p}$, $\hat{q}\hat{A}$, $\hat{A}\hat{q}$ через символ оператора $\hat{A}$. Будем говорить, что задано *линейное квантование*, если эти формулы имеют вид

$$\hat{p}_i\hat{A} \leftrightarrow L^1_{p_i}A,\quad \hat{A}\hat{p}_i \leftrightarrow L^2_{p_i}A,\quad \hat{q}_i\hat{A} \leftrightarrow L^1_{q_i}A,\quad \hat{A}\hat{q}_i \leftrightarrow L^2_{q_i}A,$$

где L^1_p и т. д.— дифференциальные операторы первого порядка, у которых коэффициенты при производных постоянны, а свободные члены линейны. Например,

$$L^1_{p_i}A = \sum \left(\alpha^{(1)}_{ij} p_j + \beta^{(1)}_{ij} q_j + \gamma^{(1)}_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} + \delta^{(1)}_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}\right) A$$

(матрицы $\alpha^{(1)}_{ij}$ и т. д. не произвольны: они удовлетворяют соотношениям, вытекающим из правила коммутации $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -ih\delta_{ij}$). Было бы очень интересно построить общую теорию линейного квантования, например получить критерии принадлежности оператора тому или иному классу (т. е. критерии ограниченности, ядерности и т. п.), научиться решать вопросы 1—3 в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feynmann R.— Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, p. 367.
2. Feynmann R.— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 108.
3. Фаддеев Л. Д.— ТМФ, 1969, т. 1, № 1, с. 3—18.

---

[1]) В частности, было бы очень интересно довести вывод интеграла Фейнмана из формулы Вика, намеченный в § 3, до полной корректности (хотя бы для гамильтонианов с полиномиальными символами $H(p, q)$).

4. Faddeev L., Popov I. V.— Phys. Lett., 1967, v. 25B, p. 29.
5. Fradkin E. S., Tyutin I. V.— Preprint Intern. centre for theor. Phys. Miramare-Trieste, 1970.
6. Псевдодифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.
8. Березин Ф. А.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. XVII, с. 117.
9. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
10. Оксак А. И. О нормальной форме операторов в пространстве Фока: Препринт ОИЯИ.— Дубна: ОИЯИ, 1968.
11. Далецкий Ю. Л.— УМН, 1962, т. 17.

Глава II

ВИКОВСКИЕ И АНТИВИКОВСКИЕ СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРОВ [1])

Введение

1. В статье рассматриваются операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, имеющие виковские и антивиковские символы.

Приняты следующие обозначения и термины. Операторы и векторы в абстрактном пространстве обозначаются буквами с крышками сверху: $\hat{A}$, $\hat{\varphi}$ и т. п. В случае, когда гильбертово пространство каким-либо образом реализовано с помощью функций, функция, отвечающая вектору φ, называется *символом* этого вектора и обозначается буквой без крышки. Если вектору $\hat{f}$ соответствует символ f, то символ вектора $\hat{A}\hat{f}$ обозначается через $\hat{A}f$. Если оператору $\hat{A}$ каким-либо образом сопоставлена функция, эта функция называется *символом* оператора $\hat{A}$. Виковские и антивиковские символы оператора A обозначаются соответственно через $A(\bar{z}, z)$ и $\overset{\circ}{A}(z, \bar{z})$, $z=(z_1, \ldots, z_n) \in C_n$. Пространство, в котором действуют операторы, допускающие виковские или антивиковские символы, допускает естественную реализацию с помощью целых функций n комплексных переменных $\bar{z}=(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ со скалярным произведением

$$(f, g)=\frac{1}{h^n}\int f(\bar{z})\,\overline{g(\bar{z})}\,e^{-\frac{z\bar{z}}{h}}\,\Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (1)$$

Здесь и далее употребляются обозначения $z=(z_1, \ldots, z_n) \in C_n$, $\bar{z}=(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, $zv=\sum z_k v_k$, $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$, $\Pi\, dz\, d\bar{z}=\frac{1}{\pi^n}\Pi\, dx_i\, dy_i$, $x_i=\operatorname{Re} z_i$, $y_i=\operatorname{Im} z_i$, $dx=\prod_1^n dx_i$.

Описанное гильбертово пространство в дальнейшем обозначается через F_2 [2]). Вектор $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$ называется *финитным*, если его

---

[1]) Мат. сб., 1971, т. 86, № 4, с. 578—610.

[2]) По аналогии с L_2 в честь В. А. Фока, введшего это пространство в 1932 г. [1] и 1934 г. [2]. (Скалярное произведение в [1, 2] записывалось не

символ $\varphi \in F_2$ — полином. Оператор $\hat{A}$, обладающий виковским символом A, действует в F_2 по формуле

$$(\hat{A}f)(\bar{z}) = \frac{1}{h^n} \int A(\bar{z}, v) f(\bar{v}) e^{-\frac{1}{h} v(\bar{v} - \bar{z})} \Pi\, dv\, d\bar{v}. \qquad (2)$$

Оператор $\hat{A}$, обладающий антивиковским символом $\mathring{A}$, действует в F_2 по формуле

$$(\hat{A}f)(\bar{z}) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(v, \bar{v}) f(\bar{v}) e^{-\frac{1}{h} v(\bar{v} - \bar{z})} \Pi\, dv\, d\bar{v}. \qquad (3)$$

Виковский и антивиковский символы одного и того же оператора связаны соотношением

$$A(\bar{z}, z) = \frac{1}{h^n} \int e^{-\frac{1}{h}(z - v)(\bar{z} - \bar{v})} \mathring{A}(v, \bar{v}) \Pi\, dv\, d\bar{v}. \qquad (4)$$

Виковские и антивиковские символы обладают рядом свойств, в известном смысле двойственных. Результаты статьи состоят в установлении следующих фактов:

1) Пусть значения квадратичной формы $(A\hat{\varphi}, \hat{\varphi})$ для $\hat{\varphi}$ из некоторого плотного множества образуют в комплексной плоскости множество $\mathcal{D}(\hat{A})$, значения виковского символа $A(\bar{z}, z)$ — множество $\mathcal{D}(A)$, выпуклая оболочка значений антивиковского — множество $\mathcal{D}(\mathring{A})$. Справедливы включения

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\hat{A}) \subset \mathcal{D}(\mathring{A}).$$

В частности, для того чтобы оператор $\hat{A}$ был ограничен, необходимо, чтобы его виковский символ был ограничен, и достаточно, чтобы был ограничен антивиковский символ.

Справедлива оценка $\sup |A(\bar{z}, z)| \leqslant \|\hat{A}\| \leqslant \sup |\mathring{A}(z, \bar{z})|$.

2) Если оператор $\hat{A}$ определен на финитных векторах, его замыкание самосопряжено и он обладает антивиковским символом $\mathring{A}$, причем $\int |\mathring{A}|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} < \infty$, $p > 1$, то он обладает также виковским символом A и

$$\mathcal{D}(A) \subset \sigma(\hat{A}) \subset \mathcal{D}(\mathring{A}),$$

где $\sigma(\hat{A})$ — выпуклая оболочка спектра $\hat{A}$.

3) Для того чтобы оператор $\hat{A}$ был ядерным, необходимо, чтобы виковский символ был суммируем, и достаточно, чтобы антивиковский символ был суммируем. При этом справедлива формула

$$\operatorname{Sp} \hat{A} = \frac{1}{h^n} \int A(\bar{z}, z) \Pi\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (5)$$

с помощью интегралов, а с помощью рядов по коэффициентам ряда Тейлора функции f. Запись скалярного произведения с помощью интеграла (1) впервые опубликована в [3].)

4) Для того чтобы оператор $\hat{A}$ был вполне непрерывен, необходимо, чтобы его виковский символ $A(\bar{z}, z)$ стремился к нулю при $|z| \to \infty$, и достаточно, чтобы его антивиковский символ $\mathring{A}(z, \bar{z})$ стремился к нулю при $|z| \to \infty$.

5) Пусть $\mathring{A} > 1$, $\int |\mathring{A}|^p e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z} < \infty$, $p > 2$. Рассмотрим пространство $H_A \subset F_2$ функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z})\, f(\bar{z})\, \overline{g(\bar{z})}\, e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}}\, \Pi\, dz\, d\bar{z}.$$

Обозначим через $\tilde{H}_A$ пополнение множества полиномов в H_A и через $\mathscr{D}_A$ множество таких функций $f \in \tilde{H}_A$, для которых $(\hat{A}f)(\bar{z}) \in F_2$, где $\hat{A}f$ определяется формулой (3). Оператор $\hat{A}$, определяемый формулой (3), на $\mathscr{D}_A$ самосопряжен.

Пространство $\tilde{H}_A$ совпадает с H_A, если $\mathring{A}$ удовлетворяет условию $\mathring{A}(\theta z, \bar{\theta}\bar{z}) \leqslant c\mathring{A}(z, \bar{z})$ при некотором c, произвольном θ, $|\theta| = 1$, и достаточно большом $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ $(\theta z = (\theta z_1 \ldots \theta z_n))$.

6) Если $\hat{H}$ — самосопряженный оператор, обладающий как виковским, так и антивиковским символом, то

$$\frac{1}{h^n} \int e^{-tH(\bar{z}, z)} \Pi\, dz\, d\bar{z} \leqslant \operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} \leqslant \frac{1}{h^n} \int e^{-t\mathring{H}(z, \bar{z})} \Pi\, dz\, d\bar{z}, \tag{6}$$

причем ядерность оператора $e^{-t\hat{H}}$ следует из существования интеграла в правой части выражения (6).

Первая часть неравенства (6) является следствием формулы (5) и оценки виковского символа $U(\bar{z}, z \mid t)$ оператора $e^{-t\hat{H}}$:

$$U(\bar{z}, z \mid t) \geqslant e^{-tH(\bar{z}, z)}.$$

Правое неравенство в (6) аналогично известному неравенству Фейнмана для операторов в L_2 вида

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + v(\hat{q})$$
$$\left(\hat{p}^2 = \hat{p}_1^2 + \ldots + \hat{p}_n^2,\ \hat{q} = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n),\ (\hat{p}_k f)(x) = \frac{h}{i} \frac{\partial f}{\partial x_k},\right.$$
$$\left.(\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x)\right).$$

Неравенство Фейнмана гласит:

$$\operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} \leqslant \frac{1}{(\pi h)^n} \int e^{-t(p^2 + v(q))}\, d^n p\, d^n q. \tag{7}$$

Доказательство неравенства (7) основано на представлении оператора $e^{-t\hat{H}}$ с помощью интеграла по мере Винера и не переносится на операторы, не имеющие вида $\hat{p}^2 + v(\hat{q})$. Для операторов указанного вида неравенство (7) дает более точную оценку, чем правая часть выражения (6).

Формула (6) при весьма широких предположениях позволяет получить асимптотику числа $N_h(E)$ собственных чисел, меньших E:

$$N_h(E)=\frac{1+o(1)}{h^n}\int\limits_{\mathring{H}<E}\Pi\,dz\,d\bar{z}=\frac{1+o(1)}{h^n}\int\limits_{H<E}\Pi\,dz\,d\bar{z}\ \text{ при } h\to 0, \tag{8}$$

$$N_h(E)=\frac{1+o(1)}{h^n}\int\limits_{\mathring{H}<E}\Pi\,dz\,d\bar{z}=\frac{1+o(1)}{h^n}\int\limits_{H<E}\Pi\,dz\,d\bar{z}\ \text{ при } E\to\infty. \tag{9}$$

Хотя формулы (8) и (9) совпадают, условия их вывода различны: для вывода (8) требуется лишь, чтобы левая и правая части (6) имели после умножения на h^n одинаковые пределы при $h\to 0$, для вывода (9) дополнительно требуется некоторое условие регулярности символов H и $\mathring{H}$, а также, чтобы

$$\int\limits_{\mathring{H}<E}\Pi\,dz\,d\bar{z}=AE^{\gamma}(1+o(1)),\qquad \gamma>0. \tag{10}$$

Последнее условие необходимо для применимости тауберовой теоремы Карамата и представляется излишне жестким для справедливости формулы (9).

Формулы (8) и (9) до настоящего времени были доказаны лишь для дифференциальных операторов (см. обзоры [4, 5]). Область применимости (8) в настоящей работе весьма сильно увеличивается, область применимости (9) расширяется гораздо менее значительно в связи с условием (10).

К сожалению, из (6) не удается получить адекватных этому неравенству оценок сверху и снизу для $N_h(E)$. Что же касается формул (8) и (9), они могут быть безусловно выведены на основании изучения лишь виковских символов, и для их справедливости наличие у оператора антивиковского символа не обязательно.

2. Возникает естественный вопрос: какие функции от z, $\bar{z}$ могут служить виковскими или антивиковскими символами операторов и какие операторы имеют такого рода символы?

Оказывается, если оператор $\hat{A}$ ограничен, он всегда имеет виковский символ A, который является значением при $v=\bar{z}$ целой функции $A(v,z)$, допускающей следующую оценку:

$$|A(v,z)|\leqslant\|A\|\,e^{\frac{1}{2h}(v-\bar{z})(\bar{v}-z)}.$$

О неограниченных операторах, имеющих виковские символы, см. в п. 3.

Об антивиковских символах получен следующий результат: если $\mathring{A}(z,\bar{z})$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\int|\mathring{A}(z,\bar{z})|^p\,e^{-\frac{z\bar{z}}{h}}\,\Pi\,dz\,d\bar{z}<\infty,\qquad p>2, \tag{11}$$

то $\mathring{A}$ является антививковским символом некоторого оператора в E_2 с плотной областью определения.

Заведомо не все ограниченные операторы имеют антивиковские символы, являющиеся обычными функциями. В § 3 приводится пример оператора, антивиковский символ которого естественно считать равным $\delta(z-a)\,\delta(\bar{z}-\bar{a})$, где δ есть δ-функция Дирака. В настоящей статье однако не рассматриваются операторы, антивиковские символы которых являются обобщенными функциями.

3. Пространство $\mathscr{H}$, в котором действует оператор $\hat{A}$, может быть реализовано не только как F_2, но и более привычным способом: как L_2-пространство функций n вещественных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ с суммируемым квадратом модуля по лебеговской мере в R_n. Каким операторам в L_2 можно естественным образом сопоставить виковские или антивиковские символы?

Ответ для виковских символов: если в область определения квадратичной формы $(\hat{A}\hat{f}, \hat{f})$ входят при всех z векторы $\hat{f}_z$ с символами

$$f_z(x)=\frac{1}{(\pi h)^{n/4}} \exp\left\{-\frac{1}{2h}\left(x^2-2\sqrt{2}\,xz+z^2+|z|^2\right)\right\},$$

то оператор $\hat{A}$ имеет виковский символ, равный $A(\bar{z}, z)=$ $=\left(\hat{A}\hat{f}_{\bar{z}}, \hat{f}_{\bar{z}}\right)$.

В частности, виковские символы имеют все ограниченные операторы и дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами.

Ответ для антивиковских символов: ядро $K(x, y)$ оператора $\hat{A}$ должно допускать интегральное представление

$$K(x, y)= =\frac{\pi^n}{(\pi h)^{3n/2}} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \exp\left\{-\frac{1}{2h}\left[x^2+y^2-2\sqrt{2}\,(\bar{z}y+zx)+ +(z+\bar{z})^2\right]\right\} \Pi\, dz\, d\bar{z},$$

где $\mathring{A}$ — антивиковский символ $\hat{A}$. В частности, любой дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами имеет антивиковский символ. (В этом случае $K(x, y)$ — обобщенная функция, $\mathring{A}$ — полином.)

Для дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами виковские и антивиковские символы могут быть, помимо общих формул, найдены с помощью следующей чисто алгебраической процедуры. Пусть

$$\hat{A}=\sum \tilde{A}_{k_1 \ldots k_n;\, l_1 \ldots l_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}= =\sum \tilde{A}_{k_1 \ldots k_n;\, l_1 \ldots l_n}\left(\frac{i}{h}\right)^{l_1+\ldots+l_n} \hat{q}_1^{k_1} \ldots \hat{q}_n^{k_n} \hat{p}_1^{l_1} \ldots \hat{p}_n^{l_n},$$

где $\hat{q}_k$, $\hat{p}_k$ — операторы в L_2:

$$(\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x), \quad (\hat{p}_k f)(x) = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} f(x).$$

Положим $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k + i\hat{p}_k)$, $\hat{a}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k - i\hat{p}_k)$. Легко видеть, что $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^*] = \delta_{kk'} hE$, $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0$. Выразим теперь $\hat{q}_k$, $\hat{p}_k$ через $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ и, пользуясь перестановочными соотношениями между $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$, запишем $\hat{A}$ в виде

$$\hat{A} = \sum \hat{A}_{l_1 \ldots l_n;\, k_1 \ldots k_n} \hat{a}_1^{*l_1} \ldots \hat{a}_n^{*l_n} \hat{a}_1^{k_1} \ldots \hat{a}_n^{k_n} = \\ = \sum \mathring{A}_{l_1 \ldots l_n;\, k_1 \ldots k_n} \hat{a}_1^{l_1} \ldots \hat{a}_n^{l_n} \hat{a}_1^{*k_1} \ldots \hat{a}_n^{*k_n}.$$

Первый способ записи $\hat{A}$ через $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ называется *виковской нормальной формой*, второй — *антивиковской*. Виковскими и антивиковскими символами $\hat{A}$ служат полиномы

$$A(\bar{z}, z) = \sum A_{l_1 \ldots l_n;\, k_1 \ldots k_n} \bar{z}_1^{l_1} \ldots \bar{z}_n^{l_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$$
$$\mathring{A}(z, \bar{z}) = \sum \mathring{A}_{l_1 \ldots l_n;\, k_1 \ldots k_n} z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n} \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n}.$$

Применение общих теорем показывает, что если оператор $\hat{A}$, определенный на пространстве Шварца S, симметричен, то оба символа A и $\mathring{A}$ принимают лишь вещественные значения; если символ $\mathring{A}$ сверх того полуограничен и $\mathring{A}(\theta z, \bar{\theta}\bar{z}) \leqslant C\mathring{A}(z, \bar{z})$, то $\hat{A}$ самосопряжен на естественной области определения. Показано, что если оператор $\hat{A}$ имеет антивиковский символ, удовлетворяющий условию (11), то он является сильным пределом на некотором плотном множестве дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

4. Конструкция виковских и антивиковских символов укладывается в следующую абстрактную схему. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ имеется система векторов $\hat{f}_\alpha$, α пробегает некоторое множество с мерой M, так что для любого $\hat{f} \in \mathcal{H}$ справедливо тождество

$$(\hat{f}, \hat{f}) = \int |(\hat{f}, \hat{f}_\alpha)|^2 \, d\mu(\alpha).$$

Обозначим через $\hat{P}_\alpha$ проектор на $\hat{f}_\alpha$. Если оператор $\hat{A}$ представим в виде

$$\hat{A} = \int \mathring{A}(\alpha) \hat{P}_\alpha \, d\mu(\alpha),$$

то функцию $\mathring{A}(\alpha)$ назовем *контравариантным символом* оператора $\hat{A}$. Если определена квадратичная форма $A(\alpha) = (\hat{A}\hat{f}_\alpha, \hat{f}_\alpha)$, то функцию $A(\alpha)$ назовем *ковариантным символом* оператора $\hat{A}$.

Пространство $\mathcal{H}$ вкладывается в $L_2(M)$ с помощью изометрии $\hat{f} \to (\hat{f}, \hat{f}_\alpha)$. Проектор из $L_2(M)$ в $\mathcal{H}$ обозначим через $\hat{T}$. Очевидно, что каждый оператор в $\mathscr{H}$, имеющий контравариантный символ $\mathring{A}$, представим в виде $\hat{A}=\hat{T}\hat{B}\hat{T}$, где $\hat{B}$ — оператор умножения на $\mathring{A}$ в $L_2(M)$.

В конструкции виковских и антивиковских символов роль векторов $\hat{f}_\alpha$ играют пуассоновские векторы (см. ниже § 1), причем антивиковские символы являются контравариантными, а виковские — ковариантными. Основная часть результатов статьи (оценка квадратичной формы, спектра, $\operatorname{Sp} e^{-t\hat{A}}$, условия ограниченности и ядерности оператора) переносятся на общий случай без изменения в доказательствах.

5. Виковские символы операторов введены в [6] в связи с потребностями метода вторичного квантования. Они естественным образом возникают из записи оператора в так называемой виковской нормальной форме: слева — оператор рождения, справа — оператор уничтожения. Антивиковские символы возникают из записи оператора в противоположной нормальной форме: слева — оператор уничтожения, справа — оператор рождения. Эти символы ранее рассматривались в работах по квантовой оптике (см. [7] и дальнейшие ссылки в этой книге и в [8] [1])).

Виковские символы довольно подробно изучены в [9]. Сведения о них в настоящей статье приводятся главным образом с целью сделать ее по возможности независимой [2]).

В статье сохранены не совсем обычные в чисто математической литературе обозначения, ставшие уже традиционными в математической физике. В частности, основное пространство F_2 состоит из аналитических функций не переменного z, а $\bar{z}$ (т. е. антианалитических функций z); аргумент функции иногда обозначается буквой a. Параметр h, введенный по мотивам плаковской постоянной, не играет роли в предлагаемой работе [3]) и служит лишь для придания большей выразительности некоторым формулам.

В заключение автор приносит благодарность М. А. Шубину за многочисленные обсуждения затронутых в этой статье вопросов.

§ 1. Виковские символы

1. Основные определения. Пусть $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$, $k=1, 2, \ldots, n$, — операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ со свойствами:

1) операторы $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ имеют при всех k общую, плотную, инвариантную область определения D;

---

[1]) В работах по квантовой оптике антивиковские символы встречаются в сильно замаскированном виде под названием «диагональное представление операторов».

[2]) В [9] рассмотрен лишь случай $h=1$. На случай произвольного $h>0$ все результаты переносятся автоматически.

[3]) За исключением § 4, где используется квазиклассическая асимптотика числа $N_h(E)$ собственных чисел, меньших E (см. (8)).

2) для любого $\hat{f} \in D$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]\hat{f} = [\hat{a}_k^*, \hat{a}_{k'}^*]\hat{f} = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^*]\hat{f} = \hat{f}h\delta_{kk'}, \quad h > 0; \quad (1.1)$$

3) если оператор $\hat{A}$ определен на D, $\hat{A}D \subset D$ и $[\hat{a}_k, \hat{A}] = [\hat{a}_k^*, \hat{A}] = 0$, то $\hat{A} = \lambda E$;

4) оператор $\hat{N} = \sum\limits_1^n \hat{a}_k^* \hat{a}_k$ симметричен на D и имеет нулевые индексы дефекта;

5) операторы $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^*$ эрмитовски сопряжены.

Операторы $\hat{a}_k^*$, $\hat{a}_k$ с этими свойствами хорошо известны в квантовой механике и называются соответственно *операторами рождения* и *уничтожения* частицы в состоянии k. Оператор $\hat{N}$ называется *оператором числа частиц*.

Из 1)—5) следует (см., например, [10]), что в пространстве $\mathscr{H}$ существует единственный с точностью до множителя вектор $\hat{\varphi}_0$, называемый *вакуумным*, удовлетворяющий условиям $\hat{a}_k\hat{\varphi}_0 = 0$. В дальнейшем считается, что $\|\hat{\varphi}_0\| = 1$.

Любой вектор $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$ может быть представлен в виде

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_i} \frac{1}{\sqrt{m!}} F_m(k_1, \ldots, k_m)\, \hat{a}_{k_1}^* \ldots \hat{a}_{k_m}^* \hat{\varphi}_0. \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что

$$(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) = \sum_m \sum_{k_i} |F_m(k_1, \ldots, k_m)|^2 h^m. \quad (1.3)$$

Вектору (1.2) сопоставим символ

$$\varphi(\bar{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_i} \frac{1}{\sqrt{m!h^m}} F_m(k_1, \ldots, k_m)\, \bar{a}_{k_1} \ldots \bar{a}_{k_m},$$

где a_k—комплексное переменное. Из (1.3) следует, что $\varphi(\bar{a})$—целая функция n комплексных переменных $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$.

Вектор $\hat{\varphi}$ называется *финитным*, если его символ—полином. (Множество финитных векторов образует область D, упомянутую в начале этого параграфа.)

Вектор $\hat{\varphi}_z$ называется (*нормированным*) *пуассоновским*, если его символ имеет вид[1])

$$\varphi_z(\bar{a}) = \exp\left\{\frac{1}{h}\left(\bar{a}z - \frac{1}{2}z\bar{z}\right)\right\}. \quad (1.4)$$

Скалярное произведение (1.3) может быть выражено непосредст-

[1]) В квантовой оптике пуассоновские векторы известны под названием «когерентные состояния».

венно через символы векторов с помощью интеграла:

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \frac{1}{h^n} \int \varphi(\bar{a}) \overline{\psi(\bar{a})} e^{-\frac{1}{h} \bar{a}a} \Pi \, da \, d\bar{a}. \tag{1.5}$$

Те и только те целые функции служат символами векторов из $\mathcal{H}$, для которых

$$\int |\varphi(\bar{a})|^2 e^{-\frac{a\bar{a}}{h}} \Pi \, da \, d\bar{a} < \infty.$$

Рассмотрим операторы вида

$$\hat{A}_{m,n} = \sum K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n) \hat{a}^*_{k_1} \ldots \hat{a}^*_{k_n} \hat{a}_{l_1} \ldots \hat{a}_{l_n}. \tag{1.6}$$

Область определения операторов $\hat{A}_{m,n}$ содержит, во всяком случае, множество D, состоящее из финитных векторов.

Оператор $\hat{A}$ называется *представимым в виковской нормальной форме*, если он равен сумме ряда, слабо сходящегося на D:

$$A = \sum \hat{A}_{m,n},$$

$\hat{A}_{m,n}$ — операторы вида (1.6). Если сумма конечна, то оператор $\hat{A}$ называется *полиномиальным*. Оператору $\hat{A}$, представимому в виковской нормальной форме, сопоставим формальный ряд

$$A(\bar{a}, a) = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} K_{nm}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n) \bar{a}_{k_1}, \ldots, \bar{a}_{k_m} a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}, \tag{1.7}$$

где a_k — комплексные переменные. Ряд (1.7) будем называть *формальным виковским символом* оператора $\hat{A}$. Если ряд (1.7) оказывается сходящимся при всех a_h, то его сумму назовем сходящимся виковским символом оператора $\hat{A}$. Справедливы следующие утверждения:

1. *Ограниченные операторы представимы в нормальной форме и имеют сходящиеся виковские символы.*

2. *Виковский символ $A(\bar{z}, z)$ ограниченного оператора $\hat{A}$ является значением при $v = \bar{z}$ целой функции $2n$ комплексных переменных*

$$A(v, z) = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} K_{mn}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n) v_{k_1} \ldots v_{k_m} z_{l_1} \ldots z_{l_n} = \\ = (\hat{A}\hat{\varphi}_{v,z}, \hat{\varphi}_{\bar{z}, \bar{v}}), \tag{1.8}$$

где $\hat{\varphi}_{v,z}$ — вектор, которому отвечает символ $\varphi_{v,z}(\bar{a}) = \exp\left\{\frac{1}{h}\left(\bar{a}z - \frac{1}{2}vz\right)\right\}$. В частности,

$$A(\bar{z}, z) = (\hat{A}\hat{\varphi}_z, \hat{\varphi}_z), \tag{1.9}$$

где $\hat{\varphi}_z = \hat{\varphi}_{\bar{z}, z}$ — *нормированный пуассоновский вектор*, $\varphi_z(\bar{a}) = \exp\left\{\frac{1}{h}\left(\bar{a}z - \frac{1}{2}\bar{z}z\right)\right\}$.

Доказательство см. в [9, 11] [1]).

Замечание. Из (1.8) получается оценка для символа ограниченного оператора $\hat{A}$ в комплексной области. Применение (1.5) показывает, что

$$\|\hat{\varphi}_{v,z}\|^2 = \exp\left\{\frac{1}{h}\left[z\bar{z} - \frac{1}{2}(vz + \bar{v}\bar{z})\right]\right\}.$$

Поэтому

$$|A(v, z)| = |(\hat{A}\hat{\varphi}_{v,z}, \hat{\varphi}_{\bar{z},\bar{v}})| \leqslant \|A\| \exp\left\{\frac{1}{2h}(v - \bar{z})(\bar{v} - z)\right\}.$$

Определение. Оператор $\hat{A}$ обладает обобщенным виковским символом, если пуассоновские векторы $\hat{\varphi}_z$ входят в область определения квадратичной формы оператора $\hat{A}$ при всех z. *Обобщенным виковским символом* в этом случае называется функция $A(\bar{z}, z) = (\hat{A}\hat{\varphi}_z, \hat{\varphi}_z)$.

Очевидно, что если оператор $\hat{A}$ замыкаем и обладает сходящимся виковским символом, то он обладает также и обобщенным виковским символом, и эти символы равны.

Существенными для дальнейшего являются следующие формулы операторного исчисления:

Если $\hat{A}$ — ограниченный оператор ($\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$), то символ вектора $\hat{\psi} = \hat{A}\hat{\varphi}$ равен [2])

$$\psi(\bar{a}) = \frac{1}{h^n}\int A(\bar{a}, z)\varphi(\bar{z})e^{-\frac{1}{h}z(\bar{z}-\bar{a})}\Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (1.10)$$

В частности, если $\hat{A} = E$ — единичный оператор, то

$$\varphi(\bar{a}) = \frac{1}{h^n}\int \varphi(\bar{z})e^{-\frac{1}{h}z(\bar{z}-\bar{a})}\Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (1.10')$$

Это тождество неоднократно используется в дальнейшем. Если $\hat{A}$, $\hat{B}$ — ограниченные операторы и $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, то виковский символ оператора $\hat{C}$ связан с символами операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ формулой [3])

$$C(\bar{a}, a) = \frac{1}{h^n}\int A(\bar{a}, z)B(\bar{z}, a)e^{-\frac{1}{h}(a-z)(\bar{a}-\bar{z})}\Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (1.11)$$

---

[1]) За исключением формулы (1.8), которая доказана в [9] для частного случая, когда $v = \bar{z}$, вектор $\hat{\varphi}_{v,z} = \hat{\varphi}_z$ — пуассоновский. Общее доказательство получается в точности так же и поэтому может быть опущено.

[2]) Существование интеграла в правой части (1.10) следует из ограниченности $\hat{A}$.

[3]) Существование интеграла в правой части (1.11) следует из ограниченности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Если оператору $\hat{A}$ отвечает символ $A(\bar{a}, a)$, а вектору $\hat{\varphi}$ — символ $\varphi(\bar{a})$, то операторам и векторам $\hat{a}_k\hat{A}$, $\hat{A}\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*\hat{A}$, $\hat{A}\hat{a}_k^*$, $\hat{a}_k\hat{\varphi}$, $\hat{a}_k^*\hat{\varphi}$ соответствуют символы

$$\begin{gathered}
\hat{a}_k\hat{A} \leftrightarrow \left(a_k + h\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k}\right)A, \quad \hat{A}\hat{a}_k \leftrightarrow a_k A, \quad \hat{a}_k^*\hat{A} \leftrightarrow \bar{a}_k\hat{A}, \\
\hat{A}\hat{a}_k^* \leftrightarrow \left(\bar{a}_k + h\frac{\partial}{\partial a_k}\right)A, \quad \hat{a}_k\hat{\varphi} \leftrightarrow h\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k}\varphi, \quad \hat{a}_k^*\hat{\varphi} \leftrightarrow \bar{a}_k\varphi.
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Отметим, что формулы (1.10)—(1.12) справедливы не только для ограниченных операторов. Не вдаваясь в описание класса операторов, для которых справедливы эти формулы, отметим лишь, что в этот класс, кроме ограниченных, входят также полиномиальные операторы.

Если $\hat{A}$ — ядерный оператор, то [1])

$$\operatorname{Sp}\hat{A} = \frac{1}{h^n}\int A(\bar{a}, a)\,\Pi\, da\, d\bar{a}. \tag{1.13}$$

В заключение этого пункта приведем теорему о символах вполне непрерывных операторов.

Теорема 1. *Пусть оператор $\hat{A}$ вполне непрерывен. Тогда его виковский символ $A(z, \bar{z})$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$.*

Доказательство. В силу формулы (1.9) достаточно проверить, что пуассоновские векторы $\hat{\varphi}_z$ слабо сходятся к нулю при $|z| \to \infty$. Пусть $g \in F_2$. Из (1.10) следует, что

$$(g, \varphi_z) = g(\bar{z})\, e^{-z\bar{z}/(2h)}. \tag{1.14}$$

Из этого равенства в свою очередь вытекает, что

$$|g(\bar{z})| \leqslant e^{z\bar{z}/(2h)}\|g\|. \tag{1.15}$$

Положим $g = g_N' + g_N''$, где g_N' — проекция g на подпространство полиномов степени, не большей N, по совокупности переменных. Применяя неравенство (1.15) к g_N'', находим

$$|g_N''(\bar{z})| \leqslant e^{z\bar{z}/(2h)}\|g_N''\|.$$

Возвращаясь к (1.14), получаем

$$|(g, \varphi_z)| \leqslant |g_N'(\bar{z})|\, e^{-z\bar{z}/(2h)} + \|g_N''\|.$$

По заданному ε выберем N так, чтобы выполнялось неравенство $\|g_N''\| < \varepsilon/2$. Затем, пользуясь тем, что g_N' — полином, подберем R так, чтобы выполнялось неравенство $|g_N'(\bar{z})|\, e^{-z\bar{z}/(2h)} < \varepsilon/2$ при $|z| > R$. Тогда $|(g, \varphi_z)| < \varepsilon$ при $|z| > R$. Теорема доказана.

[1]) Существование интеграла в правой части (1.13) следует из ядерности $\hat{A}$.

2. Оценка снизу для виковского символа оператора $e^{-t\hat{H}}$.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{H} \geqslant 0$ — *самосопряженный оператор с обобщенным виковским символом* $H(\bar{a}, a) = (\hat{H}\hat{\varphi}_a, \hat{\varphi}_a)$, $G(\bar{a}, a \mid t)$ — *виковский символ оператора* $e^{-t\hat{H}}$. *Справедливо неравенство*

$$G(\bar{a}, a \mid t) \geqslant e^{-tH(\bar{a}, a)}. \tag{1.16}$$

Доказательство. Из спектральной теоремы следует, что

$$H(\bar{a}, a) = (\hat{H}\hat{\varphi}_a, \hat{\varphi}_a) = \int_0^\infty \lambda\, d\sigma(\lambda),$$

$$G(\bar{a}, a \mid t) = (e^{-t\hat{H}}\hat{\varphi}_a, \hat{\varphi}_a) = \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, d\sigma(\lambda), \tag{1.17}$$

где $\sigma(\lambda) = (\hat{E}_\lambda \hat{\varphi}_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)$ — виковский символ спектрального проектора $\hat{E}_\lambda$. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим [12]:

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda}\, d\sigma(\lambda) \geqslant \exp\left\{-\int_0^\infty t\lambda\, d\sigma(\lambda)\right\}. \tag{1.18}$$

Подставляя в (1.18) $\sigma(\lambda)$ из (1.17), получаем (1.16).

§ 2. Антивиковские символы. Первое определение

1. Символы полиномиальных операторов. Рассмотрим оператор $\hat{A}$, являющийся конечной суммой операторов $\hat{A}_{m,n}$ вида (1.6). Пользуясь соотношениями коммутации (1.1), переставим в каждом слагаемом операторы уничтожения $\hat{a}_k$ налево, операторы рождения $\hat{a}_k^*$ направо. В результате оператор $\hat{A}$ окажется представленным в виде

$$\hat{A} = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} \mathring{K}_{ml}(k_1, \ldots, k_m \mid l_1, \ldots, l_n)\, \hat{a}_{k_1} \ldots \hat{a}_{k_m} \hat{a}_{l_1}^* \ldots \hat{a}_{l_n}^* \tag{2.1}$$

(сумма конечная). Запись оператора $\hat{A}$ в виде (2.1) будем называть *антивиковской нормальной формой.*

Антивиковской нормальной форме оператора $\hat{A}$ сопоставим функцию $2n$ переменных a_k, $\bar{a}_k$ (полином):

$$\mathring{A}(a, \bar{a}) = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} \mathring{K}(k_1, \ldots, k_m \mid l_1, \ldots, l_n)\, a_{k_1} \ldots a_{k_m} \bar{a}_{l_1} \ldots \bar{a}_{l_n}.$$

Функцию A будем называть *антивиковским символом* оператора $\hat{A}$. Таким образом, антивиковские символы определяются для полиномиальных операторов. Для операторов более общего вида антивиковские символы определяются в § 3. Из определения антивиковских символов немедленно следует, что если оператору

$\hat{A}$ соответствует символ $\mathring{A}(\hat{A} \longrightarrow \mathring{A})$, то

$$\hat{a}_k \hat{A} \leftrightarrow a_k \mathring{A}, \ \hat{a}_k^* \hat{A} \leftrightarrow \left(\bar{a}_k - h\frac{\partial}{\partial a_k}\right)\mathring{A},$$

$$\hat{A}\hat{a} \leftrightarrow \left(a_k - h\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k}\right)\mathring{A}, \ \hat{A}\hat{a}_k^* \leftrightarrow \mathring{A}\bar{a}_k. \tag{2.2}$$

2. Связь с виковскими символами.

Теорема 3. *Виковский и антивиковский символы полиномиального оператора $\hat{A}$ связаны соотношением*

$$A(\bar{a}, a) = \frac{1}{h^n}\int e^{-\frac{1}{h}(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}\mathring{A}(z, \bar{z})\,\Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{2.3}$$

Доказательство проведем индукцией по степени полинома $\mathring{A}$. Если $\hat{A} = E$, то $A = \mathring{A} = 1$, и формула (2.3) выполняется. Ввиду линейности общий случай сводится к $\mathring{A} = \mathring{A}_{m,n} = z_{k_1} \ldots \ldots z_{k_m}\bar{z}_{l_1} \ldots \bar{z}_{l_n}$. Заметим, что, согласно (1.12) и (2.2), операторам $\hat{a}_k\hat{A}$ и $\hat{A}\hat{a}_k^*$ отвечают виковский и антивиковский символы, равные соответственно $\left(a_k + h\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k}\right)A(\bar{a}, a)$, $\left(\bar{a}_k + h\frac{\partial}{\partial a_k}\right)A(\bar{a}, a)$ и $z_k\mathring{A}(z, \bar{z})$, $\bar{z}_k\mathring{A}(z, \bar{z})$. Поэтому достаточно проверить, что функция $L = \frac{1}{h^n}\exp\left\{-\frac{1}{h}(z-a)(\bar{z}-\bar{a})\right\}$ удовлетворяет уравнениям

$$z_k L = \left(a_k + h\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k}\right)L, \quad \bar{z}_k L = \left(\bar{a}_k + h\frac{\partial}{\partial a_k}\right)L. \tag{2.4}$$

Теорема доказана.

Из (2.3) следует, что антивиковский символ получается из виковского решением задачи обратной теплопроводности. Для полиномиальных операторов эта задача может быть решена с помощью формулы

$$\mathring{A}(z, \bar{z}) = \frac{1}{h^n}\int e^{\frac{1}{h}(z-i a)(\bar{z}-i\bar{a})}A(i\bar{a}, ia)\,\Pi\, da\, d\bar{a}.$$

Пусть $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$, $\varphi(\bar{a})$ — символ вектора $\hat{\varphi}$. Из (2.3) и (1.10) находим

$$(\hat{A}\hat{\varphi})(\bar{a}) = \frac{1}{h^{2n}}\int\left(\int e^{-\frac{1}{h}(\bar{a}-\bar{z})(a-z)}\mathring{A}(z, \bar{z})\,\Pi\, dz\, d\bar{z}\right)\times$$
$$\times\varphi(\bar{\alpha})\, e^{-\frac{1}{h}(\bar{\alpha}-\bar{a})\alpha}\,\Pi\, d\alpha\, d\bar{\alpha}.$$

В случае, когда $\mathring{A}$ и φ — полиномы, порядок интегрирования можно переставить. Внутренний интеграл после этого оказывается равным $\varphi(\bar{z})$ в силу (1.10′). Окончательно получаем

$$(\hat{A}\varphi)(\bar{a})=\frac{1}{h^n}\int \mathring{A}(z,\ \bar{z})\,e^{-\frac{1}{h}(\bar{z}-\bar{a})z}\,\varphi(\bar{z})\,\Pi\,dz\,d\bar{z}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) находим

$$(\hat{A}\hat{\varphi},\ \hat{\psi})=\frac{1}{h^{2n}}\int\left(\int \mathring{A}(z,\ \bar{z})\,e^{-\frac{1}{h}(\bar{z}-\bar{a})z}\,\varphi(\bar{z})\,\Pi\,dz\,d\bar{z}\right)\times$$
$$\times\overline{\psi(\bar{a})}\,e^{-\frac{a\bar{a}}{h}}\,\Pi\,da\,d\bar{a}.$$

Меняем порядок интегрирования. После этого внутренний интеграл в силу (1.10′) равен $\overline{\psi(\bar{z})}$. Поэтому

$$(\hat{A}\hat{\varphi},\ \hat{\psi})=\frac{1}{h^n}\int \mathring{A}(z,\ \bar{z})\,\varphi(\bar{z})\overline{\psi(\bar{z})}\,e^{-\frac{1}{h}z\bar{z}}\,\Pi\,dz\,d\bar{z}. \tag{2.6}$$

Наконец, приведем формулу композиции.

Теорема 4. *Пусть $\hat{B}$, $\hat{C}$ — полиномиальные операторы. Если $\hat{A}=\hat{B}\hat{C}$, $\hat{A}\leftrightarrow\mathring{A}$, $\hat{B}\leftrightarrow\mathring{B}$, $\hat{C}\leftrightarrow\mathring{C}$, то*

$$\mathring{A}(iw,\ i\bar{w})=\frac{1}{h^n}\int \mathring{B}(iw,\ i\bar{z})\,\mathring{C}(iz,\ i\bar{w})\,e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}\,\Pi\,dz\,d\bar{z}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathring{B}=z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}\bar{z}_1^{\nu_1}\ldots\bar{z}_n^{\nu_n}$, $\mathring{C}=z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}\bar{z}_1^{\beta_1}\ldots\bar{z}_n^{\beta_n}$. Воспользуемся индукцией по $N=\sum(\mu_k+\nu_k+\alpha_k+\beta_k)$. При $N=0$ имеем $\mathring{B}=\mathring{C}=1$, из (2.7) получаем $\mathring{A}=1$. Переход от N к $N+1$ может быть получен за счет увеличения на 1 любого из чисел μ_k, ν_k, α_k, β_k. Увеличение числа μ_k на 1 эквивалентно замене $\hat{B}$ на $\hat{a}_k\hat{B}$. При этом оператор $\hat{A}$ умножается слева на $\hat{a}_k$ и, следовательно, $\mathring{A}$ — на z_k. Проверим это:

$$\frac{1}{h^n}\int iw_k\,\mathring{B}(iw,\ i\bar{z})\,\mathring{C}(iz,\ i\bar{w})\,e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}\,\Pi\,dz\,d\bar{z}=iw_k\,\mathring{A}(iw,\ i\bar{w}).$$

Аналогично проверяется возможность увеличения β_k на 1. Она означает, что умножению $\hat{C}$ на $\hat{a}_k^*$ справа соответствует умножение $\hat{A}$ на $\hat{a}_k^*$ справа.

Увеличение числа ν_k на 1 означает замену $\hat{B}$ на $\hat{B}\hat{a}_k^*$. Заметим, что $(\hat{B}\hat{a}_k^*)\hat{C}=\hat{B}(\hat{a}_k^*\hat{C})=\hat{B}[\hat{a}_k^*,\hat{C}]+\hat{B}\hat{C}\hat{a}_k^*$. Согласно формулам (2.1), оператору $[\hat{a}_k^*,\ \hat{C}]$ отвечает функция

$$-h\frac{\partial\mathring{C}}{\partial z_k}=-h\alpha_k z_1^{\alpha_1}\ldots z_k^{\alpha_k-1}\ldots z_n^{\alpha_n}\bar{z}_1^{\beta_1}\ldots\bar{z}_n^{\beta_n}.$$

Согласно индуктивному предположению, если в правую часть (2.7) подставить вместо $\mathring{C}$ функцию $-h\alpha_k z_1^{\alpha_1} \ldots z_k^{\alpha_k - 1} \ldots z_n^{\alpha_n} \bar{z}_1^{\beta_1} \ldots \ldots \bar{z}_n^{\beta_n}$, в левой части будет стоять символ оператора $\hat{B}[\hat{a}_k^*, \hat{C}]$. Далее, как отмечалось выше, оператору $\hat{C}\hat{a}_k^*$ соответствует символ $\mathring{C}\bar{z}_k$. При подстановке $\mathring{C}\bar{z}_k$ в правую часть (2.7) вместо $\mathring{C}$ в левой части получается символ оператора $\hat{B}\hat{C}\hat{a}_k^*$. Таким образом, для того чтобы убедиться, что при замене $\mathring{B}$ на $\mathring{B}\bar{z}_k$ в (2.7) левая часть формулы оказывается равной символу оператора $\hat{B}\hat{a}_k^* \hat{C}$, достаточно убедиться в том, что эта формула не нарушает закона ассоциативности: $(\hat{B}\hat{a}_k^*)\hat{C} = \hat{B}(\hat{a}_k^* \hat{C})$. Согласно (2.2), следует проверить, что замена $\mathring{B}$ на $\mathring{B}\bar{z}_k$, а $\mathring{C}$ на $\bar{z}_k \mathring{C} - h \frac{\partial}{\partial z_k} \mathring{C}$ приводит к одному и тому же результату. Имеем:

$$\frac{1}{h^n}\int i\bar{z}_k \mathring{B}\mathring{C} e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \Pi\, dz\, d\bar{z} =$$

$$= \frac{1}{h^n}\int i(\bar{z}_k - \bar{w}_k)\mathring{B}\mathring{C} e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \Pi\, dz\, d\bar{z} + \frac{1}{h^n} i\bar{w}_k \int \mathring{B}\mathring{C} e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \times$$

$$\times \Pi\, dz\, d\bar{z} = -\frac{i}{h^n}\int \mathring{B}\mathring{C} h \frac{\partial}{\partial z_k} e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \Pi\, dz\, d\bar{z} + \frac{1}{h^n} i\bar{w}_k \times$$

$$\times \int \mathring{B}\mathring{C} e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \Pi\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{h^n}\int \mathring{B}(iw,\ i\bar{z}) \left(\left(i\bar{w}_k - h\frac{\partial}{\partial i z_k}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \mathring{C}(iz,\ i\bar{w}) \right) e^{-\frac{1}{h}(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} \Pi\, dz\, d\bar{z}.$$

Аналогично устанавливается, что замена α_k на $\alpha_k + 1$ приводит к появлению в левой части (2.7) символа оператора $\hat{B}\hat{a}_k\hat{C}$. Теорема доказана.

§ 3. Антивиковские символы. Второе определение

1. Пространства F_p и $\mathring{S}_p$. Рассмотрим пространство $\mathring{S}_p$, состоящее из функций, суммируемых с p-й степенью по гауссовской мере:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{h^n} \int |f(z,\ \bar{z})|^p e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Подпространство $\mathring{S}_p$, состоящее из целых функций от $\bar{z}$, обозначим через F_p. При $p = 2$ пространство F_p превращается в фоковское пространство F_2.

Каждой функции $\mathring{A} \in \mathring{S}_p$ сопоставим оператор $\hat{A}$ в пространстве целых функций, определяемый формулой (2.5). Множество полученных операторов обозначим через $\hat{S}_p$. Очевидно, что полиномы во всяком случае входят в область определения $\hat{A} \in \hat{S}_p$.

Функцию $\mathring{A}$ будем называть *антивиковским символом* оператора $\hat{A}$.

В следующем пункте подробно изучаются области определения и значения операторов $\hat{A} \in \hat{S}_p$.

Виковским символом оператора $\hat{A} \in \hat{S}_p$, имеющего антивиковский символ $\mathring{A}$, положим по определению функцию $A(\bar{a}, a)$, определяемую формулой (2.3). Множество получаемых таким образом функций обозначим через S_p.

Рассмотрим в пространстве $\mathring{S}_p$ оператор T:

$$(Tf)(\bar{z}) = \frac{1}{h^n} \int f(v, \bar{v}) e^{-\frac{1}{h}(\bar{v}-\bar{z})v} \Pi\, dv\, d\bar{v}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будет показано, что T является оператором проектирования ($\|T\| = 1$) в $\mathring{S}_p$ и что $T\mathring{S}_2 = F_2$. Сейчас нам важно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Если $f \in F_p$, то*

$$(Tf)(\bar{z}) = f(\bar{z}) = \frac{1}{h^n} \int f(\bar{v}) e^{-\frac{1}{h}(\bar{v}-\bar{z})v} \Pi\, dv\, d\bar{v}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $f \in F_p$, $u(\bar{z}) = (Tf)(\bar{z})$. Заметим прежде всего, что $u(\bar{z})$ — целая функция. Оценка

$$\left| \frac{1}{h^n} \int f(\bar{v}) v_1^{s_1} \ldots v_k^{s_k} e^{-\frac{1}{h}(\bar{v}-\bar{z})v} \Pi\, dv\, d\bar{v} \right| \leqslant \|f\|_p \left\| v_1^{s_1} \ldots v_n^{s_n} e^{\frac{1}{h}\bar{z}v} \right\|_q$$

показывает возможность дифференцирования под знаком интеграла. Таким образом,

$$\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}}{\partial \bar{z}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{s_n}} u(0) = \frac{1}{h^{n+s}} \int f(\bar{v}) v_1^{s_1} \ldots v_n^{s_n} e^{-\frac{1}{h}\bar{v}v} \Pi\, dv\, d\bar{v} = \frac{1}{h^{n+s}} \lim_{R\to\infty} I(R),$$

где

$$I(R) = \int\limits_{|v_i|<R} f(\bar{v}) v_1^{s_1} \ldots v_n^{s_n} e^{-\frac{1}{h}\bar{v}v} \Pi\, dv\, d\bar{v}.$$

Для вычисления $I(R)$ разложим $f(\bar{v})$ в степенной ряд с центром в нуле. Ввиду равномерной сходимости возможно почленное интегрирование. Переходя к полярным координатам, находим

$$I(R) = \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}}{\partial \bar{v}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{v}_n^{s_n}} f \Bigg|_{\bar{v}=0} \frac{1}{s_1! \ldots s_n!} \int\limits_{|v_i|<R} |v_1|^{2s_1} \ldots |v_n|^{2s_n} e^{-\frac{1}{h}\bar{v}v} \Pi\, dv\, d\bar{v}.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, находим

$$\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}}{\partial \bar{z}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{s_n}} u \Bigg|_{\bar{z}=0} = \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}}{\partial \bar{v}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{v}_n^{s_n}} f \Bigg|_{\bar{v}=0},$$

откуда получаем $u(\bar{z}) = f(\bar{z})$. Лемма доказана.

Следствие. *Применяя к правой части выражения* (3.3) *неравенство Гёльдера, получаем, что если* $f \in F_p$, *то*

$$|f(\bar{z})| \leqslant \|f\|_p e^{\frac{q}{4h} z\bar{z}}. \tag{3.4}$$

Аналогичные оценки возможны для производных f. Применяя метод перевала, находим

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}_1^{k_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{k_n}}\right| \leqslant c(k)\|f\|_p (z, \bar{z})^{\frac{k}{2}} e^{\frac{q}{4h} z\bar{z}} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty \quad (k = \sum k_i). \tag{3.4'}$$

Лемма 2. *Полиномы от* $\bar{z}$, z *образуют плотное множество в* $\mathring{S}_p$.

Доказательство. В силу теоремы Рисса пространства $\mathring{S}_p$ и $\mathring{S}_q$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ сопряжены относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{h^n} \int f(z, \bar{z}) \overline{g(z, \bar{z})} e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.5}$$

Поэтому плотность множества полиномов в $\mathring{S}_p$ равносильна тому, что если $f \in \mathring{S}_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и

$$\int g(z, \bar{z}) \overline{f(z, \bar{z})} e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} = 0 \tag{3.6}$$

при любом полиноме g, то $f \equiv 0$ почти всюду.

Заметим, что $\varphi(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/(qh)} \in L_q$, $f(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/h} = \varphi(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/(ph)}$. Поэтому преобразование Фурье $f(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/h}$ есть целая функция. Из (3.6) следует, что все производные этой функции в нуле равны нулю; следовательно, сама функция равна нулю, а потому $f(z, \bar{z}) \equiv 0$ почти всюду.

Лемма 3. *Полиномы от* $\bar{z}$ *плотны в* F_p.

Доказательство. Следует проверить, что если некоторый линейный функционал в F_p равен нулю на полиномах, то он равен нулю тождественно. Поскольку $F_p \subset \mathring{S}_p$, линейный функционал на F_p задается интегралом

$$(f, g) = \frac{1}{h^n} \int f(\bar{z}) g(z, \bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}, \quad g \in \mathring{S}_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.7}$$

Фиксируем f и g и рассмотрим функцию одного комплексного переменного

$$\varphi(t) = \frac{1}{h^n} \int f(\bar{z}t) g(z, \bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}, \quad \bar{z}t = (\bar{z}_1 t, \ldots, \bar{z}_n t). \tag{3.8}$$

Мы увидим, что $\varphi(t)$ непрерывна в замкнутом круге $|t| \leqslant 1$ и аналитична в открытом круге $|t| < 1$. Заметим, что функция

$f_1(\bar{z}) = f(\bar{z}t)$ обладает нормой

$$\|f_1\|_p^p = \frac{1}{h^n}\int |f(\bar{z}t)|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{h^n|t|^{2n}} \int\limits_{|z|<1} |f(\bar{z})|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{|t|^2 h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} +$$

$$+ \frac{1}{h^n|t|^{2n}} \int\limits_{|z|>1} |f(\bar{z})|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} e^{-\frac{1-|t|^2}{|t^2|h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \quad (|z| = (\sum |z_i|^2)^{1/2}).$$

$$(3.9)$$

Внутри круга $|t| \leqslant 1$ для $\|f_1\|_p^p$ получаем оценку

$$\|f_1\|_p^p \leqslant c_1 + c_2\|f\|_p^p, \tag{3.10}$$

где

$$c_1 = \max_{|t|\leqslant 1} \frac{1}{h^n|t|^{2n}} \int\limits_{|z|<1} |f|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{|t^2|h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}, \quad c_2 = \max_{|t|\leqslant 1} \frac{e^{-\frac{1-|t|^2}{|t|^2 h}}}{|t|^2 h}.$$

Из этой оценки следует, что интеграл (3.8) существует при $|t| \leqslant 1$.

Покажем, что функция $\varphi(t)$ непрерывна при $0 < \alpha \leqslant |t| \leqslant 1$. Прежде всего заметим, что при $\alpha \leqslant |t| \leqslant 1$

$$\frac{1}{h^n} \int\limits_{|z|>R} |f_1(\bar{z})|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{h^n|t|^{2n}} \int\limits_{|z/t|>R} |f(\bar{z})|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{|t|^2 h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h^n \alpha^{2n}} \int\limits_{|z|>\alpha R} |f(\bar{z})|^p e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty. \tag{3.11}$$

Пусть теперь $t_k \to t$ при $k \to \infty$, $\alpha \leqslant |t| \leqslant 1$, $\alpha \leqslant |t_k| \leqslant 1$. Имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_k) = \int (f(\bar{z}t) - f(\bar{z}t_k))\, g(z, \bar{z})\, e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.12}$$

Выберем R таким образом, чтобы интеграл в левой части (3.11) был меньше ε^p при $\alpha \leqslant |t| \leqslant 1$. Из неравенства (3.11) следует, что такое R существует при любом $\varepsilon > 0$. Разобьем теперь интеграл (3.12) на два: $I_1(R)$ и $I_2(R)$. Интеграл $I_2(R)$ возьмем по области $|z| > R$, $I_1(R)$ — по области $|z| \leqslant R$. В $I_1(R)$ возможен предельный переход под знаком интеграла, $|I_2(R)| \leqslant 2\varepsilon \|g\|_q$. Поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\varphi(t) - \varphi(t_k)| \leqslant 2\varepsilon \|g\|_q.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k)$ существует и равен $\varphi(t)$.

Аналитичность $\varphi(t)$ при $\alpha < t < 1$ устанавливается с помощью теоремы Морера. Пусть L — замкнутый контур в плоскости t, лежащий в кольце $\alpha < |t| < 1$. Тогда

$$\int_L \varphi(t)\,dt = \int_L \left(\frac{1}{h^n} \int f(\bar{z}t)\, g(z, \bar{z})\, e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \right) dt. \qquad (3.13)$$

Внутренний интеграл в (3.13) разобьем аналогично предыдущему на два: $I_1(R)$ по области $\sum |z_i|^2 \leqslant R^2$ и $I_2(R)$ по области $\sum |z_i|^2 > R^2$. В первом слагаемом возможна перемена порядка интегрирования, и оно в силу аналитичности $f(\bar{z}t)$ по t равно нулю, второе оценивается сверху по модулю числом $\varepsilon |L| \|g\|_p$, где $|L|$ — длина контура L. В силу произвольности ε отсюда следует равенство нулю интеграла (3.13).

Наконец, покажем, что функция $\varphi(t)$ аналитична при $|t|^2 < 4/(pq)$. Из оценки (3.4′) и из (3.10) следует, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{z}t) \right|^p = \left| \sum \bar{z}_i f'_{\bar{z}_i}(\bar{z}t) \right|^p \leqslant c\, |z|^{2p} |t|^p e^{\frac{qp|t|^2}{4h} z\bar{z}} \|f_1\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant |z|^{2p} |t|^p e^{\frac{qp|t|^2}{4h} z\bar{z}} (c_1 + c_2 \|f\|_p^p).$$

Поэтому $\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{z}t) \in F_p$ при $|t|^2 < 4/(pq)$; при этом условии $\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{z}t) \cdot g(z, \bar{z})\, e^{-z\bar{z}/h}$ — суммируемая функция. Следовательно, $\varphi(t)$ дифференцируема и тем самым аналитична. Сверх того, мы видим, что $\partial\varphi/\partial t$ получается дифференцированием под знаком интеграла. Аналогичным образом все производные $\varphi(t)$ при $|t|^2 < \frac{4}{pq}$ находятся дифференцированием под знаком интеграла. В частности,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi \bigg|_{t=0} = \sum_{\sum k_i = k} \frac{1}{h^n} \int \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n} g(z, \bar{z})\, e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z} \frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}_1^{k_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{k_n}} \bigg|_{t=0}. \qquad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что если функция g такова, что порождаемый ею функционал равен нулю на всех многочленах, то все производные $\varphi(t)$ в нуле равны нулю; следовательно, в силу аналитичности φ при $|t| < 1$ и непрерывности при $|t| \leqslant 1$ получаем $\varphi(t) = 0$ при $|t| \leqslant 1$. В частности, $\varphi(1) = 0$; следовательно, функционал, порождаемый функцией g на F_p, тождественно равен нулю. Лемма доказана.

К рассмотренному здесь кругу вопросов тесно примыкает следующее утверждение:

Лемма 4. *Отображение $\mathring{S}_p \to S_p$, определяемое формулой* (2.3), *взаимно однозначно.*

Предположим, что $A \equiv 0$. Умножим обе части равенства (2.3) на $\bar{a}_1^{\mu_1} \ldots \bar{a}_n^{\mu_n} a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n} e^{-\frac{a\bar{a}}{s}}$, $s > 0$, и проинтегрируем по a, $\bar{a}$.

Заметим, что подынтегральная функция равна $\varphi\psi$, где

$$\varphi=\bar{a}_1^{\mu_1}\ldots\bar{a}_n^{\mu_n}a_1^{\nu_1}\ldots a_n^{\nu_n}\exp\left\{-\frac{1}{s_1}a\bar{a}-\frac{1}{h}(z-a)(\bar{z}-\bar{a})+\frac{z\bar{z}}{ph}\right\},$$

$$\psi=\mathring{A}\exp\left\{-\frac{z\bar{z}}{ph}-\frac{a\bar{a}}{s_2}\right\},\quad \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{s}.$$

Далее, $\psi\in L_p$ по совокупности z, $\bar{z}$, a, a. В показателе экспоненты функции φ стоит квадратичная форма $-\sum T(\bar{a}_k, a_k, \bar{z}_k, z_k)$, где

$$T(\bar{a}, a, \bar{z}, z)=\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{s_1}\right)a\bar{a}+\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{p}\right)z\bar{z}-\frac{1}{h}(z\bar{a}+\bar{z}a)=$$

$$=\frac{1}{qh}(z\bar{z}-q(z\bar{a}+\bar{z}a)+q^2a\bar{a})-\frac{q}{h}a\bar{a}+\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{s_1}\right)a\bar{a}=$$

$$=\frac{q}{h}\left(z-\frac{a}{q}\right)\left(\bar{z}-\frac{\bar{a}}{q}\right)+\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{s_1}-\frac{q}{h}\right)a\bar{a}.$$

Очевидно, что $T>0$ при $\frac{1}{h}+\frac{1}{s_1}-\frac{q}{h}>0$, $s_1<\frac{h}{q-1}$, и, следовательно, при этом условии $\varphi\in L_q$ по совокупности z, $\bar{z}$, a, $\bar{a}$, $\varphi\psi\in L_1$ по z, $\bar{z}$, a, $\bar{a}$ и применима теорема Фубини. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$0=\int e^{-\frac{z\bar{z}}{h}}\left(\int\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z_1^{\mu_1}\ldots\partial\bar{z}_n^{\nu_n}}\exp\left\{-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{h}\right)a\bar{a}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{h}(z\bar{a}+\bar{z}a)\right\}\Pi\,da\,d\bar{a}\right)\mathring{A}(z,\bar{z})\,\Pi\,dz\,d\bar{z}=$$

$$=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{h}\right)^{-n}\int e^{-\frac{1}{h}z\bar{z}}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z_1^{\mu_1}\ldots\partial\bar{z}_n^{\nu_n}}e^{\frac{z\bar{z}}{h^2\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{s}\right)}}\right)\mathring{A}(z,\bar{z})\,\Pi\,dz\,d\bar{z}. \tag{3.15}$$

Рассматривая линейные комбинации интегралов (3.15), находим

$$\int g(z,\bar{z})\mathring{A}(z,\bar{z})\,e^{-\frac{z\bar{z}}{h+s}}\Pi\,dz\,d\bar{z}=0$$

при любом полиноме $g(z,\bar{z})$. Полагая $s=0$, получаем $\mathring{A}(z,\bar{z})=0$ почти всюду в силу леммы 2.

2. Операторы класса S_p в пространстве F_2.

Теорема 5. 1) *Если* $\hat{A}\in\hat{S}_p$, $p>1$, *то интеграл* (2.5) *существует при* $\varphi\in F_{q'}$, $q'>q=\frac{p}{p-1}$.

2) *Если* $\hat{A}\in\hat{S}_p$, $p>2$, $\varphi\in F_{\frac{2p}{p-2}}$, *то интеграл* (2.5) *определяет функцию* $u\in F_2$, *причем*

$$\|u\|_2\leqslant\|\mathring{A}\|_p\|\varphi\|_{\frac{2p}{p-2}}. \tag{3.16}$$

3) *Если* $\varphi \in F_{\frac{2p}{p-2}}$, $\psi \in F_2$, $\hat{A} \in \hat{S}_p$, $p > 2$, *то*

$$(\hat{A}\varphi, \psi) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \varphi(\bar{z}) \overline{\psi(\bar{z})} e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \qquad (3.17)$$

4) *Оператор* T *в пространстве* $\mathring{S}_2$, *определяемый формулой* (3.2), *является оператором ортогонального проектирования.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы немедленно следует из неравенства Гёльдера для трех функций: при $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$

$$\int |f_1 f_2 f_3|\, d\mu \leqslant \left(\int |f_1|^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \left(\int |f_2|^{p_2} d\mu\right)^{1/p_2} \left(\int |f_3|^{p_3} d\mu\right)^{1/p_3}. \qquad (3.18)$$

Полагая $f_1 = \mathring{A}(z, \bar{z})$, $f_2 = \varphi(\bar{z})$, $f_3 = e^{\bar{z}v}$, $d\mu = \frac{1}{h^n} e^{-z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z}$, $p_1 = p$, $p_2 = q'$, $p_3^{-1} = 1 - p_1^{-1} - p_2^{-1}$, получаем $\mathring{A}(z, \bar{z}) \varphi(\bar{z}) \in \mathring{S}_1$. Полагая $\varphi(\bar{z}) \equiv 1$, получаем, в частности, что оператор (3.2) определен на $\mathring{S}_2$. Сужение этого оператора на полиномы обозначим через $\tilde{T}$. Пусть $f(z, \bar{z})$, $g(z, \bar{z})$ — полиномы. Меняя порядок интегрирования, находим $(\tilde{T}f, g) = (f, \tilde{T}g)$. Так как, кроме того, $\tilde{T}^2 = \tilde{T}$, то оператор $\tilde{T}$ является оператором ортогонального проектирования. В частности, если f — полином, то

$$\|\tilde{T}f\|_2 = \|Tf\|_2 \leqslant \|f\|_2. \qquad (3.19)$$

Пусть теперь f_n — последовательность полиномов, $f \in \mathring{S}_2$, $\|f_n - f\| \to 0$. В силу (3.19) последовательность $\tilde{T}f_n$ сходится в F_2: $\|\tilde{T}f_n - g\|_2 \to 0$. Из (3.4) следует, что $\tilde{T}f_n$ сходится к g поточечно. С другой стороны, из неравенства Коши—Буняковского вытекает, что $|\tilde{T}f_n(z) - Tf(z)| = |T(f_n - f)(z)| \leqslant \|f_n - f\|_2 e^{\frac{1}{h} z\bar{z}}$. Таким образом, $g = Tf$; следовательно, T является замыканием $\tilde{T}$, а потому T — оператор ортогонального проектирования.

Утверждение 2) следует из 4): $\mathring{A}\varphi \in \mathring{S}_2$ при $p > 2$, $\varphi \in F_{\frac{2p}{p-2}}$ и, согласно неравенству Гёльдера, $\|\mathring{A}\varphi\|_2 \leqslant \|\mathring{A}\|_p \|\varphi\|_{\frac{2p}{p-2}}$. Поэтому $\|T\mathring{A}\varphi\|_2 \leqslant \|\mathring{A}\varphi\|_2 \leqslant \|\mathring{A}\|_p \|\varphi\|_{\frac{2p}{p-2}}$.

Перейдем к утверждению 3). Согласно предыдущему, $(\hat{A}\varphi)(\bar{z}) = (T\hat{B}\varphi)(\bar{z})$, где $\hat{B}$ — оператор умножения на $\mathring{A}(z, \bar{z})$ в $\mathring{S}_2$. Поэтому

$$(\hat{A}\varphi, \psi) = (T\hat{B}\varphi, \psi) = (\hat{B}\varphi, T\psi) = (\hat{B}\varphi, \psi) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \varphi(\bar{z}) \overline{\psi(\bar{z})} e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z}.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Подчеркнем, что оператор $\hat{A} \in \hat{S}_p$ при $p > 2$ представим в виде $\hat{A} = T\hat{B}$, где $\hat{B}$ — оператор умножения на $\mathring{A}(z, \bar{z})$ и T — оператор ортогонального проектирования на F_2.

2. Обозначим через $\hat{A}_1$ сужение оператора $\hat{A} \in \hat{S}_p$, $p > 2$, определенного на $F_{\frac{2p}{p-2}}$, на многочлены, а через $\hat{A}_2$ замыкание $\hat{A}_1$. Из (3.16) следует, что в область определения $\hat{A}_2$ входит $F_{\frac{2p}{p-2}}$ и что $\hat{A}_2$ на $F_{\frac{2p}{p-2}}$ совпадает с $\hat{A}$.

Пусть $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$ имеет символ $\varphi \in F_{\frac{2p}{p-2}}$. Из теоремы 4 следует, что

$$(\hat{A}\hat{\varphi},\ \hat{\varphi}) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z,\ \bar{z})\, \varphi(\bar{z})\, \overline{\varphi(\bar{z})}\, e^{-\frac{z\bar{z}}{h}} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.20}$$

Если $\|\hat{\varphi}\| = 1$, то $\frac{1}{h^n} \int |\varphi|^2 e^{-z\bar{z}/h} \Pi\, dz\, d\bar{z} = 1$, поэтому из (3.26) следует

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{D}(\hat{A})$ — множество на комплексной плоскости, состоящее из значений квадратичной формы $(\hat{A}\hat{\varphi},\ \hat{\varphi})$, где $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$ с символом $\varphi \in F_{\frac{2p}{p-2}}$, $\|\hat{\varphi}\| = 1$, $\mathscr{D}(\mathring{A})$ — выпуклая оболочка значений антивиковского символа $\mathring{A}$, $\mathscr{D}(A)$ — множество значений виковского символа A. Тогда*

1) *справедливы включения*

$$\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(\hat{A}) \subset \mathscr{D}(\mathring{A}); \tag{3.21}$$

2) *если $|\mathring{A}| \leqslant c$, то оператор $\hat{A}$ ограничен и $\|\hat{A}\| \leqslant \sup|\mathring{A}(z, \bar{z})|$.*

Первое включение вытекает из формулы $A(\bar{a}, a) = (\hat{A}\hat{\varphi}_a,\ \hat{\varphi}_a)$, где $\hat{\varphi}_a$ — пуассоновский вектор с символом $\varphi_a(\bar{z}) = \exp\left\{\frac{1}{h}\left(a\bar{z} - \frac{1}{2} a\bar{a}\right)\right\} \in F_{\frac{2p}{p-2}}$. Второе включение следует из (3.20) при $\psi = \varphi$. Второе утверждение теоремы следует из неравенства $|(\hat{A}\hat{\varphi},\ \hat{\psi})| \leqslant \|\hat{\varphi}\| \|\hat{\psi}\| \sup|\mathring{A}|$, очевидным образом вытекающего из (3.17)[1]).

[1]) Не следует думать, что каждому ограниченному оператору соответствует ограниченный антивиковский символ. Например, оператор $\hat{P}$ проектирования на пуассоновский вектор вообще не обладает антивиковским символом, являющимся классической функцией. В самом деле, виковский символ оператора $\hat{P}$ равен

$$P(\bar{z},\ z) = \frac{1}{h^n} \exp\left\{-\frac{1}{h}(z - a)(\bar{z} - \bar{a})\right\}.$$

Функция $P(\bar{z},\ z)$ является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения теплопроводности и поэтому не представима в виде (2.3) ни при какой классической функции $\mathring{A}$. Антивиковским символом оператора $\hat{P}$ естественно считать δ-функцию Дирака: $\mathring{P}(z,\ \bar{z}) = \delta(z - a)\,\delta(\bar{z} - \bar{a})$.

Следствие 1. *Если* $|\mathring{A}| < c$, *то* $\sup |A(\bar{a}, a)| \leqslant \|\hat{A}\| \leqslant \leqslant \sup |\mathring{A}(z, \bar{z})|$.

Следствие 2. *Пусть* $D' \subset F_2$ — *множество полиномов*, $\hat{A} \in \hat{S}_p$, $\hat{A}$ *симметричен на* D' *и замыкание* $\hat{A}$ *в этой области самосопряжено*, $\sigma(\hat{A})$ — *выпуклая оболочка спектра замыкания* $\hat{A}$. *Тогда*

$$\mathscr{D}(A) \subset \sigma(\hat{A}) \subset \mathscr{D}(\mathring{A}). \tag{3.22}$$

Выясним теперь, когда оператор $\hat{A} \in \hat{S}_p$ самосопряжен. Прежде всего заметим, что из симметрии $\hat{A}$ на $D \simeq \bigcap_p F_p$ следует вещественность $\mathring{A}$. В самом деле, в этом случае мнимая часть виковского символа оператора $\hat{A}$ равна нулю, поэтому в силу леммы 4 равна нулю также мнимая часть $\mathring{A}$. Заметим еще, что симметричность $\hat{A}$ на D вытекает из симметричности $\hat{A}$ на более узком множестве полиномов. Доказательство состоит в повторении рассуждений, применявшихся для вывода формулы (3.17), и поэтому может быть опущено.

Сформулируем теперь теорему о самосопряженности. Пусть $\mathring{A} > 1$. Обозначим через $H_A \subset F_2$ гильбертово пространство целых функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) f(\bar{z}) \overline{g(\bar{z})} e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi \, dz \, d\bar{z}.$$

Через $\tilde{H}_A$ обозначим подпространство H_A, порожденное многочленами.

Теорема 7. 1. *Пусть* $\mathring{A} > 1$, $\mathring{A} \in \mathring{S}_p$, $p > 2$, $\mathscr{D}_{\hat{A}}$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям* 1) $(\hat{A}f)(\bar{z}) \in F_2$, 2) $f \in \tilde{H}_A$. *Оператор* $\hat{A}$, *определенный на* $\mathscr{D}_{\hat{A}}$, *самосопряжен, и нижняя грань его спектра расположена не левее* $\inf \mathring{A}(z, \bar{z})$.

2. *Если* $\mathring{A}(\theta z, \bar{\theta}\bar{z}) \leqslant c\mathring{A}(z, \bar{z})$ *при некотором* $c < \infty$ *всех* θ, $|\theta| = 1$, *и достаточно большом* $|z|$, *то* $\tilde{H}_A$ *совпадает с* H_A.

Доказательство. Покажем, что оператор $\hat{A}$ с областью определения $\mathscr{D}_{\hat{A}}$, описанной в этой теореме, является расширением по Фридрихсу своего сужения на множество полиномов D'. Обозначим это сужение через $\hat{A}_0$ и через $\hat{A}_1$ обозначим расширение $\hat{A}_0$ на $F_{\frac{2p}{p-2}}$ по формуле (2.5). Согласно замечанию 2) из теоремы 5, область значений $\hat{A}_1$ содержится в F_2. Покажем, что замыкание $\hat{A}_0$ является также замыканием $\hat{A}_1$. Пусть φ_n — последовательность полиномов и $\|\varphi_n - \varphi\|_{\frac{2p}{p-2}} \to 0$. Согласно теореме 5, в этом случае также $\|\hat{A}_1\hat{\varphi}_n - \hat{A}_1\hat{\varphi}\| \to 0$. Кроме того, поскольку

$\frac{2p}{p-2} > 2$, также $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. Поэтому $F_{\frac{2p}{p-2}}$ входит в область определения замыкания $\hat{A}_0$, и замыкание $\hat{A}_0$ на $F_{\frac{2p}{p-2}}$ совпадает с $\hat{A}_1$.

Согласно теореме 5, если $\varphi \in F_{\frac{2p}{p-2}}$, $\psi \in F_2$, то

$$(\hat{\psi}, \hat{A}\varphi) = \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \psi(\bar{z}) \overline{\varphi(\bar{z})} e^{-\frac{1}{h} z\bar{z}} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.23}$$

Применяя формулу (3.23) к случаю, когда $\hat{\psi} \in \mathscr{D}_{\hat{A}_0^*}$, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_v$ — вектор с символом $\varphi_v(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{h} \bar{z} v}$, находим (используя (1.10′))

$$(\hat{A}_0^* \psi)(\bar{z}) = (\hat{A}_0^* \hat{\psi}, \hat{\varphi}_{\bar{z}}) = (\hat{\psi}, \hat{A}_0 \hat{\varphi}_z) =$$

$$= \frac{1}{h^n} \int \mathring{A}(v, \bar{v}) \psi(\bar{v}) \overline{\overline{e}}^{-\frac{1}{h}(\bar{v} - \bar{z}) v} \Pi\, dv\, d\bar{v}.$$

Таким образом, $\mathscr{D}_{\hat{A}_0^*}$ состоит из всех тех $\psi \in F_2$, для которых интеграл (2.5) определяет функцию $(\hat{A}_0^* \psi)(\bar{z}) \in F_2$. Для завершения доказательства части 1 теоремы 7 осталось заметить, что расширение по Фридрихсу оператора $\hat{A}_0$ совпадает с сужением $\hat{A}_0^*$ на пространство $\tilde{H}_A$.

Перейдем к части 2 теоремы 7: Пусть $f \in H_A$ — функция, ортогональная всем полиномам. Рассмотрим вспомогательную функцию одного комплексного переменного

$$\varphi(t) = \frac{1}{h^n} \int f(t\bar{z}) \overline{f(\bar{z})} \mathring{A}(z, \bar{z}) e^{-\bar{z} z/h} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.24}$$

Покажем, что функция $\varphi(t)$ аналитична внутри круга $|t| < 1$ и непрерывна вплоть до границы круга. Положим

$$\mathring{A}_k(z, \bar{z}) = \begin{cases} \mathring{A}(z, \bar{z}) & \text{при } |z| < k, \\ 0 & \text{при } |z| > k, \end{cases}$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{h^n} \int f(t\bar{z}) \overline{f(\bar{z})} \mathring{A}_k(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/h} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{3.25}$$

Поскольку интеграл в (3.25) берется по ограниченной области, $\varphi(t)$ является целой функцией t.

Покажем, что последовательность $\varphi_k(\theta)$, $|\theta| = 1$, равномерно сходится к $\varphi(\theta)$. В самом деле,

$$|\varphi(\theta) - \varphi_k(\theta)| = \frac{1}{h^n} \left| \int f(\theta\bar{z}) \overline{f(\bar{z})} (\mathring{A} - \mathring{A}_k) e^{-z\bar{z}/h} \Pi\, dz\, d\bar{z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f_\theta\|_{A - A_k} \|f\|_{A - A_k} \leqslant c \|f\|^2_{A - A_k} \to 0 \text{ при } k \to \infty \quad (f_\theta = f_\theta(\bar{z}) = f(\theta\bar{z})).$$

Из принципа максимума модуля следует, что последовательность $\varphi_k(t)$ сходится к $\varphi(t)$ равномерно вплоть до границы круга, и, следовательно, $\varphi(t)$ аналитична в круге $|t| < 1$ и непрерывна вплоть до его границы. Далее,

$$\frac{d^N}{dt^N}\varphi_k(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{h^n}\int P_N(\bar z)\overline{f(\bar{\bar z})}A_k(z,\bar z)e^{-z\bar z/h}\Pi\,dz\,d\bar z, \qquad (3.26)$$

где $P_N(\bar z)=\frac{d^N}{dt^N}f(t\bar z)|_{t=0}$ является полиномом. Повторяя предыдущие рассуждения, находим, что предел при $k\to\infty$ правой части в (3.26) равен $\frac{d^N}{dt^N}\varphi\Big|_{t=0}$. Таким образом, $\frac{d^N}{dt^N}\varphi\Big|_{t=0}=0$; следовательно, $\varphi(t)=0$, и потому $0=\varphi(1)=(f,\ f)_A$. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Пусть антивиковский символ $\mathring{A}$ оператора $\hat A$ обладает свойствами:* 1) $|\mathring{A}|<c$, 2) $\lim\limits_{|v|\to\infty}\mathring{A}(v,\ \bar v)=0$. *Тогда оператор $\hat A$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Обозначим через S шар радиуса 1 в F_2, через S'_N — проекцию S на подпространство полиномов степени, не большей N по каждому переменному в отдельности, через S''_N — проекцию S на ортогональное дополнение к этому подпространству. Заметим, что элементы S''_N имеют вид

$$f(\bar z)=(\bar z_1\ \ldots\ \bar z_n)^N\varphi(\bar z).$$

Оценим $\|\varphi\|$. С этой целью разложим f в ряд:

$$f(\bar z)=\sum\frac{c_{k_1\ \ldots\ k_n}}{h^{(1/2)(k_1+\ \ldots\ +k_n)}(k_1!\ \ldots\ k_n!)^{1/2}}\bar z_1^{k_1+N}\ldots\ \bar z_n^{k_n+N},\ \sum|c_{k_1\ldots k_n}|^2=\|\varphi\|^2.$$

Учитывая, что $\|f\|\leqslant 1$, получаем

$$\sum|c_{k_1\ \ldots\ k_n}|^2\frac{(k_1+N)!\ \ldots\ (k_n+N)!}{k_1!\ \ldots\ k_n!}h^{nN}\leqslant 1.$$

Так как $\frac{(k+N)!}{k!}=\frac{(k+N)!}{k!N!}N!\geqslant N!$, то $h^{nN}(N!)^n\sum|c_{k_1\ldots k_n}|^2\leqslant 1$. Отсюда

$$\|\varphi\|\leqslant\frac{1}{(N!h^N)^{n/2}}.$$

Пусть $\hat A$ — оператор, удовлетворяющий условиям теоремы, $\mathring{A}$ — его символ,

$$\mathring{A}_R(v,\ \bar v)=\begin{cases}\mathring{A}(\bar v,\ v) & \text{при } |v|<R,\\ 0 & \text{при } |v|>R,\end{cases}$$

$\hat A_R$ — оператор с антивиковским символом $\mathring{A}_R$. Очевидно, что при $R\to\infty$ последовательность $\mathring{A}_R$ равномерно сходится к $\mathring{A}$. В силу теоремы 6 отсюда следует, что $\lim\limits_{R\to\infty}\|\hat A_R-\hat A\|=0$. Поэтому достаточно проверить, что операторы $\hat A_R$ вполне непрерывны. Далее, поскольку $f\in S$ представим в виде суммы $f=f'+f''$, $f'\in S'_N$, $f''\in S''_N$, и S'_N лежит в конечномерном пространстве, достаточно показать, что образ S''_N при отображении с помощью оператора $\hat A_R$ лежит внутри сферы радиуса $\varepsilon(N)$, причем $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon(N)=0$.

Пусть $g=\hat{A}_R f$, $f \in S''_N$. Функцию g можно представить в виде $g=T\psi$, где $\psi(z, \bar{z})=\mathring{A}_R(z, \bar{z}) f(\bar{z}) \in S_2$, T — проектор из S_2 в F_2, определяемый формулой (3.2). Поэтому $\|g\|^2 \leqslant \|\psi\|^2$. Представляя f в виде $f=(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)^N \varphi(\bar{v})$ и используя полученную ранее оценку для φ, получаем окончательно

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|v_i|<R} |\mathring{A}(\bar{v}, v)| \, |\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n|^{2N} |\varphi(\bar{v})|^2 e^{-\bar{v}v/h} \Pi \, dv \, d\bar{v} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{R^{2nN}}{h^n} \|\varphi\|^2 \leqslant \frac{c}{h^{n(N+1)}} \frac{R^{2nN}}{(N!)^n}.$$

Следовательно, образ S''_N лежит внутри сферы радиуса $\varepsilon(N) = c_1 \frac{R^{nN}}{(N!)^{h/n}} \to 0$ при $N \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $\mathring{A}$ — суммируемая функция. Тогда существует ядерный оператор $\hat{A}$, для которого $\mathring{A}$ служит антивиковским символом, причем* $\operatorname{Sp} \hat{A} = \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \Pi \, dz \, d\bar{z}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathring{A} \geqslant 0$. В этом случае функция $\mathring{A}$ порождает неотрицательную эрмитову форму на финитных векторах

$$K(\varphi, \psi) = \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \varphi(\bar{z}) \overline{\psi(\bar{z})} e^{-z\bar{z}/h} \Pi \, dz \, d\bar{z}. \tag{3.27}$$

Положим

$$\varphi_k(\bar{z}) = \frac{\bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n}}{(h^n k_1! \ldots k_n!)^{1/2}}, \qquad k=(k_1, \ldots, k_n), \quad |k| = \sum k_i.$$

Векторы $\hat{\varphi}_k$ образуют ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Положим $K_{pp'} = K(\hat{\varphi}_p, \hat{\varphi}_{p'})$. Из неотрицательности формы K следует, что

$$|K_{pp'}|^2 \leqslant K_{pp} K_{p'p'}. \tag{3.28}$$

Рассмотрим частичную сумму $\sum\limits_{|p|<N} K_{pp}$:

$$\sum_{|p|<N} K_{pp} = \int \mathring{A}(z, \bar{z}) s_N(z, \bar{z}) \Pi \, dz \, d\bar{z}, \tag{3.29}$$

где

$$0 < s_N = \sum_{|p|<N} \frac{|z_1|^{2p_1} \ldots |z_n|^{2p_n}}{h^n p_1! \ldots p_n!} e^{-|z|^2/h} < 1, \qquad \lim_{N \to \infty} s_N = 1.$$

В силу теоремы Лебега в (3.29) возможен предельный переход под знаком интеграла, совершая который находим

$$\sum K_{pp} = \int \mathring{A}(z, \bar{z}) \Pi \, dz \, d\bar{z}. \tag{3.30}$$

Вспоминая (3.28), получаем отсюда

$$\sum |K_{pp'}|^2 \leqslant (\sum K_{pp})^2 < \infty. \tag{3.31}$$

Из (3.3) следует, что эрмитова форма $K(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ порождена некоторым неотрицательным оператором Гильберта—Шмидта $\hat{A}$: $K(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (\hat{A}\hat{\varphi}, \hat{\psi})$. Далее из неотрицательности $\hat{A}$ и сходимости ряда (3.30) следует, что оператор $\hat{A}$ ядерный и что $\operatorname{Sp}\hat{A} = \sum K_{pp}$.

3. Оценка следа $e^{-t\hat{H}}$. Справедлива следующая

Теорема 10. *Пусть оператор $\hat{H}$ определен на финитных векторах, симметричен и имеет самосопряженное замыкание. Сверх того, пусть $\mathring{H} \in \mathring{S}_p$, $p > 2$, и*

$$\int e^{-t\mathring{H}(z, \bar{z})} \prod dz\, d\bar{z} < \infty \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Тогда оператор $e^{-t\hat{H}}$ имеет сходящийся след и справедлива оценка

$$\operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} \leqslant \int e^{-t\mathring{H}(z, \bar{z})} \prod dz\, d\bar{z}. \tag{3.32}$$

Доказательство теоремы 10 основано на следующем общем факте, который будет доказан в другом месте.

Теорема 11. *Пусть $A > 0$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с областью определения $\mathscr{D}_A$ и P — ортогональный проектор на подпространство $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$. Пусть далее $\varphi(x) \geqslant 0$ — выпуклая вниз функция. Предположим, что $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{D}_A$ плотно в $\mathscr{H}_1$, и обозначим через A_P расширение по Фридрихсу оператора PAP, рассматриваемого на $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{D}_A$. Тогда, если оператор $P\varphi(A)P$ имеет сходящийся след, то тем же свойством обладает оператор $\varphi(A_P)$ и справедлива оценка*

$$\operatorname{Sp}\varphi(A_P) \leqslant \operatorname{Sp} P\varphi(A)P.$$

Вывод теоремы 10 из теоремы 11. В качестве пространства $\mathscr{H}$ рассмотрим $\mathring{S}_2$, в качестве A — оператор умножения на $\mathring{H}$, в качестве P — оператор T проектирования на F_2, в качестве $\varphi(x)$ — функцию e^{-tx}. Тогда:

1) оператор PAP в F_2 совпадает с $\hat{H}$, поскольку

$$(PAPf)(\bar{z}) = \frac{1}{h^n}\int \mathring{H}(v, \bar{v}) f(\bar{v})\, e^{-\frac{1}{h}(\bar{v}-\bar{z})} \prod dv\, d\bar{v};$$

2) $\mathscr{D}_A$, во всяком случае, содержит все многочлены от z, $\bar{z}$, поэтому $P\mathscr{D}_A$ — все многочлены от $\bar{z}$, а потому в силу условия теоремы 8 оператор A_P совпадает с замыканием PAP;

3) оператор $P\varphi(A)P$ — это оператор в F_2 с антивиковским символом $e^{-t\mathring{H}(z, \bar{z})}$. Он является ядерным в силу теоремы 9.

Применяя теорему 11, находим, что существует $\operatorname{Sp}\varphi(PAP)$ и справедлива оценка

$$\operatorname{Sp}\varphi(PAP) \leqslant \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P),$$

что эквивалентно (3.32).

§ 4. Обсуждение полученных результатов

1. Оценка наименьшего собственного числа. Из теоремы 6 следует, что если $0 \leqslant \mathring{H} \in \mathring{S}_p$, $p > 2$, и если левый конец спектра $\hat{H}$ дискретен, то для наименьшего собственного числа справедлива оценка

$$\inf \mathring{H}(z, \bar{z}) \leqslant \lambda_0 \leqslant \inf H(z, \bar{z}). \tag{4.1}$$

Пример. Рассмотрим в качестве $\hat{H}$ оператор ангармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + \lambda\hat{q}^2 + \varepsilon\hat{q}^4 = -\frac{1}{2}(\hat{a} - \hat{a}^*)^2 + \frac{\lambda}{2}(\hat{a} + \hat{a}^*)^2 + \frac{\varepsilon}{4}(\hat{a} + \hat{a}^*)^4. \tag{4.2}$$

Виковский и антивиковский символы оператора $\hat{H}$ равны соответственно

$$\begin{aligned} H(\bar{z}, z) &= p^2 + \lambda q^2 + \frac{\lambda+1}{2}h + \varepsilon\left(q^4 + 3hq^2 + \frac{3h^2}{4}\right), \\ \mathring{H}(z, \bar{z}) &= p^2 + \lambda q^2 - \frac{\lambda+1}{2}h + \varepsilon\left(q^4 - 3hq^2 + \frac{3h^2}{4}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $p = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z - \bar{z})$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z})$. При $\lambda > 0$ левое из неравенств (4.1) не дает содержательной информации о λ_0, так как $\min \mathring{H} < 0$, в то время как a priori известно, что $\lambda_0 \geqslant 0$. Второе неравенство дает оценку[1] $\lambda_0 \leqslant \frac{\lambda+1}{2}h + \frac{3h^2\varepsilon}{4}$. При $\lambda < 0$ получаем

$$-\frac{1-|\lambda|}{2}h + \frac{3h^2}{4\varepsilon} - \frac{3}{16\varepsilon}(|\lambda| + 3h\varepsilon)^2 \leqslant \lambda_0 \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1-|\lambda|}{2}h + \dfrac{3h^2}{4\varepsilon} & \text{при} \quad 3\varepsilon h > |\lambda|, \\ \dfrac{1-|\lambda|}{2}h + \dfrac{3h^2}{4\varepsilon} - \dfrac{3}{16\varepsilon}(|\lambda| - 3h\varepsilon)^2 & \text{при} \quad 3h\varepsilon < |\lambda|. \end{cases}$$

2. Число собственных чисел, меньших E. Теоремы 2 и 10 в совокупности дают неравенства

$$\frac{1}{h^n}\int e^{-tH(\bar{z}, z)}\Pi\, dz\, d\bar{z} \leqslant \operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} \leqslant \frac{1}{h^n}\int e^{-t\mathring{H}(z, \bar{z})}\Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) можно получить информацию об асимптотике собственных чисел.

Теорема 12. *Пусть $H(h \mid \bar{z}, z)$ и $0 \leqslant \mathring{H}(h \mid z, \bar{z}) \in \mathring{S}_p$, $p > 2$, — виковский и антивиковский символы самосопряженного*[2]*) оператора $\hat{H}$, причем*

---

[1]) Любопытно сравнить этот результат с теорией возмущений: в первом порядке $\lambda_2 = \frac{\lambda+1}{2}h + \frac{3h^2\varepsilon}{4}$ (см. [13]).

[2]) Область определения $\hat{H}$ описывается теоремой 7.

1) $\overset{\bullet}{H}(h\,|\,\bar{z},\ z) = \overset{\bullet}{H}(0\,|\,\bar{z},\ z) + \varepsilon(h)\,F(h\,|\,\bar{z},\ z)$, *$F$ допускает оценки*

$$|F(h\,|\,\bar{z},\ z)| \leqslant C(\bar{z},\ z), \quad \int |F|\, e^{-Az\bar{z}}\,\Pi\, dz\, d\bar{z} \leqslant B,$$

где C, A, B не зависят от h, $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$;

2) $\overset{\circ}{H}(h\,|\,\bar{z},\ z) \geqslant K(\bar{z},\ z)$, *при $t > 0$ существует интеграл*

$$\int e^{-tK(z,\bar{z})}\,\Pi\, dz\, d\bar{z} < C_1, \tag{4.5}$$

где C_1 не зависит от h.

Тогда

1) *оператор $\hat{H}$ полуограничен снизу и имеет дискретный спектр;*

2) *число $N_h(E)$ собственных чисел $\hat{H}$, меньших E, при $h \to 0$ имеет асимптотику*

$$N_h(E) = \frac{1+o(1)}{h^n} \int\limits_{\overset{\circ}{H}(\bar{z},\ z) < E} \Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Условие 2) гарантирует ядерность оператора $e^{-t\hat{H}}$ и тем самым дискретность спектра оператора $\hat{H}$. Далее первое условие теоремы очевидным образом достаточно для того, чтобы виковский и антивиковский символы оператора H имели при $h \to 0$ один и тот же предел $\overset{\circ}{H}(0\,|\,z,\ \bar{z})$. Поэтому, помножив обе части неравенства (4.4) на h^n, можно перейти в нем к пределу при $h \to 0$. В результате имеем

$$\lim_{h \to 0} h^n \operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} = \int e^{-t\overset{\circ}{H}(0\,|\,z,\ \bar{z})}\,\Pi\, dz\, d\bar{z}. \tag{4.7}$$

(Возможность предельного перехода под знаком интеграла легко следует из условий 1) и 2).)

Заметим, что

$$\operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} = \int\limits_0^\infty e^{-tE}\, dN_h(E) = t \int\limits_0^\infty e^{-tE} N_h(E)\, dE, \tag{4.8}$$

где $N_h(E)$ — число собственных чисел $\hat{H}$, меньших E, есть неубывающая функция E.

Из уравнений (4.7) и (4.8) следует, что множество чисел $h^n N_h(E)$ ограничено при каждом E. В противном случае существовали бы $E_0 > 0$ и последовательность $h_k \to 0$ такие, что $h_k^n N_{h_k}(E_0) = c(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. В силу монотонности $N_{h_k}(E)$ отсюда следовало бы, что

$$h^n \operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} = th^n \int\limits_0^\infty e^{-tE} N_h(E)\, dE \geqslant$$

$$\geqslant th^n \int\limits_{E_0}^\infty e^{-tE}\, N_h(E)\, dE \geqslant th^n\, N_h(E_0) \int\limits_{E_0}^\infty e^{-tE}\, dE \to \infty$$

при $h=h_k$, $k\longrightarrow\infty$. Полученный результат противоречит конечности правой части (4.7).

Пусть $t>\tau>0$. Тогда

$$\frac{1}{h^n}\int_0^\infty e^{-tE}\,dN_h(E)=\int_0^\infty e^{-(t-\tau)E}\,d\mu_h(E),\quad \mu_h(E)=\frac{1}{h^n}\int_0^E e^{-\tau\lambda}\,dN_h(\lambda). \tag{4.9}$$

Из конечности предела (4.7) следует, что $\int_0^\infty d\mu_h(E)<c<\infty$. Поэтому применима теорема Хелли, согласно которой из последовательности $\mu_h(E)$ можно выбрать подпоследовательность $\mu_{h_k}(E)$, сходящуюся к неубывающей функции $\beta(E)$, причем

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-(t-\tau)E}\,d\mu_{h_k}(E)=\int_0^\infty e^{-(t-\tau)E}\,d\beta(E). \tag{4.10}$$

Далее из сходимости $\mu_{h_k}(E)$ к $\beta(E)$ следует сходимость

$$\frac{1}{h_k^n}N_{h_k}(E)=\int_0^E e^{\tau\lambda}\,d\mu_{h_k}(\lambda)\longrightarrow\alpha(E)=\int_0^E e^{\tau\lambda}\,d\beta(\lambda). \tag{4.11}$$

Сопоставление (4.9)—(4.11) дает

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k^n}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,dN_{h_k}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,d\alpha(\lambda),\quad \alpha(\lambda)=\lim_{k\to\infty}N_{h_k}(\lambda).$$

Вспоминая еще раз (4.7), получаем

$$\int_0^\infty e^{-tE}\,d\alpha(E)=\int e^{-tE}\,d\rho(E), \tag{4.12}$$

где

$$\rho(E)=\int\limits_{\overset{\circ}{H}(0\mid z,\bar z)<E}\Pi\,dz\,d\bar z.$$

Из единственности преобразования Лапласа следует, что $\alpha(E)=\rho(E)$. Последнее равенство в свою очередь означает, что $\alpha(E)$ является единственной предельной функцией семейства $h^nN_h(E)$, т. е. что существует предел $h^nN_h(E)$ при $h\longrightarrow 0$ и что $\lim\limits_{h\to 0}h^nN_h(E)=\rho(E)$. Теорема доказана.

Найдем теперь асимптотику $N_h(E)$ при фиксированном h и $E\longrightarrow\infty$.

Теорема 13. *Пусть антивиковский символ самосопряженного*[1]) *оператора* $\hat H$ *обладает свойствами*:

[1]) Область определения $\hat H$ описывается теоремой 7.

1) *при* $\mathring{H}(z, \bar{z}) > k$

$$\left|\frac{\mathring{H}(z+v, \overline{z}+\overline{v})}{\mathring{H}(z, \bar{z})} - 1\right| \leqslant \varepsilon(k)\, e^{\frac{1}{s} v\bar{v}}, \quad s > h, \ \varepsilon(k) \to 0 \ \text{при} \ k \to \infty;$$

2) *существует такое* $\gamma > 0$, *что* $\int\limits_{\mathring{H} < E} \Pi\, dz\, d\bar{z} = (1 + o(1))\, A E^{\gamma}$;

3) $\mathring{H} \in \mathring{S}_p$, $p > 2$, $\mathring{H} \geqslant 0$.

Тогда при $E \to \infty$

$$N_h(E) = \frac{1 + O(1)}{h^n} \int\limits_{\mathring{H}(z, \bar{z}) < E} \Pi\, dz\, d\bar{z}.$$

Доказательство. Согласно (2.3),

$$\frac{H(\bar{z}, z)}{\mathring{H}(z, \bar{z})} - 1 = \frac{1}{h^n} \int \left(\frac{\mathring{H}(z+v, \overline{z}+\overline{v})}{\mathring{H}(z, \bar{z})} - 1 \right) e^{-\frac{v\bar{v}}{s} - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s}\right) v\bar{v}}\, \Pi\, dv\, d\bar{v}.$$

Поэтому из условия теоремы следует, что при $\mathring{H}(z, \bar{z}) > k$

$$\left| \frac{H(\bar{z}, z)}{\mathring{H}(z, \bar{z})} - 1 \right| < \alpha(k), \quad \alpha(k) = \varepsilon(k) \left(\frac{s}{s-h} \right)^n \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Обозначим через $\rho(E)$ функцию

$$\rho(E) = \int \theta(E - H(\bar{z}, z))\, \Pi\, dz\, d\bar{z}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Через $\mathring{\rho}(E)$ обозначим аналогичную функцию, получающуюся заменой H на $\mathring{H}$. Найдем связь между этими функциями. Положим $\mathring{H}(z, \bar{z}) = H(\bar{z}, z)(1 + \delta(z, \bar{z}))$. Согласно полученному ранее результату, $|\delta| \leqslant \frac{\alpha(k)}{1 - \alpha(k)} = \beta(k) \to 0$ при $\mathring{H}(z, \bar{z}) \geqslant k$, $k \to \infty$.

Заметим, что $\mathring{\rho}(E)$ есть интеграл $\Pi\, dz\, d\bar{z}$ по области $\mathring{\mathscr{D}}_E$ с границей, определяемой уравнением $\mathring{H} = H(1 + \delta) = E$, или, что то же самое, $H = \frac{E}{1+\delta}$. Так как $\mathring{H} = E$, то $|\delta| \leqslant \beta(E)$ и $\frac{E}{1 + \beta(E)} \leqslant \frac{E}{1 + \delta(z, \bar{z})} \leqslant \frac{E}{1 - \beta(E)}$. Следовательно,

$$\mathscr{D}_{\frac{E}{1+\beta(E)}} \subset \mathring{\mathscr{D}}_E \subset \mathscr{D}_{\frac{E}{1-\beta(E)}}, \tag{4.13}$$

где через $\mathscr{D}_E$ обозначена область, в которой $H < E$. Из (4.13) вытекают соотношения между ρ и $\mathring{\rho}$:

$$\rho\left(\frac{E}{1 + \beta(E)}\right) \leqslant \mathring{\rho}(E) \leqslant \rho\left(\frac{E}{1 - \beta(E)}\right). \tag{4.14}$$

Согласно условию теоремы, $\mathring{\rho}(E) = (1 + o(1))\, AE^{\gamma}$. Из (4.14) следует, что $\rho(E)$ обладает тем же свойством. Поэтому при $t \to 0$

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\lambda}\, d\mathring{\rho}(\lambda) = \frac{(1 + o(1))\, At^{-1-\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} = \frac{(1 + o(1))\, At^{-1-\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \int\limits_0^\infty e^{-t\lambda}\, d\rho(\lambda). \tag{4.15}$$

Из (4.4) и (4.15) следует, что при $t \longrightarrow 0$

$$\operatorname{Sp} e^{-t\hat{H}} = \int_0^\infty e^{-tE}\, dN_h(E) = \frac{(1+o(1))\, At^{-1}}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

Применяя тауберову теорему Карамата [14], получаем отсюда, что $N_h(E) = (1+o(1))\, AE^\gamma$ при $E \longrightarrow \infty$, $AE^\gamma = \frac{1}{h^n} \int\limits_{\mathring{H} < E} \Pi\, dz\, d\bar{z}$. Теорема доказана.

3. Связь виковских символов с реализацией пространства $\mathscr{H}$ в виде L_2. Реализуем пространство $\mathscr{H}$ в виде L_2 таким образом, чтобы операторы рождения и уничтожения задавались формулами

$$(\hat{a}_k^* f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_k - h\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x), \quad (\hat{a}_k f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_k + h\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x). \tag{4.16}$$

Пусть $\hat{\varphi} \in \mathscr{H}$, $\varphi(\bar{z}) \in F_2$, — соответствующая $\hat{\varphi}$ аналитическая функция и $f(x) \in L_2$ — функция, соответствующая $\hat{\varphi}$ в L_2-реализации. Найдем связь между $\varphi(\bar{z})$ и f. Прежде всего заметим, что из формулы (1.10) при единичном операторе $\hat{A}$ следует, что

$$\varphi(\bar{z}) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}_z), \tag{4.17}$$

где $\hat{\psi}_z$ — вектор с виковским символом

$$\psi_z(\bar{a}) = e^{\frac{1}{h}\bar{a}z}. \tag{4.18}$$

Из (4.18) и (1.12) следует, что $\hat{\psi}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{a}_k \hat{\psi}_z = z_k \hat{\psi}_z. \tag{4.19}$$

Кроме того, $\hat{\psi}_z$ аналитически зависит от z и

$$(\hat{\psi}_z, \hat{\psi}_z) = e^{\frac{1}{h} z\bar{z}}. \tag{4.20}$$

Пусть $f_z(x) \in L_2$ — функция, соответствующая $\hat{\psi}_z$. Согласно (4.16) и (4.19),

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_k + h\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f_z(x) = z_k f(x). \tag{4.21}$$

Отсюда

$$f_z(x) = (\pi h)^{-n/4} \exp\left\{-\frac{1}{2h}\left(x^2 - 2\sqrt{2}\, xz + z^2\right)\right\}. \tag{4.22}$$

(Условия нормировки (4.20) и аналитичности по z выделяют единственное с точностью до множителя, равного по модулю 1 и не зависящего от z, решение системы уравнений (4.21).) Согласно (4.17), если $f(x)$ — функция, отвечающая вектору $\hat{\varphi}$, то

$$\varphi(\bar{z}) = \frac{1}{(\pi h)^{n/4}} \int f(x) \exp\left\{-\frac{1}{2h}\left(x^2 - 2\sqrt{2}\,\bar{z}x + \bar{z}^2\right)\right\} d^n x. \tag{4.23}$$

Формула (4.23) допускает очевидное обращение:

$$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}(\pi h)^{3/(4n)}}\int\varphi(-is)\exp\left\{-\frac{1}{2h}\left(s^2+2i\sqrt{2}sx-x^2\right)\right\}d^ns. \tag{4.24}$$

Перейдем к операторам. Заметим прежде всего, что вектор $\hat{\psi}_z$ отличается от нормированного пуассоновского вектора $\hat{\varphi}_z$ множителем $e^{-z\bar{z}/(2h)}$ (ср. (1.4) и (4.18)). Поэтому вектору $\hat{\varphi}_z$ отвечает в L_2 функция

$$g_z(x)=\frac{1}{(\pi h)^{n/4}}\exp\left\{-\frac{1}{2h}\left(x^2-2\sqrt{2}zx+z^2+|z|^2\right)\right\}. \tag{4.25}$$

Пусть оператору $\hat{A}$ отвечает в L_2 ядро $K(x, y)$. Согласно (1.9), виковский символ $\hat{A}$ равен[1])

$$A(\bar{z}, z)=(\hat{A}\hat{\varphi}_z, \hat{\varphi}_z)=$$
$$=\frac{1}{(\pi h)^{n/2}}\int K(x, y)\exp\left\{-\frac{1}{2h}[x^2+y^2-2\sqrt{2}(\bar{z}x+zy)+(z+\bar{z})^2]\right\}d^nx\,d^ny. \tag{4.26}$$

Обращение формулы (4.26):

$$K(x, y)=\frac{1}{2^n(\pi h)^{3n/2}}\int A(-is, it)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2h}\left[(s-t)^2-i\,2\sqrt{2}(sx-ty)-x^2-y^2\right]\right\}d^ns\,d^nt. \tag{4.27}$$

Наконец, укажем связь между ядрами и антивиковскими символами:

$$K(x, y)=$$
$$=\frac{\pi^n}{(\pi h)^{3n/2}}\int\mathring{A}(z, \bar{z})\exp\left\{-\frac{1}{2h}\left[x^2+y^2-2\sqrt{2}(\bar{z}y+zx)+(z+\bar{z})^2\right]\right\}\times$$
$$\times\Pi\,dz\,d\bar{z}. \tag{4.28}$$

Формула (4.28) доказывается следующим образом. Обозначим определяемое ею отображение $\mathring{A}\to K$ через T_1; отображение $K\to A$, определяемое формулой (4.26),— через T_2; отображение $\mathring{A}\to A$, определяемое формулой (2.3),— через T. Достаточно проверить, что $T=T_2T_1$. Последнее равенство является очевидным следствием

[1]) Формулы (4.26) и (4.27) имеют непосредственный смысл в случае суммируемости подынтегральных выражений. Они, однако, могут быть распространены на обобщенные (K) и быстро растущие (A) функции с помощью теоремы Планшереля

$$\int\frac{1}{h^{2n}}\int A(\bar{z}v)\,\overline{A(\bar{v}z)}\,e^{-\frac{1}{h}(z-v)(\bar{z}-\bar{v})}\,\Pi\,dz\,d\bar{z}\,dv\,d\bar{v}=\int|K|^2\,d^nx\,d^ny\ (=\mathrm{Sp}\,\hat{A}\hat{A}^*)$$

путем стандартных рассуждений, применяемых в теории интеграла Фурье.

тождества

$$\frac{\pi^n}{(\pi h)^{2n}}\int \exp\left\{-\frac{1}{h}\left(x^2+y^2-\sqrt{2}\,[x(v+\bar z)+y(\bar v+z)]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(z+\bar z)^2+\frac{1}{2}(v+\bar v)^2\right)\right\} d^nx\,d^ny=\frac{1}{h^n}\exp\left\{-\frac{1}{h}(z-v)(\bar z-\bar v)\right\}.$$

В заключение приведем формулу, выражающую обычный qp-символ $f(q, p)$, употребляющийся в теории псевдодифференциальных операторов, через антивиковский символ. Символ $f(q, p)$ выражается через $K(x, y)$ согласно формуле

$$f(q, p)=\int K(q, y)\,e^{\frac{1}{h}p(y-q)}\,d^ny.$$

Комбинируя эту формулу с (4.28), получаем

$$f(q, p)=\frac{2^{n/2}}{(\pi h)^n}\int \mathring{A}(z, \bar z)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2h}\left[q^2+p^2+2ipq-2\sqrt{2}\,(qz+ip\bar z)+z^2+2z\bar z-\bar z^2\right]\right\}\Pi\,dz\,d\bar z.$$

В частности, если $\mathring{A}(z, \bar z)=a\left(\frac{z-\bar z}{2}\right)=a(\eta)$, то

$$f(q, p)=f_1(p)=\left(\frac{2}{\pi h}\right)^{\frac{n}{2}}\int e^{-\frac{1}{h}(p-\sqrt{2}\eta)^2}\,a(\eta)\,d^n\eta,$$

и если $\mathring{A}(z, \bar z)=b\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)=b(\xi)$, то

$$f(q, p)=f_2(q)=\left(\frac{2}{\pi h}\right)^{\frac{n}{2}}\int e^{-\frac{1}{h}(q-\sqrt{2}\xi)^2}\,b(\xi)\,d^n\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F o c k V. A. Konfigurationsraum und zweite Quantelung — Z. Phys. 1932, Bd. 75, S. 622—647.
   (Русский перевод в сб.: Ф о к В. А. Работы по квантовой теории поля.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1957).
2. F o c k V. A. Zur Quantenelectrodynamik.— Sowiet Rhys., 1934, v. 6, p. 425.
   (Русский перевод в сб.: Ф о к В. А. Работы по квантовой теории поля.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1957).
3. B a r g m a n n V. On a Hilbert space of analytic functions.— Comm. Pure Appl. Math., 1961, v. 3, p. 215—228.
4. К о с т ю ч е н к о А. Г. Некоторые вопросы стектральной теории для уравнений с частными производными.— В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными.— М.: Наука, 1970.
5. Б и р м а н М. Ш., Б о р з о в В. В. Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов.— ТМФ, 1971, № 5, с 24—38.
6. Б е р е з и н Ф. А. Канонические преобразования в представлении вторичного квантования.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 311—314.
7. K l a u d e r I. R., S u d a r s h a n E. C. G. Fundamentals of quantum optics.— I. N. C.; New York; Amsterdam, W. A. Benjamin, 1968.

8. Agarwal G. S., Wolf E. Calculus for functions of noncommuting operators and general phase—space method in quantum mecanics.— Phys. Rev., 1970, v. 2, p. 2161—2225.
9. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
10. Березин Ф. А. Несколько замечаний о представлениях соотношений коммутации.— УМН, 1969, т. 24, вып. 4 (148), с. 65—88.
11. Березин Ф. А. Об одном представлении операторов с помощью функционалов.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 17, с. 117—196.
12. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства.—М.: ИЛ, 1948.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
14. Widder D. V. The Laplace Transform.— Princeton, 1941.

Глава III

КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРОВ [1])

Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}$ реализовано как подпространство более широкого пространства $\tilde{\mathscr{H}}=L^2(M)$, где M — некоторое множество с мерой. Пусть далее $\hat{P}$ — ортогональный проектор из $\tilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}$, $\delta_\alpha(\beta)$ есть δ-функция на M: $\int f(\beta)\delta_\alpha(\beta)\,d\beta=f(\alpha)$. Предполагается, что оператор $\hat{P}$ может быть продолжен на некоторое множество обобщенных функций $\tilde{L}(M)\supset L^2(M)$, включающее $\delta_\alpha(\beta)$ для почти всех α: $e_\alpha=\hat{P}\delta_\alpha\in\mathscr{H}$ для почти всех α.

Рассмотрим оператор $\hat{A}$ в $\mathscr{H}$, представимый в виде $\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}$, где $\hat{B}$ — оператор умножения в $\tilde{\mathscr{H}}=L_2(M)$ на функцию $\mathring{A}(\alpha)$. Пусть при почти всех α определена функция $A(\alpha)=(\hat{A}e_\alpha, e_\alpha)(e_\alpha, e_\alpha)^{-1}$, где $e_\alpha=\hat{P}\delta_\alpha$. Функции $A(\alpha)$ и $\mathring{A}(\alpha)$ называются соответственно ко- и контравариантным символами оператора $\hat{A}$.

В работе показано, что эти символы содержат богатую информацию относительно спектральных свойств оператора $\hat{A}$: с их помощью может быть оценен спектр $\hat{A}$, получены отдельно необходимые и достаточные условия ограниченности и ядерности и оценен с двух сторон $\operatorname{Sp}\exp(-t\hat{A})$ при $\hat{A}>0$, $t>0$.

Кроме того, показано, что при $\hat{A}>0$, $t>0$, $\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}$

$$\exp(-t\hat{A})=\lim_{n\to\infty}\left(\hat{P}\exp\left(-\frac{t}{n}\hat{B}\right)\hat{P}\right)^n. \qquad (*)$$

Полученные общие теоремы в частных случаях дают почти все известные теоремы об асимптотике числа собственных чисел, меньших данного для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области и для широкого класса псевдодифференциальных операторов во всем пространстве. Сверх этого получаются двусторонние оценки для следа экспонент этих операторов, которые ранее, по-видимому, не были известны.

---

[1]) Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 5, с. 1134—1167.

Формула (*) может в зависимости от конкретной ситуации служить основой для численного решения смешанной задачи Коши в области или обоснованием одного из вариантов так называемого интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

§ 1. Основные определения

Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, M — некоторое множество, снабженное мерой $d\alpha$, $\alpha \in M$. Систему векторов $e_\alpha \in \mathscr{H}$, $\alpha \in M$, будем называть переполненной, если для любого $f \in \mathscr{H}$ выполнено равенство

$$(f, f) = \int |(f, e_\alpha)|^2 \, d\alpha. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что

$$f = \int (f, e_\alpha) \, e_\alpha \, d\alpha. \tag{1.1$'$}$$

(Интеграл в правой части (1.1′) понимается в слабом смысле.)

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(M)$. Переполненная система e_α порождает изометрическое вложение $\mathscr{H} \longrightarrow L^2(M)$ согласно формуле

$$f \longrightarrow (f, e_\alpha) = f(\alpha) \in L^2(M). \tag{1.2}$$

В частности,

$$e_\beta \longrightarrow (e_\beta, e_\alpha) = e_\beta(\alpha) = \overline{e_\alpha(\beta)}. \tag{1.2$'$}$$

Начиная с этого места, мы считаем $\mathscr{H}$ подпространством $L^2(M)$. Пусть $\mathring{A}(\alpha)$, $\alpha \in M$, — измеримая функция, $\hat{P}_\alpha$ — ортогональный проектор на e_α. Рассмотрим оператор

$$\hat{A} = \int \mathring{A}(\alpha) \, \hat{P}_\alpha \, (e_\alpha, e_\alpha) \, d\alpha. \tag{1.3}$$

Интеграл (1.3) понимается в слабом смысле.

Функцию $\mathring{A}(\alpha)$ будем называть контравариантным символом оператора $\hat{A}$.

Если оператор $\hat{A}$ обладает тем свойством, что в область определения его квадратичной формы при любом $\alpha \in M$ входит e_α, то функцию

$$A(\alpha) = \frac{(\hat{A} e_\alpha, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)} = \operatorname{Sp}(\hat{A} \hat{P}_\alpha) \tag{1.4}$$

будем называть ковариантным символом оператора $\hat{A}$.

Установим ряд простейших свойств операторов, обладающих ко- и контравариантными символами.

1. Пусть оператор $\hat{A}$ обладает контравариантным символом $\mathring{A}(\alpha)$: Обозначим через $\hat{B}$ оператор в $L^2(M)$, состоящий в умножении на $\mathring{A}(\alpha)$, а через $\hat{P}$ ортогональный проектор из $L^2(M)$ на $\mathscr{H}$.

Оператор $\hat{A}$ представим в виде

$$\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}. \tag{1.5}$$

В самом деле, пусть $c(\alpha)\in L^2(M)$. Для $(\hat{P}c)(\alpha)$ справедлива формула (см. (1.1′), (1.2′))

$$\hat{P}c=\int (c,\, e_\alpha)\, e_\alpha\, d\alpha=\int \left(\int c(\gamma)\,\overline{e_\alpha(\gamma)}\, d\gamma e_\alpha\right) d\alpha=$$
$$=\int c(\gamma)\left(\int e_\gamma(\alpha)\, e_\alpha d\alpha\right) d\gamma=\int c(\gamma)\, e_\gamma\, d\gamma. \tag{1.6}$$

(Оператор, определяемый формулой (1.6), очевидным образом симметричен, отображает $L^2(M)$ в $\mathcal{H}$ и на элементах $\mathcal{H}$ совпадает в силу (1.1) с единичным.)

Из (1.6) получаем, что оператор (1.5) действует на $f\in\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\hat{A}f=\int \mathring{A}(\alpha)\, f(\alpha)\, e_\alpha\, d\alpha=\int \mathring{A}(\alpha)\,(f,\; e_\alpha)\, e_\alpha d\alpha=\int \mathring{A}(\alpha)\,\hat{P}_\alpha f\,(e_\alpha,\, e_\alpha)\, d\alpha.$$

Следовательно, операторы (1.3) и (1.5) совпадают.

Если оператор $\hat{A}$ представим в виде (1.5), то он определен на $D_{\hat{A}}=\mathcal{H}\cap D_{\hat{B}}$. Область $D_{\hat{A}}$ мы в дальнейшем будем называть естественной областью определения $\hat{A}$. Обратим внимание на то, что функции $f(\alpha)=(f,\, e_\alpha)$ образуют подпространство в $L^2(M)$, непрерывные функционалы на котором могут задаваться в виде $\int c(\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha$, где $c(\alpha)$ не обязательно принадлежит $L^2(M)$ и может быть обобщенной функцией. В случае, если $c(\alpha)$ обладает этим свойством, то $\int \bar{f}c\, d\alpha=(g,\, f)$, $g\in\mathcal{H}$, и тогда положим по определению $\hat{P}c=g$. Таким образом, оператор P естественным образом продолжается на пространство $\tilde{L}\supset L^2(M)$. Вряд ли возможно детальное описание $\tilde{L}$ без дополнительных предположений. Однако ясно, что в $\tilde{L}$ содержатся δ-функции: если $c(\alpha)=\delta_\beta(\alpha)$, то $\int \bar{f}(\alpha)\, c(\alpha)\, d\alpha=\bar{f}(\beta)=(e_\beta,\, f)$. Таким образом,

$$\hat{P}\delta_\beta=e_\beta.$$

2. Ковариантный символ оператора $\hat{A}$ является значением при $\alpha=\beta$ функции двух переменных

$$A(\alpha,\beta)=\frac{(\hat{A}e_\alpha,\, e_\beta)}{(e_\alpha,\, e_\beta)}. \tag{1.7}$$

Наряду с $A(\alpha,\,\beta)$ рассмотрим функцию

$$\tilde{A}(\alpha,\,\beta)=(\hat{A}e_\alpha,\, e_\beta). \tag{1.8}$$

Пусть $f\in D_{\hat{A}}$. Используя (1.1′), находим

$$(\hat{A}f,\, e_\beta)=\int (f,\, e_\alpha)\,(\hat{A}e_\alpha,\, e_\beta)\, d\alpha=\int (f,\, e_\alpha)\,\tilde{A}(\alpha,\,\beta)\, d\alpha. \tag{1.9}$$

Отсюда

$$\hat{A}f = \int (\hat{A}f, e_\beta) e_\beta \, d\beta = \int (f, e_\alpha) \tilde{A}(\alpha, \beta) e_\beta \, d\alpha \, d\beta =$$
$$= \int (f, e_\alpha) A(\alpha, \beta)(e_\alpha, e_\beta) e_\beta \, d\alpha \, d\beta.$$

(Возможность перестановки интегрирования и действия оператора легко следует из определения слабого интеграла.)

Найдем символ, отвечающий произведению операторов. Пусть $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$. При $e_\alpha \in D_{\hat{B}}$, $e_\alpha \in D_{\hat{A}} \cap D_{\hat{A}^*}$,

$$\tilde{C}(\alpha, \beta) = (\hat{A}\hat{B}e_\alpha, e_\beta) = (\hat{B}e_\alpha, \hat{A}^* e_\beta) = \int (\hat{B}e_\alpha, e_\gamma)(e_\gamma, \hat{A}^* e_\beta) \, d\gamma =$$
$$= \int (\hat{B}e_\alpha, e_\gamma)(\hat{A}e_\gamma, e_\beta) \, d\gamma = \int \tilde{B}(\alpha, \gamma) \tilde{A}(\gamma, \beta) \, d\gamma. \tag{1.10}$$

Пользуясь (1.8), получаем

$$C(\alpha, \beta) = \int B(\alpha, \gamma) A(\gamma, \beta) \frac{(e_\alpha, e_\gamma)(e_\gamma, e_\beta)}{(e_\alpha, e_\beta)} \, d\gamma. \tag{1.11}$$

3. Укажем связь между ко- и контравариантными символами одного и того же оператора. Согласно (1.3) и (1.8),

$$A(\alpha) = (\hat{A}e_\alpha, e_\alpha) = \int \mathring{A}(\gamma)(e_\alpha, e_\gamma)(e_\gamma, e_\alpha) \, d\gamma,$$
$$A(\alpha) = \int \mathring{A}(\gamma) \frac{(e_\alpha, e_\gamma)(e_\gamma, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)} \, d\gamma. \tag{1.12}$$

4. Из (1.3) вытекает, что оператор $\hat{A}$ является ядерным, если

$$\int |\mathring{A}(\alpha)| (e_\alpha, e_\alpha) \, d\alpha < \infty. \tag{1.13}$$

Из (1.5) следует, что оператор $\hat{A}$ ограничен, если $|\mathring{A}(\alpha)| < c$, и что

$$\| \hat{A} \| \leqslant \operatorname{vrai\,sup} |\mathring{A}(\alpha)|. \tag{1.14}$$

В случае, если выполнено условие (1.13), из (1.3) следует, что

$$\operatorname{Sp} \hat{A} = \int \mathring{A}(\alpha)(e_\alpha, e_\alpha) \, d\alpha. \tag{1.15}$$

5. Если оператор $\hat{A}$ ограничен, то $|A(\alpha)| \leqslant \|A\|$ (следует непосредственно из (1.4)).

6. Если оператор $\hat{A}$ является ядерным, то

$$\int |A(\alpha)| (e_\alpha, e_\alpha) \, d\alpha < \infty, \quad \operatorname{Sp} \hat{A} = \int A(\alpha)(e_\alpha, e_\alpha) \, d\alpha. \tag{1.16}$$

Пусть сначала $\hat{A} \geqslant 0$, $\lambda_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$,— собственные числа $\hat{A}$; φ_k — соответствующие собственные векторы. Из (1.4) следует, что

$$A(\alpha) = \sum_1^\infty \lambda_k \frac{(e_\alpha, \varphi_k)(\varphi_k, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)}.$$

Пусть $\tilde{A}_N(\alpha)=\sum_1^N \lambda_k(e_\alpha, \varphi_k)(\varphi_k, e_\alpha)$. Очевидно, что $\tilde{A}_N(\alpha)$ — монотонно не убывающая ограниченная $\left(\tilde{A}_N(\alpha)\leqslant \sum_1^\infty \lambda_k(e_\alpha, e_\alpha)\right)$ последовательность функций, имеющая своим пределом $\tilde{A}(\alpha)$. Далее, согласно (1.1),

$$\int \tilde{A}_N(\alpha)(e_\alpha, e_\alpha)\,d\alpha=\sum_1^N \lambda_k \leqslant \sum_1^\infty \lambda_k.$$

Поэтому, согласно теореме Беппо Леви, $\tilde{A}(\alpha)$ — суммируемая функция и

$$\int \tilde{A}(\alpha)(e_\alpha, e_\alpha)\,d\alpha=\lim_{N\to\infty}\int \tilde{A}_N(\alpha)(e_\alpha, e_\alpha)\,d\alpha=\sum_1^\infty \lambda_k.$$

Общий случай сводится к рассмотренному, так как произвольный ядерный оператор представлен в виде $\hat{A}=(\hat{A}_1-\hat{A}_2)+i(\hat{A}_3-\hat{A}_4)$, где $\hat{A}_i>0$ — ядерные операторы.

7. В приложениях иногда встречаются системы векторов, удовлетворяющие более общему, чем (1.1), условию:

$$\int |(f, e_\alpha)|^2\,d\alpha=(f, \hat{r}f), \tag{1.17}$$

где $\hat{r}$ — некоторый (неотрицательный) оператор.

Использование системы, удовлетворяющей условию (1.17), приводит к следующему видоизменению формулы (1.16) для следов:

$$\mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{r})=\int (\hat{A}e_\alpha, e_\alpha)(e_\alpha, e_\alpha)\,d\alpha. \tag{1.18}$$

Так же как в случае формулы (1.16), ядерность оператора $\hat{A}\hat{r}$ гарантирует существование интеграла в правой части (1.18).

8. Рассматриваемая в этой работе конструкция, в основе которой лежит формула $\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}$, не является новой в теории операторов. С другими целями она изучалась М. А. Наймарком и рядом других авторов (см. [1—4]).

§ 2. Оценка спектра $\hat{A}$ и следа $\exp(-t\hat{A})$

Если у оператора $\hat{A}$ имеются ко- или контравариантные символы, то с их помощью можно оценить спектральные характеристики $\hat{A}$.

Пусть $D(\hat{A})$ — множество значений эрмитовой квадратичной формы $(\hat{A}f, f)$ при $\|f\|=1$, $f\in D_{\hat{A}}$, $D(A)$ — множество значений $A(\alpha)$ и $D(\mathring{A})$ — выпуклая оболочка множества значений функции $\mathring{A}(\alpha)$.

Теорема 1. *Справедливы включения*

$$D(A)\subset D(\hat{A})\subset D(\mathring{A}). \tag{2.1}$$

Доказательство. Первое включение очевидным образом следует из (1.4), второе — из формулы

$$(\hat{A}f,\ f)=\int \mathring{A}(\alpha)\,|f(\alpha)|^2\,d\alpha,$$

непосредственно вытекающей из (1.5).

В случае, если $\mathring{A}>0$, согласно теореме 1 также $\hat{A}>0$. Обозначим через $\hat{A}_F$ расширение по Фридрихсу оператора $\hat{A}$ с естественной областью определения $D_{\hat{A}}$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)\geqslant 0$ — выпуклая вниз функция. Справедливы неравенства:*

$$\int \varphi(A(\alpha))(e_\alpha,\ e_\alpha)\,d\alpha \leqslant \operatorname{Sp}\varphi(\hat{A}_F)\leqslant \int \varphi(\mathring{A}(\alpha))(e_\alpha,\ e_\alpha)\,d\alpha, \quad (2.2)$$

причем $\operatorname{Sp}\varphi(\hat{A}_F)<\infty$, *если конечен интеграл в правой части* (2.2), *и интеграл в левой части* (2.2) *конечен, если* $\operatorname{Sp}\varphi(\hat{A}_F)<\infty$.

Доказательство. Пусть $u(\alpha)$ — ковариантный символ оператора $\varphi(\hat{A}_F)$. Первое неравенство (2.2) является следствием оценки

$$\varphi(A(\alpha))\leqslant u(\alpha). \quad (2.3)$$

Доказательство оценки (2.3):

$$u(\alpha)=(\varphi(\hat{A})e_\alpha,\ e_\alpha)\frac{1}{(e_\alpha,\ e_\alpha)}=\int \varphi(\lambda)\,d\sigma_\alpha(\lambda),$$

$$\varphi(A(\alpha))=\varphi\left(\int \lambda\,d\sigma_\alpha(\lambda)\right),$$

где

$$\sigma_\alpha(\lambda)=(\hat{E}(\lambda)e_\alpha,\ e_\alpha)\frac{1}{(e_\alpha,\ e_\alpha)} \quad (2.4)$$

является ковариантным символом спектрального проектора $\hat{E}(\lambda)$. Применяя неравенство для выпуклых функций

$$\varphi\left(\int\lambda\,d\sigma(\lambda)\right)\leqslant \int \varphi(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

получаем (2.3). Из неотрицательности φ и конечности следа $\varphi(\hat{A})$ вытекает, что $\varphi(A(\alpha))\geqslant 0$, $u(\alpha)\geqslant 0$ и что

$$\operatorname{Sp}(\varphi(\hat{A}))=\int u(\alpha)(e_\alpha,\ e_\alpha)\,d\alpha,$$

(см. (1.16)). Следовательно, правая, а тем самым и левая части (2.3) становятся суммируемыми после умножения на $(e_\alpha,\ e_\alpha)$.

Умножая обе части (2.3) на $(e_\alpha,\ e_\alpha)$ и интегрируя, получаем первое неравенство в (2.2).

Второе неравенство в (2.2) является следствием общей теоремы, доказанной в [5].

§ 3. Метод последовательных приближений

Контравариантные символы позволяют строить последовательные приближения для оператора $e^{-t\hat{A}}$ при $\hat{A} \geqslant 0$. В конкретных случаях эти приближения являются конечномерными аппроксимациями бесконечнократного интеграла.

Пусть $\hat{B} > I$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$ с областью определения D_B; $\mathscr{H} \subset \tilde{\mathscr{H}}$ — подпространство $\tilde{\mathscr{H}}$; $\hat{P}$ — ортогональный проектор на $\mathscr{H}$; $\mathscr{L}_{\hat{B}} = D_{\hat{B}} \cap \mathscr{H}$, $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}} = D_{\sqrt{\hat{B}}} \cap \mathscr{H}$, тогда $\mathscr{L}_{\hat{B}}$ и $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$ являются, очевидно, гильбертовыми пространствами относительно скалярных произведений

$$(f,\ g)_{\hat{B}^2} = (\hat{B}f,\ \hat{B}g) \quad \text{и} \quad (f,\ g)_{\hat{B}} = \left(\sqrt{\hat{B}}f,\ \sqrt{\hat{B}}g\right),\quad f \in \mathscr{H} = \hat{P}\tilde{\mathscr{H}}.$$

Обозначим, далее, через $\hat{A}$ симметричный оператор $\hat{A} = \hat{P}\hat{B}\hat{P}$, определенный на $D_{\hat{A}} = \mathscr{L}_{\hat{B}}$, и через $\hat{A}_n$, $\hat{C}_\lambda$ — операторы

$$\hat{A}_n = \int_0^1 \hat{P}e^{-\frac{x\hat{B}}{n}}\hat{B}\hat{P}\,dx, \quad \hat{C}_\lambda = \hat{P}\hat{B}\hat{E}_\lambda\hat{P},$$

где $\hat{E}_\lambda$ — спектральный проектор $\hat{B}$. Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 3. 1) *Последовательности $\hat{A}_n$ и $\hat{C}_\lambda$ имеют при $n \to \infty$ и $\lambda \to \infty$ в расширенном смысле*[1]) *общий сильный предел $\underline{\hat{A}}$, где $\underline{\hat{A}}$ — самосопряженное расширение $\hat{A}$.*

2) *Для любого комплексного t такого, что $\operatorname{Re} t > 0$, существует сильный предел операторов*

$$\hat{G}_n(t) = \left(\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}\right)^n \tag{3.1}$$

и этот предел равен

$$\lim_{n\to\infty} \hat{G}_n(t) = e^{-t\underline{\hat{A}}}.$$

3) *$\underline{\hat{A}} = \hat{A}_F$, где $\hat{A}_F$ — расширение по Фридрихсу оператора $\hat{A}$, тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}_{\hat{B}}$ плотно в $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$.*

Доказательство теоремы распадается на ряд лемм.

Пусть $A > I$ — симметричный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения D_A и $I < A_n < A_{n+1}$ — последовательность ограниченных операторов, слабо сходящихся к A на D_A.

---

[1]) Пусть G_X, G_{X_α} — графики операторов X и X_α соответственно, T, T_α — операторы ортогонального проектирования на G_X и G_{X_α}. Оператор X называется сильным пределом в расширенном смысле операторов X_α, если $T = s\text{-}\lim T_\alpha$ (термин заимствован из немецкого издания книги [6]).

Обозначим через H_A пополнение D_A по скалярному произведению $(f, f)_A=(Af, f)$ и через $\tilde{H}_A$ множество векторов $f\in H$, для которых $(A_n f, f)<c<\infty$. $\tilde{H}_A$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f, f)_{\tilde{A}}=\lim_{n\to\infty}(A_n f, f).$$

Лемма 1. *Пусть A_n и A — описанные выше операторы; тогда:*

1) *последовательность A_n^{-1} сильно сходится к $\underline{A}^{-1}$, где $\underline{A}$ — некоторое самосопряженное расширение A;*

2) *H_A является подпространством $\tilde{H}_A$;*

3) $\tilde{H}_A=D_{\sqrt{\underline{A}}}$;

4) *для того чтобы $\underline{A}=A_F$, где A_F — расширение по Фридрихсу A, необходимо и достаточно, чтобы $H_A=\tilde{H}_A$.*

Доказательство леммы 1. Заметим прежде всего, что[1]) $0<A_{n+1}^{-1}<A_n^{-1}<I$. Поэтому (см., например, [6]) последовательность A_n имеет сильный предел $B=\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{-1}$.

Рассмотрим тождество

$$(\xi, \eta)=(A_n\xi, A_n^{-1}\eta), \quad \xi\in D_A, \quad \eta\in H.$$

Поскольку $A_n\xi$ слабо сходится к $A\xi$, то $\|A_n\xi\|<c<\infty$. Поскольку $A_n^{-1}\longrightarrow B$ сильно, то $A_n^{-1}\eta=B\eta+\delta_n$, $\|\delta_n\|\longrightarrow 0$, при $n\longrightarrow\infty$. Поэтому

$$(\xi, \eta)=(A_n\xi, B\eta)+(A_n\xi, \delta_n), \quad |(A_n\xi, \delta_n)|\leqslant c\|\delta_n\|.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\longrightarrow\infty$, находим

$$(\xi, \eta)=(A\xi, B\eta). \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что

$$BA=I, \quad A^*B=I. \tag{3.3}$$

Из (3.2) вытекает, что оператор B не обращает в 0 ни одного вектора и, следовательно, имеет обратный $\underline{A}=B^{-1}$, определенный на плотном множестве $\operatorname{Im} B$. Из первого равенства в (3.3) следует, что $A\xi=\underline{A}\xi$ при $\xi\in D_A$, т. е. что $\underline{A}$ является самосопряженным расширением A.

---

[1]) Пусть X — произвольный ограниченный оператор. В таком случае $X=\theta u$, где $\theta=\theta^*$, — самосопряженный и u — изометрический операторы. Поэтому $X^*X=u^*\theta^2u=u^*XX^*u$ и $X^*X>1$ тогда и только тогда, когда $XX^*>1$. Заметим теперь, что из условия $A_n<A_{n+1}$ следует, что

$$A_{n+1}^{-1/2}A_nA_{n+1}^{-1/2}=\left(A_{n+1}^{-1/2}A_n^{1/2}\right)\left(A_{n+1}^{-1/2}A_n^{1/2}\right)^*<I.$$

Тем самым также

$$I>\left(A_{n+1}^{-1/2}A_n^{1/2}\right)^*\left(A_{n+1}^{-1/2}A_n^{1/2}\right)=A_n^{1/2}A_{n+1}^{-1}A_n^{1/2}.$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что $A_n^{-1}>A_{n+1}^{-1}$.

Пусть $\xi \in D_A$. В этом случае $(A_n\xi, \xi) \leqslant (A\xi, \xi)$ и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n\xi, \xi) = (A\xi, \xi)$. Следовательно, $\xi \in \tilde{H}_A$ и $(\xi, \xi)_A = (\xi, \xi)_{\tilde{A}}$. Таким образом, $D_A \subset \tilde{H}_A$, и пространство H_A, являющееся пополнением D_A по скалярному произведению $(\xi, \xi)_A$, будет подпространством $\tilde{H}_A$.

Утверждения 1) и 2) леммы доказаны; перейдем к утверждению 3). Покажем, что $\tilde{H}_A = D_{\sqrt{\underline{A}}}$. Из монотонного возрастания A_n следует монотонное возрастание $\sqrt{A_n}$ и монотонное убывание $A_n^{-1/2}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{-1/2} = \underline{A}^{-1/2}$.

Пусть $\xi = \underline{A}^{-1/2}\eta \in \operatorname{Im} \underline{A}^{-1/2} = D_{\sqrt{\underline{A}}}$. Тогда

$$(A_n\xi, \xi) = \lim_{p\to\infty}(A_nA_p^{-1/2}\eta, A_p^{-1/2}\eta) \leqslant \lim_{p\to\infty}(A_pA_p^{-1/2}\eta, A_p^{-1/2}\eta) = (\eta, \eta);$$

следовательно, $\xi \in \tilde{H}_A$, $D_{\sqrt{\underline{A}}} \subset \tilde{H}_A$.

Пусть $\xi \in \tilde{H}_A$. В таком случае $\|\sqrt{A_n}\xi\| \leqslant c$. Выберем из последовательности $\sqrt{A_n}\xi$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\sqrt{A_{n_k}}\xi$. Рассмотрим тождество

$$(\xi, \eta) = \left(\sqrt{A_{n_k}}\xi, \sqrt{A_{n_k}^{-1}}\eta\right), \quad \eta \in H.$$

Ввиду сильной сходимости $\sqrt{A_{n_k}^{-1}}\eta = \underline{A}^{-1/2}\eta + \delta_{n_k}$, $\|\delta_{n_k}\| \longrightarrow 0$. Значит,

$$(\xi, \eta) = (A_{n_k}^{1/2}\xi, \underline{A}^{-1/2}\eta) + (A_{n_k}^{1/2}\xi, \delta_{n_k}). \tag{3.4}$$

Второе слагаемое допускает оценку $\left|(A_{n_k}^{1/2}\xi, \delta_{n_k})\right| \leqslant c\|\delta_{n_k}\| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Поэтому, переходя в (3.4) к пределу при $k \longrightarrow \infty$, находим

$$(\xi, \eta) = (\tilde{\xi}, \underline{A}^{-1/2}\eta), \tag{3.5}$$

где $\tilde{\xi} = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k}^{1/2}\xi$. Из (3.5) следует, что[1]) $\underline{A}^{-1/2}\tilde{\xi} = \xi$, т. е. что $\xi \in \operatorname{Im} \underline{A}^{-1/2}$. Таким образом, $\tilde{H}_A \subset \operatorname{Im} \underline{A}^{-1/2}$, и, следовательно, $\tilde{H}_A = \operatorname{Im} \underline{A}^{-1/2} = D_{\sqrt{\underline{A}}}$.

Для завершения доказательства леммы осталось сослаться на следующий общий факт: если $A > 0$ — произвольное расширение симметричного оператора $A > I$ и A_F — расширение по Фридрихсу этого оператора, то $D_{A_F^{1/2}} \subset D_{\underline{A}_F^{1/2}}$, причем $D_{A_F^{1/2}} = D_{\underline{A}^{1/2}}$ тогда и

[1]) Заметим кстати, что из (3.5) следует, что последовательность $A_n^{1/2}\xi$ имеет лишь одну предельную точку, следовательно, слабо сходится к $\underline{A}^{1/2}\xi$.

только тогда, когда[1]) $\underline{A}=A_F$. Поскольку[2]) $H_A=D_{\sqrt{A_F}}$, отсюда следует утверждение 3) леммы.

Лемма 2. *Пусть A_n, A, $\underline{A}$ — те же операторы, что и в лемме* 1, $\eta\in H$, $\xi=e^{-t\underline{A}}\eta$, $\eta_{n,N}=\left(1+\frac{tA_n}{N}\right)^{-N}\eta$; *тогда*

$$\|\eta_{n,N}-\xi\|\leqslant\alpha(N)+\beta(n),$$

причем $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha(N)=\lim\limits_{n\to\infty}\beta(n)=0$. *В частности, существуют сильные пределы*

$$\lim_{n\to\infty}e^{-tA_n}=e^{-t\underline{A}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA_n}{n}\right)^{-n}=e^{-t\underline{A}}.$$

Доказательство. Пусть $\|\eta\|=1$. Согласно лемме 1, существует в сильном смысле

$$\lim_{n\to\infty}\eta_{n,N}=\eta_{\infty,N}=\left(I+\frac{t\underline{A}}{N}\right)^{-N}\eta.$$

Очевидно, что в сильном смысле

$$\lim_{N\to\infty}\eta_{\infty,N}=e^{-t\underline{A}}\eta.$$

Оценим теперь $\varepsilon_{n,N}=\eta_{n,N}-\eta_{n,\infty}$ $(\eta_{n,\infty}=e^{-tA_n}\eta)$:

$$\|\varepsilon_{n,N}\|^2=\left\|\left(e^{-tA_n}-\left(I+\frac{tA_n}{N}\right)^{-N}\right)\eta\right\|^2=$$

$$=\int_1^\infty\left|e^{-t\lambda}-\frac{1}{\left(1+\frac{t\lambda}{N}\right)^N}\right|^2 d\sigma_n(\lambda)\leqslant\alpha^2(N),$$

---

[1]) Доказательство. Пусть

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}x & \text{при}\quad x\leqslant n,\\ n & \text{при}\quad x>n,\end{cases}\qquad A_n=\varphi_n(\underline{A}).$$

Очевидно, что последовательность A_n удовлетворяет всем условиям леммы и $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{-1}=A_n^{-1}$. Поэтому $D_{\underline{A}^{1/2}}=\tilde{H}_A$ и $H_A\subset\tilde{H}_A$. Наконец, $D_{\underline{A}}\subset D_{\sqrt{\underline{A}}}\cap D_{A^*}$ и $D_{A_F}=D_{\sqrt{A_F}}\cap D_{A^*}$. Поэтому, если $H_A=\tilde{H}_A$, т. е. $D_{\sqrt{\underline{A}}}=D_{\sqrt{A_F}}$, то $D_{\underline{A}}\subset$ $\subset D_{A_F}$, и, следовательно, A_F служит расширением $\underline{A}$. Ввиду самосопряженности $\underline{A}$ отсюда следует, что $D_{\underline{A}}=D_{A_F}$, $\underline{A}=A_F$. Обратно, если $\underline{A}=A_F$, то $\sqrt{\underline{A}}=\sqrt{A_F}$ и $D_{\sqrt{\underline{A}}}=D_{\sqrt{A_F}}$, т. е. $H_A=\tilde{H}_A$.

[2]) Повторяя рассуждения предыдущего примечания по отношению к A_F, находим, что $H_A\subset D_{\sqrt{A_F}}$. С другой стороны, $D_{A_F}\subset H_A$. Наконец, из спектральной теоремы легко следует, что $D_{\sqrt{c}}$ является пополнением D_c по скалярному произведению $(f,\ f)_c=(cf,\ f)$ для любого оператора $c>I$. Поэтому $H_A=D_{\sqrt{A_F}}$.

где $\sigma_n(\lambda)=(E_\lambda(n)\eta, \eta)$, $E_\lambda(n)$ — спектральный проектор A_n,

$$\alpha^2(N)=\max_{x\geqslant 0}\left|e^{-x}-\frac{1}{\left(1+\frac{x}{N}\right)^N}\right|^2\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

Пусть $\zeta\in H$. Тогда

$$|(\eta_{n,N}, \zeta)-(\eta_{n,\infty}, \zeta)|\leqslant\alpha(N)\|\zeta\|.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|(\eta_{n,N}, \zeta)-(\eta_{\infty,n}, \zeta)|=\overline{\lim_{n\to\infty}}|(\eta_{\infty,N}, \zeta)-(\eta_{n,\infty}, \zeta)|\leqslant\alpha(N)\|\zeta\|.$$

Ввиду произвольности N отсюда следуют существование слабого предела $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_{n,\infty}$ и слабое равенство

$$\lim_{n\to\infty}\eta_{n,\infty}=\lim_{N\to\infty}\eta_{\infty,N}=e^{-t\underline{A}}\eta. \tag{3.6}$$

Поскольку (3.6) справедливо при любом t, это равенство справедливо также в сильном смысле:

$$(\eta_{n,\infty}, \eta_{n,\infty})=(e^{-tA_n}\eta, e^{-tA_n}\eta)=(e^{-2tA_n}\eta, \eta)\to$$
$$\to(e^{-2t\underline{A}}\eta, \eta)=(e^{-t\underline{A}}\eta, e^{-t\underline{A}}\eta).$$

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_{n,\infty}$ через ξ. Тогда

$$\eta_{n,\infty}=\xi+\delta_n, \quad \|\delta_n\|=\beta(n)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$
$$\eta_{n,N}=\eta_{n,\infty}+\varepsilon_{n,N}=\xi+\delta_n+\varepsilon_{n,N},$$

откуда

$$\|\eta_{n,N}-\xi\|\leqslant\alpha(N)+\beta(n).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A_n — та же последовательность, что и в лемме 1, и, сверх того $\|A_n\|\leqslant n$. Тогда существует сильный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A_n}{n}\right)^n=e^{-\underline{A}}.$$

Доказательство. Установим сначала слабую сходимость. Если $\xi\in D_A$, то

$$(A_n\xi, \xi)=\int_1^n\lambda d\sigma_n(\lambda)\leqslant(\underline{A}\xi, \xi)=\int_1^\infty\lambda d\sigma(\lambda)=c. \tag{3.7}$$

Здесь и далее $\sigma_n(\lambda)=(E_\lambda(n)\xi, \xi)$, $\sigma(\lambda)=(E_\lambda\xi, \xi)$, где $E_\lambda(n)$, E_λ — спектральные проекторы операторов A_n и $\underline{A}$ соответственно. Фиксируем число $R\geqslant 1$. Из (3.7) находим

$$R\int_R^n d\sigma_n(\lambda)\leqslant\int_R^n\lambda\, d\sigma_n(\lambda)\leqslant\int_1^\infty\lambda\, d\sigma(\lambda)=c,$$

откуда

$$\int\limits_R^n d\sigma_n(\lambda) \leqslant \frac{c}{R}.$$

Рассмотрим операторы $\mathfrak{A}_n = \left(1 + \frac{tA_n}{n}\right)^{-n}$, $\mathfrak{B}_n = \left(1 - \frac{tA_n}{n}\right)^n$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, и $K_n = \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n$. Заметим, что

$$(K_n\xi, \xi) = \int\limits_1^n \left(\frac{1-\frac{t\lambda}{n}}{1+\frac{t\lambda}{n}}\right)^n d\sigma_n(\lambda) =$$

$$= \int\limits_1^R \left(\frac{1-\frac{t\lambda}{n}}{1+\frac{t\lambda}{n}}\right)^n d\sigma_n(\lambda) + \int\limits_R^n \left(\frac{1-\frac{t\lambda}{n}}{1+\frac{t\lambda}{n}}\right)^n d\sigma_n(\lambda). \tag{3.8}$$

Поскольку $\left|\frac{1-\frac{t\lambda}{n}}{1+\frac{t\lambda}{n}}\right| \leqslant 1$, второй интеграл в (3.8) при $\xi \in D_{\underline{A}}$ допускает оценку:

$$\left|\int\limits_R^n \left(\frac{1-\frac{t\lambda}{n}}{1+\frac{t\lambda}{n}}\right)^n d\sigma_n(\lambda)\right| \leqslant \int\limits_R^n d\sigma_n(\lambda) \leqslant \frac{c}{R}.$$

Что касается первого интеграла в (3.8), то он при $n \to \infty$ имеет очевидный предел. Ввиду произвольности R отсюда следует, что $(K_n\xi, \xi)$ имеет при $n \to \infty$ предел

$$\lim_{n \to \infty} (K_n\xi, \xi) = \int\limits_1^\infty e^{-2t\lambda}\, d\sigma(\lambda) = (e^{-2t\underline{A}}\,\xi, \xi).$$

Используя равномерную ограниченность $\|K_n\|$, с помощью стандартных рассуждений устанавливаем, что $K_n \to e^{-2t\underline{A}}$ в слабом смысле.

Заметим теперь, что из условия $\|A_n\| \leqslant n$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, следует, что[1] $\|\mathfrak{B}_n\| \leqslant 1$. Пусть $\mathfrak{B}_{n_p}$ — слабо сходящаяся подпоследовательность $\mathfrak{B}_n$. Поскольку в силу леммы 2 последовательность $\mathfrak{A}_{n_p}$ сильно сходится к $e^{-t\underline{A}}$,

$$e^{-2t\underline{A}} = \lim_{p \to \infty} K_{n_p} = e^{-t\underline{A}} \lim_{p \to \infty} \mathfrak{B}_{n_p}.$$

---

[1])

$$\mathfrak{B}_n = \int\limits_1^n (1 - \lambda t/n)^n\, dE_\lambda, \quad |1-x| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty}\mathfrak{B}_{n_p}=e^{-t\underline{A}}$. Поскольку это справедливо для любой сходящейся подпоследовательности $\mathfrak{B}_{n_p}$, отсюда вытекают существование слабого предела $\mathfrak{B}_n$ и равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{B}_n=e^{-t\underline{A}}.$$

Аналогично при $0\leqslant t\leqslant 1$ устанавливаются существование слабого предела $\mathfrak{B}_n^2$ и равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{B}_n^2=e^{-2t\underline{A}}$.

Покажем теперь, что при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеет место не только слабая, но и сильная сходимость. Пусть $\eta_n=\mathfrak{B}_n(t)\eta$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда

$$(\eta_n,\ \eta_n)=(\mathfrak{B}_n(t)\eta,\ \mathfrak{B}_n(t)\eta)=(\mathfrak{B}_n^2(t)\eta,\ \eta)\to(e^{-2t\underline{A}}\eta,\ \eta)=$$
$$=(e^{-t\underline{A}}\eta,\ e^{-t\underline{A}}\eta).$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть сначала $t>0$ — вещественное число. Введем оператор $\hat{A}_n$ в пространстве $\mathscr{H}$ с помощью равенства

$$\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}=1-t\,\frac{\hat{A}_n}{n}.$$

Заметим, что

$$e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}=1-\frac{t}{n}\int_0^1 e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}\hat{B}\,dx.$$

Поэтому

$$\hat{A}_n=\hat{A}_n(t)=\hat{P}\int_0^1 e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}\hat{B}\,dx\,\hat{P}=\frac{n}{t}\left(I-\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}\right).\tag{3.9}$$

Поскольку последовательность $e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}$ монотонно растет с увеличением n, то $e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}\hat{B}$ обладает тем же свойством. Из первого равенства в (3.9) следует, что тем же свойством обладает последовательность $\hat{A}_n$. Из этого же равенства вытекает, что если $f\in D_{\hat{B}}\cap\cap\mathscr{H}=D_{\hat{A}}$, то в сильном смысле

$$\hat{A}_n f\to\hat{P}\hat{B}f=\hat{A}f.$$

Заметим теперь, что в операторном смысле $e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}<I$, т. е. $\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}<1$, и, следовательно, $\left\|I-\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}\right\|\leqslant 1$. Поэтому из второго равенства в (3.9) вытекает, что $\|t\hat{A}_n\|\leqslant n$. Таким образом, последовательность $t\hat{A}_n$ удовлетворяет всем условиям леммы 3, а значит, существует сильный предел последовательности $\left(I-\frac{t\hat{A}_n}{n}\right)^n$, и этот предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t\hat{A}_n}{n}\right)^n=e^{-t\underline{\hat{A}}},$$

где $t\underline{\hat{A}}$ является сильным пределом в расширенном смысле операторов $t\hat{A}$ и, следовательно, $\underline{\hat{A}}$ в аналогичном смысле является пределом $\hat{A}_n=\hat{A}_n(t)$. Покажем, что $\underline{\hat{A}}$ не зависит от t.

Пусть $\hat{E}_\lambda$ — спектральный проектор $\hat{B}$. Заметим, что последовательность

$$\hat{A}_{n,\lambda}(t)=\hat{P}\int_0^1 e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}\hat{B}\hat{E}_\lambda\,dx\,\hat{P}$$

монотонно не убывает в операторном смысле по n при фиксированном λ и по λ при фиксированном n. Применяя стандартные рассуждения, получаем отсюда, что последовательность $(I+\hat{A}_{n,\lambda}(t))^{-1}$ имеет совпадающие повторные пределы по n и λ. Поскольку $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(I+\hat{A}_{n,\lambda}(t))^{-1}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(I+\hat{P}\hat{B}\hat{E}_\lambda\hat{P})^{-1}$ очевидным образом не зависит от t, тем же свойством обладает $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{\lambda\to\infty}(I+\hat{A}_{n,\lambda}(t))^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}(I+\hat{A}_n(t))^{-1}=(I+\underline{\hat{A}})^{-1}$. Следовательно, $\underline{\hat{A}}$ не зависит от t.

То же рассуждение показывает, что $\underline{\hat{A}}$ является сильным пределом в расширенном смысле операторов $\hat{C}_\lambda=\hat{P}\hat{B}\hat{E}_\lambda\hat{P}$.

Покажем теперь, что $\underline{\hat{A}}=\hat{A}_F$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}_{\hat{B}}$ плотно в $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$. Рассмотрим пространства $H_{\hat{A}}$ и $\tilde{H}_{\hat{A}}$, введенные в лемме 1. Заметим, что $D_{\hat{A}}$ состоит из векторов $f\in\mathscr{H}=\hat{P}\tilde{\mathscr{H}}$, удовлетворяющих условию $(\hat{B}f,\ \hat{B}f)<\infty$, т. е. $D_{\hat{A}}=\mathscr{L}_{\hat{B}}$. Пространство $\tilde{H}_{\hat{A}}$ состоит из всех векторов $f\in\mathscr{H}$, удовлетворяющих условию $(\hat{A}_nf,\ f)<c<\infty$.

Поскольку

$$(\hat{A}_nf,\ f)=\int_0^1\left(e^{-\frac{tx\hat{B}}{n}}\hat{B}f,\ f\right)dx=\int\varphi_n(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

где $\varphi_n<\varphi_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\lambda)=\lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\hat{A}_nf,\ f)=\int\lambda\,d\sigma(\lambda)=(f,\ f)_{\hat{B}}$. Поэтому $\tilde{H}_{\hat{A}}=D_{\sqrt{\hat{B}}}\cap\mathscr{H}=\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$. Что же касается $H_{\hat{A}}$, то по определению $H_{\hat{A}}$ есть замыкание $D_{\hat{A}}$ в $\tilde{H}_{\hat{A}}$, т. е. в нашем случае в $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$. Поэтому $\mathscr{L}_{\hat{B}}$ плотно в $\mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{H}_{\hat{A}}=H_{\hat{A}}$ и в силу леммы 1 тогда и только тогда, когда $\underline{\hat{A}}=\hat{A}_F$.

Пусть теперь t комплексно: $\operatorname{Re} t > 0$. Заметим, что функции $\varphi_n(t) = \left(\left(\hat{P} e^{-\frac{t}{n}\hat{B}} \hat{P}\right)^n f, g\right)$ аналитичны в правой полуплоскости и равномерно ограничены:

$$|\varphi_n(t)| \leqslant \left\| \left(\hat{P} e^{-\frac{t}{n}\hat{B}} \hat{P}\right)^n \right\| \|f\| \|g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Пусть φ_{n_k} — подпоследовательность, сходящаяся равномерно на каждом компакте. В частности, при вещественном t

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t) = \left(e^{-t\underline{\hat{A}}} f, g\right).$$

В силу аналитичности то же соотношение справедливо для любого t: $\operatorname{Re} t > 0$. Таким образом, последовательность φ_n имеет единственную предельную точку и, следовательно, сходится. Итак, доказана слабая сходимость последовательности $\left(\hat{P} e^{-\frac{t}{n}\hat{B}} \hat{P}\right)^n = \hat{G}_n(t)$ к $e^{-t\underline{\hat{A}}}$. Совершенно аналогично доказывается слабая сходимость $\hat{G}_n(t_1)\hat{G}_n(t_2)$ к $e^{-(t_1+t_2)\underline{\hat{A}}}$ при $\operatorname{Re} t_1 > 0$, $\operatorname{Re} t_2 > 0$. В частности, $\hat{G}_n(\bar{t})\hat{G}_n(t) = (\hat{G}_n(t))^*(\hat{G}_n(t))$ слабо сходится к $e^{-(t+\bar{t})\underline{\hat{A}}}$. Отсюда очевидным образом следует сильная сходимость $\hat{G}_n(t)$ к $e^{-t\underline{\hat{A}}}$.

Теорема 3 полностью доказана. Эта теорема является теоремой типа Троттера [10], так как с ее помощью по двум однопараметрическим полугруппам строится третья согласно формуле

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \left[u_1\left(\frac{t}{n}\right) u_2\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

(в нашем случае $u_1(t) = e^{-t\hat{B}}$, $u_2(t) = \hat{P}^t = \hat{P}$).

Теорема 4. *Пусть операторы $\hat{P}$, $\hat{B}$, $\hat{A}$, $\hat{A}_F$, $\underline{\hat{A}}$, $\hat{G}_n(t)$ те же, что и в теореме 3; $t > 0$. Пусть, кроме того, операторы $\hat{G}_1(t) = \hat{P} e^{-t\hat{B}} \hat{P}$ являются ядерными при всех $t > 0$.*

Тогда:

1) *операторы $\hat{G}_n(t)$ при всех $n \geqslant 1$, $t > 0$, $e^{-t\hat{A}_F}$ и $e^{-t\underline{\hat{A}}}$ при $t > 0$ являются ядерными;*

2) $\operatorname{Sp} e^{-t\hat{A}_F} \leqslant \operatorname{Sp} \hat{G}_n(t) \leqslant \operatorname{Sp} \hat{G}_1(t)$ *при всех n, $t > 0$;*

3) *при $t > 0$ оператор $\hat{G}_n(t)$ сходится к $e^{-t\hat{A}_F}$ по ядерной норме*[1]*, в частности $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sp} \hat{G}_n(t) = \operatorname{Sp} e^{-t\underline{\hat{A}}}$;*

4) $\operatorname{Sp} \hat{G}_{2^n}(t) \leqslant \operatorname{Sp} \hat{G}_{2^{n-1}}(t)$.

Доказательство этой теоремы опирается на ряд утверждений общего характера.

Лемма 4. *Пусть $0 < A_n < A_{n-1}$ — последовательность самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H, сильно*

[1]) Ядерной нормой оператора X называется $\|X\|_1 = \operatorname{Sp}(XX^*)^{1/2}$.

сходящаяся к нулю, причем $A_n = B_n + \alpha_n$, *где* B_n — *вполне непрерывный оператор и* $\alpha_n \geqslant 0$, $\|\alpha_n\| \to 0$, *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\|A_n\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что операторы $A_n^{1/2}$ обладают свойствами, аналогичными A_n: $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{1/2} = 0$, $A_n^{1/2} < A_{n-1}^{1/2}$, $A_n^{1/2} = B_n' + \alpha_n^{1/2}$, где B_n' является вполне непрерывным оператором (последнее утверждение основано на лемме 1 из работы [11])[1]). Обозначим через T единичный шар в H, через S_n — образ T при действии оператора $A_n^{1/2}$ и через S_n' — образ T при действии оператора B_n'. Элементы S_n имеют вид

$$f = A_n^{1/2}\varphi = B_n'\varphi + \alpha_n^{1/2}\varphi, \quad \|\varphi\| \leqslant 1, \quad B_n'\varphi \in S_n'. \tag{3.10}$$

Рассмотрим шар радиуса $\|\alpha_n^{1/2}\|$ с центром в точке $f \in S_n'$. Объединение этих шаров по всем f обозначим $\tilde{S}_n$. Из (3.10) следует, что $S_n \subset \tilde{S}_n$.

Воспользуемся следующим общим фактом.

Лемма 5. *Пусть* $0 < X < Y$ — *произвольные самосопряженные операторы*, $S_{X^{1/2}}$, $S_{Y^{1/2}}$ — *образы* $T \cap D_{Y^{1/2}}$ *при отображениях* $f \to X^{1/2}f$ *и* $f \to Y^{1/2}f$ *соответственно. Тогда* $S_{X^{1/2}} \subset \overline{S}_{Y^{1/2}}$, *где* $\overline{S}_{Y^{1/2}}$ *означает замыкание* $S_{Y^{1/2}}$.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и покажем, что $S_{X^{1/2}} \subset S_{(Y+\varepsilon I)^{1/2}}$ и что $S_{(Y+\varepsilon_1 I)^{1/2}} \subset S_{(Y+\varepsilon_2 I)^{1/2}}$, если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Оба включения доказываются одинаково, поэтому ограничимся первым. Пусть $f = X^{1/2}\varphi$, $\varphi \in T$. Положим $\psi = (Y+\varepsilon I)^{-1/2} X^{1/2}\varphi$. Тогда $f = (Y+\varepsilon I)^{1/2}\psi$. Но

$$\|(Y+\varepsilon I)^{-1/2} X^{1/2}\|^2 = \|(Y+\varepsilon I)^{-1/2} X (Y+\varepsilon I)^{-1/2}\| \leqslant 1,$$

так как $X < Y + \varepsilon I$, и поэтому $((Y+\varepsilon I)^{-1/2} X (Y+\varepsilon I)^{-1/2} g, g) = (X(Y+\varepsilon I)^{-1/2} g, (Y+\varepsilon I)^{-1/2} g) \leqslant (g, g)$. Следовательно, $\psi \in T$,

$$S_{X^{1/2}} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} S_{(Y+\varepsilon I)^{1/2}}.$$

Далее из спектральной теоремы вытекает, что $\|(Y+\varepsilon I)^{1/2} - Y^{1/2}\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$:

$$([(Y+\varepsilon I)^{1/2} - Y^{1/2}] f, f) = \int (\sqrt{\lambda+\varepsilon} - \sqrt{\lambda})\, d(E_\lambda f, f) =$$

$$= \int \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda+\varepsilon} + \sqrt{\lambda}}\, d(E_\lambda f, f) \leqslant \sqrt{\varepsilon} \int d(E_\lambda f, f) = \sqrt{\varepsilon}\,(f, f).$$

Поэтому $S_{(Y+\varepsilon I)^{1/2}} \subset \tilde{S}_{Y^{1/2},\, \varepsilon^{1/2}}$, где $\tilde{S}_{Y^{1/2},\, \varepsilon^{1/2}}$ — объединение шаров

---

[1]) Для наших целей достаточно рассмотреть случай, когда оператор α_n кратен единичному. В этом случае полная непрерывность B_n' следует из тождества $B_n' = A_n^{1/2} - \alpha_n^{1/2} = (A_n^{1/2} + \alpha_n^{1/2})^{-1} B_n$. ($\|(A_n^{1/2} + \alpha_n^{1/2})^{-1}\| < \infty$ в силу полной непрерывности $A_n^{1/2}$, а также того, что $A_n^{1/2} > 0$ и $\alpha_n^{1/2} > 0$.)

радиуса $\varepsilon^{1/2}$ с центрами в точках $S_{Y^{1/2}}$. Значит[1]),

$$\bigcap_{\varepsilon>0} S_{(Y+\varepsilon I)^{1/2}} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_{Y^{1/2},\ \varepsilon^{1/2}} = \bar{S}_{Y^{1/2}}.$$

Возвращаясь к доказательству леммы 4, получаем отсюда, что[2]) $S_n \subset \bar{S}_{n-1}$.

Предположим теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_n \| \neq 0$. В таком случае также $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_n^{1/2} \| \neq 0$ и существуют последовательность номеров n_k, последовательность $f_{n_k} \in T$ и число $a > 0$ такие, что $\| A_{n_k} f_{n_k} \| \geqslant a$. Чтобы не осложнять обозначений, в дальнейшем считаем, что $n_k = n$. Фиксируем $\varepsilon = \frac{1}{2} a \| A_1^{1/2} \|^{-1}$ и n_0 такое, что $\| a_{n_0} \| < \varepsilon$. Заметим, что при $n \geqslant n_0$

$$A_n^{1/2} f_n \in S_n \subset \bar{S}_{n_0} \subset \tilde{S}_{n_0}.$$

Поэтому существует вектор ψ_n, $\| \psi_n \| \leqslant \varepsilon$, такой, что

$$\varphi_n = A_n^{1/2} f_n + \psi_n \in S'_{n_0}.$$

Ввиду компактности S'_{n_0} существует сильно сходящаяся подпоследовательность φ_{n_k}, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{n_k} = \varphi$. Далее

$$\| A_{n_k}^{1/2} (\varphi - \varphi_{n_k}) \| \leqslant \| A_1 \|^{1/2} \| \varphi - \varphi_{n_k} \| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.11}$$

Поэтому, поскольку последовательность $A_{n_k}^{1/2}$ сильно сходится к нулю,

$$\| A_{n_k}^{1/2} \varphi_{n_k} \| \leqslant \| A_{n_k}^{1/2} \varphi \| + \| A_{n_k}^{1/2} (\varphi_{n_k} - \varphi) \| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, $A_{n_k}^{1/2} \varphi_{n_k} = A_{n_k} f_{n_k} + A_{n_k}^{1/2} \psi_{n_k}$. Поэтому

$$\| A_{n_k}^{1/2} \varphi_{n_k} \| \geqslant \| A_{n_k} f_{n_k} \| - \| A_{n_k}^{1/2} \psi_{n_k} \| \geqslant a - \varepsilon \| A_1^{1/2} \| = \frac{a}{2}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Если операторы A_n вполне непрерывны, то равномерная сходимость A_n к нулю следует из сильной сходимости A_n и из наличия мажорирующего все A_n вполне непрерывного оператора $A = A_1$. Требование монотонности последовательности A_n в этом случае излишне. Доказательство отличается от доказательства леммы 4 лишь упрощениями, связанными с тем, что теперь $S_n = S'_n = \tilde{S}_n$.

---

[1]) В интересующем нас в дальнейшем случае $X = A_n = B_n + \alpha_n$, $Y = A_{n-1} = B_{n-1} + \alpha_{n-1}$, где B_{n-1} — вполне непрерывный оператор и α_n — кратный единичному. Поэтому условие $Y > 0$ влечет за собой наличие ограниченного обратного у Y и $Y^{1/2}$. Полагая в доказательстве леммы 5 $\varepsilon = 0$, получаем $S_{X^{1/2}} \subset S_{Y^{1/2}}$.

[2]) В интересующем нас случае $S_n \subset S_{n-1}$. См. предыдущее примечание.

Следствие. *Пусть* $I < C_n < C_{n+1}$ — *последовательность ограниченных операторов, сходящаяся в расширенном смысле к оператору* C, *причем:*

1) C_n *имеет конечнократный дискретный спектр с единственной предельной точкой* $\beta_n = \| C_n \|$;

2) C *имеет конечнократный дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.*

Пусть $\lambda_k(n)$ *и* λ_k — *точки спектра операторов* C_n *и* C *соответственно, занумерованные в порядке возрастания, тогда:*

1) *предельные точки последовательности* $\lambda_k(n)$ (k *фиксировано*) *являются точками спектра* C;

2) *если* Δ — *любой интервал, концы которого не являются точками спектра* C, *и если* E_Δ *и* $E_\Delta(n)$ — *спектральные проекторы операторов* C *и* C_n *соответственно, отвечающие* Δ, *то* $\lim_{n\to\infty} \| E_\Delta - E_\Delta(n) \| = 0$. *В частности, существует такое* $n_0(\Delta)$, *что* $\operatorname{Sp} E_\Delta = \operatorname{Sp} E_\Delta(n)$ *при* $n > n_0(\Delta)$.

Доказательство. $\lim_{n\to\infty} \| C_n \| = \infty$, поэтому операторы $A_n = C_n^{-1} - C^{-1}$ удовлетворяют условиям леммы 4; следовательно, $\lim_{n\to\infty} \| A_n \| = 0$. Пусть Δ — интервал, концы которого не являются точками спектра C, и пусть $E_\Delta(n)$ и E_Δ — спектральные проекторы операторов C_n^{-1} и C^{-1} соответственно, отвечающие Δ. Согласно теореме Реллиха (см. [6]) справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \| E_\Delta(n) - E_\Delta \| = 0$. Следовательно, существует такое n_0, что при $n > n_0$ $\| E_\Delta(n) - E_\Delta \| < 1$. Поэтому при $n > n_0$

$$E_\Delta(n) E_\Delta H = E_\Delta(n) H \quad \text{и} \quad E_\Delta E_\Delta(n) H = E_\Delta H$$

(см., например, [12]). В частности,

$$\operatorname{Sp} E_\Delta(n) = \dim E_\Delta(n) H \leqslant \dim E_\Delta H = \operatorname{Sp} E_\Delta,$$

и аналогично $\operatorname{Sp} E_\Delta \leqslant \operatorname{Sp} E_\Delta(n)$. Таким образом, $\operatorname{Sp} E_\Delta = \operatorname{Sp} E_\Delta(n)$. Учитывая связь между спектрами и спектральными проекторами взаимно обратных операторов, получаем нужные утверждения.

Лемма 6. *Пусть* $A_n > 0$ — *последовательность ядерных операторов, сильно сходящаяся к оператору* A *и удовлетворяющая условию* $\operatorname{Sp} A_n < c$. *Тогда:*

1) A *является ядерным оператором и* $\operatorname{Sp} A \leqslant c$;

2) *если сверх этого для любого интервала* Δ, *концы которого не принадлежат спектру* A, $\lim_{n\to\infty} \| E_\Delta(n) - E_\Delta \| = 0$, *где* $E_\Delta(n)$ *и* E_Δ — *спектральные проекторы операторов* A_n *и* A *соответственно, то* $\lim_{n\to\infty} \| A - A_n \| = 0$;

3) *если, кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $\alpha(\varepsilon)$ *и* $n(\varepsilon)$, *что* $\operatorname{Sp}(A_n E_\alpha(n)) < \varepsilon$, *при* $n > n(\varepsilon)$ *и* $0 < \alpha < \alpha(\varepsilon)$, *где* $E_\alpha(n)$ — *спектральный проектор* A_n, *то* $\lim_{n\to\infty} \| A - A_n \|_1 = 0$, *где* $\| \; \|_1$

означает ядерную норму ($\|X\|_1 = \mathrm{Sp}\,(XX^*)^{1/2}$). *В частности*, $\mathrm{Sp}\,A = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Sp}\,A_n$.

Доказательство. Пусть $b > a > 0$ — числа, не принадлежащие точечному спектру A, и пусть $N_n(a, b)$ — число точек спектра A_n, с учетом их кратности, попавших в интервал (a, b). Очевидно, что $\mathrm{Sp}\,A_n \geqslant aN_n(a, b)$. Поэтому $N_n(a, b) \leqslant \frac{c}{a}$. Обозначим через $E_{a,b}$ и $E_{a,b}(n)$ спектральные проекторы операторов A и A_n соответственно, отвечающие (a, b). Пусть ψ_k — ортонормированный базис в $E_{a,b}H$. Рассмотрим целое число $0 \leqslant r \leqslant \dim E_{a,b}H$. Согласно теореме Реллиха, $E_{a,b} = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} E_{a,b}(n)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_k - E_{a,b}(n)\psi_k\| = 0$. Отсюда следует, что при достаточно больших n векторы $\xi_k = E_{a,b}(n)\psi_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, линейно независимы. Следовательно, $\dim E_{a,b}(n)H \geqslant r$ при достаточно больших n. Так как, с другой стороны, $\dim E_{a,b}(n)H \leqslant \frac{c}{a}$, то $r \leqslant \frac{c}{a}$, и, следовательно, $\dim E_{a,b}H \leqslant \frac{c}{a} < \infty$. Полагая $r = \dim E_{a,b}H$, получаем

$$\dim E_{a,b}H \leqslant \lim_{n\to\infty} \dim E_{a,b}(n). \tag{3.12}$$

Итак, спектр A дискретен, конечнократен с единственной возможной предельной точкой в нуле.

Пусть $a < \mu < b$, μ — единственная точка спектра A на интервале (a, b) и точки a, b не принадлежат спектру A. Применяя к этому случаю неравенство (3.12), при $n > n_0(a, b)$ находим

$$\mu\,\mathrm{Sp}\,E_{a,b} \leqslant \mu\,\mathrm{Sp}\,E_{a,b}(n) \leqslant \mathrm{Sp}\,(A_nE_{a,b}(n)) + (b-a)\,\mathrm{Sp}\,E_{a,b}(n) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Sp}\,(A_nE_{a,b}(n)) + (b-a)\frac{c}{a}. \tag{3.13}$$

Суммируя это неравенство по всем $\mu = \mu_k > \alpha > 0$, где α не принадлежит спектру A, получаем

$$\mathrm{Sp}\,(AE_{\alpha,\infty}) \leqslant \mathrm{Sp}\,(A_nE_{\alpha,\infty}(n)) + \frac{c}{\alpha}\sum (b_k - a_k), \quad n > n_0(\alpha).$$

Стоящая в правой части этого неравенства сумма конечна, и число входящих в нее слагаемых зависит лишь от α. Поэтому, переходя к пределу при $a_k \to \mu_k$ и $b_k \to \mu_k$, получаем

$$\mathrm{Sp}\,(AE_{\alpha,\infty}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (A_nE_{\alpha,\infty}(n)) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{Sp}\,A_n. \tag{3.14}$$

Ввиду произвольности α отсюда следуют ядерность A и неравенство

$$\mathrm{Sp}\,A \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{Sp}\,A_n. \tag{3.15}$$

Перейдем к утверждению 2). Пусть Δ — интервал, не содержащий точек спектра A. Тогда $\|E_\Delta(n)\| < 1$ при $n > n_0(\Delta)$ и, следовательно, $E_\Delta(n)=0$, т. е. Δ не содержит также точек спектра A_n. Фиксируем $\alpha>0$, не принадлежащее спектру A и каждую точку $\mu_k>\alpha$ спектра A окружим интервалом $\Delta_k=(a_k, b_k)$, внутри которого и на границе нет других точек спектра A, кроме μ_k. При $n>n_0(\alpha)$ имеем

$$AE_{\alpha,\infty}=\sum AE_{a_k,b_k},\quad A_nE_{\alpha,\infty}(n)=\sum A_nE_{a_k,b_k}(n).$$

Поэтому

$$\|AE_{\alpha,\infty}-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|_1\leqslant\sum_{\mu_k>\alpha}\|AE_{a_k,b_k}-A_nE_{a_k,b_k}(n)\|_1. \tag{3.16}$$

Далее при $n>n_1(\alpha)$

$$\|E_{a_k,b_k}-E_{a_k,b_k}(n)\|_1\leqslant 2\|E_{a_k,b_k}-E_{a_k,b_k}(n)\|\operatorname{Sp}E_{a_k,b_k},$$

$$\|AE_{a_k,b_k}-A_nE_{a_k,b_k}(n)\|_1\leqslant\|\mu_k(E_{a_k,b_k}-E_{a_k,b_k}(n))\|_1+$$
$$+\|\mu_kE_{a_k,b_k}(n)-A_nE_{a_k,b_k}(n)\|_1\leqslant 2\mu_k\|E_{a_k,b_k}-E_{a_k,b_k}(n)\|\operatorname{Sp}E_{a_k,b_k}+$$
$$+(b_k-a_k)\operatorname{Sp}E_{a_k,b_k}(n).$$

Следовательно,

$$\sum_{\mu_k>\alpha}\|AE_{a_k,b_k}-A_nE_{a_k,b_k}(n)\|_1\leqslant$$
$$\leqslant 2\operatorname{Sp}A\max_{k,\,\mu_k>\alpha}\|E_{a_k,b_k}-E_{a_k,b_k}(n)\|+\sum_{\mu_k>\alpha}\frac{(b_k-a_k)c}{\alpha}. \tag{3.17}$$

Ввиду того что первая сумма, стоящая в правой части, состоит из конечного числа слагаемых, существует $n_0(\alpha,\varepsilon)$ такое, что при $n>n_0(\alpha,\varepsilon)$ эта сумма меньше $\varepsilon/2$. Далее, поскольку вторая сумма также состоит из конечного числа слагаемых, в неравенстве (3.17) можно перейти к пределу при $a_k\to\mu_k$, $b_k\to\mu_k$. Совершая этот предельный переход и вспоминая неравенство (3.14), получаем окончательно при $n>n_0(\alpha,\varepsilon)$

$$\|AE_{\alpha,\infty}-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|_1\leqslant\varepsilon\|A\|_1. \tag{3.17'}$$

Отсюда, полагая $n>n_0(\alpha,\varepsilon)$ и учитывая, что $\|A-AE_{\alpha,\infty}\|<\alpha$, $\|A_n-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|<\alpha$, находим

$$\|A-A_n\|\leqslant\|A-AE_{\alpha,\infty}\|+\|A_nE_{\alpha,\infty}(n)-A_n\|+$$
$$+\|AE_{\alpha,\infty}-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|\leqslant 2\alpha+\|AE_{\alpha,\infty}-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|_1\leqslant 2\alpha+\varepsilon\|A\|_1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$.

Перейдем к утверждению 3). Пусть $\alpha<\alpha(\varepsilon)$, $n>n_0(\alpha(\varepsilon),\varepsilon)$. Тогда $\operatorname{Sp}(A_nE_\alpha(n))=\|A_nE_\alpha(n)\|_1<\varepsilon$; поэтому, учитывая (3.17′), а также то обстоятельство, что $E_\alpha(n)+E_{\alpha,\infty}(n)=I$, получаем

$$\|A-A_n\|_1\leqslant\|A-AE_{\alpha,\infty}\|_1+\|A_nE_{\alpha,\infty}(n)-A_n\|_1+$$
$$+\|AE_{\alpha,\infty}-A_nE_{\alpha,\infty}(n)\|_1\leqslant\|A-AE_{\alpha,\infty}\|_1+\varepsilon+\varepsilon\|A\|_1.$$

Заметим, что $\|A-AE_{\alpha,\infty}\|_1=\operatorname{Sp}(AE_\alpha)\to 0$ при $\alpha\to 0$. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha\to 0$, находим окончательно, что $\|A - A_n\|_1 \leqslant \varepsilon(1 + \|A\|_1)$ при $n > n_0(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = N(\varepsilon)$. Доказательство леммы закончено.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Ядерность $\hat{G}_n(t)$ очевидна, поскольку $\hat{G}_n(t) = \left[G_1\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$, и ядерность $e^{-t\hat{A}_F}$ следует из теоремы 3 работы [5]; ядерность $e^{-t\hat{\underline{A}}}$ удобно доказать позднее.

Пусть $f_k(n)$ — общий собственный базис операторов $\hat{G}_n(t)$ и $\hat{G}_1\left(\frac{t}{n}\right)$. Соответствующие собственные числа обозначим через $\lambda_k(n)$ и $\mu_k(n)$. Оценим $\lambda_k(n)$. С этой целью применим теорему о выпуклых функциях от операторов [5], положив $\varphi(x) = x^n$, $x > 0$, и рассмотрев в качестве проектора оператор $\hat{R}$ проектирования на $f_k(n)$:

$$\lambda_k(n) = (\mu_k(n))^n = \left[\left(e^{-\frac{t}{n}\hat{B}} f_k(n), f_k(n)\right)\right]^n =$$
$$= \mathrm{Sp}\left(\hat{R}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{R}\right)^n \leqslant \mathrm{Sp}\,(\hat{R}e^{-t\hat{B}}\hat{R}) = (e^{-t\hat{B}} f_k(n), f_k(n)). \quad (3.18)$$

Суммируя обе части (3.18) по k, получаем $\mathrm{Sp}\,\hat{G}_n(t) \leqslant \mathrm{Sp}\,\hat{G}_1(t)$. Применим теперь теорему о выпуклых функциях в следующей ситуации: $\varphi(x) = e^{-\frac{t}{n}x}$, $\hat{R}$ — оператор проектирования на f_k — собственный вектор $\hat{A}_F$ с собственным значением α_k:

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(\hat{R}\hat{B}\hat{E}_\lambda\hat{R}) \leqslant \mathrm{Sp}\,(\hat{R}\varphi(\hat{B}\hat{E}_\lambda)\hat{R}), \quad (3.19)$$

где $\hat{E}_\lambda$ — спектральный проектор оператора $\hat{B}$. Заметим, что $f_k \in D_{\sqrt{\hat{B}}}$ и

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\hat{B}\hat{E}_\lambda f_k, f_k) = \left(\sqrt{\hat{B}} f_k, \sqrt{\hat{B}} f_k\right) = (\hat{A}_F f_k, f_k) = \alpha_k.$$

Поскольку

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(\hat{R}\hat{B}\hat{E}_\lambda\hat{R}) = \varphi((\hat{B}E_\lambda f_k, f_k)),$$
$$\mathrm{Sp}\,(\hat{R}\varphi(\hat{B}\hat{E}_\lambda)\hat{R}) = (\varphi(\hat{B}\hat{E}_\lambda) f_k, f_k),$$

в (3.19) можно перейти к пределу при $\lambda \to \infty$. В результате получаем

$$e^{-\frac{t}{n}\alpha_k} \leqslant \left(e^{-\frac{t}{n}\hat{B}} f_k, f_k\right). \quad (3.20)$$

Применим еще раз теорему о выпуклых функциях, положив $\varphi(x) = x^n$ и рассмотрев прежний оператор проектирования:

$$e^{-t\alpha_k} \leqslant \left[\left(\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}f_k, f_k\right)\right]^n \leqslant \left(\left(\hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}\right)^n f_k, f_k\right) = (\hat{G}_n(t) f_k, f_k).$$

Суммируя по k, находим $\mathrm{Sp}\,e^{-t\hat{A}_F} \leqslant \mathrm{Sp}\,\hat{G}_n(t)$.

Перейдем к утверждению 4). Заметим, что операторы $\hat{G}_n(t)$ удовлетворяют условию 1) леммы 6. Поэтому их сильный предел

$e^{-t\underline{\hat{A}}}$ является ядерным оператором. Следовательно, оператор $\underline{\hat{A}}$ имеет конечнократный дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Рассмотрим теперь последовательность операторов

$$\hat{C}_n = \frac{1-\hat{G}_1\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} = \int_0^1 \hat{P}e^{-\frac{t}{n}\varkappa\hat{B}}\hat{B}\hat{P}\,dx.$$

Согласно теореме 3, последовательность $\hat{C}_n$ монотонно растет и имеет своим пределом в расширенном смысле оператор $\underline{\hat{A}}$.

Операторы $\hat{C}_n$ и $\underline{\hat{A}}$ удовлетворяют условиям следствия из леммы 4. Поэтому, каков бы ни был интервал (a, b) положительной полуоси, если только a, b не являются точками спектра $\underline{\hat{A}}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{F}_{a,b}(n) - \hat{F}_{a,b}\| = 0,$$

где $\hat{F}_{a,b}(n)$ и $\hat{F}_{a,b}$ — спектральные проекторы операторов $\hat{C}_n$ и $\underline{\hat{A}}$ соответственно, отвечающие интервалу (a, b). Далее

$$\hat{F}_{a,b} = \hat{E}_{e^{-tb},\,e^{-ta}}, \quad \hat{F}_{a,b}(n) = \hat{E}_{\beta_n,\,\alpha_n}(n),$$
$$\alpha_n = \left(1-\frac{t}{n}a\right)^n, \quad \beta_n = \left(1-\frac{t}{n}b\right)^n;$$

$\hat{E}_{\alpha,\beta}$, $\hat{E}_{\alpha,\beta}(n)$ — спектральные проекторы операторов $e^{-t\underline{\hat{A}}}$ и $\hat{G}_n(t) = \left(\hat{G}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$ соответственно, отвечающие интервалу (α, β). Очевидно, что если a, b не являются точками спектра $\underline{\hat{A}}$, то существует $\rho > 0$ такое, что интервалы $a-\rho < \tilde{a} < a+\rho$, $b-\rho < \tilde{b} < b+\rho$ также не содержат точек спектра $\underline{\hat{A}}$ и, следовательно, при достаточно большом n также точек спектра $\hat{C}_n$. Таким образом, при достаточно большом n

$$\hat{F}_{a,b}(n) = \hat{F}_{a_n,\,b_n}(n), \quad \text{где} \quad a_n = \frac{n}{t}\left(1-e^{-\frac{t}{n}a}\right), \; b_n = \frac{n}{t}\left(1-e^{-\frac{t}{n}b}\right).$$

Далее, $\hat{F}_{a_n,\,b_n}(n) = \hat{E}_{e^{-tb},\,e^{-ta}}(n)$. Таким образом, в итоге при достаточно большом n получаем $\hat{F}_{a,b}(n) = \hat{E}_{e^{-tb},\,e^{-ta}}(n)$, и, следовательно, если точки α, β не принадлежат спектру $e^{-t\underline{\hat{A}}}$, то

$$\|\hat{E}_{\alpha,\beta}(n) - \hat{E}_{\alpha,\beta}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Оценим число $r_{\alpha,n} = \mathrm{Sp}\,(\hat{G}_n(t)\,\hat{E}_\alpha(n))$. Пусть Δ_k — интервал, содержащий точку λ_k спектра оператора $\hat{G}_n(t)$ и не содержащий других точек спектра этого оператора.

Просуммируем (3.18) по всем $f_k(n)$, образующим базис в $\hat{E}_{\Delta_k}(n)\mathscr{H}$. В результате получим

$$m_k\lambda_k(n) \leqslant \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{E}_{\Delta_k}(n)), \quad m_k = \dim \hat{E}_{\Delta_k}(n)\mathscr{H}.$$

Отсюда

$$r_{\alpha, n} \leqslant \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{E}_\alpha(n)) = \operatorname{Sp}(\hat{P}e^{-t\hat{B}}\hat{P}) - \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{E}_{\alpha,\infty}(n)) =$$
$$= \operatorname{Sp}(\hat{P}e^{-t\hat{B}}\hat{P}) - \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}(\hat{E}_{\alpha,\infty} + \hat{R}_\alpha(n)) = \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{E}_\alpha) - \operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{R}_\alpha(n)).$$

Фиксируем ε, $\alpha(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\operatorname{Sp}(e^{-t\hat{B}}\hat{E}_\alpha) = \operatorname{Sp}(\hat{G}_1(t)\hat{E}_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\hat{R}_\alpha(n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{при} \quad n > N(\varepsilon), \ \alpha = \alpha(\varepsilon).$$

Тогда $r_{\alpha(\varepsilon), n} < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Непосредственно из определения $r_{\alpha, n}$ следует, что $r_{\alpha', n} < r_{\alpha, n}$, если $\alpha' < \alpha$. Поэтому $r_{\alpha, n} < \varepsilon$ при $\alpha < \alpha(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$. Итак, последовательность $\hat{G}_n(t)$ удовлетворяет всем требованиям 3) леммы 6. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{G}_n(t) - e^{-t\underline{\hat{A}}}\|_1 = 0.$$

Перейдем к утверждению 4) теоремы 4. Очевидно, достаточно проверить, что $\operatorname{Sp}\hat{G}_{2n}(t) \leqslant \operatorname{Sp}\hat{G}_n(t)$. Согласно [5], если $0 \leqslant \varphi(x)$ — монотонно растущая выпуклая вниз функция, $\hat{A}_1 \leqslant \hat{A}_2$ и $\varphi(\hat{A}_2)$ — ядерный оператор, то $\varphi(\hat{A}_1)$ обладает тем же свойством и $\operatorname{Sp}\varphi(\hat{A}_1) \leqslant \leqslant \operatorname{Sp}\varphi(\hat{A}_2)$. Положим

$$\hat{A}_1 = \left(\hat{P}e^{-\frac{t}{2n}\hat{B}}\hat{P}\right)^2, \quad \hat{A}_2 = \hat{P}e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}.$$

Имеем

$$(\hat{A}_1 f, f) = \left(\hat{P}e^{-\frac{t}{2n}\hat{B}}\hat{P}f, \hat{P}e^{-\frac{t}{2n}\hat{B}}\hat{P}f\right) \leqslant \left(e^{-\frac{t}{2n}\hat{B}}\hat{P}f, e^{-\frac{t}{2n}\hat{B}}\hat{P}f\right) =$$
$$= \left(e^{-\frac{t}{n}\hat{B}}\hat{P}f, \hat{P}f\right) = (\hat{A}_2 f, f);$$

таким образом, $\hat{A}_1 \leqslant \hat{A}_2$. Полагая $\varphi(x) = x^n$ и учитывая, что $\hat{A}_1^n = \hat{G}_{2n}(t)$, $\hat{A}_2^n = \hat{G}_n(t)$, получаем нужное утверждение.

§ 4. Непрерывная зависимость от $\hat{P}$ и $\hat{B}$

Пусть операторы $\hat{B}$, $\hat{P}$ и $\underline{\hat{A}}$ те же, что и в теореме 3. Пару $\hat{B}$, $\hat{P}$ назовем регулярной, если $\underline{\hat{A}} = \hat{A}_F$, где $\hat{A}_F$ — расширение по Фридрихсу оператора $\hat{P}\hat{B}\hat{P}$.

Напомним, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $D_{\hat{B}} \cap \mathscr{H} = \mathscr{L}_{\hat{B}}$ было плотно в $D_{\sqrt{\hat{B}}} \cap \mathscr{H} = \mathscr{L}_{\sqrt{\hat{B}}}$. Множество регулярных пар обозначим через R. Операторы $\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}$, $\hat{A}^*$, $\hat{A}_F$ в пространстве $\mathscr{H}=\hat{P}\tilde{\mathscr{H}}$ продолжим до операторов во всем $\tilde{\mathscr{H}}$, сохранив при этом их обозначения, согласно формуле $\hat{C}f=\hat{C}\hat{P}f$, $f\in\tilde{\mathscr{H}}$. Аналогичное соглашение примем относительно операторов во встречающихся ниже пространствах $\mathscr{H}_n$.

Теорема 5. *Пусть $\hat{B}_n$, $\hat{P}_n\in R$, $\hat{B}$, $\hat{P}\in R$ и, кроме того, $\hat{B}=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{B}_n$, $\hat{P}=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{P}_n$ в сильном расширенном смысле. В этом случае последовательность $\hat{A}_F(n)$ расширений по Фридрихсу операторов $\hat{A}_n=\hat{P}_n\hat{B}_n\hat{P}_n$ сходится аналогичным образом к расширению по Фридрихсу $\hat{A}_F$ оператора $\hat{A}=\hat{P}\hat{B}\hat{P}$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\hat{A}_F^{-1}(n)$ сильно сходится к $\hat{A}_F^{-1}$.

Основное тождество, определяющее расширение по Фридрихсу, в нашем случае гласит:

$$\left(\sqrt{\hat{B}_n}f_n,\ \sqrt{\hat{B}_n}\hat{A}_F^{-1}(n)\,h\right)=(f_n,\ h), \tag{4.1}$$

где $f_n\in\hat{P}_n\tilde{\mathscr{H}}\cap D_{\sqrt{\hat{B}_n}}$, $h\in\tilde{\mathscr{H}}$. Покажем, что $\left\|\sqrt{\hat{B}_n}\ \hat{A}_F^{-1}(n)\right\|\leqslant 1$.

Положим $\sqrt{\hat{B}_n}f_n=g_n$. Множество получаемых таким образом векторов g_n обозначим через L_n, а ортогональное дополнение к L_n — через M_n.

Из (4.1) получаем

$$\left(g_n,\ \sqrt{\hat{B}_n}\,\hat{A}_F^{-1}(n)\,h\right)=\left(\sqrt{\hat{B}_n^{-1}}\,g_n,\ h\right)=\left(g_n,\ \sqrt{\hat{B}_n^{-1}}h\right).$$

Если $\varphi=g_n+\xi$, $\xi\in M_n$, то

$$\left(\varphi,\ \sqrt{\hat{B}_n}\,\hat{A}_F^{-1}(n)\,h\right)=\left(g_n,\ \sqrt{\hat{B}_n}\,\hat{A}_F^{-1}(n)\,h\right)=\left(g_n,\ \sqrt{\hat{B}_n^{-1}}h\right).$$

Поэтому

$$\left|\left(\varphi,\ \sqrt{\hat{B}_n}\,\hat{A}_F^{-1}(n)\,h\right)\right|\leqslant\|g_n\|\left\|\sqrt{\hat{B}_n^{-1}}h\right\|\leqslant\|\varphi\|\|h\|.$$

Поскольку последнее неравенство выполнено для всех φ из плотного множества в $\mathscr{H}$, отсюда следует, что $\left\|\sqrt{\hat{B}_n}\ \hat{A}_F^{-1}(n)\right\|\leqslant 1$.

Выберем подпоследовательность n' номеров n так, чтобы операторы $\hat{A}_F^{-1}(n')$ и $\sqrt{\hat{B}_{n'}}\ \hat{A}_F^{-1}(n')$ слабо сходились.

Пусть

$$\hat{K}=\lim_{n\to\infty}\hat{A}_F^{-1}(n'),\quad \hat{C}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\hat{B}_{n'}}\ \hat{A}_F^{-1}(n').$$

Покажем, что $\hat{C}=\sqrt{\hat{B}}\hat{K}$. Так как $\hat{B}_n\to\hat{B}$ в сильно расширенном смысле, то $\sqrt{\hat{B}_n}\to\sqrt{\hat{B}}$ в том же смысле. Следовательно, для любого $\xi \in D_{\sqrt{\hat{B}}}$ существует сильно сходящаяся последовательность $\xi_n \to \xi$, $\xi_n \in D_{\sqrt{\hat{B}_n}}$, такая, что $\sqrt{\hat{B}_n}\,\xi_n \to \sqrt{\hat{B}}\,\xi$ (сильно). Пусть $\zeta \in \mathscr{H}$. Имеем

$$(\hat{C}\zeta,\ \xi) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\hat{B}_{n'}}\,\hat{A}_F^{-1}(n')\,\zeta,\ \xi\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\hat{A}_F^{-1}(n')\,\zeta,\ \sqrt{\hat{B}_{n'}}\,\xi\right) =$$
$$= \left(\hat{K}\zeta,\ \sqrt{\hat{B}}\,\xi\right) = \left(\sqrt{\hat{B}}\,\hat{K}\zeta,\ \xi\right).$$

(Последнее равенство обусловлено тем, что из соотношения $(\hat{C}\zeta,\ \xi) = \left(\hat{K}\zeta,\ \sqrt{\hat{B}}\,\xi\right)$ следует, что $\hat{K}\zeta \in D_{\sqrt{\hat{B}}}$.)

Пусть $f \in D_{\sqrt{\hat{B}}}$ и $f_n \in D_{\sqrt{\hat{B}_n}}$, причем в сильном смысле $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $\sqrt{\hat{B}}\,f = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\hat{B}_n}\,f_n$. Переходя в (4.1) к пределу по подпоследовательности n', получаем

$$\left(\sqrt{\hat{B}}\,f,\ \sqrt{\hat{B}}\,\hat{K}h\right) = (f,\ h). \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что $\hat{K} = \hat{A}_F^{-1}$. Таким образом, все слабые предельные точки последовательности $\hat{A}_F^{-1}(n)$ совпадают и равны $\hat{A}_F^{-1}$. Следовательно, $\hat{A}_F^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\hat{A}_F^{-1}(n)$ в слабом смысле.

Покажем, что $\hat{A}_F^{-1}(n) \to \hat{A}_F$ не только слабо, но и сильно. Заменяя $\hat{B}$ на $\hat{B} + tI$, где $t > 0$, и повторяя прежние рассуждения, находим, что $(\hat{A}_F(n) + tI)^{-1} \to (\hat{A}_F + tI)^{-1}$ слабо. Применяя тождество Гильберта, получаем, что $(\hat{A}_F(n) + t_1 I)^{-1}(\hat{A}_F(n) + t_2 I)^{-1} \to (\hat{A}_F + t_1 I)^{-1}(\hat{A}_F + t_2 I)^{-1}$ слабо при любых $t_1 \neq t_2$. Положим $\delta = t_1 - t_2$. Применяя еще раз тождество Гильберта, находим

$$(\hat{A}_F + t_2 I)^{-1} = (\hat{A}_F + t_1 I)^{-1}(I + \delta(\hat{A}_F + t_1 I)^{-1})^{-1} =$$
$$= (\hat{A}_F + t_1 I)^{-1} + \delta(\hat{A}_F + t_1 I)^{-2}(I + \delta(\hat{A}_F + t_1 I)^{-1})^{-1} = (\hat{A}_F + t_1 I)^{-1} + \delta\hat{R},$$

причем $\|\hat{R}\| \leqslant 1$. Аналогично

$$(\hat{A}_F(n) + t_2 I)^{-1} = (\hat{A}_F(n) + t_1 I)^{-1} + \delta\hat{R}_n, \quad \|\hat{R}_n\| \leqslant 1.$$

Стандартные рассуждения показывают теперь, что

$$(\hat{A}_F(n) + tI)^{-2} \to (\hat{A}_F + tI)^{-2}$$

в слабом смысле.

Наконец, при $n \to \infty$

$$((\hat{A}_F(n) + tI)^{-1} f,\ (\hat{A}_F(n) + tI)^{-1} f) = ((\hat{A}_F(n) + tI)^{-2} f,\ f) \to$$
$$\to ((\hat{A}_F + tI)^{-2} f,\ f) = ((\hat{A}_F + tI)^{-1} f,\ (\hat{A}_F + tI)^{-1} f).$$

Следовательно, $(\hat{A}_F(n) + tI)^{-1}$ сходится к $(\hat{A}_F + tI)^{-1}$ сильно. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть операторы* $\hat{B}_n$, $\hat{P}_n = \hat{P}$ и $\hat{B}$, $\hat{P}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 5, $\hat{A}_F(n)$, $\hat{A}_F$ — *те же операторы, что и в теореме* 5. *Пусть, кроме того, существует оператор* $\hat{B}'$, $0 < \alpha I < \hat{B}' \leqslant \hat{B}_n$, *такой, что* $\hat{B}'$, $\hat{P} \in R$ *и* $\hat{G}'(t) = \hat{P} e^{-t\hat{B}'} \hat{P}$ *является ядерным оператором. Тогда:*

1) *операторы* $e^{-t\hat{A}_F(n)}$ *и* $e^{-t\hat{A}_F}$ *являются ядерными;*

2) $e^{-t\hat{A}_F}$ *служит пределом* $e^{-t\hat{A}_F(n)}$ *по ядерной норме:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| e^{-t\hat{A}_F(n)} - e^{-t\hat{A}_F} \right\|_1 = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Sp} e^{-t\hat{A}_F} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sp} e^{-t\hat{A}_F(n)}.$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{A}_F'$ расширение по Фридрихсу оператора $\hat{A}' = \hat{P}\hat{B}'\hat{P}$, определенного на $D_{\hat{B}'} \cap \mathscr{H}$. Из условия теоремы следует, что $\hat{A}_F' \leqslant \hat{A}_F(n)$ и, следовательно,

$$(\hat{A}_F(n))^{-1} \leqslant \hat{A}_F'^{-1}. \tag{4.3}$$

Кроме того, согласно теореме 4, оператор $e^{-t\hat{A}_F'}$ является ядерным, и, следовательно, $\hat{A}_F'$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности, поэтому $\hat{A}_F'^{-1}$ — вполне непрерывный оператор. Применение леммы 5 показывает, что из (4.3) следует полная непрерывность $(\hat{A}_F(n))^{-1}$. Согласно замечанию к лемме 5, из (4.3) и сильной сходимости $(\hat{A}_F(n))^{-1}$ к $\hat{A}_F^{-1}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|(\hat{A}_F(n))^{-1} - \hat{A}_F^{-1}\| = 0$. Отсюда в свою очередь в силу теоремы Реллиха следует, что, каков бы ни был интервал Δ, концы которого не принадлежат спектру $\hat{A}_F^{-1}$, всегда $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{F}_\Delta(n) - \hat{F}_\Delta\| = 0$, где $\hat{F}_\Delta(n)$, $\hat{F}_\Delta$ — спектральные проекторы операторов $(\hat{A}_F(n))^{-1}$ и $\hat{A}_F^{-1}$ соответственно. Используя связь между спектральными характеристиками операторов X^{-1} и e^{-tX}, получаем отсюда аналогичное утверждение относительно спектральных проекторов $\hat{E}_\Delta(n)$ и $\hat{E}_\Delta$ операторов $e^{-t\hat{A}_F(n)}$ и $e^{-t\hat{A}_F}$ соответственно: $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{E}_\Delta(n) - \hat{E}_\Delta\| = 0$, если концы интервала Δ не принадлежат спектру $e^{-t\hat{A}_F}$.

Занумеруем в порядке возрастания собственные числа операторов $\hat{A}_F'$ и $\hat{A}_F$ с учетом их кратности. Обозначим собственные числа этих операторов через λ_k' и $\lambda_k(n)$. Из (4.3) следует, что $\lambda_k^{-1}(n) \leqslant \lambda_k'^{-1}$, и, следовательно, $e^{-t\lambda_k(n)} \leqslant e^{-t\lambda_k'}$. Таким образом, операторы $e^{-t\hat{A}_F(n)}$ являются ядерными. Суммируя последнее неравенство по всем k таким, что $e^{-t\lambda'_k} < \alpha$, находим

$$\operatorname{Sp}\left(e^{-t\hat{A}_{F^{(n)}}}\hat{E}_\alpha(n)\right) \leqslant \operatorname{Sp}\left(e^{-t\hat{A}'_F}\hat{E}'_\alpha\right), \tag{4.4}$$

где $\hat{E}_\alpha(n)$, $\hat{E}'_\alpha$ — спектральные проекторы операторов $e^{-t\hat{A}_{F^{(n)}}}$ и $e^{-t\hat{A}'_F}$ соответственно. В силу ядерности оператора $e^{-t\hat{A}'_F}$ правая часть (4.4) может быть сделана меньше любого числа $\varepsilon > 0$ при $\alpha < \alpha_0(\varepsilon)$. Итак, операторы $e^{-t\hat{A}_{F^{(n)}}}$ удовлетворяют всем условиям 3) леммы 6. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left\| e^{-t\hat{A}_{F^{(n)}}} - e^{-t\hat{A}_F}\right\|_1 = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Некоторые приложения

1. Некоторые неравенства для интегралов от выпуклых функций. В дальнейшем нам встретятся неравенства вида

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,d\sigma(x) \leqslant \int_0^\infty \varphi(x)\,d\sigma_+(x), \tag{5.1}$$

где $\sigma(x)$, $\sigma_+(x)$ — неубывающие функции неограниченной вариации, $\varphi(x)$ — выпуклая вниз функция.

Лемма 7. *Пусть $\sigma(x)$, $\sigma_+(x)$ — неубывающие функции и неравенство* (5.1) *справедливо для любой неотрицательной финитной выпуклой вниз функции. Тогда при любом $x > 0$*

$$\int_0^x \sigma(s)\,ds \leqslant \int_0^x \sigma_+(s)\,ds. \tag{5.2}$$

Обратно, если $\sigma(x)$, $\sigma_+(x)$ — неубывающие функции неограниченной вариации, при любом $x > 0$ справедливо неравенство (5.2), *функция $\varphi(x)$ выпукла вниз и такова, что существует интеграл в правой части* (5.1), *то $\varphi(x) \geqslant 0$, существует интеграл в левой части* (5.1) *и справедливо неравенство* (5.1).

Доказательство. Рассмотрим в качестве φ функцию

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \alpha x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } x > \dfrac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha(x)\,d\sigma(x) = \int_0^{1/\alpha}(1 - \alpha x)\,d\sigma(x) = \alpha\int_0^{1/\alpha}\sigma(x)\,dx.$$

Преобразуя аналогичным образом интеграл в правой части (5.1), сокращая на α и переходя к новым обозначениям, получаем (5.2). Пусть теперь выполнено соотношение (5.2) и $\varphi(x)$ — финитная выпуклая вниз функция, первая производная которой абсолютно непрерывна. В таком случае $\varphi''(x) \geqslant 0$. Умножая обе части (5.2) на $\varphi''(x)$ и интегрируя два раза по частям, получаем (5.1). Очевидно, что каждая финитная выпуклая вниз функция может быть равномерно аппроксимирована аналогичными функциями, у которых первая производная абсолютно непрерывна. Поэтому неравенство (5.1) справедливо для любых финитных выпуклых вниз функций.

Рассмотрим произвольную выпуклую вниз функцию, для которой существует интеграл в правой части (5.1). Поскольку $\sigma_+(x)$ имеет неограниченную вариацию, необходимо $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)=0$. Учитывая, что $\varphi(x)$ выпукла вниз, получаем отсюда, что $\varphi(x) \geqslant 0$ и что $\varphi(x)$ монотонно не возрастает. Положим

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varphi(x)-\varepsilon & \text{при } \varphi(x)-\varepsilon \geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \varphi(x)-\varepsilon < 0.\end{cases}$$

Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ финитна, поэтому, согласно предыдущему,

$$\int_0^\infty \varphi_\varepsilon(x)\,d\sigma(x) \leqslant \int_0^{a(\varepsilon)} (\varphi(x)-\varepsilon)\,d\sigma_+(x) \leqslant \int_0^{a(\varepsilon)} \varphi(x)\,d\sigma_+(x) \leqslant \int_0^\infty \varphi(x)\,d\sigma_+(x), \tag{5.3}$$

где $a(\varepsilon)$ — корень уравнения $\varphi(x)=\varepsilon$. Последовательность $\varphi_\varepsilon(x)$ сходится к $\varphi(x)$, монотонно возрастая, и $\varphi_\varepsilon(x) \geqslant 0$. Поэтому применима теорема Беппо Леви, в силу которой интеграл в левой части (5.1) существует и равен пределу при $\varepsilon \to 0$ интегралов в левой части (5.3). Лемма доказана.

2. Уравнения с постоянными коэффициентами в области. Рассмотрим в качестве $\tilde{\mathscr{H}}$ пространство $L^2(R^n)$ и в качестве $\mathscr{H} \subset \tilde{\mathscr{H}}$ — подпространство $L^2(\Omega)$ функций, равных нулю вне области Ω. В качестве $\hat{B}$ рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $L > I$ в $\tilde{\mathscr{H}}$, в качестве $\hat{P}$ — проектор из $L^2(R^n)$ на $L^2(\Omega)$, который мы обозначим через P. Роль оператора $\hat{A}$ играет симметричный оператор $L'=PLP$, определенный на $D_{L'}=D_L \cap L^2(\Omega)$.

В этом случае $D_L \cap L^2(\Omega)$ плотно в $D_{\sqrt{L}} \cap L^2(\Omega)$, и поэтому $\overline{L'}=L'_F$, где L'_F — расширение по Фридрихсу оператора L'. Пусть $\varphi(x)$ — быстро убывающая при $x\to+\infty$ выпуклая вниз функция. Рассмотрим оператор $\varphi(L)$. Этот оператор имеет ядро $G(x-y)$, причем

$$G(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(L(p))\,e^{i(p,x)}\,d^np, \tag{5.4}$$

где $L(p)$ — полный символ оператора L. (Скорость убывания φ должна обеспечить сходимость интеграла в правой части (5.4). Например, в качестве $\varphi(x)$ можно рассмотреть $\varphi = e^{-tx}$.)

Оператор $P\varphi(L)P$ имеет ядро $\chi_\Omega(x)\,G(x-y)\,\chi_\Omega(y)$, где $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция области Ω. Применяя общее неравенство для следов выпуклых функций от операторов, находим

$$\operatorname{Sp}\varphi(L'_F) \leqslant \int_\Omega G(0)\,d^n x = (2\pi)^{-n}\,\mu(\Omega)\int \varphi(L(p))\,d^n p.$$

Пусть $0 \leqslant a_\varepsilon(x) \leqslant 1$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 вне ε-окрестности границы Γ области Ω и равная нулю на Γ. Положим

$$\psi_p(x) = (2\pi)^{-n/2}\,e^{i(p,x)}\,a_\varepsilon(x).$$

Очевидно, что для любой функции $f \in L^2(\Omega)$

$$(f,\ a_\varepsilon^2 f) = \int |(f,\ \psi_p)|^2\,d^n p.$$

Система функций $\psi_p(x)$ удовлетворяет условию (1.17), причем $\hat{r}$ — оператор умножения на $a_\varepsilon^2(x)$.

Далее $\psi_p(x) \in D_{L'} \subset D_{L'_F}$. Поэтому

$$(L'_F\psi_p,\ \psi_p) = (L'\psi_p,\ \psi_p) = (2\pi)^{-n}\int_\Omega [L(p)\,a_\varepsilon^2(x) + \Delta(p,\ x)]\,d^n x,$$

где $\Delta(p,\ x)$ — многочлен по p степени, меньшей $L(p)$. Согласно (1.18) и общему неравенству (2.5),

$$\operatorname{Sp}(\varphi(L'_F)\hat{r}) = \int \frac{1}{(\psi_p,\ \psi_p)}(\varphi(L'_F)\,\psi_p,\ \psi_p)\,(\psi_p,\ \psi_p)\,d^n p \geqslant$$
$$\geqslant \int \varphi\left(\frac{(L'_F\psi_p,\ \psi_p)}{(\psi_p,\ \psi_p)}\right)(\psi_p,\ \psi_p)\,d^n p.$$

Пусть $G_F(x,\ y)$ — ядро оператора $\varphi(L'_F)$. Поскольку $a_\varepsilon^2(x) \leqslant 1$,

$$\operatorname{Sp}(\varphi(L'_F)\,\hat{r}) = \int_\Omega G_F(x,\ x)\,a_\varepsilon^2(x)\,d^n x \leqslant \int_\Omega G_F(x,\ x)\,d^n x = \operatorname{Sp}\varphi(L'_F).$$

Таким образом,

$$(2\pi)^{-n}\,\mu(\Omega)\int \varphi(L(p))\,d^n p \geqslant \operatorname{Sp}\varphi(L'_F) \geqslant \int \varphi\left(\frac{(L'_F\psi_p,\ \psi_p)}{(\psi_p,\ \psi_p)}\right)(\psi_p,\ \psi_p)\,d^n p =$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_\Omega a_\varepsilon^2(x)\,d^n x \int \varphi(L(p) + \delta_\varepsilon(p))\,d^n p, \tag{5.5}$$

где

$$\delta_\varepsilon(p) = \left(\int_\Omega a_\varepsilon^2(x)\,d^n x\right)^{-1}\int_\Omega \Delta(p,\ x)\,d^n x$$

— многочлен по p степени, меньшей $L(p)$.

Сделаем в левом интеграле (5.5) замену переменной, положив $L(p) = \lambda$; в правом интеграле — аналогичную замену, положив

$L(p)+\delta_\varepsilon(p)=\lambda$. В результате получим

$$(2\pi)^{-n}\mu(\Omega)\int\varphi(\lambda)\,d\sigma_+(\lambda)\geqslant\int\varphi(\lambda)\,dN(\lambda)\geqslant$$
$$\geqslant(2\pi)^{-n}\int\limits_\Omega a_\varepsilon^2(x)\,d^nx\int\varphi(\lambda)\,d\sigma_-(\lambda),\quad(5.6)$$

где

$$\sigma_+(\lambda)=\int\limits_{L(p)<\lambda}d^np,\quad \sigma_-(\lambda)=\int\limits_{L(p)+\delta_\varepsilon(p)<\lambda}d^np,\quad N(\lambda)=\mathrm{Sp}\,E_\lambda,$$

E_λ — спектральный проектор L'_F. Применяя лемму 7, получаем из (5.6) оценку для интеграла

$$(2\pi)^{-n}\int a_\varepsilon^2(x)\,d^nx\int\limits_0^\lambda\sigma_-(s)\,ds\leqslant\int\limits_0^\lambda N(s)\,ds\leqslant(2\pi)^{-n}\mu(\Omega)\int\limits_0^\lambda\sigma_+(s)\,ds.\quad(5.7)$$

Из (5.6) можно получить также классическую асимптотику для $N(\lambda)$. Положим с этой целью $\varphi(\lambda)=e^{-t\lambda}$ и поделим обе части неравенства (5.6) на его левую часть:

$$1\geqslant\frac{(2\pi)^n}{\mu(\Omega)}\frac{\int e^{-t\lambda}\,dN(\lambda)}{\int e^{-t\lambda}\,d\sigma_+(\lambda)}\geqslant\frac{1}{\mu(\Omega)}\int a_\varepsilon^2(x)\,dx\,\frac{\int e^{-t\lambda}\,d\sigma_-(\lambda)}{\int e^{-t\lambda}\,d\sigma_+(\lambda)}.\quad(5.8)$$

Заметим, что $\sigma_-(\lambda)$ и $\sigma_+(\lambda)$ имеет одинаковую и притом степенную асимптотику при $\lambda\to\infty$. Поэтому отношение интегралов в правой части (5.8) стремится к 1 при $t\to0$. Отсюда следует, что

$$1\geqslant\frac{(2\pi)^n}{\mu(\Omega)}\overline{\lim_{t\to0}}\frac{\int e^{-t\lambda}\,dN(\lambda)}{\int e^{-t\lambda}\,d\sigma_+(\lambda)}\geqslant\frac{1}{\mu(\Omega)}\int a_\varepsilon^2\,d^nx.$$

Аналогичное соотношение справедливо для нижнего предела. Ввиду произвольности ε отсюда следуют существование предела отношения интегралов в средней части (5.8) и равенство

$$\lim_{t\to0}\frac{\int e^{-t\lambda}\,dN(\lambda)}{\int e^{-t\lambda}\,d\sigma_+(\lambda)}=\frac{\mu(\Omega)}{(2\pi)^n}.$$

Применяя тауберову теорему Карамата, получаем классическую асимптотику для $N(\lambda)$:

$$N(\lambda)=(1+o(1))\frac{\mu(\Omega)}{(2\pi)^n}\int\limits_{L(P)<\lambda}d^nP.$$

Обратим внимание, что в наиболее совершенной в настоящее время работе В. Н. Туловского [7], посвященной асимптотике $N(\lambda)$, получен более точный результат:

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\mu(\Omega)\int\limits_{L(P)<\lambda} d^nP + O(S(\lambda)\ln\lambda),$$

где $S(\lambda)$ — площадь поверхности $L(P)=\lambda$. Однако неравенства (5.7) не вытекают из результата Туловского.

Отметим, что теорема 3 дает метод для приближенного вычисления функции Грина $G(t\,|\,x, y)$ задачи Коши для оператора L'_F (т. е. смешанной задачи Коши при нулевых граничных условиях). Согласно теореме 3, $G(t\,|\,x, y) = \lim\limits_{N\to\infty} G_N(t\,|\,x, y)$, причем

$$G_N(t\,|\,x, y) = \int G_1\left(\frac{t}{N}\middle|\, x, \xi_1\right) G_1\left(\frac{t}{N}\middle|\, \xi_1, \xi_2\right)\dots G_1\left(\frac{t}{N}\middle|\, \xi_{N-1}, y\right) d^{nN}\xi, \tag{5.9}$$

где

$$G_1(t\,|\,x, y) = \chi_\Omega(x)\,\chi_\Omega(y)\,G(t\,|\,x-y),$$

$$G(t\,|\,x) = (2\pi)^{-n}\int e^{-tL(p)+i(p,x)}\,d^np$$

— функция Грина уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu$ во всем пространстве, $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция области Ω.

Формула (5.9) может быть положена в основу численных расчетов для $G(t\,|\,x, y)$.

3. Виковские и антивиковские символы. Интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. Рассмотрим пространство F_2 целых функция n комплексных переменных с суммируемым квадратом по гауссовской мере:

$$(f, f) = \int |f(z)|^2 e^{-z\bar{z}} \prod \frac{dx_k\,dy_k}{\pi}$$

$$(z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, \quad z\bar{z} = \sum z_k\bar{z}_k, \quad x_k = \operatorname{Re} z_k, \quad y_k = \operatorname{Im} z_k).$$

Пространство F_2 играет важную роль в квантовой механике. В F_2 рассмотрим семейство векторов $\Phi_\alpha = e^{\bar{\alpha}z}$. Легко проверяется, что

$$(f, \Phi_\alpha) = f(\alpha).$$

Тем самым векторы Φ_α образуют переполненную систему. Роль объемлющего пространства играет пространство S_2, состоящее из всех функций $2n$ вещественных, переменных, с суммируемым квадратом по той же гауссовой мере.

Ко- и контравариантные символы операторов в этой ситуации изучались раньше [8]; в этом случае они называются соответственно виковскими и антивиковскими символами операторов. Название вызвано следующим обстоятельством. В F_2 существует $2n$ операторов

$$(a_kf)(z) = \frac{\partial}{\partial z_k} f(z), \quad (a_k^*f)(z) = z_kf(z),$$

называемых соответственно операторами уничтожения и рождения. Через эти операторы могут быть выражены некоторые другие операторы в соответствии с формулами

$$\hat{A}=\sum A_{mn}(a^*)^m(a)^n=\sum \mathring{A}_{mn}(a)^m(a^*)^n, \tag{5.10}$$

где m, n — мультииндексы. В виде каждой из сумм (5.10) представим дифференциальные операторы в F_2 с полиномиальными коэффициентами. Запись оператора $\hat{A}$ в виде первой суммы (5.10) называется виковской нормальной формой, запись в виде второй суммы — антивиковской нормальной формой. Оказывается, что виковские (ковариантные) и антивиковские (контравариантные) символы являются по совместительству производящими функциями для коэффициентов A_{mn} и $\mathring{A}_{mn}$ соответственно:

$$A(\bar{z},\ z)=(\Phi_z,\ \Phi_z)^{-1}(\hat{A}\Phi_z,\ \Phi_z)=\sum A_{mn}\bar{z}^m z^n,$$
$$\mathring{A}(\bar{z},\ z)=\sum \mathring{A}_{mn}\bar{z}^m z^n.$$

Действие оператора $\hat{A}$ на вектор записывается с помощью символов A и $\mathring{A}$ формулами

$$(\hat{A}f)(z)=\int A(z,\ \bar{v})f(v)e^{-(v-z)\bar{v}}\prod\frac{d\xi_k\,d\eta_k}{\pi},\quad v_k=\xi_k+i\eta_k,$$
$$(\hat{A}f)(z)=\int \mathring{A}(\bar{v},\ v)f(v)e^{-(v-z)\bar{v}}\prod\frac{d\xi_k\,d\eta_k}{\pi}.$$

Виковский и антивиковский символы одного оператора связаны соотношением

$$A(z,\ \bar{z})=\int e^{-(z-v)(\bar{z}-\bar{v})}\mathring{A}(\bar{v},\ v)\prod\frac{d\xi_k\,d\eta_k}{\pi},\quad v_k=\xi_k+i\eta_k.$$

В соответствии с общей теорией $D(A)\subset D(\hat{A})\subset D(\mathring{A})$, где $D(\hat{A})$ — множество значений квадратичной формы $(\hat{A}f,\ f)$ при $\|f\|=1$, $D(A)$ — множество значений $A(\bar{z},\ z)$ и $D(\mathring{A})$ — выпуклая оболочка множества значений $\mathring{A}(\bar{z},\ z)$. Отсюда следуют критерии ограниченности оператора (достаточное условие — ограниченность $\mathring{A}$ причем $\|\hat{A}\|\leqslant \operatorname{vrai\,sup}|\mathring{A}|$; необходимое условие — ограниченность A причем $|A|\leqslant\|\hat{A}\|$) и в случае самосопряженности и полуограниченности снизу двусторонняя оценка нижнего конца спектра.

Общие соображения § 1 дают также критерии ядерности: достаточное условие — суммируемость $\mathring{A}$, необходимое — суммируемость A (в обоих случаях — суммируемость по лебеговской мере в C^n). След оператора $\hat{A}$ выражается через символы A и $\mathring{A}$ согласно формуле

$$\operatorname{Sp}\hat{A}=\int A(z,\ \bar{z})\prod\frac{dx_k\,dy_k}{\pi}=\int\mathring{A}(\bar{z},\ z)\prod\frac{dx_k\,dy_k}{\pi}\quad(z_k=x_k+iy_k).$$

Сверх общей теории здесь есть также признаки полной непрерывности: необходимый признак — стремление к нулю $A(\bar{z},\ z)$ при

$|z| \to \infty$, достаточный — стремление к нулю $\hat{A}(\bar{z}, z)$ при $|z| \to \infty$.

Наконец, если $\mathring{A}(\bar{z}, z) \geqslant 0$, φ — выпуклая вниз функция, то

$$\int \varphi(A(z, \bar{z})) \prod \frac{dx_k\, dy_k}{\pi} \leqslant \operatorname{Sp} \varphi(\hat{A}) \leqslant \int \varphi(\mathring{A}(\bar{z}, z)) \Pi \frac{dx_k\, dy_k}{\pi}, \tag{5.11}$$

причем конечность интеграла в правой части (5.11) гарантирует конечность следа $\varphi(\hat{A})$ и интеграла в левой части (5.11). Применяя лемму 7, получаем как следствие (5.11) неравенство для интеграла от числа $N(\lambda)$ собственных чисел оператора $\hat{A}$, меньших λ:

$$\int_0^\lambda \rho(s)\, ds \leqslant \int_0^\lambda N(s)\, ds \leqslant \int_0^\lambda \mathring{\rho}(s)\, ds, \tag{5.12}$$

где

$$\rho(s) = \int_{A<s} \Pi \frac{dx_k\, dy_k}{\pi}, \quad \mathring{\rho}(s) = \int_{\mathring{A}<s} \Pi \frac{dx_k\, dy_k}{\pi}.$$

Пусть антивиковский символ удовлетворяет условию: при $\mathring{A} > k$

$$\left| \frac{\mathring{A}(z+v, \bar{z}+\bar{v})}{\mathring{A}(z, \bar{z})} - 1 \right| \leqslant \varepsilon(k)\, e^{\frac{1}{s} v\bar{v}}, \quad s > 1, \quad \varepsilon(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5.13}$$

В [8] показано, что при этом условии функции $\rho(s)$ и $\mathring{\rho}(s)$ имеют одинаковую асимптотику при $s \to \infty$. Следовательно, одинаковую асимптотику имеют их интегралы от 0 до λ, и, согласно (5.12), ту же асимптотику имеет $\int_0^\lambda N(s)\, ds$:

$$\int_0^\lambda N(s)\, ds = (1 + o(1)) \int_0^\lambda \mathring{\rho}(s)\, ds. \tag{5.14}$$

В случае, если выполнено условие (5.13) и сверх того $\mathring{\rho}(s)$ имеет степенную асимптотику при $s \to \infty$, полагая в (5.11) $\varphi(x) = e^{-tx}$ и апеллируя к тауберовой теореме Карамата, получаем классическую асимптотику для $N(\lambda)$:

$$N(\lambda) = (1 + o(1)) \int_{\mathring{A}<\lambda} \Pi \frac{dx\, dy}{\pi}. \tag{5.15}$$

Подчеркнем, что более грубая формула (5.14), подобно неравенствам (5.12), не требует предположения о степенном росте $\mathring{\rho}(s)$. Вероятно, и классическая формула (5.15) может быть получена из (5.12) при менее ограничительных условиях на $\mathring{\rho}(s)$.

Подробнее о виковских и антивиковских символах и их связи с обычными псевдодифференциальными операторами см. в [8].

В заключение этого пункта обратим внимание на интерпретацию теоремы 3.

Пусть $\hat{A}$ — самосопряженный оператор в F_2, обладающий антивиковским символом $\mathring{A} > 0$. Согласно теореме 3,

$$e^{-t\hat{A}} = \lim_{N\to\infty}\left(\hat{P}e^{-\frac{t}{N}\hat{B}}\hat{P}\right)^N,$$

где $\hat{B}$ — оператор в S_2, состоящий в умножении на $\mathring{A}$, $(\hat{B}f)(z, \bar{z}) = \mathring{A}(z, \bar{z})f(z, \bar{z})$, $\hat{P}$ — оператор ортогонального проектирования из S_2 на F_2. Согласно [8], оператор $\hat{P}$ действует по формуле

$$(\hat{P}f)(z) = \int f(v, \bar{v})\, e^{-(v-z)\bar{v}} \prod \frac{d\xi_k\, d\eta_k}{\pi}, \quad v = \xi_k + i\eta_k. \tag{5.16}$$

Виковский символ оператора $e^{-t\hat{A}}$ равен

$$G(t\,|\,\bar{z}, z) = [(\Phi_z, \Phi_z)]^{-1}(e^{-t\hat{A}}\Phi_z, \Phi_z) = \lim_{N\to\infty} G_N(t\,|\,\bar{z}, z),$$

где $G_N(t\,|\,\bar{z}, z) = [(\Phi_z, \Phi_z)]^{-1}\left(\left(\hat{P}e^{-\frac{t}{N}\hat{B}}\hat{P}\right)^N\Phi_z, \Phi_z\right)$ является виковским символом оператора $\left(\hat{P}e^{-\frac{t}{N}\hat{B}}\hat{P}\right)^N$. Учитывая, что $\hat{B}$ есть оператор умножения на $\mathring{A}$ и что $\hat{P}$ задается формулой (5.16), для G_N получаем следующее выражение в виде многократного интеграла:

$$G_N(t\,|\,\bar{z}, z) = \int e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_1^N \mathring{A}(v_k, \bar{v}_k) - \sum\limits_0^N (v_k - v_{k+1})\bar{v}_k} \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant N\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \frac{d\xi_{k,i}\, d\eta_{k,i}}{\pi}, \tag{5.17}$$

$$v_k = (v_{k1}, \ldots, v_{kn}), \quad v_{ki} = \xi_{ki} + i\eta_{ki}, \quad v_0 = z, \quad v_{N+1} = \bar{z}.$$

Рассмотрим функцию $v(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, и положим $v_k = v\left(\frac{k}{N}t\right)$, $\bar{v}_k = \bar{v}\left(\frac{k}{N}t\right)$. В этих обозначениях показатель в (5.17) приобретает вид интегральной суммы для интеграла

$$-\int_0^t \left(\mathring{A}(v(s), \bar{v}(s)) + \bar{v}\frac{dv}{ds}\right)ds, \quad v(0) = v(t) = z, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}(t) = \bar{z},$$

характерного для так называемых фейнмановских интегралов по траекториям в фазовом пространстве.

Таким образом, равенство $G(t\,|\,\bar{z}, z) = \lim\limits_{N\to\infty} G_N(t\,|\,\bar{z}, z)$, следующее из теоремы 3, служит обоснованием одного из вариантов фейнмановского континуального интеграла по траекториям в фазовом пространстве.

Подробнее об этих интегралах и их связи с разного рода символами см. в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, с. 277—318.
2. Наймарк М. А. Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств.— ДАН СССР, 1943, т. 41, № 9, с. 373—375.
3. Halmos P. R., Normal dilations and extensions of operators.— Summa Brasiliensis Math., 1950, v. 2, p. 125—134.
4. Sz.— Nagy B. A moment problem for self—adjoint operators.— Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1952, v. 3, p. 285—293.
5. Березин Ф. А. Выпуклые функции от операторов.— Мат. сб., 1972, т. 88 (130), с. 268—276.
6. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.
7. Туловский В. Н. Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в области.— Функц. анализ и его прил., 1971, т. 5, вып. 3, с. 85—90.
8. Березин Ф. А. Виковские и антивиковские символы.— Мат. сб., 1971, т. 86, с. 578—610.
9. Березин Ф. А. Невинеровские континуальные интегралы.— ТФМ, 1971, т. 6, № 2, с. 194—212.
10. Trotter H. F. On the product of semi—qroups of operators.— Proc. Am. Math. Soc., 1959, v. 10, № 4, p. 545—551.
11. Бирман М. С., Соломяк М. З. Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 2, с. 267—270.
12. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Глава IV

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ[1])

Введение

Целью статьи является доказательство неравенства для следов выпуклых функций от операторов, обобщающего известное неравенство

$$\varphi\left(\sum p_i x_i\right) \leqslant \sum p_i \varphi(x_i), \quad \sum p_i = 1, \quad p_i \geqslant 0. \tag{1}$$

Основной результат удобно сформулировать в виде трех теорем, относящихся соответственно к операторам в конечномерном пространстве, ограниченным и неограниченным операторам в гильбертовом пространстве.

Теорема 1. *Пусть A — эрмитов оператор в конечномерном гильбертовом пространстве H, P — ортогональный проектор в H и $\varphi(x)$ — выпуклая вниз функция вещественного переменного:*

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(x_1)+\varphi(x_2)). \tag{2}$$

Справедливо неравенство

$$\operatorname{Sp} \varphi(PAP) \leqslant \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть A — ограниченный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H, P — ортогональный проектор в H и $\varphi(x) \geqslant 0$ — выпуклая вниз функция. Тогда, если $P\varphi(A)P$ — ядерный оператор, то $\varphi(PAP)$ обладает тем же свойством и*

$$\operatorname{Sp} \varphi(PAP) \leqslant \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P). \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения D_A; P — ортогональный проектор в H, причем $D_A \cap PH$ плотно в PH; $D' \subset D_A \cap PH$ — плотное множество в PH; PAP — оператор в PH, определенный на $D_A \cap PH$; A'_p — его сужение на D'. В случае, когда оператор A'_p полуограничен, обозначим его расширение по Фридрихсу через A_p. Пусть далее $\varphi(x) \geqslant 0$ — выпуклая вниз функция. Тогда, если оператор $P\varphi(A)P$ ядерный, то*

1) *оператор A'_p полуограничен;*

---

[1]) Мат. сб., 1972, т. 88, с. 268—276.

2) *оператор* $\varphi(A_p)$ *является ядерным и*

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(A_p) \leqslant \mathrm{Sp}\,(P\varphi(A)P); \tag{5}$$

3) *если оператор* A'_p *не является ограниченным, то с необходимостью либо* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, *либо* $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$. *В первом случае оператор* A'_p *полуограничен снизу, во втором — сверху.*

Случай равенства. *Если функция* $\varphi(x)$ *строго выпукла, то во всех трех случаях неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда* $AP=PA$.

Замечание 1. Пусть $\varphi(x)=x^2$, $Q=E-P$. Тогда

$$P\varphi(A)P=PA^2P=PA(Q+P)AP=PAQ(PAQ)^*+(PAP)^2.$$

С другой стороны, $\varphi(PAP)=(PAP)^2$. Поэтому $P\varphi(A)P-\varphi(PAP)=PAQ(PAQ)^*$. Следовательно, справедливо операторное неравенство

$$P\varphi(A)P \geqslant \varphi(PAP), \tag{6}$$

причем неравенство (6) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $PAQ=0$, или, что то же самое, когда $AP=PA$.

Назовем функцию $\varphi(x)$ *абсолютно выпуклой*, если для нее выполнено неравенство (6) при любой эрмитовой матрице A и любом проекторе P. Как показывает приведенный пример, множество абсолютно выпуклых функций не пусто. Было бы интересно дать его полное описание.

Замечание 2. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — неотрицательные операторы в m-мерном пространстве H, $\sum P_k=E$. Если $\varphi(x)$ — выпуклая вниз функция, то

$$\mathrm{Sp}\,\varphi\left(\sum x_kP_k\right) \leqslant \mathrm{Sp}\sum P_k\varphi(x_k). \tag{7}$$

В самом деле, согласно теореме Наймарка [1] (см. также [2]) пространство H можно вложить в более широкое пространство H_1 в качестве подпространства, причем в H_1 существует разложение единицы с помощью ортогональных проекторов E_k, $k=1, 2, \ldots, n$, такое, что $P_k=PE_kP$, где P — оператор ортогонального проектирования на H. Положим $A=\sum x_kE_k$. Применяя теорему 1, получаем неравенство (7).

Если пространство H одномерно, то (7) превращается в (1). В форме, аналогичной (7), могут быть сформулированы также теоремы 2 и 3. Если $\varphi(x)$ — абсолютно выпуклая функция в смысле данного ранее определения, неравенство (7) является следствием операторного неравенства

$$\varphi\left(\sum x_kP_k\right) \leqslant \sum P_k\varphi(x_k).$$

Отметим неравенство для следов, вытекающее из простейшего частного случая теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть* $A>B$ — *самосопряженные операторы и* $\varphi(x)\geqslant 0$ — *неубывающая выпуклая вниз функция. Если оператор* $\varphi(A)$ *является ядерным, то тем же свойством обладает* $\varphi(B)$ *и* $\mathrm{Sp}\,\varphi(A)\geqslant \mathrm{Sp}\,\varphi(B)$.

Доказательство. Предположим сначала, что оператор B имеет точечный спектр. Пусть ξ_k — ортонормированные собственные векторы, μ_k — соответствующие собственные числа. Обозначим через P_k проектор на одномерное пространство, порожденное ξ_k, и через $E(\lambda)$ спектральный проектор A. Положим $A_n = (E(n) - E(-n))A$, $B_n = (E(n) - E(-n))B(E(n) - E(-n))$. Очевидно, что $B_n \leqslant A_n$. Поэтому $(B_n\xi_k, \xi_k) \leqslant (A_n\xi_k, \xi_k)$,

$$\varphi((B_n\xi_k, \xi_k)) \leqslant \varphi((A_n\xi_k, \xi_k)) = \\ = \operatorname{Sp}\varphi(P_kA_kP_k) \leqslant \operatorname{Sp}(P_k\varphi(A_n)P_k) \leqslant (\varphi(A_n)\xi_k, \xi_k).$$

Далее $B_n \to B$, $A_n \to A$ при $n \to \infty$ в сильном смысле. Поэтому в последнем неравенстве возможен предельный переход при $n \to \infty$. Совершая его, находим $\varphi(\mu_k) = \lim \varphi((B_n\xi_k, \xi_k)) \leqslant \leqslant (\varphi(A)\xi_k, \xi_k)$. Суммируя по k, получаем требуемый результат.

Покажем теперь, что из условия теоремы вытекает наличие у B не только точечного, но даже дискретного спектра. Положим $\tilde{B} = \sum_{-\infty}^{\infty} n(E(n+1) - E(n))$, где $E(\lambda)$ — спектральный проектор B. Оператор $\tilde{B}$ имеет точечный спектр, и, кроме того, $\tilde{B} \leqslant B \leqslant A$. Согласно предыдущему, $\varphi(\tilde{B}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n)(E(n+1) - E(n))$ — ядерный оператор. Последнее возможно лишь в случае, если $\operatorname{Sp}(E(n+1) - E(n)) < \infty$, т. е. если на полуинтервале $(n, n+1)$ имеется лишь конечное число собственных значений оператора B.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — собственный базис A и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — собственный ортонормированный базис PAP: $Ae_k = \lambda_k e_k$, $PAP\xi_k = \mu_k\xi_k$. Заметим, что

$$\mu_k = (PAP\xi_k, \xi_k) = (AP\xi_k, P\xi_k) = (A\xi_k, \xi_k) = \sum_p \lambda_p |c_{pk}|^2,$$

где $c_{pk} = (\xi_k, e_p)$, $\sum_p |c_{pk}|^2 = 1$. Поэтому

$$\varphi(\mu_k) = \varphi\left(\sum_p \lambda_p |c_{pk}|^2\right) \leqslant \sum_p |c_{pk}|^2 \varphi(\lambda_p). \tag{1.1}$$

Далее

$$\operatorname{Sp}\varphi(PAP) = \sum \varphi(\mu_k) \leqslant \sum_p \sum_k |c_{pk}|^2 \varphi(\lambda_p). \tag{1.2}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Sp}(P\varphi(A)P) = \sum (P\varphi(A)P\xi_k, \xi_k) = \sum (\varphi(A)\xi_k, \xi_k) = \\ = \sum_k \sum_p \varphi(\lambda_p)|c_{pk}|^2, \quad c_{pk} = (\xi_k, e_p). \tag{1.3}$$

Сравнивая (1.2) и (1.3), получаем нужное неравенство. Заметим, что случай равенства возможен тогда и только тогда, когда все неравенства (1.1) превращаются в равенства. При строго выпуклой функции φ это возможно в том и только в том случае, когда $|c_{pk}|^2=\delta_{ps}$, где δ_{ps} — символ Кронекера, $s=s(k)$. Последнее равенство эквивалентно тому, что $\xi_k=\theta_k e_{s(k)}$, $|\theta_k|=1$. Отсюда $Pe_s=e_s$, если $s=s(k)$ при каком-нибудь k, и в силу ортогональности проектора P в противном случае $Pe_s=0$. Следовательно, $AP=PA$.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим сначала случай, когда P — проектор на конечномерное пространство. Пусть Q_n — возрастающая последовательность проекторов на конечномерные подпространства H, $Q_nQ_{n+1}=Q_{n+1}Q_n=Q_n$, $\lim Q_n=E$. Согласно теореме 1,

$$\operatorname{Sp}\varphi(PQ_nAQ_nP)\leqslant\operatorname{Sp}(P\varphi(Q_nAQ_n)P). \tag{2.1}$$

Заметим, что существует предел PQ_nAQ_nP, и, следовательно, левая часть (2.1) имеет очевидный предел. Далее, если ψ — многочлен, то существует сильный предел $\lim\psi(Q_nAQ_n)=\psi(A)$. Аппроксимируем φ на отрезке $(-\|A\|,\ \|A\|)$ многочленами φ_n равномерно, $\varphi=\varphi_N(x)+\alpha_N(x)$, $|\alpha_N(x)|\leqslant\frac{1}{N}$, $-\|A\|\leqslant x\leqslant\|A\|$. Так как $\|Q_nAQ_n\|\leqslant\leqslant\|A\|$, то $\varphi(Q_nAQ_n)=\varphi_N(Q_nAQ_n)+\alpha_N(Q_nAQ_n)$, $\|\alpha(Q_nAQ_n)\|\leqslant\leqslant\frac{1}{N}$. Теперь с помощью стандартных рассуждений убеждаемся в существовании слабого предела $\lim\varphi(Q_nAQ_n)=\varphi(A)$. Таким образом, в (2.1) возможен предельный переход при $n\to\infty$. Совершая его, получаем утверждение теоремы для случая, когда $\dim PH<\infty$.

Общий случай. Пусть P_N — последовательность конечномерных проекторов, $P_NP_{N+1}=P_{N+1}P_N=P_N$, $P_NH\subset PH$, $P_N\nearrow P$. Согласно предыдущему,

$$\operatorname{Sp}\varphi(P_NAP_N)\leqslant\operatorname{Sp}(P_N\varphi(A)P_N)\leqslant\operatorname{Sp}(P\varphi(A)P).$$

Пусть ξ_k — ортонормированный базис в P_NH. Тогда

$$\operatorname{Sp}\varphi(P_NAP_N)=\sum_1^M(\varphi(P_NAP_N)\xi_k,\ \xi_k)+\sum_{M+1}^{\dim P_NH}(\varphi(P_NAP_N)\xi_k,\ \xi_k),$$

откуда

$$\sum_1^M(\varphi(P_NAP_N)\xi_k,\ \xi_k)\leqslant\operatorname{Sp}P\varphi(A)P.$$

Совершая предельный переход при $N\to\infty$, получаем, что все частичные следы $\varphi(PAP)$ ограничены общей константой; следовательно, $\varphi(PAP)$ — ядерный оператор. Устремляя M к ∞, получаем нужное утверждение.

Случай равенства. Из того обстоятельства, что оператор $\varphi(PAP)$ является ядерным, следует, что PAP имеет точечный спектр. Пусть ξ_k — ортонормированный собственный базис PAP, μ_k — соответствующие собственные числа. Имеем

$$\mu_k=(PAP\xi_k,\ \xi_k)=(A\xi_k,\ \xi_k)=\int\lambda d\sigma_k(\lambda),\quad \sigma_k(\lambda)=(E_\lambda\xi_k,\ \xi_k),$$

где E_λ—спектральный проектор A. Далее

$$\varphi(\mu_k)=\varphi\left(\int\lambda d\sigma_k(\lambda)\right)\leqslant\int\varphi(\lambda)\,d\sigma_k(\lambda). \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(PAP)=\sum\varphi(\mu_k)\leqslant\sum\int\varphi(\lambda)\,d\sigma_k(\lambda)=\sum(\varphi(A)\,\xi_k,\ \xi_k)=\\=\mathrm{Sp}\,(P\varphi(A)\,P). \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) обращается в равенство только в том случае, когда все неравенства (2.2) обращаются в равенства. При строго выпуклой функции φ это возможно лишь в случае, когда $\sigma_k(\lambda)$ — характеристическая функция полупрямой $\lambda_k\leqslant\lambda<\infty$, $\varphi(\lambda_k)=\varphi(\mu_k)$. Функция $\sigma_k(\lambda)$ может быть характеристической функцией полупрямой лишь в случае, когда ξ_k—собственный вектор A. Итак, все ξ_k—собственные векторы A; следовательно, порожденное ими подпространство PH инвариантно относительно A. Тем же свойством обладает ортогональное дополнение к PH; следовательно, $AP=PA$.

§ 3. Доказательство теоремы 3

А. Рассмотрим случай, когда P—оператор проектирования на конечномерное подпространство $PH\subset D_A$. Пусть $Q_n=\int\limits_{-n}^{n}dE_\lambda$, где E_λ—спектральное семейство A. Согласно теореме 2,

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(PQ_nAQ_nP)\leqslant\mathrm{Sp}\,(P\varphi(Q_nAQ_n)P).$$

Левая и правая части этого неравенства имеют очевидный предел при $n\to\infty$:

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(PAP)\leqslant\mathrm{Sp}\,(P\varphi(A)\,P). \tag{3.1}$$

Б. Оператор PAP ограничен. Пусть P_n—последовательность конечномерных проекторов, $P_nP_{n+1}=P_n$, $P_n\nearrow P$. Согласно (3.1),

$$\mathrm{Sp}\,\varphi(P_nAP_n)\leqslant\mathrm{Sp}\,(P_n\varphi(A)\,P_n)\leqslant\mathrm{Sp}\,(P\varphi(A)\,P). \tag{3.2}$$

Заметим, что $P_nAP_n=P_nPAPP_n$ сильно сходится к PAP. Повторяя рассуждения, приведенные в п. А, получаем нужное неравенство.

В. Оператор PAP не ограничен. В PH существует ортонормированный базис, состоящий из элементов D'. Пусть $\{e_i\}$—такой базис; $D_n\subset D'$—подпространство, порожденное $e_1,\ \ldots,\ e_n$; P_n — ортогональный проектор на D_n; $A_n=P_nPAPP_n=P_nAP_n$—оператор в D_n. Исходным пунктом наших рассуждений служит неравенство (3.2). Обозначим собственные числа A_n через $\lambda_i(n)$, $\lambda_i(n) \leqslant \lambda_{i+1}(n)$. Заметим, что матрица оператора A_n в базисе $\{e_i\}$ получается из матрицы оператора A_{n+1} вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Поэтому собственные числа A_n и A_{n+1} чередуются:

$$\lambda_i(n+1) \leqslant \lambda_i(n) \leqslant \lambda_{i+1}(n+1). \tag{3.3}$$

Кроме того, $\lambda_1(n) = \min\limits_{\xi \in D_n} \frac{(A\xi, \xi)}{(\xi, \xi)}$, $\lambda_n(n) = \max\limits_{\xi \in D_n} \frac{(A\xi, \xi)}{(\xi, \xi)}$. Так как оператор PAP не ограничен, то либо $\lambda_1(n) \to -\infty$, либо $\lambda_n(n) \to +\infty$. Из выпуклости и неотрицательности $\varphi(x)$ следует, что одновременное выполнение предельных соотношений $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ невозможно. Поэтому следующее из (3.2) неравенство

$$\varphi(\lambda_1(n)) + \varphi(\lambda_n(n)) \leqslant \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P)$$

возможно при всех n только в том случае, когда либо $\lambda_1(n) > > \text{const}$, либо $\lambda_n(n) < \text{const}$, т. е. если эрмитова форма полуограничена на $\bigcup D_n$.

Пусть для определенности $\lambda_1(n) > \text{const}$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1(n) > 1$. Таким образом, в этом случае $\lambda_n(n) \to +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. Обозначим через H_A гильбертово пространство, получающееся пополнением D' по скалярному произведению $(\xi, \xi)_A = (\xi, A_p'\xi)$. Отметим, что $H_A \subset H$ в силу неравенства $(A_p'\xi, \xi) \geqslant (\xi, \xi)$. Может случиться, что введенный ранее базис $\{e_i\}$ обладает тем свойством, что конечные линейные комбинации e_i плотны в H_A. Если это не так, то заменим $\{e_i\}$ другим базисом из элементов D', который обладает этим свойством. (Ввиду плотности D' в H_A и сепарабельности H_A такой базис существует.) Сохраним для этого базиса прежнее обозначение.

Вернемся к неравенствам (3.3). Из них, в частности, следует, что $\lambda_i(n) \leqslant \lambda_i(n-1)$. Поскольку, кроме того, $\lambda_i(n) > 1$, существует предел $\lambda_i = \lim \lambda_i(n)$ при $n \to \infty$.

Для дальнейшего существенно следующее утверждение. Каковы бы ни были $c > 0$ и n, существует лишь конечное число чисел $\lambda_i(n)$ (с учетом кратности), удовлетворяющих условию $\lambda_i(n) < c$. В самом деле, из (3.2) следует, что

$$\sum_{\lambda_i(n) < c} \varphi(\lambda_i(n)) \leqslant \operatorname{Sp} \varphi(P_n A P_n) \leqslant \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P). \tag{3.4}$$

В силу выпуклости, неотрицательности $\varphi(x)$ и условия $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ необходимо $\varphi(x) \geqslant \alpha > 0$ при $1 \leqslant x \leqslant c$. Поэтому в левой части (3.4) может быть не более $\alpha^{-1} \operatorname{Sp}(P\varphi(A)P)$ слагаемых.

Обозначим через $\xi_i(n)$ ортонормированный собственный базис оператора A_n: $A_n\xi_i(n) = \lambda_i(n)\xi_i(n)$. Заметим, что $(\xi_i(n), \xi_i(n))_A = = \lambda_i(n) \leqslant \lambda_i + 1$ при достаточно большом n. Используя слабую компактность сферы в PH и в H_A, найдем множество K целых чисел такое, что $\xi_i(n)$ слабо сходится как в H, так и в H_A при $n \to \infty$, $n \in K$. Обозначим слабый предел $\xi_i(n)$ через ξ_i, $\xi_i \in H_A$.

Покажем, что $\xi_i \in D_{A_p}$, где A_p — фридриховское расширение сужения оператора A'_p на $\cup D_n$ [1]). Пусть $\eta \in D_n$, $N \in K$, $N \to \infty$. Имеем

$$\lambda_i(\xi_i, \eta) = \lim \lambda_i(N)(\xi_i(N), \eta) = \lim (A_N \xi_i(N), \eta) = \\ = \lim (A'_p \xi_i(N), \eta) = \lim (\xi_i(N), A'_p \eta) = (\xi_i, A'_p \eta) = (A'^*_p \xi_i, \eta),$$

откуда $(A'_p)^* \xi_i = \lambda_i \xi_i$ ввиду плотности $\cup D_n$. (При преобразованиях использовано, что $(A'_p \xi_i(N), \eta) = (A'_p P_N \xi_i(N), P_N \eta) = (P_N A P_N \xi_i(N), \eta)$ при $N > n$, так как $P_N \eta = P_n \eta = \eta$ при $N > n$.)

Таким образом, $\xi_i \in H_A \cap D_{(A'_p)^*}$. Сверх того мы получаем, что $(A'_p)^* \xi_i = A_p \xi_i = \lambda_i \xi_i$, откуда, в частности, следует, что $(\xi_i, \xi_j) = 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Покажем, что линейная оболочка векторов ξ_i плотна в PH. Это утверждение мы выведем из формулы

$$(\eta, \eta) = \sum |c_i|^2, \quad c_i = (\eta_i, \xi_i), \quad \eta \in D_n. \tag{3.5}$$

Выберем $N > n$, $N \in K$, и разложим η по $\xi_i(N)$:

$$\eta = \sum_{i=1}^{N} c_i(N) \xi_i(N), \tag{3.6}$$

$$(A'_p \eta, \eta) = \sum_{i=1}^{N} |c_i(N)|^2 \lambda_i(N) = \\ = \sum_{\lambda_i(N) < \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2 \lambda_i(N) + \sum_{\lambda_i(N) \geqslant \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2 \lambda_i(N).$$

Далее

$$(A'_p \eta, \eta) \geqslant \sum_{\lambda_i(N) \geqslant \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2 \lambda_i(N) \geqslant \varepsilon^{-1} \sum_{\lambda_i(N) \geqslant \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2,$$

$$\sum_{\lambda_i(N) \geqslant \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2 \leqslant \varepsilon (A'_p \eta, \eta). \tag{3.7}$$

Согласно сделанному ранее замечанию, первая сумма в (3.6) состоит из конечного числа слагаемых, не превосходящего константы R, не зависящей от N. Подберем N так, чтобы

$$\left| \sum_{\lambda_i(N) < \varepsilon^{-1}} |c_i(N)|^2 - \sum_{\lambda_i < \varepsilon^{-1}} |c_i|^2 \right| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

[1]) Напомним определение фридриховского расширения. Пусть $B > E$ — симметрический оператор с областью определения D_B, $(B\xi, \xi) \geqslant (\xi, \xi)$. Обозначим через H_B пополнение D_B по скалярному произведению $(\xi, \xi)_B = (B\xi, \xi)$. Областью определения фридриховского расширения B_F оператора B служит $D_{B_F} = H_B \cap D_{B^*}$, где D_{B^*} — область определения сопряженного оператора B^*: $B_F \xi = B^* \xi$, $\xi \in D_{B_F}$. Расширения по Фридрихсу обладают следующим свойством инвариантности. Пусть $D'_B \subset D_B$ плотно в H и в H_B, и пусть B' — сужение B на D'_B и B'_F — расширение по Фридрихсу оператора B'. Тогда $B'_F = B_F$. (Доказательство. Из изложенной конструкции следует, что B'_F служит расширением B_F. Поскольку B_F самосопряжен, $B'_F = B_F$.)

Из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\left|(\eta, \eta)-\sum_{\lambda_l<\varepsilon^{-1}}|c_l|^2\right|=\left|\sum_{i=1}^{N}|c_i(N)|^2-\sum_{\lambda_l<\varepsilon^{-1}}|c_l|^2\right|\leqslant\varepsilon(1+(A'_p\eta, \eta)).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем (3.5).

Пусть $\zeta\in PH$, $\zeta_n=P\zeta\in D_n$. Согласно (3.5),

$$(\zeta_n, \zeta_n)=\sum_1^M|c_i^{(n)}|^2+\sum_{M+1}^{\infty}|c_i^{(n)}|^2\geqslant\sum_1^M|c_i^{(n)}|^2, \quad c_i^{(n)}=(\zeta_n, \xi_l).$$

Переходя к пределу сначала при $n\to\infty$, потом при $M\to\infty$, находим

$$(\zeta, \zeta)\geqslant\sum_1^{\infty}|c_l|^2, \quad c_l=(\zeta, \xi_l). \tag{3.9}$$

Пусть Q — ортогональный проектор в PH на подпространство, порожденное $\{\xi_l\}$, $h\in\bigcup D_n$,

$$(h, h)\geqslant(Qh, Qh)\geqslant\sum|(Qh, \xi_l)|^2=\sum|c_l|^2, \ c_l=(h, \xi_l).$$

Учитывая (3.5), находим отсюда, что $(h, h)=(Qh, Qh)$. Следовательно, $h=Qh$, ξ_l порождают все пространство PH.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы 3. Назовем кратностью числа λ_α число различных последовательностей $\xi_l(n)$ таких, что $\lim\lambda_l(n)=\lambda_\alpha$. Кратность λ_α обозначим через k_α. Число отличных от нуля векторов ξ_α, имеющих λ_α собственным числом, обозначим через k'_α. Очевидно, что $k'_\alpha\leqslant k_\alpha$. Если $k'_i>0$, то λ_l — собственное число оператора A_p. Кратность λ_l как собственного числа A_p обозначим через l_l. Ввиду того что линейная оболочка ξ_l плотна в PH, $l_l\leqslant k'_i$, и спектр A_p состоит из чисел λ_l с $k'_i\neq 0$.

Фиксируем число $R>0$. Согласно (3.2),

$$\sum_{\lambda_i(n)\leqslant R}\varphi(\lambda_l(n))\leqslant\operatorname{Sp}\varphi(P_nAP_n)\leqslant\operatorname{Sp}P\varphi(A)P. \tag{3.10}$$

Поскольку количество слагаемых в левой части (3.10) не превосходит числа $c(R)$, не зависящего от n, в (3.10) можно перейти к пределу при $n\to\infty$:

$$\sum_{\lambda_i\leqslant R}k'_i\varphi(\lambda_l)\leqslant\operatorname{Sp}(P\varphi(A)P).$$

Так как $l_l\leqslant k'_i\leqslant k_l$, то также

$$\sum_{\lambda_i\leqslant R}l_l\varphi(\lambda_i)\leqslant\operatorname{Sp}(P\varphi(A)P).$$

Ввиду произвольности R отсюда следует, что

$$\operatorname{Sp}\varphi(A_p)=\sum l_l\varphi(\lambda_l)\leqslant\operatorname{Sp}(P\varphi(A)P).$$

Вспомним, что A_p является расширением по Фридрихсу сужения A'_p на $\bigcup D_n$. Согласно сделанному ранее предположению, $\bigcup D_n$

плотно в H_A. Поэтому A_p также является расширением по Фридрихсу самого оператора A'_p, определенного на D'. Неравенство (5) из введения доказано. Оно может обратиться в равенство тогда и только тогда, когда $AP=PA$. Доказательство этого утверждения не отличается от доказательства аналогичного утверждения в теореме 2.

§ 4. Примеры

1. Пусть D — область n-мерного пространства; $L_2(D)$ — пространство функций с суммируемым квадратом по лебеговой мере в D; A — самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(D)$; A' — сужение A на множество бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вместе со всеми производными в окрестности границы D; A_0 — расширение по Фридрихсу A'.

Если оператор e^{-tA} является ядерным, то тем же свойством обладает e^{-tA_0} и $\operatorname{Sp} e^{-tA_0} \leqslant \operatorname{Sp} e^{-tA}$ (получается из теоремы 3 при $P=E$). Пусть, в частности, $A=-\frac{d^2}{dx^2}+2i\alpha\frac{d}{dx}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, и граничные условия являются периодическими. В этом случае $A_0=-\frac{d^2}{dx^2}+2i\alpha\frac{d}{dx}$, но граничные условия нулевые. Имеем

$$\operatorname{Sp} e^{-tA}=\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-t(n^2-2\alpha n)}=\theta_3\left(\frac{\alpha t}{\pi i}\middle|\frac{it}{\pi}\right),$$

$$\operatorname{Sp} e^{-tA_0}=\sum_{1}^{\infty} e^{-t\left(\frac{n^2}{4}-\alpha^2\right)}=e^{t\alpha^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\theta_3\left(0\middle|\frac{it}{4\pi}\right)-1\right)\right].$$

Отсюда $\frac{1}{2}\left(1+\theta_3\left(0\middle|\frac{it}{4\pi}\right)\right)\leqslant e^{-t\alpha^2}\theta_3\left(\frac{\alpha t}{\pi i}\middle|\frac{it}{\pi}\right)$, где $\theta_3(z|\tau)$ — θ-функция Якоби.

2. Пусть A — эрмитов положительный оператор в n-мерном пространстве H, и пусть P_k — семейство ортогональных проекторов, $\sum P_k=mE$. Пусть далее $\psi(x)=e^{-\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ — выпуклая вниз функция. Тогда

$$(\det\psi(A))^m \leqslant \Pi \det\psi(A_k), \tag{4.1}$$

где $A_k=P_kAP_k$ — оператор в пространстве P_kH.

Если функция $\varphi(x)$ выпукла вверх, то неравенство (4.1) заменяется на обратное; если $\varphi(x)$ строго выпукла, то неравенство (4.1) обращается в равенство тогда и только тогда, когда все операторы P_k коммутируют с A. В случае, когда операторы P_k образуют разложение единицы и $\psi(x)\equiv x$, неравенство (4.1) превращается в хорошо известное неравенство Сасса, доказательство которого, отличное от предлагаемого, можно найти в [3].

Доказательство состоит в применении теоремы 1 к оператору $\varphi(A)=\ln\psi(A)$:

$$\operatorname{Sp}(P_k\ln\psi(A)\cdot P_k)\leqslant \operatorname{Sp}(\ln\psi(P_kAP_k)).$$

Суммируя по k, получаем

$$m \operatorname{Sp} \ln \psi(A) \leqslant \sum \operatorname{Sp} (\ln \psi (P_k A P_k)).$$

Потенцируя, получаем неравенство (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств.— ДАН СССР, 1943, т. 41, № 9, с. 373—375.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1959.

Глава V

ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ КВАНТОВАНИЯ[1])

Введение

Согласно общепринятому мнению, квантование — это алгоритм, с помощью которого классической динамической системе сопоставляется квантовая. При этом требуется, чтобы в пределе при $h \longrightarrow 0$, где h — планковская постоянная, квантовая динамическая система переходила в соответствующую классическую. Это требование называется принципом соответствия. Совершенно очевидно, что квантований, подчиненных принципу соответствия, существует много: квантовое описание физического явления более детально, чем классическое, поэтому существуют явления, различие между которыми улавливается их квантовым описанием, но не улавливается классическим.

Со времен, когда было впервые написано уравнение Шредингера, хорошо известен следующий интуитивный способ квантования классических динамических систем с плоским фазовым пространством. Если система имеет n степеней свободы, ее фазовое пространство является вещественным линейным пространством $\mathcal{R}^{2n}$ с размерностью $2n$; наблюдаемые величины являются функциями $f(p, q)$, p, $q \in \mathcal{R}^{2n}$, $p=(p_1 \ldots p_n)$, $q=(q_1 \ldots q_n)$, где p_l, q_l — импульсы и координаты. Гильбертово пространство состояний соответствующей квантовой системы является пространством функций $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, n вещественных переменных с суммируемым квадратом. Классическим импульсам и координатам p_k, q_k сопоставляются операторы в $L^2(\mathcal{R}^n)$ $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$ с помощью формул

$$(\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x), \quad (\hat{p}_k f)(x) = \frac{h}{i} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{1}$$

Произвольной наблюдаемой величине $f(p, q)$ ставится в соответствие «квантовая наблюдаемая» — оператор $f(\hat{p}, \hat{q})$, получаемый «подстановкой в $f(p, q)$ вместо вещественных переменных p_l, q_l операторов $\hat{p}_l$, $\hat{q}_l$». Однако операторы $\hat{p}_i$, $\hat{q}_l$ не коммутируют между собой поэтому такой алгоритм имеет приемлемый смысл, лишь если аналитическое выражение для f не содержит произве-

[1]) Опубликовано в Commun. Math. Phys. 1975, v. 40, p. 153—174.

дений вида $p_i q_i$. Для случая произвольных $f(p, q)$ упомянутый алгоритм должен быть уточнен. Одно из таких уточнений, обладающее рядом замечательных свойств, принадлежит Вейлю [1].

Как быть, однако, если фазовое пространство классической динамической системы не является плоским? В этом случае в нем нет естественных координат p_i, q_i, и все способы квантования, основанные на особых свойствах этих координат, оказываются несостоятельными. Механические системы, фазовое пространство которых не является плоским, встречаются чаще, чем, по-видимому, принято думать. Простейшим примером служит твердое тело с закрепленной точкой (фазовым пространством служит двумерная сфера). В последние годы становится все более очевидной актуальность таких систем в теории поля.

В настоящей статье делается попытка разобраться в математической природе алгоритмов квантования. Предлагается общее определение квантования произвольной механической системы. Затем это общее определение иллюстрируется примерами систем с одной степенью свободы, когда фазовым пространством служат плоскость Лобачевского и сфера.

§ 1. Классическая механика

1. Определение. Классической механикой в общем случае мы будем называть пару $(\mathfrak{M}, \omega)$, где $\mathfrak{M}$ — некоторое дифференцируемое многообразие и ω — кососимметрическое тензорное поле на нем. Поле ω должно в локальных координатах иметь компоненты $\omega^{ij}(x)$, удовлетворяющие условию [1])

$$\omega^{\gamma k}\frac{\partial\omega^{\alpha\beta}}{\partial x^k}+\omega^{\beta k}\frac{\partial\omega^{\gamma\alpha}}{\partial x^k}+\omega^{\alpha k}\frac{\partial\omega^{\beta\gamma}}{\partial x^k}=0. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$ множество дифференцируемых функций на $\mathfrak{M}$. Множество $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$ является коммутативной и ассоциативной алгеброй относительно обычных сложения и умножения и алгеброй Ли относительно скобки Пуассона

$$[f, g]=\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{1.2}$$

То обстоятельство, что скобка Пуассона (1.2) определяет алгебру Ли, т. е. что справедливо тождество Якоби

$$[f_1, [f_2, f_3]]+[f_3, [f_1, f_2]]+[f_2, [f_3, f_1]]=0, \tag{1.3}$$

эквивалентно условию (1.1). Это обстоятельство легко проверяется прямым вычислением. Отсюда, кстати, следует независимость условия (1.1) от выбора координат.

[1]) Здесь и ниже в аналогичных ситуациях имеются в виду тензорные обозначения. В частности, по дважды повторяемому индексу предполагается суммирование.

В случае, если $\det\|\omega^{ij}\| \neq 0$ при каждом $x \in \mathfrak{M}$, существует обратная матрица $\|\omega_{ij}(x)\|$. Условие (1.1) через элементы матрицы ω_{ij} записывается в виде

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} = 0. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что внешняя форма $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ является замкнутой. Обратно, если на многообразии $\mathfrak{M}$ задана невырожденная внешняя форма $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, то ее компоненты ω_{ij} удовлетворяют соотношению (1.4), а компоненты обратной матрицы ω^{ij} — соотношению (1.1). Следовательно, в этом случае $(\mathfrak{M}, \omega)$, где ω — тензорное поле с компонентами ω^{ij}, является классической механикой.

2. Отображения классических механик. Пусть $(\mathfrak{M}_1, \omega_1)$, $(\mathfrak{M}_2, \omega_2)$ — классические механики с невырожденными тензорными полями $\omega_1^{\alpha\beta}$, $\omega_2^{\alpha\beta}$. Отображением φ: $(\mathfrak{M}_1, \omega_1) \to (\mathfrak{M}_2, \omega_2)$ назовем диффеоморфизм φ: $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ такой, что $\varphi^*(\omega_2) = \omega_1$. Подробнее: если $y = \varphi(x) \in \mathfrak{M}_2$, $y^i = \varphi^i(x)$ — локальные координаты точки y, а x^i — локальные координаты точки $x \in \mathfrak{M}_1$, то

$$\omega_{1,\,\alpha\beta}(x) = \omega_{2,\,ij}(\varphi(x)) \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta}.$$

3. Примеры.

1) $\mathfrak{M} = \mathscr{R}^2$ — плоскость с координатами p, q; и пусть $\omega^{12} = -\omega^{21} = 1$,

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}; \tag{1.5}$$

2) $\mathfrak{M} = K^1 \times \mathscr{R}^1$ — двумерный цилиндр. Координаты обозначим через p, q, причем $p \in \mathscr{R}^1$, $q \in K^1$, т. е. p — произвольное вещественное число ($-\infty < p < \infty$), q — точка окружности ($0 \leqslant q < 2\pi$). Дифференцируемые функции на $\mathfrak{M}$ периодичны по q с периодом 2π. Тензор ω и скобка Пуассона имеют прежний вид;

3) $\mathfrak{M} = K^1 \times K^1$ — двумерный тор. Координаты p, q пробегают независимым образом окружность; $0 \leqslant p < 2\pi$, $0 \leqslant q < 2\pi$. Дифференцируемые функции на $\mathfrak{M}$ периодичны по каждому из переменных с периодом 2π. Скобка Пуассона имеет вид (1.5);

4) $\mathfrak{M} = S^2$ — двумерная сфера. Инвариантная относительно вращений мера на S имеет вид $d\mu = r^2 \sin\theta \, d\varphi \wedge d\theta$, где r — радиус сферы.

Это же выражение служит нужной 2-формой. Поэтому скобка Пуассона в полярных координатах имеет вид

$$[f, g] = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right). \tag{1.6}$$

В дальнейшем нам будет удобнее вместо полярных координат на S^2 использовать комплексные.

Эти координаты вводятся с помощью стереографической проекции:

$$|z| = 2r \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad \arg z = \varphi.$$

Внешняя форма ω в этих координатах имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2i}\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2} dz \wedge d\bar{z}; \tag{1.7}$$

скобка Пуассона:

$$[f, g] = 2i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right); \tag{1.8}$$

5) $\mathfrak{M} = \mathscr{L}^2$ — плоскость Лобачевского. Воспользуемся моделью Пуанкаре для плоскости Лобачевского: плоскость Лобачевского отождествим с кругом в комплексной плоскости радиуса $2r$ и центром в нуле. На плоскости Лобачевского имеется инвариантная относительно движений внешняя форма ω, являющаяся элементом инвариантного объема:

$$\omega = \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2} dz \wedge d\bar{z}. \tag{1.9}$$

Соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$[f, g] = 2i\left(1 - \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right); \tag{1.10}$$

6) Пусть G — произвольная алгебра Ли, C_k^{ij} — ее структурные константы, $i, j, k = 1, \ldots, \nu$. В качестве $\mathfrak{M}$ рассмотрим ν-мерное евклидово пространство $\mathscr{R}^\nu$, сопряженное к G, и положим

$$\omega^{ij} = C_k^{ij} x^k. \tag{1.11}$$

Свойство (1.1) следует из тождества Якоби для G. Этот пример тесно связан с примерами 1), 4), 5). (Пример 6 ранее рассматривался в [2]);

6_1) рассмотрим в качестве G алгебру Гейзенберга — Вейля. Пусть e_1, e_2, e_0 — базис в G со стандартными соотношениями $[e_1, e_2] = e_0$, $[e_1, e_0] = [e_2, e_0] = 0$. Координаты в $\mathscr{R}^3$, соответствующие e_0, e_1, e_2, обозначим через ε, p, q. В этом случае $\omega^{12} = -\omega^{21} = \varepsilon$; скобка Пуассона имеет классический вид:

$$[f, g] = \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right);$$

6_2) G — алгебра Ли группы $SO(3)$. Если выбрать в G стандартный базис e_1, e_2, e_3 с соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_3, e_1] = e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$, то скобка Пуассона приобретает вид

$$[f, g] = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g}{\partial x^2} & \dfrac{\partial g}{\partial x^3} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Введем полярные координаты $x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x^3 = r\cos\theta$. Совершая замену переменных, получаем из (1.12)

$$[f, g] = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right).$$

Таким образом, для функций f при фиксированном r скобка Пуассона (1.12) превращается с точностью до множителя в (1.6).

Аналогичным образом связаны скобки Пуассона на пространстве, двойственном алгебре Ли 3-мерной группы Лоренца, и на плоскости Лобачевского.

§ 2. Квантование

1. Общее определение. Квантованием классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$ называется ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ с инволюцией, обладающая свойствами:

1) существует семейство A_h ассоциативных алгебр с инволюцией таких, что:

1_1) индекс h пробегает множество E на положительной части вещественной оси, имеющее 0 предельной точкой (0 не входит в E),

1_2) алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из функций $f(h)$, принимающих значения в A_h. Инволюция и умножение в $\mathfrak{A}$ обычным образом связаны с инволюцией и умножением в A_h. ($f^{\Sigma}(h)=(f(h))^{\sigma}$, где Σ, σ — инволюция в $\mathfrak{A}$ и A_h соответственно; $(f_1 \circledast f_2)(h)=f_1(h)*f_2(h)$, где $\circledast$, $*$ — умножение в $\mathfrak{A}$ и A_h соответственно.)

В дальнейшем инволюция и умножение в алгебрах $\mathfrak{A}$ и A_h обозначаются одними и теми же символами;

2) Существует гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$ дифференцируемых функций на $\mathfrak{M}$ с обычными операциями сложения и умножения. Гомоморфизм должен обладать следующими свойствами:

а) для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$ найдется такая функция $f(x) \in \varphi(\mathfrak{A})$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$,

б) $\varphi\left(\frac{1}{h}(f*g-g*f)\right)=i\,[\varphi(f_1),\ \varphi(f_2)]$, $i=\sqrt{-1}$,

где $*$ означает умножение в $\mathfrak{A}$ и $[\cdot, \cdot]$ — скобку Пуассона в $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$,

в) $\varphi(f^{\sigma})=\overline{\varphi(f)}$, где $f \to f^{\sigma}$ означает инволюцию в $\mathfrak{A}$ и черта — комплексное сопряжение.

2. Специальное квантование. Так будем называть квантование, обладающее дополнительными свойствами:

3) алгебра A_h состоит из дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in \mathfrak{M}$;

4) алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из функций $f(x, h)$, $f \in A_h$ при фиксированном h;

5) гомоморфизм φ: $\mathfrak{A} \to \mathcal{A}(\mathfrak{M})$ задается формулой

$$\varphi(f)=\lim_{h \to 0} f(h, x).$$

Содержательная теория имеется в настоящее время лишь для специальных квантований (см. [3, 4])[1]). Все изученные до настоя-

[1]) В [7] рассмотрены два изолированных примера квантований, не являющихся специальными. Многообразие $\mathfrak{M}$ в первом случае является двумерным цилиндром, во втором — двумерным тором. В естественных локальных координатах скобка Пуассона имеет в обоих случаях вид (1.5).

щего момента специальные квантования обладают еще следующими свойствами:

6) алгебра A_h обладает единицей, причем единицей служит функция $f_0(h, x) \equiv 1$;

7) алгебра A_h является алгеброй со следом, причем

$$\mathrm{Sp}\, f = c \int f(x)\, d\mu(x), \tag{2.1}$$

где $d\mu(x)$ — некоторая мера на $\mathfrak{M}$ и c — неопределенный множитель[1]).

Отметим, что если тензорное поле $\omega^{ij}(x)$ не вырождено, т. е. если на $\mathfrak{M}$ существует внешняя замкнутая форма второй степени $\omega = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, то на $\mathfrak{M}$ существует естественная мера $d\mu(x) = c\omega^{\frac{n}{2}}$.

3. **Функтор квантования.** Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — алгебры, устроенные аналогично квантованиям: существуют алгебры $B_h^{(1)}$ $(h \in E_1)$, $B_h^{(2)}$ $(h \in E_2)$, такие, что $\mathfrak{B}_i$ состоит из функций $f(h)$, $h \in E_i$, принимающих значения в $B_h^{(i)}$. Гомоморфизм $\psi\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ алгебр с такой структурой будем называть допустимым, если он порожден гомоморфизмами ψ_h алгебр $B_h^{(i)}$: $(\psi f)(h) = \psi_h f(h)$. (Для того чтобы существовал допустимый гомоморфизм $\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, необходимо, чтобы $E_1 \subset E_2$.) Аналогично определим допустимый изоморфизм алгебр $\mathfrak{B}_i$.

Фиксируем множество классических механик $\mathscr{E}$ и категорию $\mathscr{K}$ отображений элементов $\mathscr{E}$. Пусть каждой классической механике $(\mathfrak{M}, \omega)$ сопоставлено квантование $\mathfrak{A}$.

Сопоставление $(\mathfrak{M}, \omega) \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ будем называть функтором квантования, если для любой пары классических механик $(\mathfrak{M}_i, \omega_i) \in \mathscr{E}$, $i = 1, 2$, связанных соотношением $(\mathfrak{M}_2, \omega_2) = \Phi(\mathfrak{M}_1, \omega_1)$, $\Phi \in \mathscr{K}_1$, найдется такой допустимый гомоморфизм $\tilde{\Phi}$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} (\mathfrak{M}_1, \omega_1) & \rightsquigarrow & \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{A}(\mathfrak{M}_1) \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & {\scriptstyle\tilde{\Phi}}\uparrow & & {\scriptstyle\Phi^*}\uparrow \\ (\mathfrak{M}_2, \omega_2) & \rightsquigarrow & \mathfrak{A}_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & \mathcal{A}(\mathfrak{M}_2) \end{array} \tag{2.2}$$

где φ_1, φ_2 — гомоморфизмы, участвующие в определении квантования, и Φ^* — отображение функций, сопряженное диффеоморфизму Φ.

Функтор квантования будем обозначать Q. Если сопоставление $(\mathfrak{M}, \omega) \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ является функтором, то, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем писать $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$.

---

[1]) Следом называется линейный функционал $\mathrm{Sp}\, f$, определенный на некотором подмножестве $\hat{A}_h < A_h$. Множества $\tilde{A}_h$ и $\mathrm{Sp}\, f$ должны обладать следующими свойствами:

1) если $f_1 * f_2 \in \tilde{A}_h$, то $f_2 * f_1 \in \tilde{A}_h$;

2) если $f_1 * f_2 \in \tilde{A}_h$, то $\mathrm{Sp}\,(f_1 * f_2) = \mathrm{Sp}\,(f_2 * f_1)$.

Ясно, что функционал $\mathrm{Sp}\, f$ определен с точностью до множителя.

Функтор квантования Q будем называть специальным, если все квантования $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$ являются специальными.

4. Естественность. Для объектов, связанных со специальными квантованиями, возникает важное понятие естественности. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторая категория отображений классических механик, и $(\mathfrak{M}_i, \omega_i)$, $\mathfrak{A}_i$, $i=1, 2$, — классические механики и их квантования.

Допустимый гомоморфизм $\psi: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ называется естественным по отношению к $\mathcal{K}$, если существует отображение $\Phi \in \mathcal{K}$, $\Phi(\mathfrak{M}_2, \omega_2) = (\mathfrak{M}_1, \omega_1)$ такое, что

$$(\psi f)(h, x) = f(h, \varphi(x)), \quad x \in \mathfrak{M}_2. \tag{2.3}$$

Соотношение (2.3) означает, что при фиксированном h гомоморфизм ψ является отображением функций, сопряженным диффеоморфизму φ. Допуская некоторую вольность обозначения, будем писать $\psi = \varphi^*$.

Специальный функтор квантования Q назовем естественным по отношению к $\mathcal{K}$, если в диаграмме (2.2) $\tilde{\Phi} = \Phi^*$.

Специальное квантование $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$, где Q — специальный функтор, будем называть естественным по отношению к категории $\mathcal{K}$, если этим свойством обладает функтор Q.

Замечание. Можно показать (см. [7]), что не существует функтора квантования Q, естественного по отношению к категории всех отображений классических механик.

5. Группы движений. Пусть $(\mathfrak{M}, \omega)$ — классическая механика и G — группа преобразований $\mathfrak{M}$, входящая в некоторую категорию $\mathcal{K}$ отображений классических механик. Последнее обстоятельство, в частности, означает, что преобразование τ_g в $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$:

$$(\tau_g f)(x) = f(gx) \tag{2.4}$$

является автоморфизмом алгебры Ли скобок Пуассона. Пусть $\mathfrak{A}$ — естественное относительно $\mathcal{K}$ квантование механики $(\mathfrak{M}, \omega)$. Из приведенных ранее определений немедленно следует, что преобразование (2.4) является автоморфизмом всех алгебр A_h.

6. Эквивалентность квантований. Пусть $\mathfrak{A}$ — квантование классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$; E — множество значений h; S — некоторое взаимно однозначное преобразование E. Отображение S порождает автоморфизм S^* алгебры $\mathfrak{A}$: $(S^* f)(h) = f(Sh)$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — квантования одной и той же классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$. Квантования $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ назовем эквивалентными, если

1) существует такой изоморфизм $\Phi: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ и такой изоморфизм $S^*: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$ описанного выше типа, что изоморфизм $\Phi S^*: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ является допустимым; 2) коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}_1 \arrow[rr, "\Phi S^*"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & \mathfrak{A}_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & \mathcal{A}(\mathfrak{M}) & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

где φ_i — гомоморфизмы, участвующие в определении квантования.

В случае, если на $\mathfrak{M}$ действует группа преобразований G, входящая в категорию, относительно которой квантования $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ естественны, вводится понятие естественной эквивалентности: в дополнение к (2.5) должна быть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\Phi S^*} & \mathfrak{A}_2 \\ {\scriptstyle \tau_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_g} \\ \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\Phi S^*} & \mathfrak{A}_2 \end{array} \tag{2.6}$$

где τ_g — изоморфизм вида (2.4).

§ 3. Переполненные системы векторов [1])

В настоящее время квантование построено для классических механик, фазовым пространством которых служат так называемые комплексные симметрические пространства. К их числу относятся плоскость Лобачевского и двумерная сфера. Во всех этих случаях квантование строится с помощью общего приема, который мы изложим здесь в абстрактном виде.

1. Основные определения. Пусть H — гильбертово пространство, M — некоторое множество с мерой $d\alpha$. Система векторов $e_\alpha \in H$, $\alpha \in M$, называется переполненной, если для любых $f, g \in H$ справедливо тождество Парсеваля

$$(f, g) = \int (f, e_\alpha)(e_\alpha, g)\, d\alpha. \tag{3.1}$$

Обозначим через $d\mu(\alpha)$ меру, абсолютно непрерывную по $d\alpha$:

$$d\mu(\alpha) = (e_\alpha, e_\alpha)\, d\alpha.$$

Заметим, что переполненная система порождает вложение H в пространство $L^2(M)$ по формуле

$$f \mapsto f(\alpha) = (f, e_\alpha); \tag{3.2}$$

начиная с этого места, будем считать, что пространство H реализовано как подпространство $L^2(M)$.

Из (3.2), в частности, следует, что

$$e_\alpha(\beta) = (e_\alpha, e_\beta) = \overline{(e_\beta, e_\alpha)} = \overline{e_\beta(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Пусть $\hat{P}_\alpha$ — ортогональный проектор на e_α. Ковариантным символом оператора $\hat{A}$ в H называется функция

$$A(\alpha) = \mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{P}_\alpha) = \frac{(\hat{A}e_\alpha, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)}. \tag{3.4}$$

Контравариантным символом оператора $\hat{A}$ называется такая функция $\mathring{A}(\alpha)$, с помощью которой оператор $\hat{A}$ представим в виде

$$\hat{A} = \int \mathring{A}(\alpha)\, \hat{P}_\alpha\, d\mu(\alpha). \tag{3.5}$$

---

[1]) В этом параграфе кратко излагается содержание работы [5].

Из определений ясно, что ковариантный символ единственным образом определен для любого оператора, в область определения которого входят e_α при всех $\alpha \in M$, в частности для любого ограниченного оператора. Возможна ситуация, когда различные операторы имеют один и тот же ковариантный символ. Ниже мы увидим, что в интересующих нас случаях это не так: между операторами и ковариантными символами существует взаимно однозначное соответствие. Что касается контравариантных символов, то они определены, вообще говоря, не для всех ограниченных операторов и не всегда единственным образом, но по контравариантному символу оператор всегда однозначно восстанавливается.

Отметим, что из (3.5) легко следует важная интерпретация контравариантных символов. Обозначим через $\hat{B}$ оператор в $L^2(M)$, состоящий в умножении на $\mathring{A}(\alpha)$:

$$(\hat{B}f)(\alpha) = \mathring{A}(\alpha) f(\alpha),$$

через T — ортогональный проектор из $L^2(M)$ на H. Формула (3.5) эквивалентна следующей:

$$\hat{A} = T\hat{B}T. \tag{3.6}$$

Важность совместного рассмотрения ко- и контравариантных символов состоит в том, что с их помощью возможно получение двусторонних оценок спектральных характеристик оператора $\hat{A}$. Приведем важнейшие относящиеся сюда результаты.

I. Пусть $D(\hat{A})$ — множество Хопфа оператора $\hat{A}$, т. е. множество на комплексной плоскости, состоящее из всех чисел вида $(\hat{A}f, f)$, $\|f\| = 1$; $D(A)$ — множество значений ковариантного символа A; $D(\mathring{A})$ — выпуклая оболочка множества значений контравариантного символа $\mathring{A}$. Справедливы включения

$$D(A) \subset D(\hat{A}) \subset D(\mathring{A}). \tag{3.7}$$

В случае, если оператор $\hat{A}$ самосопряжен, из (3.7), в частности, вытекает оценка его спектра (ковариантный символ самосопряженного оператора вещественен), и если у него существует какой-нибудь контравариантный символ $\mathring{A}$, то существует и вещественный контравариантный символ, который является $\operatorname{Re}\mathring{A}$. Для самосопряженного оператора из (3.7) следует также, что

$$\sup |A(\alpha)| \leqslant \|\hat{A}\| \leqslant \sup |\mathring{A}(\alpha)|.$$

II. Пусть $\varphi(t)$ — выпуклая вниз функция вещественного переменного; тогда

$$\int \varphi(A(\alpha))\, d\mu(\alpha) \leqslant \operatorname{Sp} \varphi(\hat{A}) \leqslant \int \varphi(\mathring{A}(\alpha))\, d\mu(\alpha). \tag{3.8}$$

В случае, если оператор $\hat{A}$ полуограничен снизу, из сходимости интеграла в правой части (3.8) следует существование $\operatorname{Sp}\varphi(\hat{A})$

и из существования $\operatorname{Sp}\varphi(\hat{A})$ — сходимость интегралов в левой части (3.8).

III. Если контравариантный символ самосопряженного оператора полуограничен снизу, то

$$e^{-t\hat{A}} = \lim_{n\to\infty}\left(Te^{-\frac{t}{n}\hat{B}}T\right)^n, \tag{3.9}$$

где B и T — те же операторы, что и в (3.6).

2. Алгебра ковариантных символов. Пусть $\hat{A}$ — ограниченный оператор в H, $A(\alpha)$ — его ковариантный символ. Покажем, что действие оператора на вектор определяется формулой

$$(\hat{A}f)(\alpha) = \int f(\beta)\,A(\beta,\ \alpha)\frac{(e_\beta,\ e_\alpha)}{(e_\beta,\ e_\beta)}\,d\mu(\beta), \tag{3.10}$$

где

$$A(\alpha,\ \beta) = \frac{(\hat{A}e_\alpha,\ e_\beta)}{(e_\alpha,\ e_\beta)} \tag{3.11}$$

продолжение функции $A(\alpha)$ на $M\times M$. Используя многократно (3.1), имеем

$$(\hat{A}f)(\alpha) = (\hat{A}f,\ e_\alpha) = (f,\ \hat{A}^*e_\alpha) = \int (f,\ e_\beta)(e_\beta,\ \hat{A}^*e_\alpha)\,d\beta =$$
$$= \int (\hat{A}e_\beta,\ e_\alpha)\,f(\beta)\,d\beta = \int f(\beta)\,A(\beta,\ \alpha)\,\frac{(e_\beta,\ e_\alpha)}{(e_\beta,\ e_\beta)}\,d\mu(\beta).$$

Из (3.11) немедленно следует, что если $\hat{A} = \hat{A}_1\cdot\hat{A}_2$, A, A_1, A_2 — контравариантные символы соответствующих операторов, то

$$A(\alpha) = \int A_1(\gamma,\ \alpha)\,A_2(\alpha,\ \gamma)\,\frac{(e_\alpha,\ e_\gamma)(e_\gamma,\ e_\alpha)}{(e_\alpha,\ e_\alpha)(e_\gamma,\ e_\gamma)}\,d\mu(\gamma). \tag{3.12}$$

Алгебра с законом умножения (3.12), состоящая из символов ограниченных операторов, является основой дальнейших конструкций. Роль множества M всегда в дальнейшем играет многообразие $\mathfrak{M}$, служащее фазовым пространством классической механики.

Из формулы (3.10) следует, что оператор $\hat{A}$ однозначно определяется функцией $A(\beta,\ \alpha)$, являющейся продолжением $A(\alpha)$ на $M\times M$. Вообще говоря, возможно, что две разные функции $A_1(\beta,\ \alpha)$, $A_2(\beta,\ \alpha)$ совпадают при $\beta=\alpha$, т. е. что два различных оператора имеют один и тот же ковариантный символ. В тех случаях, которые нас в дальнейшем интересуют, этого не происходит: функция $A(\beta,\ \alpha)$ оказывается аналитическим продолжением $A(\alpha)$ и поэтому однозначно определяется по $A(\alpha)$.

Укажем формулу, связывающую ко- и контравариантные символы одного и того же оператора. Ковариантным символом оператора $\hat{P}_\beta$ проектирования на вектор e_β служит $\dfrac{(\hat{P}_\beta e_\alpha,\ e_\alpha)}{(e_\alpha,\ e_\alpha)} =$

$= \dfrac{(e_\alpha, e_\beta)(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\beta, e_\beta)}$. Поэтому из (3.5) следует, что

$$A(\alpha) = \int \mathring{A}(\beta) \frac{(e_\alpha, e_\beta)(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\beta, e_\beta)} d\mu(\beta). \tag{3.13}$$

Отметим также формулу для следа

$$\operatorname{Sp} \hat{A} = \int A(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \int \mathring{A}(\alpha)\, d\mu(\alpha) \tag{3.14}$$

и формулу для следа произведения

$$\operatorname{Sp} \hat{A}\hat{B} = \int A(\alpha)\, \mathring{B}(\alpha)\, d\mu(\alpha). \tag{3.15}$$

§ 4. Квантование на плоскости Лобачевского

1. Пространство $\mathcal{F}_h$. Мы воспользуемся моделью Пуанкаре, согласно которой плоскость Лобачевского с кривизной, равной 2, отождествляется с единичным кругом K в C^1. Обозначим через $\mathcal{F}_h$ пространство аналитических функций в K со скалярным произведением

$$(f, g) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int f(z)\, \overline{g}(z)\, (1 - z\bar{z})^{1/h}\, d\mu(z, \bar{z}), \tag{4.1}$$

где $d\mu(z, \bar{z}) = \dfrac{1}{\pi i} \dfrac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$ — инвариантная мера на плоскости Лобачевского. $\Big($Множитель $\dfrac{1}{h} - 1$ связан с нормировочным условием $(f_0, f_0) = 1$, где $f_0(z) \equiv 1.\Big)$ Пусть f_k — ортонормированный базис в $\mathcal{F}_h$. Рассмотрим функцию

$$L_h(z, \bar{v}) = \sum f_k(z)\, \overline{f_k(v)}. \tag{4.2}$$

Ряд (4.2) сходится абсолютно и равномерно в любой области вида $|z| \leqslant r < 1$, $|v| \leqslant r < 1$. Доказательство этого факта может быть получено с помощью хорошо известного приема, предложенного Бергманом (см. [6]).

Рассмотрим пространством $\mathcal{L}_h^2$, состоящее из всех измеримых функций в K, суммируемых с квадратом по мере $\left(\dfrac{1}{h} - 1\right) \times$ $\times\, (1 - z\bar{z})^{\frac{1}{h}}\, d\mu(z, \bar{z})$. Очевидно, что $\mathcal{F}_h \subset \mathcal{L}_h^2$ и что функция $L_h(z, \bar{v})$ служит ядром ортогонального проектора из $\mathcal{L}_h^2$ на $\mathcal{F}_h$. Поэтому $L_h(z, \bar{v})$ не зависит от выбора ортонормированной системы $f_k(z)$.

В $\mathcal{F}_h$ существует ортонормированная система, состоящая из функций

$$f_k(z) = \left(\frac{\frac{1}{h} \cdots \left(\frac{1}{h} - 1 + k\right)}{k!} \right)^{1/2} z^k.$$

Используя эти функции, получаем

$$L_h(z, \bar{v}) = (1 - z\bar{v})^{-\frac{1}{h}}. \qquad (4.3)$$

Обозначим $L_h(z, \bar{v})$ как функцию z при фиксированном $\bar{v}$ через $\Phi_{\bar{v}}(z)$. Из (4.2) легко следует, что $\Phi_{\bar{v}}(z) \in \mathcal{F}_n$ и что для любой функции $f \in \mathcal{F}_h$

$$(f, \Phi_{\bar{z}}) = f(z). \qquad (4.4)$$

Формула (4.4) означает, что семейство функций $\Phi_{\bar{z}}$ образует переполненную систему в $\mathcal{F}_h$. Эта система изучалась ранее в [8].

2. Алгебра ковариантных символов. Пусть $\hat{A}$ — ограниченный линейный оператор в $\mathcal{F}_h$. Ковариантный символ этого оператора, построенный с помощью векторов $\Phi_{\bar{z}}$, обозначим $A(z, \bar{z})$. Заметим, что функция

$$A(z, \bar{v}) = \frac{(\hat{A}\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})}{(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})} \qquad (4.5)$$

аналитически зависит от z и $\bar{v}$ и совпадает с $A(z, \bar{z})$ при $v = z$. Следовательно, $A(z, \bar{z})$ является аналитической функцией переменных $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ и $A(z, \bar{v})$ служит аналитическим продолжением $A(z, \bar{z})$ в комплексную область. Отсюда вытекает, что между операторами и их ковариантными символами существует взаимно однозначное соответствие.

В частности, если $A(z, \bar{z}) = a = \text{const}$, то соответствующий оператор равен $\hat{A} = a\hat{E}$, где $\hat{E}$ — единичный оператор в $\mathcal{F}_h$. Специализация общих формул (3.10), (3.12), (3.15) на рассматриваемый случай дает

$$(\hat{A}f)(z) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int A(z, \bar{v}) f(v) \left(\frac{1 - v\bar{v}}{1 - z\bar{v}}\right)^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}); \qquad (4.6)$$

если $\hat{A} = \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$, то

$$A(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int A_1(z, \bar{v}) A_2(v, \bar{z}) \left[\frac{(1 - z\bar{z})(1 - v\bar{v})}{(1 - z\bar{v})(1 - v\bar{z})}\right]^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}), \qquad (4.7)$$

$$A(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int \hat{A}(v, \bar{v}) \left[\frac{(1 - z\bar{z})(1 - v\bar{v})}{(1 - z\bar{v})(1 - v\bar{z})}\right]^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}). \qquad (4.8)$$

3. Принцип соответствия. Рассмотрим в пространстве непрерывно дифференцируемых функций в единичном круге оператор T_h:

$$(T_h f)(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int f(v, \bar{v}) \left[\frac{(1 - z\bar{z})(1 - v\bar{v})}{(1 - z\bar{v})(1 - v\bar{z})}\right]^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}). \qquad (4.9)$$

Найдем асимптотику функции $\varphi_h(z, \bar{z}) = (T_h f)(z, \bar{z})$ при $h \to 0$.

Вначале рассмотрим случай $z = 0$:

$$(T_h f)(0, 0) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int f(v, \bar{v}) (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu(v, \bar{v}).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{h} - 1\right) \int (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu(v, \bar{v}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int_0^1 (1 - x)^{\frac{1}{h} - 2} \, dx = 1.$$

Поэтому

$(T_h f)(0, 0) = f(0, 0) + (T_h f_1)(0, 0)$, где $f_1(v, \bar{v}) = f(v, \bar{v}) - f(0, 0)$.

Функция f_1 непрерывна и $f_1(0, 0) = 0$. Рассмотрим число $\varepsilon > 0$ и разобьем интеграл (4.9), заменив в нем f на f_1, в сумму

$$(T_h f_1)(0, 0) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{v\bar{v} < \varepsilon} f_1(v, \bar{v}) (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu(v, \bar{v}) +$$
$$+ \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{\varepsilon \leqslant v\bar{v} < 1} f_1(v, \bar{v}) (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu(v, \bar{v}).$$

Оценка первого интеграла:

$$\left| \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{v\bar{v} < \varepsilon} f_1 (1 - v, \bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{v\bar{v} < \varepsilon} |f_1| \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{|v| < 1} (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu = \max_{v\bar{v} < \varepsilon} |f_1|.$$

Оценка второго интеграла:

$$\left| \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{\varepsilon \leqslant v\bar{v} < 1} f_1 (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} \, d\mu \right| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{h} - 2} \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int\limits_{|v| < 1} |f_1| \frac{dv \, d\bar{v}}{\pi}.$$

Очевидно, что если $\varepsilon > 0$, то $\lim\limits_{h \to 0} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{h} - 2} \left(\frac{1}{h} - 1\right) = 0$. Поэтому $\overline{\lim\limits_{h \to 0}} |(T_h f_1)(0, 0)| \leqslant \max\limits_{v\bar{v} < \varepsilon} |f_1|$, и в силу непрерывности f_1 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim\limits_{h \to 0}} |T_h f_1| = 0$. Так как, с другой стороны, $\overline{\lim\limits_{h \to 0}} |T_h f_1|$ не зависит от ε, отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{h \to 0}} |(T_h f_1)(0, 0)| = 0$; следовательно, существуют $\lim\limits_{h \to 0} (T_h f_1)(0, 0)$ и $\lim\limits_{h \to 0} (T_h f_1)(0, 0) = 0$.

Возвращаясь к функции f, получаем существование предела $\lim\limits_{h\to 0}(T_h f)(0, 0)$ и равенство

$$\lim_{h\to 0}(T_h f)(0, 0)=f(0, 0). \tag{4.10}$$

Произвольную непрерывно дифференцируемую функцию в K можно представить (неоднозначно) в виде

$$f(v, \bar{v})=f(0, 0)+vf_1(v, \bar{v})+\bar{v}f_2(v, \bar{v}),$$

где f_1, f_2 — непрерывные функции.

Заметим, что при $h<\varepsilon$

$$\left(\frac{1}{h}-1\right)\int vf_1(1-v\bar{v})^{\frac{1}{h}-2}\frac{dv\wedge d\bar{v}}{\pi i}=-\int f_1\frac{\partial}{\partial\bar{v}}(1-v\bar{v})^{\frac{1}{h}-1}\frac{dv\wedge d\bar{v}}{\pi i}=$$

$$=\int\frac{\partial f_1}{\partial\bar{v}}(1-v\bar{v})^{\frac{1}{h}+1}d\mu(v, \bar{v})=h\frac{\partial f_1}{\partial\bar{v}}\bigg|_{v=\bar{v}=0}+o(h)$$

$\left(\text{предыдущий результат применен к функции } \dfrac{\partial f_1}{\partial\bar{v}}\right)$. Аналогично

$$\left(\frac{1}{h}-1\right)\int\bar{v}f_2(1-\bar{v}v)^{\frac{1}{h}}d\mu(v, \bar{v})=h\frac{\partial f_2}{\partial v}\bigg|_{v=\bar{v}=0}+o(h).$$

Таким образом, окончательно

$$(T_h f)(0, 0)=f(0, 0)+h\left(\frac{\partial f_1}{\partial\bar{v}}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)\bigg|_{v=\bar{v}=0}+o(h)=f(0, 0)+$$

$$+h\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial\bar{v}}\bigg|_{v=\bar{v}=0}+o(h). \tag{4.11}$$

Перейдем к исследованию преобразования (4.9) при произвольном z. Совершим замену переменных

$$v=\frac{w-z}{1-\bar{z}w}. \tag{4.12}$$

Преобразование $v\longrightarrow w$ является движением в плоскости Лобачевского (отражением в некоторой точке). Поэтому мера $d\mu$ инвариантна относительно замены (4.12). В результате этой замены интеграл (4.9) приобретает вид

$$(T_h f)(z, \bar{z})=\left(\frac{1}{h}-1\right)\int\Phi(w, \bar{w})(1-w\bar{w})^{\frac{1}{h}}d\mu(w, \bar{w}), \tag{4.13}$$

где $\Phi(w, \bar{w})=f\left(\dfrac{w-z}{1-\bar{z}w}, \dfrac{\bar{w}-\bar{z}}{1-z\bar{w}}\right)$. Заметим теперь, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\bar{w}}\bigg|_{w=\bar{w}=0}=(1-z\bar{z})^2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}.$$

Оператор $\Delta=(1-z\bar{z})^2\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$ является оператором Лапласа — Бельтрами на плоскости Лобачевского.

Таким образом, применяя формулу (4.11), получаем асимптотическое разложение для $T_h f$:

$$(T_h f)(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) + h\Delta f(z, \bar{z}) + o(h). \tag{4.14}$$

Из формулы (4.14) следует принцип соответствия: полагая в (4.7) $A_1(z, \bar{v}) A_2(v, \bar{z}) = f(v, \bar{v})$, находим

$$A(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) + h\Delta f + o(h) = A_1(z, \bar{z}) A_2(z, \bar{z}) + \\ + h(1 - z\bar{z})^2 \frac{\partial A_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial A_2}{\partial z} + o(h).$$

Отсюда $\lim\limits_{h \to 0} A_1 * A_2 = A_1(z, \bar{z}) A_2(z, \bar{z})$ — первое требование принципа соответствия и $\lim \frac{1}{h}(A_1 * A_2 - A_2 * A_1) = (1 - z\bar{z})^2 \times \left(\frac{\partial A_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial A_2}{\partial \bar{z}} \right) = i[A_1, A_2]$ — второе требование.

4. Выражение оператора T_h через оператор Лапласа — Бельтрами. Оператор T_h очевидным образом перестановочен с преобразованиями $f(z, \bar{z}) \to f(gz, \overline{gz})$, где g — движение в плоскости Лобачевского. Из этого свойства следует, что он является функцией оператора Лапласа — Бельтрами Δ. Обозначим ядро оператора T_h через $G_h(v, \bar{v} \mid z, \bar{z})$ и через τ_z преобразование $(\tau_z f)(v, \bar{v}) = f\left(\frac{z - v}{1 - \bar{z}v}, \frac{\bar{z} - \bar{v}}{1 - z\bar{v}} \right)$. Положим $\tilde{G}_h(v, \bar{v}) = G_h(v, \bar{v} \mid 0, 0)$.

Заметим, что

$$G_h(v, \bar{v} \mid z, \bar{z}) = (\tau_z \tilde{G}_h)(v, \bar{v}).$$

(Это свойство функции G_h в других обозначениях было использовано в предыдущем пункте.) Используя перестановочность оператора Δ с T_h и τ_z, а так же самосопряженность Δ и τ_z, получаем

$$(\Delta T_h f)(z, \bar{z}) = (T_h \Delta f)(z, \bar{z}) = \int (\Delta f)(v, \bar{v})(\tau_z \tilde{G}_h)(v, \bar{v})\, d\mu(v, \bar{v}) = \\ = \int f(v, \bar{v})(\tau_z \Delta_{v, \bar{v}} \tilde{G}_h)(v, \bar{v})\, d\mu(v, \bar{v}) = \\ = \int (\tau_z f)(v, \bar{v})(\Delta_{v, \bar{v}} G_h)(v, \bar{v} \mid 0, 0)\, d\mu(v, \bar{v}).$$

Далее после очевидных преобразований получаем

$$(\Delta_{v, \bar{v}} G_h)(v, \bar{v} \mid 0, 0) = \left(\frac{1}{h} - 1 \right)(1 - v\bar{v})^2 \frac{\partial^2}{\partial v\, \partial \bar{v}} (1 - v\bar{v})^{\frac{1}{h}} = \\ = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - 1 \right)\left(G_h(v, \bar{v} \mid 0, 0) - G_{\frac{2h}{h+1}}(v, \bar{v} \mid 0, 0) \right). \tag{4.15}$$

Следовательно, аналогичное соотношение справедливо для операторов T_h, откуда $T_h = \left(1 - \frac{\Delta}{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - 1 \right)} \right)^{-1} T_{\frac{2h}{1+h}}$. Интегрируя это соотношение, находим

$$T_h = \prod_0^N \frac{1}{1 - h^2 \frac{\Delta}{(1+nh)(1+(n-1)h)}} T_{\frac{2h}{1+Nh}}. \tag{4.16}$$

Первое требование принципа соответствия означает, что $\lim_{h \to 0} T_h = E$, где E — единичный оператор. Поэтому, переходя в (4.16) к пределу при $N \to \infty$, получаем окончательное выражение оператора T_h через Δ:

$$T_h = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - h^2 \frac{\Delta}{(1+nh)(1+(n-1)h)}}. \tag{4.17}$$

5. Представления группы движений плоскости Лобачевского в пространстве $\mathcal{F}_h$. Обозначим эту группу через G. Элементу $g \in G$ сопоставим преобразование в A_h:

$$(\tau_g A)(z, \bar{z}) = A(gz, \overline{gz}). \tag{4.18}$$

Выше уже отмечалось, что преобразование (4.18) является автоморфизмом алгебры A_h. Как известно, все автоморфизмы алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве являются внутренними. Поэтому в $\mathcal{F}_h$ существует ограниченный оператор $\hat{U}_g$, порождающий автоморфизм (4.18):

$$(\hat{U}_g A \hat{U}_g^{-1} \Phi_{\bar{z}}, \Phi_z)(\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})^{-1} = (\hat{A}\Phi_{gz}, \Phi_{\overline{gz}})(\Phi_{gz}, \Phi_{\overline{gz}})^{-1} = A(gz, \overline{gz}). \tag{4.19}$$

Оператор $\hat{U}_g$ определен с точностью до произвольного комплексного множителя. Поскольку преобразование (4.18) переводит вещественные функции в вещественные, преобразование $\hat{A} \to \hat{U}_g \hat{A} U_g^{-1}$ переводит самосопряженные операторы в самосопряженные. Отсюда следует, что $\hat{U}_g$ лишь множителем отличается от унитарного оператора. Таким образом, $\hat{U}_g$ можно выбрать унитарными, а неопределенный множитель — равным 1 по модулю.

В дальнейшем мы считаем это условие выполненным. Очевидно, что соответствие $g \to \hat{U}_g$ является проективным представлением G. Покажем, что оно неприводимо. Пусть $\hat{A}$ — ограниченный оператор, перестановочный со всеми $\hat{U}_g$. Из (4.19) следует, что в этом случае $A(gz, \overline{gz})$ не зависит от g. В силу транзитивности G с необходимостью $A(z, \bar{z}) = a = \text{const}$. Ввиду взаимно однозначного соответствия между операторами и ковариантными символами отсюда следует, что $\hat{A} = a\hat{E}$, где $\hat{E}$ — единичный оператор в $\mathcal{F}_h$. Следовательно, представление неприводимо.

Укажем явный вид операторов $\hat{U}_g$. Пусть $g=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$; тогда

$$(\hat{U}_g f)(z)=\theta f\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)(\bar{b}z+\bar{a})^{-1/h}, \quad |\theta|=1. \tag{4.20}$$

Унитарность преобразований (4.20) проверяется непосредственно. Свойство (4.19) следует из тождества

$$(\hat{U}_g\Phi_{\bar{v}})(z)=\theta\left(1-\bar{v}\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)^{-1/h}(\bar{a}+\bar{b}z)^{-1/h}=\theta\,(\bar{b}z+\bar{a}-\bar{v}(az+b))^{-1/h}=$$

$$=\theta\left(1-\frac{a\bar{v}-\bar{b}}{-b\bar{v}+\bar{a}}z\right)^{-1/h}(\bar{a}-b\bar{v})^{-1/h}=\theta\,(\bar{a}-b\bar{v})^{-1/h}\Phi_{\overline{g^{-1}v}}(z). \tag{4.21}$$

В заключение укажем ковариантный символ $U_g(z, \bar{z})$ оператора $\hat{U}_g$. Комбинируя (4.21) и (4.4), получаем

$$(\hat{U}_g\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})=\theta\,(\bar{a}-b\bar{z})^{-1/h}(\Phi_{\overline{g^{-1}z}}, \Phi_{\bar{z}})=$$
$$=\theta\,(\bar{a}-b\bar{z})^{-1/h}\Phi_{\overline{g^{-1}z}}(z)=\theta\,(\bar{a}-az\bar{z}-b\bar{z}+\bar{b}z)^{-1/h}.$$

Отсюда

$$U_g(z, \bar{z})=\theta\,(\hat{U}_g\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})(\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})^{-1}=\theta\left(\frac{1-z\bar{z}}{\bar{a}-az\bar{z}-b\bar{z}+\bar{b}z}\right)^{1/h}. \tag{4.22}$$

6. Квантование с помощью отражений (аналог вейлевского квантования). Пусть $g(v, \bar{v})\in G$ — отражение в точке v:

$$g(v,\bar{v})\,z=\frac{-(1+v\bar{v})\,z+2v}{-2\bar{v}z+1+v\bar{v}}, \quad g=\frac{1}{1-v\bar{v}}\begin{pmatrix}-(1+v\bar{v}) & 2v \\ -2\bar{v} & 1+v\bar{v}\end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Оператор $\hat{U}_g$ при $g=g(v, \bar{v})$ обозначим через $\hat{U}_{v\bar{v}}$. Согласно общей формуле (4.22), ковариантный символ оператора $\hat{U}_{v,\,\bar{v}}$ с точностью до множителя θ, $|\theta|=1$, имеет вид

$$U_h(v, \bar{v}\,|\,z, \bar{z})=\left[\frac{(1-z\bar{z})(1-v\bar{v})}{(1-z\bar{v})(1-v\bar{z})}\right]^{1/h}\frac{1}{\left[1-\dfrac{z-v}{1+z\bar{v}}\,\dfrac{\bar{z}-\bar{v}}{1-\bar{z}v}\right]^{1/h}}. \tag{4.24}$$

Фиксируем оператор $\hat{U}_{z,\,\bar{z}}$ таким образом, чтобы его ковариантный символ имел в точности вид (4.24).

Вейлевским ковариантным символом оператора $\hat{A}$ назовем функцию

$$\mathcal{A}(z, \bar{z})=\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{U}_{z,\,\bar{z}}). \tag{4.25}$$

Вейлевским контравариантным символом оператора $\hat{A}$ назовем функцию $\mathring{\mathcal{A}}$, с помощью которой оператор $\hat{A}$ представляется интегралом:

$$\hat{A}=\left(\frac{1}{h}-1\right)\int\mathring{\mathcal{A}}(z, \bar{z})\,\hat{U}_{z,\bar{z}}\,d\mu(z, \bar{z}). \tag{4.26}$$

Связь между символами $\mathring{A}$ и $\mathcal{A}$, а также между $\mathring{\mathcal{A}}$ и A дается формулами

$$\mathcal{A}(z, \bar{z}) = (S_h \mathring{A})(z, \bar{z}), \tag{4.27}$$

$$A(z, \bar{z}) = (S_h \mathring{\mathcal{A}})(z, \bar{z}), \tag{4.28}$$

где

$$(S_h f)(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int f(v, \bar{v})\, U_h(v, \bar{v} \mid z, \bar{z})\, d\mu(v, \bar{v}).$$

(Формула (4.27) следует из (3.15) и из симметрии $U_h(v, \bar{v} \mid z, \bar{z}) = U_h(z, \bar{z} \mid v, \bar{v})$.)

Для выражения символов $\mathcal{A}$ и $\mathring{\mathcal{A}}$ друг через друга нам потребуется найти оператор S_h как функцию оператора Лапласа — Бельтрами Δ. Это возможно ввиду перестановочности S_h и операторов (4.18) τ_g.

Совершая преобразования, аналогичные (4.15), получаем

$$(\Delta S_h f)(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int (\tau_z f)(v, \bar{v}) \left(\Delta_{v, \bar{v}} U_h\right)(v, \bar{v} \mid 0, 0)\, d\mu(v, \bar{v}).$$

С помощью элементарных преобразований убеждаемся, что

$$\left(\Delta_{v, \bar{v}} U_h\right)(v, \bar{v} \mid 0, 0) = (1 - v\bar{v})^2 \frac{\partial^2}{\partial v\, \partial \bar{v}} \left(\frac{1 - v\bar{v}}{1 + v\bar{v}}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\left(\frac{1}{h} - 1\right)\left(\frac{1 - v\bar{v}}{1 + v\bar{v}}\right)^{\frac{1}{h}} - \left(\frac{1}{h} + 1\right)\left(\frac{1 - v\bar{v}}{1 + v\bar{v}}\right)^{\frac{1}{h} + 2}\right].$$

Отсюда

$$\Delta S_h = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - 1\right)\left(S_h - S_{\frac{2h}{1 + 2h}}\right), \quad S_h = \left(1 - h^2 \frac{\Delta}{1 - h}\right)^{-1} S_{\frac{2h}{1 + 2h}}.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$S_h = \prod_0^{n-1} \left(1 - h^2 \frac{\Delta}{(1 + 2kh)(1 + (2k - 1)h)}\right)^{-1} S_{\frac{2h}{1 + 2kh}}. \tag{4.29}$$

Повторяя рассуждения п.3 в отношении операторов S_h, находим, что $\lim\limits_{h \to 0} S_h = E$. Поэтому, переходя в (4.29) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$S_h = \prod_0^{\infty} \left(1 - h^2 \frac{\Delta}{(1 + 2kh)(1 + (2k - 1)h}\right)^{-1}. \tag{4.30}$$

Сравнение (4.17) и (4.30) дает

$$T_h = S_h S_h', \tag{4.31}$$

где

$$S_h' = \prod_0^{\infty} \left[1 - h^2 \frac{\Delta}{(1 + (2k + 1)h)(1 + 2kh)}\right]^{-1}.$$

Из (4.31) и (4.8) получаем

$$\mathring{\mathcal{A}} = S'_h \mathring{A} = S'_h S_h^{-1} \mathcal{A}. \tag{4.32}$$

§ 5. Квантование на сфере

В случае, если число $n = \frac{1}{h}$ является целым, теория, относящаяся к сфере, во всех деталях копирует теорию, относящуюся к плоскости Лобачевского. Мы рассмотрим лишь этот случай. На первый взгляд условие целости $\frac{1}{h}$ кажется экстравагантным. Однако в § 6 будет показано, что квантование на сфере, рассматриваемое в настоящем параграфе, является при некоторых естественных дополнительных ограничениях единственным с точностью до эквивалентности. Тем самым рассмотрение нецелых $\frac{1}{h}$ излишне.

Основные формулы будут приведены без вывода. Для простоты предположим, что радиус сферы $r = \frac{1}{2}$. Сферу интерпретируем как расширенную комплексную плоскость. При этом инвариантная мера на сфере имеет вид $d\mu(z, \bar{z}) = (1 + z\bar{z})^{-2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\pi i}$ (см. (1.7)).

1. Пространство $\mathcal{F}_h$ состоит из голоморфных функций $f(z)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \left(\frac{1}{h} + 1\right) \int f(z) \overline{g(z)} (1 + z\bar{z})^{-\frac{1}{h}} d\mu(z, \bar{z}). \tag{5.1}$$

Отметим, что если $f(z) \in \mathcal{F}_h$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше $\frac{1}{h}$; во всех остальных случаях интеграл, определяющий (f, f), расходится. Таким образом, $\dim \mathcal{F}_h = 1 + \frac{1}{h}$. Векторы

$$\Phi_{\bar{v}}(z) = (1 + z\bar{v})^{1/h} \tag{5.2}$$

образуют переполненную систему в $\mathcal{F}_h$. Для любого $f \in \mathcal{F}_h$ справедлива формула

$$(f, \Phi_{\bar{v}}) = f(v). \tag{5.3}$$

Отметим, что формула (5.2) теряет смысл при нецелом $\frac{1}{h}$: в этом случае $\Phi_{\bar{v}}(z)$ — многозначная функция и выделение однозначной ветви невозможно[1]).

2. Алгебра ковариантных символов. Ковариантный символ $A(z, \bar{z})$ оператора $\hat{A}$ является значением при $v = z$ функции

$$A(z, \bar{v}) = \frac{(\hat{A}\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})}{(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})}. \tag{5.4}$$

[1]) Система (5.2) (в других координатах) есть хорошо известная система блоховских когерентных состояний. См., например, [9].

Функция (5.4) служит аналитическим продолжением $A(z, \bar{z})$, поэтому соответствие между ковариантными символами и операторами взаимно однозначно.

Действие оператора на вектор:

$$(\hat{A}f)(z)=\left(\frac{1}{h}+1\right)\int A(z, \bar{v}) f(v)\left(\frac{1+z\bar{v}}{1+v\bar{v}}\right)^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}). \tag{5.5}$$

Произведение операторов: если $\hat{A}=\hat{A}_1\cdot\hat{A}_2$, то

$$A(z, \bar{v})=\left(\frac{1}{h}+1\right)\int A_1(z, \bar{v}) A_2(v, \bar{z})\left[\frac{(1+z\bar{v})(1+v\bar{z})}{(1+z\bar{z})(1+v\bar{v})}\right]^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}). \tag{5.6}$$

Связь между ко- и контравариантными символами:

$$A(z, \bar{z})=$$

$$=(T_h\mathring{A})(z, \bar{z})=\left(\frac{1}{h}+1\right)\int \mathring{A}(v, \bar{v})\left[\frac{(1+z\bar{v})(1+v\bar{z})}{(1+v\bar{v})(1+z\bar{z})}\right]^{\frac{1}{h}} d\mu(v, \bar{v}). \tag{5.7}$$

Выражение оператора T_h через оператор Лапласа—Бельтрами:

$$T_h=\prod_1^{\infty}\left(1+h^2\frac{\Delta}{(1+nh)(1+(n+1)h)}\right). \tag{5.8}$$

Для оператора T_h справедлива асимптотическая формула (4.11), из которой, как и в случае плоскости Лобачевского, следует принцип соответствия.

3. Связь с представлениями. Движения сферы порождают автоморфизмы τ_g алгебры A_h по формуле (4.18). Обозначим через $\hat{U}_g$ проективное представление группы $SO(3)$, связанное с автоморфизмами τ_g соотношением (4.19). Обозначим через $\tilde{g}$ унитарную матрицу $\tilde{g}=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$. Группа $SO(3)$ действует на сфере согласно формуле

$$z\to\tilde{g}z=\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}. \tag{5.9}$$

Оператор $\hat{U}_g$ определяется формулой

$$(\hat{U}_g f)(z)=f\left(\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}\right)(-\bar{b}z+\bar{a})^{\frac{1}{h}}. \tag{5.10}$$

$\Big($При нечетном $\frac{1}{h}$ представление $\hat{U}_g$ двузначно.$\Big)$ Из теории представлений хорошо известно, что представлениями $\hat{U}_g$ исчерпывается с точностью до эквивалентности все множество проективных представлений $SO(3)$.

§ 6. Вопросы единственности

1. Дополнительные определения. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — квантования одной и той же классической механики. Квантование $\mathfrak{A}_1$ будем называть подквантованием $\mathfrak{A}_2$ (обозначается: $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$), если существует допустимый мономорфизм $\psi: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$. Квантование $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным, если из условия $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1$ следует, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$. Пусть $\mathfrak{A}$ — специальное квантование механики $(\mathfrak{M}, \omega)$, естественное по отношению к некоторой категории $\mathcal{K}$, в которую входит группа G движений многообразия $\mathfrak{M}$. Как уже неоднократно отмечалось, в этом случае сдвиги порождают автоморфизмы алгебр A_h согласно формуле

$$(\tau_g f)(x) = f(gx). \tag{6.1}$$

Квантование $\mathfrak{A}$ будем называть эффективным, если между алгебрами A_{h_1}, A_{h_2} при $h_1 \neq h_2$ не существует естественного изоморфизма (т. е. перестановочного со всеми τ_g).

Квантование назовем неприводимым, если алгебры A_h допускают точные неприводимые представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

Квантование назовем w^*-квантованием, если алгебры A_h являются w^*-алгебрами.

В частности, в случае неприводимого w^*-квантования алгебры A_h изоморфны полным алгебрам ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

2. Общее соображение. Рассмотрим множество $\tilde{M}$ w^*-алгебр A, состоящих из функций на однородном многообразии $\mathfrak{M}$ с группой движений G и обладающих свойствами:

а) Алгебра A изоморфна алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

б) Сдвиги $(\tau_g f)(x) = f(gx)$ являются автоморфизмами алгебр.

в) Единицей алгебры A служит функция $f_0(x) \equiv 1$.

Алгебры $A_1, A_2 \in \tilde{M}$ назовем естественно изоморфными, если между ними существует изоморфизм, перестановочный с автоморфизмом τ_g.

Множество классов попарно естественно изоморфных алгебр A обозначим M.

Обозначим далее через $\tilde{T}$ множество всех неприводимых проективных представлений группы G и через T множество классов унитарно эквивалентных проективных представлений G. Построим мономорфное отображение $M \to T$.

Фиксируем $A \in \tilde{M}$. Обозначим через L изоморфную A алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и через φ изоморфизм $A \to L$. Пусть $\sigma_g = \varphi \tau_g \varphi^{-1}$ есть $*$-автоморфизм L. Поскольку все автоморфизмы L внутренние, существует определенный с точностью до числового множителя λ ограниченный оператор $\hat{U}_g$, порождающий автоморфизм σ_g:

$$\sigma_g \hat{f} = \hat{U}_g \hat{f} \hat{U}_g^{-1}. \tag{6.2}$$

Ввиду того что σ_g есть $*$-автоморфизм, он, в частности, переводит эрмитовы операторы в эрмитовы. Отсюда следует, что $\hat{U}_g$ лишь множителем отличается от унитарного оператора. Таким образом, $\hat{U}_g$ можно считать унитарным оператором, а неопределенный множитель λ таким, что $|\lambda|=1$.

Операторы $\hat{U}_g$ осуществляют унитарное проективное представление группы G.

Докажем неприводимость $\hat{U}_g$. Пусть элемент $\hat{f}_0 \in L$ перестановочный с $\hat{U}_g$ и $f_0(x)=\varphi^{-1}\hat{f}_0 \in A$. В силу (6.2)

$$f_0(gx)=(\tau_g f_0)(x)=\varphi^{-1}\sigma_g\hat{f}_0=\varphi^{-1}(\hat{U}_g\hat{f}_0\hat{U}_g^{-1})=\varphi^{-1}\hat{f}_0=f_0(x).$$

Ввиду транзитивности действия группы G на $\mathfrak{M}$ отсюда следует, что $f_0(x)=\text{const}=f_0$. В силу свойства в) это означает, что $\hat{f}_0 = f_0 E$, где E — единичный оператор в $\mathscr{H}$. Таким образом, каждой алгебре $A \in \tilde{M}$ сопоставлено неприводимое проективное представление $\hat{U}_g \in \tilde{T}$ группы G. Покажем, что алгебры A_1, $A_2 \in \tilde{M}$ естественно изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им представления $\hat{U}_g^{(1)}$ и $\hat{U}_g^{(2)}$ унитарно эквивалентны.

Снабдим индексом $i\,(i=1,\,2)$ объекты, относящиеся к алгебре A_i. Пусть представления $\hat{U}_g^{(i)}$ унитарно эквивалентны и $V\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ — изоморфизм гильбертовых пространств, осуществляющий эту эквивалентность: $V\hat{U}_g^{(1)}=\hat{U}_g^{(2)}V$. С помощью V построим изоморфизмы $L_1 \to L_2$ и $A_1 \to A_2$:

$$\hat{f} \to V\hat{f}V^{-1}, \quad f(x) \to \varphi_2^{-1}(V(\varphi_1 f)V^{-1})=\psi f. \tag{6.3}$$

Изоморфизм (6.3) $f \to \psi f$ является естественным:

$$\psi\tau_g^{(1)}f=\varphi_2^{-1}(V\hat{U}_g^{(1)}\varphi_1 f(\hat{U}_g^1)^{-1}V^{-1})=\varphi_2^{-1}(\hat{U}_g^{(2)}V\varphi_1 fV^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1})=\tau_g^{(2)}\psi f.$$

Обратно, пусть алгебры A_1, A_2 естественным образом изоморфны и $\psi\colon A_1 \to A_2$ — изоморфизм. В этом случае $\chi=\varphi_2\psi\varphi_1^{-1}$ — изоморфизм алгебр L_1 и L_2. Так как L_1 и L_2 — полные операторные алгебры, то существует изоморфизм $V\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, порождающий χ: $\chi\hat{f}=V\hat{f}V^{-1}$, $\hat{f} \in L_1$. Естественность ψ означает тождество $\psi\tau_g^{(1)} = \tau_g^{(2)}\psi$. Из него следует, что $\chi\sigma_g^{(1)}=\sigma_g^{(2)}\chi$, где $\sigma_g^{(i)}$ — автоморфизм L_i вида (6.2). Более подробно:

$$V\hat{U}_g^{(1)}\hat{f}(\hat{U}_g^{(1)})^{-1}V^{-1}=\hat{U}_g^{(2)}V\hat{f}V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}. \tag{6.4}$$

Отсюда

$$V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)}\hat{f}=\hat{f}V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)}. \tag{6.5}$$

Так как (6.5) справедливо при любом $\hat{f} \in L_1$, то $V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)} = \lambda E$; следовательно, $\hat{U}_g^{(1)}=\lambda V^{-1}\hat{U}_g^{(2)}V$, что и означает унитарную эквивалентность проективных представлений $\hat{U}_g^1$ и $\hat{U}_g^2$.

Таким образом, сопоставление $A \to \hat{U}_g$, где $\hat{U}_g$ — неприводимое проективное представление группы G, определяемое равенством (6.2), является в действительности мономорфным отображением классов $M \to T$.

3. Описание квантований на сфере. Покажем, что квантование на сфере, описанное в § 5, является единственным с точностью до естественной эквивалентности максимальным, эффективным, неприводимым w^*-квантованием. Пусть $\mathfrak{A}$ — такого рода квантование; A_h — соответствующие алгебры; $\tilde{M}$, M, $\tilde{T}$, T — специализация объектов, введенных в п. 2 на случай, когда $\mathfrak{M} = S_2$; $G = SO(3)$ — группа движений S_2. Алгебры A_h обладают свойствами а) — в), т. е. $A_h \in \tilde{M}$. Так как между A_h при различных h не существует естественного изоморфизма [1]), то классы алгебр $A \in \tilde{M}$ естественно изоморфных A_h различны при разных h. Множество тех классов, которые содержат A_h, обозначим $M_{\mathfrak{A}}$. Квантование $\mathfrak{A}$ полностью определяется множеством $M_{\mathfrak{A}}$, и если $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, то $M_{\mathfrak{A}_1} \subset M_{\mathfrak{A}_2}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ квантование, описанное в § 5. Для доказательства нашего утверждения достаточно проверить, что $M_{\mathfrak{A}_0} = M$. С этой целью мы воспользуемся мономорфизмом, построенным в п. 2. Пусть $T_{\mathfrak{A}_0}$ и T_M — образы $M_{\mathfrak{A}_0}$ и M при этом мономорфизме. Очевидны включения: $T_{\mathfrak{A}_0} \subset T_M \subset T$. В § 5 отмечалось, что представлениями $\hat{U}_g$, определяемыми формулой (6.2), исчерпываются все с точностью до эквивалентности проективные представления группы $SO(3)$. Следовательно, $T_{\mathfrak{A}_0} = T$, и тем самым $T_{\mathfrak{A}_0} = T_M$, $M_{\mathfrak{A}_0} = M$.

Описать аналогичным образом квантования на плоскости Лобачевского не удается, так как в случае плоскости Лобачевского справедливо лишь включение $T_{\mathfrak{A}_0} \subset T$, но не равенство $T_{\mathfrak{A}_0} = T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. — М.; Л.; ОНТИ, 1936.
2. Березин Ф. А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли. — Функцион. анализ и его прил., 1967, т. 1, вып. 2, с. 1—14.
3. Березин Ф. А. Квантование в ограниченных областях. — ДАН СССР, 1973, т. 211, № 6, с. 1263—1266.
4. Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических пространствах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т. 39, № 2, с. 363—402.
5. Березин Ф. А. Ковариантные и контравариантные символы операторов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 5, с. 1134—1167.
6. Bergmann S. The Kernel Function and conformal mapping. — A. M. S. Publ. 1950.
7. Березин Ф. А. Квантование. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, т. 38, № 5.
8. Монастырский М. И., Переломов А. М. — ДАН СССР, 1972, т. 207, с. 1303—1305.
9. Lieb E. H., Commun. math. Phys., 1973, v. 31, p. 327—340.

[1]) Алгебры A_h в данном случае вообще не изоморфны при различных h: вспомним, что A_h есть полная матричная алгебра в пространстве размерности $1 + \frac{1}{h}$.

Глава VI

МОДЕЛИ ТИПА ГРОССА—НЕВЁ КАК КВАНТОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ [1])

§ 1. Постановка задачи

Разложение по степеням $\frac{1}{N}$, характерное для моделей типа Гросса—Невё, является квазиклассическим; $\frac{1}{N}$ играет роль планковской постоянной. Предельная классическая механика имеет кривое фазовое пространство, не допускающее естественного разделения координат на канонически сопряженные.

В последние годы появился ряд работ, построенных по следующей схеме.

1. Рассматривается некоторая теоретико-полевая модель A с гамильтонианом $H(\varphi, \psi, \ldots) = H_0(\varphi, \psi, \ldots) + H_{\text{int}}(\varphi, \psi, \ldots)$, причем H_0 и H_{int} являются операторами, которые можно выразить через квадратичные комбинации полей. Например,

$$H_0 = \int \left[\pi^2 + \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 + m^2\varphi^2\right] d^3x, \quad H_{\text{int}} = g \int \varphi^2(x)\,\varphi^2(x)\,d^3x. \tag{1.1}$$

2. Рассматривается гильбертово пространство $\mathscr{H}_{A_N}$, являющееся произведением (в фермиевском случае—градуированным) N экземпляров пространства состояний $\mathscr{H}_A$ модели A.

В пространстве $\mathscr{H}_{A_N}$ рассматриваются поля $\varphi_k, \psi_k, \ldots$, являющиеся копиями полей $\varphi, \psi, \ldots$ модели A. При различных k эти поля коммутируют в бозевском случае и антикоммутируют в фермиевском.

Каждому квадратичному относительно полей $\varphi, \psi, \ldots$ оператору $C(\varphi, \psi, \ldots)$ в пространстве $\mathscr{H}_A$ ставится в соответствие оператор

$$C_N = \frac{1}{N}\sum_1^N C(\varphi_k, \psi_k, \ldots). \tag{1.2}$$

[1]) Доклад, прочитанный на Рочестерской конференции 1976 г. в Тбилиси; опубликован в Commun. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 131—183.

Каждому оператору в пространстве $\mathscr{H}_A$, который может быть выражен в виде функции квадратичных операторов $F=F(C^1, \ldots$ $\ldots, C^S)$, ставится в соответствие оператор F_N в $\mathscr{H}_{A_N}$, который является той же самой функцией операторов C_N^k: $F_N=F(C_N^1, \ldots$ $\ldots, C_N^S)$. В частности, гамильтониану H модели A ставится в соответствие гамильтониан H_N. Возникающую таким образом модель обозначим через A_N.

Например, оператору (1.1) ставится в соответствие оператор $H_N=H_{0,N}+H_{\text{int},N}$, где

$$\begin{aligned} H_{0,N} &= \frac{1}{N}\int\sum_1^N\left(\pi_k^2+\sum\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}\right)^2+m^2\varphi_k^2\right)d^3x, \\ H_{\text{int}} &= \frac{g}{N^2}\int\Big(\sum_1^N\varphi_k^2(x)\Big)^2\,d^3x. \end{aligned} \tag{1.3}$$

3. Изучается асимптотика при $N\to\infty$ характеристик модели A_N, например спектра гамильтониана H_N, эффективного потенциала и т. п. По-видимому, впервые подобная схема рассматривалась в работе [1].

Гамильтониан H_N, изучавшийся в [1], отличается от (1.3) множителем: $\tilde{H}_N=NH_N$. Соответствующий оператор эволюции один и тот же в обоих случаях:

$$\exp(t\tilde{H}_N)=\exp(tNH_N)=\exp\left(\frac{t}{\varkappa}H_N\right),\ \text{где}\ \varkappa=\frac{1}{N}.$$

В настоящей работе устанавливается, что предельная теория $A_\infty=\lim\limits_{N\to\infty}A_N$ является классической теорией поля.

Параметр $\varkappa=\frac{1}{N}$ играет в предельном переходе ту же роль, что и константа Планка h в обычной квазиклассике. Фазовое пространство предельной теории не является плоским. В частности, координаты в этом пространстве не могут быть разделены естественным образом на канонически сопряженные. Таким образом, результаты, полученные ранее в моделях типа Гросса—Невё, могут быть описаны как квазиклассическое приближение к исходной модели A, однако при необычном классическом пределе и необычном квантовании. Конечномерные аналоги этих конструкций подробно изучались в [2, 3].

Чтобы избежать возможных недоразумений, стоит подчеркнуть, что константа $\varkappa=\frac{1}{N}$ не имеет ничего общего с постоянной Планка h, входящей в коммутационные соотношения. Значение h сохраняется постоянным во время предельного перехода $\varkappa\to 0$. Отсюда следует, что предельная классическая механика содержит h в качестве параметра. Она является классической в том смысле, что наблюдаемые представляют собой функции на фазовом пространстве, и динамика определяется скобками Пуассона. В конце § 5 мы обсуждаем также дальнейший предельный переход, когда $h \to 0$, и сравниваем полученные результаты с обычной квазиклассикой.

§ 2. Многообразия F_n и B_n и их бесконечномерные аналоги

1. Определение многообразий F_n и B_n. Внутреннее описание. Пусть $\mathscr{H}$ — фоковское пространство состояний для бозевской или фермиевской системы с n степенями свободы. Соотношения коммутации нормируем на планковскую постоянную:

$$[\hat{a}(p),\ \hat{a}^*(q)]_{\pm} = h\delta_{pq}. \tag{2.1}$$

Обозначим через G группу однородных линейных канонических преобразований. Группу G удобно реализовать как группу матриц порядка $2n$ специального вида: $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$.

Напомним, что матрица g указанного вида является матрицей канонического преобразования тогда и только тогда, когда

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* & \varepsilon\Psi' \\ \varepsilon\Psi & \Phi' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ в фермиевском случае,} \\ -1 \text{ в бозевском случае.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Обозначим через U_g, $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \in G$, унитарное преобразование в $\mathscr{H}$, осуществляющее каноническое преобразование с матрицей g:

$$U_g^{-1}\hat{a}(p)\,U_g = \sum(\varphi(p,\ q)\,\hat{a}(q) + \psi(p,\ q)\,a^*(q)), \tag{2.3}$$
$$\Phi = \|\varphi(p,\ q)\|, \quad \underline{\Psi} = \|\psi(p,\ q)\|.$$

Пусть Ψ_0 — вакуумный вектор, и пусть $\hat{a}(p)\Psi_0 = 0$ при всех p. Множество векторов вида $U_g\Psi_0$ образует вложенное в $\mathscr{H}$, многообразие, которое мы обозначаем через F_n в фермиевском и через B_n в бозевском случаях.

Пусть матрица $\Phi = \|\varphi(p,\ q)\|$ имеет обратную. (В бозевском случае это предположение выполнено всегда.) В этом случае из (2.3) следует, что

$$U_g^{-1}\Psi_0 = c(g)\,\Psi_{\bar{z}}, \qquad \Psi_{\bar{z}} = \exp\left\{-\frac{1}{2h}\hat{a}^*\,\bar{z}\hat{a}^*\right\}\Psi_0, \tag{2.4}$$

где $\bar{z} = \Phi^{-1}\Psi = \|\bar{z}(p,\ q)\|$, $\hat{a}^*\bar{z}\,\hat{a}^* = \sum\hat{a}^*(p)\,\bar{z}(p,q)\,\hat{a}^*(p)$, $c(g)$ — нормировочный множитель; матрицы Φ, Ψ удовлетворяют соотношению $\Phi\Psi' + \varepsilon\Psi\Phi' = 0$. Отсюда следует, что матрица $c(g)$ кососимметрична в фермиевском случае и симметрична в бозевском. Кроме того, в бозевском случае из (2.2) следует, что $\Phi\Phi^* - \Psi\Psi^* = I$, откуда

$$z\bar{z} < I \tag{2.5}$$

(т. е. все собственные числа матрицы $z\bar{z}$ меньше 1).

Группы G действуют на многообразиях F_n и B_n транзитивно; стационарной подгруппой G_0 вектора Ψ_0 в обоих случаях служит группа канонических преобразований, не перепутывающая операторов рождения и уничтожения. Таким образом, группы G и G_0 совпадают с группами движения и стационарными подгруппами комплексных симметрических пространств, обозначенных в работе [1] соответственно через M_n^{III} и Ω_n^{II}. Тем самым $F_n = M_n^{\text{III}}$, $B_n = \Omega_n^{\text{II}}$. Многообразие F_n комплексно в силу компактности группы G в фермиевском случае. Напротив, многообразие Ω_n, как видно из (2.5), некомпактно. Оно иногда называется кругом Зигеля. Матричные элементы $z(p, q)$ матрицы z, участвующей в формуле (2.4), в бозевском случае служат комплексными координатами в B_n, в фермиевском — в множестве $\tilde{F}_n$, получающемся из F_n удалением подмногообразия меньшей размерности.

Рассмотрим в группе G автоморфизм, определяемый формулой

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \to g^{\sigma} = \begin{pmatrix} \overline{\Phi} & -\overline{\Psi} \\ -\Psi & \Phi \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Из определения вектора $\Psi_{\bar{z}}$ следует, что

$$U_{g^{\sigma}} \Psi_{\bar{z}} = c(g, z) \Psi_{\overline{gz}}, \tag{2.7}$$

где $c(g, z)$ — нормировочный множитель

$$gz = (\Phi z + \Psi)(\overline{\Psi} z + \overline{\Phi})^{-1}. \tag{2.8}$$

2. Внешнее описание многообразий F_n и B_n. Заметим, что векторы $\Psi_{\bar{z}}$ принадлежат четному подпространству $\mathscr{H}''$ фоковского пространства.

В § 4 будет показано, что они образуют так называемую обобщенную переполненную систему.

Пусть $\hat{R}$ — произвольный оператор в $\mathscr{H}''$. В соответствии с общей теорией переполненных систем сопоставим ему ковариантный символ

$$R(z, \bar{z}) = \frac{(\hat{R}\Psi_{\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}})}{(\Psi_{\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}})}.$$

В частности, рассмотрим в качестве $\hat{R}$ операторы

$$\hat{A}(p, q) = \hat{a}^*(p)\hat{a}^*(q), \quad \hat{A}^*(p, q) = \hat{a}(q)\hat{a}(p),$$
$$\hat{B}(p, q) = \hat{a}^*(p)\hat{a}(q). \tag{2.9}$$

Несложные вычисления показывают, что их ковариантные символы равны соответственно $A(p, q)$, $\overline{A}(p, q)$, $B(p, q)$, где $A(p, q)$, $B(p, q)$ — матричные элементы матриц

$$A = -hz(I - \bar{z}z)^{-1}, \quad B = hz(I - \bar{z}z)^{-1}\bar{z}. \tag{2.10}$$

Заметим, что матрицы A, B удовлетворяют соотношениям

$$\left(B-\frac{h}{2}\right)^2-A\overline{A}=\left(\frac{h}{2}\right)^2, \quad BA=A\overline{B}, \quad B=B^*, \quad A'=-\varepsilon A, \tag{2.11}$$

где ε то же, что и в (2.2). Кроме того, в бозевском случае

$$B \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Покажем, что справедливо также обратное утверждение: если матрицы A, B удовлетворяют соотношениям (2.11) и A^{-1} существует, то существует такая матрица z, $z+\varepsilon z'=0$, с помощью которой матрицы A, B могут быть представлены в виде (2.10).

В самом деле, положим $z=-\overline{A}^{-1}\overline{B}$. Из второго, третьего и четвертого равенств в (2.11) следует, что $z+\varepsilon z'=0$. Далее, комбинируя первое и третье равенство в (2.11), находим, что $0=BB^*-B^*h-A\overline{A}=A\overline{z}z\overline{A}-A\overline{A}=z\overline{A}h$; отсюда $A=-hz(I-\overline{z}z)^{-1}$, $B=-A\overline{z}=hz(I-\overline{z}z)^{-1}\overline{z}$.

В бозевском случае в дополнение к этому из (2.12) следует (2.5).

Обозначим через $\mathscr{G}$ алгебру Ли группы G. Элементы $\mathscr{G}$ имеют вид

$$i\begin{pmatrix} C & A \\ -\overline{A} & -\overline{C} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где A — комплексная и C — эрмитова матрицы, причем $A+\varepsilon A'=0$. Подставляя сюда $C=B-\frac{h}{2}$ и выражая A, B через z, $\overline{z}$ с помощью (2.10), получим вложение многообразий F_n и B_n в $\mathscr{G}$. Так как образ F_n и B_n при этом отображении зависит от h, мы будем его обозначать $F_n(h)$ и $B_n(h)$ соответственно. Пусть $ix=ix(z, \overline{z})\in F_n(h)$ или $ix\in B_n(h)$. С помощью очевидных преобразований устанавливается, что

$$gx(z, \overline{z})\,g^{-1}=x(gz, \overline{gz}), \tag{2.14}$$

где $g=\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}\in G$, gz определяется формулой (2.8).

Таким образом, многообразия $F_n(h)$ и $B_n(h)$ служат орбитами присоединенного представления.

Соотношения (2.10) могут быть переписаны в виде

$$(x(z, \overline{z}))^2=\frac{h^2}{4}I, \tag{2.15}$$

где I — единичная матрица.

Отметим, что в фермиевском случае матрица x эрмитова. Поэтому из (2.15) следует, что при $h=0$ многообразие $F_n(h)$ вырождается в точку. В то же время в бозевском случае это не так: легко видеть, что многообразие $B_n(0)$ лежит на границе круга Зигеля. (Ему отвечают унитарные матрицы z, $z\overline{z}=I$.)

Ниже мы увидим, что это различие связано с тем, что в бозевском случае квантовая динамика при $h \to 0$ превращается в классическую, в то время как в фермиевском случае в обычном смысле предела при $h \to 0$ не существует. (Формальный предельный переход при $h \to 0$ в фермиевском случае приводит к грассмановской классической механике. Подробнее об этом см. в [6].)

3. Бесконечномерные аналоги пространств F_n и B_n. В случае бесконечного числа степеней свободы многообразия, аналогичные F_n и B_n, обозначим через F и B соответственно. Они определяются дословно так же, как F_n и B_n. Надо лишь иметь в виду, что каноническое преобразование g должно быть собственным. Это приводит к тому, что матрица z в дополнение к описанным выше свойствам должна быть матрицей оператора Гильберта—Шмидта:

$$\operatorname{Sp} zz^* < \infty, \tag{2.16}$$

где $*$—знак эрмитовского сопряжения. (В фермиевском случае $z^* = -\bar{z}$, в бозевском $z^* = \bar{z}$, где «—» знак комплексного сопряжения.)

Помимо многообразий F и B в случае бесконечного числа степеней свободы полезно рассматривать также более широкие многообразия $\tilde{F}$ и $\tilde{B}$, параметризуемые матрицами ограниченных операторов. Многообразия $\tilde{F}$ и $\tilde{B}$ состоят из предельных точек для многообразий F и B соответственно в смысле сильной операторной топологии. Для многообразий F, B, $\tilde{F}$, $\tilde{B}$ справедливо также описание с помощью матриц A, B, удовлетворяющих соответственно соотношениям (2.11), (2.16). В случае многообразий F, B матрицы A являются матрицами операторов Гильберта—Шмидта, в случае $\tilde{F}$, $\tilde{B}$—ограниченных операторов.

Я надеюсь в следующих работах показать, что многообразия F, B полезны при изучении несобственных канонических преобразований и связанных с ними перенормировок.

§ 3. Классическая механика на многообразиях F_n, B_n, F, B

1. Общие свойства келеровых многообразий. Многообразия F_n и B_n относятся к числу так называемых келеровых. Напомним, что многообразие M называется келеровым, если оно обладает комплексной структурой, является римановым и риманова метрика в локальных координатах имеет специальный вид:

$$ds^2 = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \, d\bar{z}^\beta, \tag{3.1}$$

где $f = f(z, \bar{z})$—некоторая функция, своя в каждой координатной окрестности, называемая келеровым потенциалом.

Если на многообразии M действует группа G, то метрика (3.1) инвариантна, если потенциал удовлетворяет условию

$$f(gz, \overline{gz}) = f(z, \bar{z}) + \alpha(g, z) + \overline{\alpha(g, z)}, \tag{3.2}$$

где $\alpha(g, z)$ — аналитическая функция z^α при фиксированном g (т. е. не зависит от $\bar{z}^\alpha$).

На келеровом многообразии всегда существует скобка Пуассона. Она задается формулой

$$[f_1, f_2] = i \sum g^{\alpha\dot{\beta}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial z^\beta} \right), \tag{3.3}$$

где $\| g^{\alpha, \dot{\beta}} \|$ — матрица, обратная матрице $\| g_{\dot{\beta}\alpha} \| = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} \right\|$; $\sum g^{\alpha\dot{\gamma}} g_{\dot{\gamma}\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Оператор Лапласа—Бельтрами на келеровом многообразии имеет вид

$$\Delta = \sum g^{\alpha\dot{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \tag{3.4}$$

где $\| g^{\alpha\dot{\beta}} \|$ та же матрица, что и в (3.3).

2. Метрика и скобка Пуассона на F_n, B_n. Пусть $z \in F_n$ или $z \in B_n$. Рассмотрим функцию

$$F(z, \bar{z}) = \det(I - z\bar{z}). \tag{3.5}$$

Из (2.8) следует, что

$$F(gz, \overline{gz}) = F(z, \bar{z}) \alpha(g, z) \overline{\alpha(g, z)}, \tag{3.6}$$

где $\alpha(g, z) = \det(\bar{\Phi} + \bar{\Psi} z)^{-1}$.

Следовательно, $f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \varepsilon \ln F(z, \bar{z})$ является келеровым потенциалом инвариантной метрики при любом $\varepsilon = \text{const}$. Мы положим ε тем же, что и в (2.2).

Общая формула (3.1) может быть записана в виде

$$ds^2 = \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial \bar{t}} f(z + t\,dz, \bar{z} + \bar{t}\,d\bar{z})_{t = \bar{t} = 0}. \tag{3.7}$$

Отсюда

$$ds^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial \bar{t}} \operatorname{Sp} \sum_n \frac{1}{n} [(z + t\,dz)(\bar{z} + \bar{t}\,d\bar{z})]^n |_{t = \bar{t} = 0} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k, l} \operatorname{Sp} dz (\bar{z}, z)^k d\bar{z} (z, \bar{z})^l.$$

Окончательно

$$ds^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Sp} (dz (I - \bar{z}z)^{-1} d\bar{z} (I - z\bar{z})^{-1}). \tag{3.8}$$

Введем в линейное пространство $n \times n$-матриц скалярное произведение $(x, y) = \operatorname{Sp}(xy^*)$. С помощью этого скалярного произведения формулу (3.8) можно переписать в виде

$$ds^2 = (dz, A\,dz), \quad A\,dz = \frac{1}{2} c\,dz\,\bar{c}, \quad c = (I - z\bar{z})^{-1}. \tag{3.9}$$

Для того чтобы найти оператор Лапласа—Бельтрами и скобку Пуассона, следует обратить оператор A в пространстве матриц. Очевидно, что $A^{-1}\xi=2c^{-1}\xi\bar{c}^{-1}$. Оба оператора, A и A^{-1}, оставляют инвариантными подпространства симметрических и кососимметрических матриц. Поэтому в соответствии с общими формулами (3.3) и (3.4) операторы Лапласа—Бельтрами и скобка Пуассона на многообразиях F_n и B_n имеют вид

$$\Delta=-2\varepsilon\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(I-\bar{z}z)\frac{\partial}{\partial z}(I-z\bar{z})\right], \tag{3.10}$$

$$[f_1,\ f_2]=2\frac{\varepsilon}{i}\,\mathrm{Sp}\Big[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f_1\right)(I-\bar{z}z)\left(\frac{\partial}{\partial z}f_2\right)(I-z\bar{z})-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f_2\right)(I-\bar{z}z)\left(\frac{\partial}{\partial z}f_1\right)(I-z\bar{z})\Big], \tag{3.11}$$

где операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ в фермиевском и бозевском случаях имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1n}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -\frac{\partial}{\partial z_{1n}} & -\frac{\partial}{\partial z_{2n}} & \cdots & 0\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{1n}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{1n}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{2n}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{nn}}\end{pmatrix},$$

$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$—их комплексное сопряжение. (Мы здесь временно отказываемся от обозначения $z=z(pq)$ для элемента матрицы z и возвращаемся к более привычному обозначению z_{ij}.)

В формуле (3.10) подразумевается, что операторы $\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$, $\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{ij}}$ не действуют на функции, стоящие внутри квадратной скобки. (Формула (3.10) содержится в [7].)

Пусть $e_{\mu\nu}$—матрица с элементами $(e_{\mu\nu})_{pq}=\frac{1}{2}(\delta_{\mu p}\delta_{\nu q}-\varepsilon\delta_{\mu q}\delta_{\nu p})$. Заметим, что как в фермиевском, так и в бозевском случае $(e_{\mu\nu})_{pq}=(e_{pq})_{\mu\nu}$, $\frac{\partial}{\partial z}z_{pq}=(e_{\mu\nu})_{pq}$. Кроме того, если A—произвольная матрица, удовлетворяющая условию $A+\varepsilon A'=0$, то $\mathrm{Sp}(e_{\nu\mu}A)=A_{\nu\mu}=\varepsilon A_{\mu\nu}$. Поэтому уравнения динамики со скобкой Пуассона (3.11) и гамильтоновой функцией H могут быть записаны в матричной форме:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2}{i}(I-z\bar{z})\frac{\partial H}{\partial\bar{z}}(I-\bar{z}z),\qquad -\frac{d\bar{z}}{dt}=\frac{2}{i}(I-\bar{z}z)\frac{\partial H}{\partial z}(I-z\bar{z}). \tag{3.12}$$

3. Общие сведения об алгебре скобок Пуассона, порожденной произвольной алгеброй Ли. Пусть $\mathcal{G}$—алгебра Ли произвольной группы G; e_i—базис в $\mathcal{G}$: c_{ij}^k—соответствующие структурные константы. Пусть $\mathcal{G}'$—пространство линейных форм на $\mathcal{G}$, и пусть e'^i—базис в $\mathcal{G}'$, биортогональный для e_i: если $a=\sum a^i e_i\in\mathcal{G}$,

$x=\sum x_i e'^i \in \mathscr{G}'$, то

$$\langle a,\ x\rangle=\sum a^i x_i. \tag{3.13}$$

Каждым двум гладким функциям f_1, f_2 на $\mathscr{G}'$ сопоставим скобку

$$[f_1,\ f_2]_p=\sum c_{ij}^k \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_j}x_k. \tag{3.14}$$

Известные свойства структурных констант c_{ij}^k влекут за собой свойства скобки (3.14), позволяющей называть ее скобкой Пуассона: антисимметричность и тождество Якоби [11]

$$[f_1,\ f_2]_p=-[f_2,\ f_1]_p,\quad [f_1[f_2,\ f_3]]+[f_3,\ [f_1,\ f_2]]+[f_2[f_3,\ f_1]]=0.$$

Скобку (3.14) удобно переписать в бескоординатной форме. С этой целью определим $\operatorname{grad} f(x)\in\mathscr{G}$ посредством равенства

$$\frac{d}{dt}f(x+ty)\Big|_{t=0}=\langle\operatorname{grad} f,\ y\rangle; \tag{3.15}$$

скалярное произведение в правой части определяется формулой (3.13). Легко видеть, что формула (3.14) может быть переписана в виде

$$[f_1,\ f_2]_p=\langle[\operatorname{grad} f_1,\ \operatorname{grad} f_2],\ x\rangle, \tag{3.16}$$

где скалярное произведение в правой части — то же, что и в (3.13); $[\operatorname{grad} f_1,\ \operatorname{grad} f_2]$ означает коммутатор в $\mathscr{G}$.

В пространстве $\mathscr{G}'$ действует представление алгебры $\mathscr{G}$, задаваемое матрицами

$$[ad'(y)]_k^i=\sum y^j c_{jk}^i,\quad y=\sum y^i e_i\in\mathscr{G}. \tag{3.17}$$

Это представление называется коприсоединенным. Ему соответствует коприсоединенное представление $Ad'(g)$ группы G. Пусть $P(x)$ — инвариант коприсоединенного представления G: $P(Ad'(g)x)=$ $=P(x)$. Соответствующее инфинитезимальное условие имеет, согласно (3.17), вид

$$\sum_{i,k}\frac{\partial P}{\partial x_i}c_{ij}^k x_k=0. \tag{3.18}$$

Сравнивая (3.18) с (3.14), находим

$$[P,\ f]_p=0 \tag{3.19}$$

при любом f.

Следовательно, P является первым интегралом при любой динамике, порожденной скобками Пуассона (3.14); поверхности $P(x)=\mathrm{const}$ являются инвариантными при любой динамике. Можно показать, что в виде $P(x)=\mathrm{const}$, где $P(x)$ — всевозможные гладкие функции, инвариантные относительно присоединенного представления, может быть записано уравнение любой замкнутой орбиты общего положения коприсоединенного представления.

Перечисленные факты приобретают новую окраску в случае, если в алгебре Ли имеется невырожденное инвариантное скалярное произведение. Обозначим это произведение (a, b) и отождествим с его помощью $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$. Каждому $x \in \mathcal{G}'$ сопоставим $\tilde{x} \in \mathcal{G}$, однозначно определяемый формулой $\langle x, a\rangle = (\tilde{x}, a)$ для любого $a \in \mathcal{G}$.

Это отождествление позволяет построить алгебру скобок Пуассона из функций на самой алгебре $\mathcal{G}$:

$$[f_1, f_2]_P = ([\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2], x), \quad x \in \mathcal{G}, \tag{3.20}$$

где $\operatorname{grad} f$ определяется аналогично (3.15):

$$\frac{d}{dt} f(x + t\boldsymbol{y})\Big|_{t=0} = (\operatorname{grad} f, y). \tag{3.21}$$

Условие инвариантности скалярного произведения имеет вид

$$([c, a], b) + (a, [c, b]) = 0.$$

Используя его, преобразуем (3.20) к виду

$$[f_1, f_2]_P = -(\operatorname{grad} f_2, [\operatorname{grad} f_1, x]). \tag{3.22}$$

Положим $f_1(x) = H(x)$, $f_2(x) = x^i$. Заметим, что, согласно (3.21), $(\operatorname{grad} x^i, a) = a^i$. Поэтому $[x^i, H]_P = [\operatorname{grad} H, \boldsymbol{x}]^i$. Умножая обе части этого равенства на базисные векторы e_i и складывая, получаем, что уравнение гамильтоновой динамики в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = [H, x]_P = [\operatorname{grad} H, x]. \tag{3.23}$$

Уравнение (3.23) имеет характерный лаксовский вид. Роль (L, A) пары играют элементы x и $\operatorname{grad} H$ алгебры $\mathcal{G}$.

К виду (3.23) приводятся многие важные уравнения математической физики. Очевидным образом сюда относятся уравнения Эйлера для движения твердого тела с закрепленной точкой ($\mathcal{G}$ является алгеброй вещественных кососимметричных матриц 3-го порядка). В другой работе будет показано, что знаменитое уравнение Кортевега—де Фриза так же записывается в виде (3.23), причем роль $\mathcal{G}$ играет некоторый бесконечномерный аналог вещественной симплектической алгебры.

В следующем п. 4 мы показываем, что к виду (3.23) приводятся уравнения динамики на интересующих нас многообразиях.

4. Скобки Пуассона на многообразиях F_n и B_n. Второе описание. Пусть $x = i\begin{pmatrix} C & A \\ -\bar{A} & -\bar{C}\end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$—алгебра Ли группы фермиевских или бозевских линейных канонических преобразований. (В обоих случаях C—эрмитова матрица, A—в первом случае кососимметрическая, во втором—симметрическая матрица.) В $\mathcal{G}$ существует инвариантное скалярное произведение

$$(x, y) = \operatorname{Sp} xy. \tag{3.24}$$

Пусть $H = H(A, \overline{A}, C, \overline{C})$ — некоторая функция на $\mathcal{G}$. Согласно (3.24), (3.21),

$$\operatorname{grad} H = -2i \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial C} & -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{A}} \\ \dfrac{\partial H}{\partial A} & -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{C}} \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где

$$\left(\frac{\partial H}{\partial C}\right)(p, q) = \frac{\partial H}{\partial C(q, p)}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial A}\right)(p, q) = \frac{\partial H}{\partial A(q, p)}.$$

Таким образом, уравнения динамики в нашем случае имеют вид

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C & A \\ -\overline{A} & -\overline{C} \end{pmatrix} = 2\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial C} & -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{A}} \\ \dfrac{\partial H}{\partial A} & -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{C}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ -\overline{A} & -\overline{C} \end{pmatrix}\right]. \tag{3.26}$$

Покажем, что многообразия $F_n(h)$, $B_n(h)$ инвариантны относительно динамики (3.26) (функция H предполагается вещественной). Пусть матрицы $A(t)$, $C(t)$ удовлетворяют уравнению (3.26). Рассмотрим матрицы

$$K(t) = C^2 - A\overline{A} - \varepsilon\frac{h^2}{4}, \quad L(t) = AC' - CA, \tag{3.27}$$

где ε то же, что и в (2.2). Покажем, что если $K(0) = L(0) = 0$, то $K(t) \equiv L(t) \equiv 0$. Пользуясь (3.26), получаем

$$\frac{i}{2}\frac{dK}{dt} = \left[K, \frac{\partial H}{\partial C}\right] + \frac{\partial H}{\partial \overline{A}}\overline{L} - L\frac{\partial H}{\partial A},$$

$$\frac{i}{2}\frac{dL}{dt} = \frac{\partial H}{\partial C}L + L\frac{\partial H}{\partial \overline{C}} + \frac{\partial H}{\partial \overline{A}}\overline{K} - K\frac{\partial H}{\partial \overline{A}}.$$

Таким образом, элементы матриц $K(t)$, $L(t)$ удовлетворяют линейной однородной системе дифференциальных уравнений. Нужное утверждение следует из теоремы существования и единственности для таких систем.

Покажем теперь, что на многообразиях $F_n(h)$ и $B_n(h)$ динамика (3.26) совпадает с динамикой (3.12).

Умножим первое равенство (3.12) справа на $\overline{z}(I - z\overline{z})^{-1}$, слева на $(I - z\overline{z})^{-1}$; второе равенство умножим слева на $(I - z\overline{z})^{-1}z$, справа на $(I - \overline{z}z)^{-1}$. Затем вычтем второе из первого. В результате получим

$$\frac{d}{dt}(I - z\overline{z})^{-1} = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}(h + B) = \frac{1}{h}\frac{dC}{dt} = \frac{2}{i}\left(\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\overline{z} - z\frac{\partial H}{\partial z}\right). \tag{3.28}$$

Умножим равенство (3.28) справа на z и первое равенство (3.12) слева на $(1 - z\overline{z})^{-1}$. Сложив полученные соотношения, получим

$$\frac{d}{dt}\left[(I - z\overline{z})^{-1}z\right] = -\frac{1}{h}\frac{dA}{dt} = \frac{2}{i}\left(\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} - z\frac{\partial H}{\partial z}z\right). \tag{3.29}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\partial H}{\partial z_{\mu\nu}}=\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial H}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial z_{\mu\nu}}+\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}\frac{\partial \bar{A}}{\partial z_{\mu\nu}}+\frac{\partial H}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial z_{\mu\nu}}+\frac{\partial H}{\partial \bar{C}}\frac{\partial \bar{C}}{\partial z_{\mu\nu}}\right). \tag{3.30}$$

Далее заметим, что $\frac{\partial z}{\partial z_{\mu\nu}}=e_{\mu\nu}$, где $(e_{\mu\nu})_{pq}=\frac{1}{2}(\delta_{\mu p}\delta_{\nu q}-\varepsilon\delta_{\mu q}\delta_{\nu p})$. Отсюда

$$\frac{\partial A}{\partial z_{\mu\nu}}=-h\,[e_{\mu\nu}(I-\bar{z}z)^{-1}+z(I-\bar{z}z)^{-1}\bar{z}e_{\mu\nu}(I-\bar{z}z)^{-1}]=$$
$$=-[e_{\mu\nu}(h+\bar{B})+Be_{\mu\nu}(I+h^{-1}\bar{B})],$$
$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z_{\mu\nu}}=-h\bar{z}(I-z\bar{z})^{-1}e_{\mu\nu}\bar{z}(I-z\bar{z})^{-1}=-h^{-1}\bar{A}e_{\mu\nu}\bar{A},$$
$$\frac{\partial B}{\partial z_{\mu\nu}}=h\,[e_{\mu\nu}(I-\bar{z}z)^{-1}\bar{z}+z(I-\bar{z}z)^{-1}\bar{z}e_{\mu\nu}(I-\bar{z}z)^{-1}\bar{z}]=$$
$$=-e_{\mu\nu}\bar{A}-h^{-1}Be_{\mu\nu}\bar{A},$$
$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial z_{\mu\nu}}=h\,[\bar{z}(I-z\bar{z})^{-1}e_{\mu\nu}\bar{z}(I-z\bar{z})^{-1}z+\bar{z}(I-z\bar{z})^{-1}e_{\mu\nu}]=$$
$$=-h^{-1}\bar{A}e_{\mu\nu}\bar{B}-\bar{A}e_{\mu\nu}.$$

Отсюда, учитывая, что для матрицы X с подходящим условием симметрии $\mathrm{Sp}(Xe_{\mu\nu})=X_{\nu\mu}$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial z_{\mu\nu}}=-\left[(h+\bar{B})\frac{\partial H}{\partial A}+(I+h^{-1}\bar{B})\frac{\partial H}{\partial A}B+h^{-1}\bar{A}\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}\bar{A}+\right.$$
$$\left.+\bar{A}\frac{\partial H}{\partial B}+h^{-1}\bar{A}\frac{\partial H}{\partial B}B+\frac{\partial H}{\partial \bar{B}}\bar{A}+h^{-1}\bar{B}\frac{\partial H}{\partial \bar{B}}\bar{A}\right]_{\nu\mu},$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial H}{\partial z}=-\left[(I+h^{-1}\bar{B})\frac{\partial H}{\partial A}(h+B)+h^{-1}\bar{A}\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}\bar{A}+\right.$$
$$\left.+\bar{A}\frac{\partial H}{\partial B}(I+h^{-1}B)+(I+h^{-1}B)\frac{\partial H}{\partial \bar{B}}\bar{A}\right]. \tag{3.31}$$

Переходя к комплексно сопряженным величинам, находим аналогичное выражение для $\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}$.

Воспользуемся тождествами, следующими из (2.10): $z\bar{A}=A\bar{z}=-B$, $\bar{z}(I+h^{-1}B)=(I+h^{-1}\bar{B})\bar{z}=-h^{-1}\bar{A}$. В результате очевидных преобразований, подставляя (3.31) в (3.28), находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\frac{\partial C}{\partial t}&=\frac{2}{i}\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}\bar{A}+\frac{\partial H}{\partial C}C-A\frac{\partial H}{\partial A}-C\frac{\partial H}{\partial C}\right),\\ \frac{1}{h}\frac{\partial A}{\partial t}&=\frac{2}{i}\left(A\frac{\partial H}{\partial \bar{C}}+\frac{\partial H}{\partial C}A+C\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}+\frac{\partial H}{\partial \bar{A}}\bar{C}\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Уравнения (3.32) совпадают с (3.26) с точностью до замены в (3.26) H на hH.

Таким образом, динамика (3.26) в $\mathcal{G}$ с гамильтоновой функцией $H(A,\bar{A},B,\bar{B})$ порождает на многообразиях $F_n(h)$, $B_n(h)$

динамику (3.12) с гамильтоновой функцией

$$H_1(z, \bar{z})=\frac{1}{h} H(A(z, \bar{z}), \bar{A}(z, \bar{z}), B(z, \bar{z}), \bar{B}(z, \bar{z})).$$

Все результаты этого параграфа без изменений переносятся на бесконечные многообразия F и B.

§ 4. Квантование классических механик на многообразиях F_n, B_n, F, B

1. Пространства $\mathcal{F}_\varkappa(M_n)$. Пусть M_n — одно из многообразий F_n или B_n, $\tilde{M}_n \subset M_n$ — подмножество, в котором матричные элементы $z(p, q)$ матрицы z служат системой координат. (Напомним, что в фермиевском случае $M_n \diagdown \tilde{M}_n$ является подмногообразием меньшей размерности, чем M_n, в бозевском — $\tilde{M}_n = M_n$.) Обозначим через $\mathcal{F}_\varkappa(M_n)$ гильбертово пространство аналитических функций на $\tilde{M}_n$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)=c_n(x)\int f_1(z)\overline{f_2(z)} \det(I-z\bar{z})^{-\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(z, \bar{z}), \tag{4.1}$$

где ε имеет тот же смысл, что и в (2.2),

$$d\mu_n(z, \bar{z}) = \frac{1}{\det(I-z\bar{z})^{n-\varepsilon}} \Pi \frac{dz_{ij}\, d\bar{z}_{ij}}{2\pi} \tag{4.2}$$

есть инвариантная мера на M_n; множитель $c_n(\varkappa)$ определяется условием $(f_0, f_0)=1$, где $f_0 \equiv 1$. Согласно [3, 7], в бозевском случае

$$c_n(\varkappa)= 2^{-n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-2\right)\dots\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-2\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-4\right)\dots\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}-2n\right)}, \tag{4.3}$$

в фермиевском случае

$$c_{n+1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+n+2\right)\dots\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+2n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+3\right)\dots\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+2n-1\right)}. \tag{4.4}$$

В бозевском случае интеграл в (4.1) сходится при $\frac{1}{\varkappa} \geqslant 2(n+1)$; при $\varkappa > \frac{1}{2(n+1)}$ интеграл (4.1) понимается в смысле аналитического продолжения. Оказывается, что понимаемый таким образом интеграл (4.1) задает неотрицательное скалярное произведение только в случае, если

$$\varkappa=\frac{1}{k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1, \qquad 0<\varkappa \leqslant \frac{1}{n-1}. \tag{4.5}$$

В фермиевском случае интеграл (4.1) представляет интерес для теории квантования при

$$\varkappa = \frac{1}{k}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{4.6}$$

Значения $\varkappa$, определяемые формулами (4.5), (4.6), будем называть *допустимыми*, и в дальнейшем будем рассматривать только их. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}_{\varkappa}(M_n)$ векторы

$$\Phi_{\bar{v}}(z) = \det(I - z\bar{v})^{\frac{\varepsilon}{\varkappa}}. \tag{4.7}$$

В [3] показано, что для любого $f \in \mathcal{F}_{\varkappa}(M_n)$ справедливо равенство

$$(f,\ \Phi_{\bar{z}}) = f(z). \tag{4.8}$$

Равенство (4.8) показывает, что векторы $\Phi_{\bar{z}}$ при $\varkappa \leqslant \frac{}{2(n+1)}$ в бозевском случае и при всех допустимых $\varkappa$ в фермиевском случае образуют переполненную систему в смысле Клаудера [4].

Систему векторов, обладающую свойством (4.8) в случае, если скалярное произведение $(f_1,\ f_2)$ не задается интегралом по мере, естественно назвать обобщенной переполненной системой. Подобные системы встречались ранее в [8].

Таким образом, при $\varkappa = \frac{1}{k}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, векторы (4.7) в бозевском случае образуют обобщенную переполненную систему.

Параметр $\varkappa$ связан с параметром h, использованным в работах [2, 3], соотношением $h = 2(n+\varepsilon)\varkappa$; он более удобен при перенесении результатов работ [2, 3] на случай бесконечномерных многообразий.

2. Алгебра ковариантных символов. Пусть $\hat{A}$ — оператор в пространстве $\mathcal{F}_{\varkappa}(M_n)$, в области определения которого входят векторы $\Phi_{\bar{z}}$. Среднее значение $\hat{A}$ на $\Phi_{\bar{z}}$

$$A(z,\ \bar{z}) = \frac{(\hat{A}\Phi_{\bar{z}},\ \Phi_{\bar{z}})}{(\Phi_{\bar{z}},\ \Phi_{\bar{z}})} \tag{4.9}$$

называется ковариантным символом оператора $\hat{A}$, $A(z,\ \bar{z})$ допускает очевидное аналитическое продолжение $A(z,\ v)$ до голоморфной функции на произведении $\tilde{M}_n \times \tilde{M}_n$.

В [2, 3] показано, что оператор $\hat{A}$ однозначно восстанавливается по своему ковариантному символу

$$(\hat{A}f)(z) = c_n(\varkappa) \int A(z,\ \bar{v})\, f(v) \left[\frac{\det(I - z\bar{v})}{\det(I - v\bar{v})}\right]^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(v,\ \bar{v}). \tag{4.10}$$

Если $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2$, то соответствующие ковариантные символы связаны соотношением

$$A(z, \bar{z}) = (A_1 * A_2)(z, \bar{z}) =$$
$$= c_n(\varkappa) \int A_1(z, \bar{v}) A_2(v, \bar{z}) \left[\frac{\det(I - z\bar{v})(I - \bar{z}v)}{\det(I - z\bar{z})(I - v\bar{v})}\right]^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(v, \bar{v}). \quad (4.11)$$

В бозевском случае при $\varkappa > \frac{1}{2(n+1)}$ формулы (4.10), (4.11) следует понимать в смысле аналитического продолжения по $\varkappa$. Обозначим через $\mathcal{A}_\varkappa$ множество ковариантных символов таких операторов в $\mathcal{F}_x(M_n)$, для которых векторы $\Phi_{\bar{z}}$ входят в область определения всех степеней. Очевидно, что $\mathcal{A}_\varkappa$ образует ассоциативную алгебру с законом умножения (4.11).

В [2, 3] показано, что умножение (4.11) обладает свойством

$$\lim_{\varkappa \to 0} A_1 * A_2 = A_1 A_2,$$
$$\lim_{\varkappa \to 0} \frac{1}{\varkappa}(A_1 * A_2 - A_2 * A_1) = \frac{1}{i}[A_1, A_2], \quad (4.12)$$

где $A_1 A_2$—обычное произведение функцией, $[A_1, A_2]$—скобка Пуассона (3.11).

Таким образом, семейство ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_\varkappa$ образует, по терминологии работы [2], специальное квантование классической механики на M_n, описанной в § 3.

3. Случай бесконечного числа степеней свободы. Пусть M обозначает одно из бесконечномерных многообразий F или B. Обозначим через E множество квантовых чисел частиц, входящих в рассматриваемую систему. Через dp, $p \in E$, обозначим меру на E, через $L^2(E)$—гильбертово пространство функций с суммируемым квадратом на E по мере dp. Матрицы, с помощью которых было дано первоначальное описание многообразия M, естественно истолковывать как матрицы операторов в $L^2(E)$, $z(p, q) = \langle p | z | q \rangle$:

$$(zf)(p) = \int z(p, q) f(q)\, dq.$$

В $L^2(E)$ существует естественная инволюция, совпадающая с комплексным сопряжением: $f^*(p) = \overline{f(p)}$. С ее помощью определяются операции комплексного сопряжения и транспонирования в пространстве операторов: $(zf^*)^* = \bar{z}f$, $z' = \bar{z}^*$, где знак $*$ в применении к операторам означает эрмитово сопряжение. На матричных элементах эти операции выглядят обычным образом:

$$\langle p | z' | q \rangle = \langle q | z | p \rangle, \quad \langle p | \bar{z} | q \rangle = \overline{\langle p | z | q \rangle}.$$

На многообразии M транзитивно действует группа G собственных канонических преобразований, однако не существует инвариантной меры относительно G. Основные формулы (4.1), (4.10), (4.11) переносятся на M следующим образом. Функцию $f(z)$ на M будем называть аналитической, если аналитическими являются все функции $\varphi(v)$, где $v=PzP$, $\varphi(v)=f(PzP)$, P — ортогональный проектор на конечномерное подпространство, инвариантное относительно инволюции. Положим

$$(f, f)=\sup c_n(\varkappa)\int |f(PzP)|^2 \det(I-PzP\bar{z}P)^{-\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(z, \bar{z}), \quad (4.13)$$

где P — ортогональный проектор на конечномерное подпространство $L\subset L^2(E)$, инвариантное относительно инволюции (супремум берется по всем таким подпространствам); $n=\dim L$, $c_n(\varkappa)$ и $d\mu_n(z, \bar{z})$ те же, что и в формулах (4.2)—(4.4) (z_{ik} — матричные элементы оператора PzP в ортонормированном базисе в L).

Множество аналитических функций, для которых $(f, f)<\infty$, обозначим $\mathcal{F}_\varkappa(M)$. Нетрудно показать, что оно является гильбертовым пространством со скалярным квадратом (4.13).

Пусть $L_1\subset L_2\subset\ldots\subset L^2(E)$ — последовательность подпространств, инвариантных относительно инволюции, такая, что $\bigcup L_k$ плотно в $L^2(E)$. Скалярное произведение в $\mathcal{F}_\varkappa(M)$ может быть задано формулой

$$(f_1, f_2)=\lim_{n\to\infty} c_n(\varkappa)\int f_1(z_n)\overline{f_2(z_n)} \det(I-z_n\bar{z}_n)^{-\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(z, \bar{z}), \quad (4.14)$$

где $z_n=P_nzP_n$, P_n — ортогональный проектор на L_n.

В бозевском случае при $n-1\geqslant\frac{1}{\varkappa}$ интегралы в (4.13), (4.14) понимаются в смысле аналитического продолжения. Таким образом, как в бозевском, так и в фермиевском случае пространства $\mathcal{F}_\varkappa(M)$, $\dim M=\infty$ существуют лишь при $\varkappa$ вида (4.6).

Пусть $\Phi_{\bar{z}}\in\mathcal{F}_\varkappa(M)$ вида (4.7). Нетрудно показать (см. доказательство аналогичного утверждения в [8]), что функции вида

$$f(z)=\sum c_k\Phi_{\bar{z}_k}(z) \quad (4.15)$$

(сумма конечная) образуют плотное множество в $\mathcal{F}_\varkappa(M)$ и что формула (4.8) сохраняет силу в $\mathcal{F}_\varkappa(M)$. Формулы (4.10), (4.11) модифицируются аналогично

$$(\hat{A}f)(z)=\lim_{n\to\infty} c_n(\varkappa)\int A(z_n, \bar{v}_n) f(v_n)\left[\frac{\det(I-z_n\bar{v}_n)}{\det(I-v_n\bar{v}_n)}\right]^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(v_n, \bar{v}_n),$$

$$(A_1*A_2)(z, \bar{z})= \quad (4.16)$$

$$=\lim_{n\to\infty} c_n(\varkappa)\int A_1(z_n, \bar{v}_n) A_2(v_n, \bar{z}_n)\left[\frac{\det(I-z_n\bar{v}_n)(I-v_n\bar{z}_n)}{\det(I-z_n\bar{z}_n)(I-v_n\bar{v}_n)}\right]^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa}} d\mu_n(v_n, \bar{v}_n).$$

Формулы (4.12) сохраняют силу.

Подробнее о затронутых здесь вопросах см. [9].

§ 5. Размноженные пространства. Статистическая квазиклассика

1. Общее определение. Рассмотрим фермионную или бозевскую систему A, ее пространство состояний обозначим через $\mathcal{H}_A$, операторы рождения и уничтожения обозначим соответственно через $\hat{a}^*(p)$, $\hat{a}(p)$, где p — полный набор квантовых чисел частиц. Систему A будем называть эталонной. Обозначим через A_N, где N — целое число, систему, состоящую из N подсистем, каждая из которых является копией системы A. Пространство состояний системы A_N обозначим через $\mathcal{H}_{A_N}$. Операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H}_{A_N}$ обозначим через $\hat{b}_k^*(p)$, $\hat{b}_k(p)$, где p — те же квантовые числа, что и в системе A, $k=1, 2, \ldots, N$. Соотношения коммутации между $\hat{b}_k(p)$, $\hat{b}_k^*(p)$ являются фермиевскими или бозевскими в зависимости от того, какой является система A:

$$[\hat{b}_k(p),\ \hat{b}_k^*(p')]_\pm = h\delta_{kk'}\delta_{pp'}. \tag{5.1}$$

Систему A_N будем называть размноженной системой A, пространство $\mathcal{H}_{A_N}$ — размноженным пространством $\mathcal{H}_A$.

В этом параграфе мы не выделяем случай конечного числа степеней свободы. В связи с этим буква M в дальнейшем обозначает одно из четырех многообразий F_n, B_n, F или B. В случае бесконечного числа степеней свободы квантовые числа, как всегда, считаются точками некоторого множества E с мерой; $\delta_{pp'}$ в (5.1) означает δ-функцию Дирака по этой мере; $\hat{b}_k(p)$, $\hat{b}_k^*(p)$ являются, вообще говоря, не операторами, но операторными обобщенными функциями.

2. Подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$. Положим

$$\Psi_{\bar{z}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\hat{b}_k^*\bar{z}\hat{b}_k^*}\Psi_0, \tag{5.2}$$

где Ψ_0 — вакуумный вектор в $\mathcal{H}_{A_N}$, z — оператор в $L^2(E)$ (E — множество квантовых чисел), $\hat{b}_k^*\bar{z}\hat{b}_k^* = \int \hat{b}_k^*(p)\,\overline{z(p,\ q)}\,b_k^*(q)\,dp\,dq$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N} \subset \mathcal{H}_{A_N}$ подпространство, порожденное векторами вида

$$\Psi = \sum c_k \Psi_{\bar{z}_k}. \tag{5.3}$$

(Сумма конечная.)

Покажем, что пространство $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$ изоморфно пространству $\mathcal{F}_\varkappa(M)$, $\varkappa = \frac{1}{N}$, описанному в § 4.

Сопоставим каждому вектору Ψ вида (5.3) аналитическую функцию $f(z)$ на M:

$$f(z) = (\Psi,\ \Psi_{\bar{z}}). \tag{5.4}$$

Согласно [10],

$$(\Psi_{\bar{z}},\ \Psi_{\bar{v}}) = \int e^{-\frac{1}{2h}\sum\left(b_k^* \bar{z} b_k^* + b_k v' b_k\right) - \frac{1}{h}\sum b_k^* b_k} \prod \frac{db_k^*\, db_k}{h^{-\varepsilon}},$$

где ε то же, что и в (2.2), и в фермиевском случае имеется в виду интеграл по антикоммутирующим переменным. (В [10] рассмотрен лишь случай $h=1$. Общий случай сводится к нему очевидным образом.) Вычисляя обычным образом гауссов интеграл, находим

$$(\Psi_{\bar{v}},\ \Psi_{\bar{z}}) = \det(I - z\bar{v})^{\varepsilon \frac{N}{2}} = \Phi_{\bar{v}}(z), \tag{5.5}$$

где $\Phi_{\bar{v}}$ — та же функция, что и в (4.7), $\varkappa = \frac{2}{N}$. Следовательно, образом элемента (5.3) при отображении (5.4) служит функция

$$f(z) = \sum c_k \Phi_{\bar{z}_k}(z). \tag{5.6}$$

Далее, согласно (5.5), если Ψ имеет вид (5.3), то

$$(\Psi,\ \Psi) = \sum c_k \bar{c}_l \Phi_{\bar{z}_k}(z_l). \tag{5.7}$$

С другой стороны, согласно (4.8), правая часть в (5.7) совпадает со скалярным квадратом f как элемента $\mathcal{F}_\varkappa(M)$, $\varkappa = \frac{2}{N}$. Ввиду того что векторы вида (5.3) образуют плотное множество в $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$, векторы вида (5.6) — в $\mathcal{F}_\varkappa$, отсюда следует, что отображение (5.4) продолжается до изоморфизма между $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$ и $\mathcal{F}_\varkappa$, $\varkappa = \frac{2}{N}$.

3. Допустимые операторы. Рассмотрим в эталонном пространстве $\mathcal{H}_A$ операторные обобщенные функции

$$\hat{A}(p,\ q) = \hat{a}^*(p)\,\hat{a}^*(q), \quad \hat{B}(p,\ q) = \hat{a}^*(p)\,\hat{a}(q). \tag{5.8}$$

Сопоставим им операторные обобщенные функции $\hat{A}_N(p,\ q)$, $\hat{B}_N(p,\ q)$ в пространстве $\mathcal{H}_{A_N}$:

$$\begin{aligned} \hat{A}_N(p,\ q) &= \frac{1}{N}\sum \hat{b}_k^*(p)\,\hat{b}_k^*(q), \\ \hat{B}_N(p,\ q) &= \frac{1}{N}\sum \hat{b}_k^*(p)\,\hat{b}_k(q). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Легко видеть, что пространство $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$ инвариантно относительно $\hat{A}_N(p,\ q)$, $\hat{A}_N^*(p,\ q)$, $\hat{B}_N(p,\ q)$. Следовательно, оно инвариантно относительно кольца операторов, порожденных $\hat{A}_N(p,\ q)$, $\hat{A}_N^*(p,\ q)$, $\hat{B}_N(p,\ q)$. Это кольцо обозначим через $\mathcal{L}_N$. Элементы кольца $\mathcal{L}_N$ назовем *допустимыми операторами*.

Пусть $\hat{H}$ — некоторый оператор в эталонном пространстве $\mathcal{H}_A$, который является функцией от операторов $\hat{A}(p,\ q)$, $\hat{A}^*(p,\ q)$,

$\hat{B}(p, q)$:

$$\hat{H} = \sum \int C_{s_1, \ldots s_n}(x_1, \ldots, x_n) \hat{K}_{s_1}(x_1) \ldots \hat{K}_{s_n}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \qquad (5.10)$$

где для краткости положено $x_i = (p_i, q_i)$, $s_i = 1, 2, 3$, $\hat{K}_1(x) = \hat{A}(p, q)$, $\hat{K}_2(x) = \hat{A}^*(p, q)$, $\hat{K}_3(x) = \hat{B}(p, q)$.

Ввиду некоммутативности $\hat{A}$, $\hat{A}^*$, $\hat{B}$ запись $\hat{H}$ в виде (5.10) неоднозначна. Однако, коль скоро такая запись зафиксирована, оператору $\hat{H}$ можно сопоставить серию операторов $\hat{H}_N$ в пространствах $\mathscr{H}_{A_N}$ по следующей формуле:

$$\hat{H}_N = \sum \int C_{s_1, \ldots s_n}(x_1, \ldots, x_n) \hat{K}_{s_1, N}(x_1) \ldots \hat{K}_{s_n, N}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \qquad (5.11)$$

где $\hat{K}_{1, N} = \hat{A}_N$, $\hat{K}_{2, N} = \hat{A}_N^*$, $\hat{K}_{3, N} = \hat{B}_N$.

Операторы $\hat{H}_N$ являются допустимыми. Следовательно, пространство $\tilde{\mathscr{H}}_{A_N}$ инвариантно для них.

4. Ковариантные символы допустимых операторов. Сопоставим каждому оператору $\hat{H}_N$ его среднее по вектору

$$H_N(z, \bar{z}) = \frac{(\hat{H}_N \Psi_{\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}})}{(\Psi_{\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}})}. \qquad (5.12)$$

Функция $H_N(z, \bar{z})$ является ковариантным символом сужения оператора $\hat{H}_N$ на $\tilde{\mathscr{H}}_{A_N}$ по обобщенной переполненной системе $\Psi_{\bar{z}}$ [1]). Очевидно, что символы $\hat{A}_N(p, q)$, $\hat{A}_N^*(p, q)$, $\hat{B}_N(p, q)$ не зависят от N и в силу этого определяются формулами (2.10).

Далее из (5.11) и формул (4.12) следует, что в широких предположениях относительно $\hat{H}$

$$H_N(z, \bar{z}) = H(z, \bar{z}) + \frac{1}{N} \tilde{H}_N(z, \bar{z}), \qquad (5.13)$$

где $\tilde{H}_N(z, \bar{z})$ имеет предел при $N \to \infty$.

5. Статистическая квазиклассика. Уравнения Гейзенберга в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}_{A_N}$ имеют вид

$$\frac{h}{iN} \frac{d\hat{A}_N}{dt} = [\hat{H}_N, \hat{A}_N], \quad \frac{h}{iN} \frac{d\hat{B}_N}{dt} = [\hat{H}_N, \hat{B}_N]. \qquad (5.14)$$

Переходя от операторов к символам и пользуясь формулами (4.12), находим, что эти уравнения эквивалентны следующим:

$$h \frac{dA}{dt} = [H, A]_P + \frac{1}{N} R_N, \quad h \frac{dB}{dt} = [H, B]_P + \frac{1}{N} L_N, \qquad (5.15)$$

[1]) Система $\Psi_{\bar{z}}$ является переполненной (необобщенной переполненной) в смысле классического определения Клаудера в фермиевском случае при конечном числе степеней свободы и в бозевском при конечном числе степеней свободы и достаточно большом N. Во всех остальных случаях она является обобщенной переполненной. См. § 4.

где $[\ ,\ ]_P$ скобка Пуассона (3.11). В пределе при $N \to \infty$ уравнения (5.15) сходятся к уравнениям классической механики на многообразии M с гамильтоновой функцией $\frac{1}{h} H(z, \bar{z})$. Вместо них можно рассмотреть эквивалентные им уравнения в алгебре Ли группы собственных канонических преобразований. Согласно соображениям, изложенным в конце § 3, эти уравнения имеют вид (3.26). Постоянная Планка h при этом выпадает из уравнений и сохраняется лишь в соотношениях (2.11).

Таким образом, предельный переход при $N \to \infty$ является обычным квазиклассическим предельным переходом. Роль планковской постоянной играет число $\varkappa = \frac{1}{N}$. Ввиду сходства основных величин (5.9), с помощью которых конструируется этот предельный переход, с аналогичными величинами в статистической физике естественно называть эту квазиклассику статистической.

6. Связь между статистической и обычной квазиклассикой. Положим $h=0$. Уравнения (2.11) для бозевского случая имеют при $h=0$ решения $A(p, q) = a^*(p) a^*(q)$, $B(p, q) = a^*(p) a(q)$. Для фермиевского случая уравнения (2.11) имеют только нулевое решение. Несмотря на это, положим также в фермиевском случае $A(p, q) = a^*(p) a^*(q)$, $B(p, q) = a^*(p) a(q)$, но будем рассматривать $a(p)$, $a^*(p)$ не как обычные функции, а как антикоммутирующие. При этом соглашении симметрия между бозевским и фермиевским случаями восстанавливается.

Пусть $H(A, \bar{A}, B, \bar{B})$ — функция на алгебре Ли группы собственных канонических преобразований и $H_1(a^*, a) = H(A, \bar{A}, B, \bar{B})$ при $A(p, q) = a^*(p) a^*(q)$, $\bar{A}(p, q) = a(p) a(q)$, $B(p, q) = a^*(p) a(q)$, $\bar{B}(p, q) = a(p) a^*(q)$. (В фермиевском случае $a(p)$, $a^*(p)$ — антикоммутирующие грассмановские величины.)

Пусть $a(p, t)$, $a^*(p, t)$ — решение классических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da(p)}{dt} &= [H_1, a(p)[= i \frac{\vec{\partial}}{\partial a^*(p)} H_1, \\ \frac{da^*(p)}{dt} &= [H_1, a^*(p)] = -i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a(p)} H_1. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Знаки $\vec{\partial}$, $\overleftarrow{\partial}$ относятся к фермиевскому случаю. Они означают соответственно правую и левую производные. Покажем, что функции $A(p, q \mid t) = a^*(p, t) a^*(q, t)$, $B(p, q \mid t) = a^*(p, t) a(q, t)$ удовлетворяют классическим уравнениям (3.26). В самом деле,

$$\frac{d}{dt} A(p, q) = \frac{da^*(p)}{dt} a^*(q) + a^*(p) \frac{da^*(q)}{dt} =$$

$$= -i \left[\left(\frac{\overleftarrow{\partial} H_1}{\partial a(p)} a^*(q) + a^*(p) \frac{\overleftarrow{\partial} H_1}{\partial a(q)} \right) \right] =$$

$$= -i \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{A}(p', q')} \frac{\overleftarrow{\partial} \bar{A}(p', q')}{\partial a(p)} + \frac{\partial H}{\partial B(p', q')} \frac{\overleftarrow{\partial} B(p', q')}{\partial a(p)} + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial H}{\partial \overline{B}(p',q')}\frac{\overleftarrow{\partial}\overline{B}(p',q')}{\partial a(p)}\Big)a^*(q)+a^*(p)\Big(\frac{\partial H}{\partial \overline{A}(p',q')}\frac{\overleftarrow{\partial}\overline{A}(p',q')}{\partial a(q)}+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial B(p',q')}\frac{\overleftarrow{\partial}B(p',q')}{\partial a(q)}+\frac{\partial H}{\partial \overline{B}(p',q')}\frac{\overleftarrow{\partial}\overline{B}(p',q')}{\partial a(q)}\Big)\Big]dp'\,dq'=$$
$$=-2i\int\Big(\frac{\partial H}{\partial \overline{A}(q',p)}\overline{B}(q',q)+\frac{\partial H}{\partial B(q',p)}A(q',q)+$$
$$+B(p,q')\frac{\partial H}{\partial \overline{A}(q,q')}+A(p,q')\frac{\partial H}{\partial \overline{B}(q,q')}\Big)dq'.$$

Таким образом, окончательно

$$\frac{d}{dt}A=-2i\left(\frac{\partial H}{\partial \overline{A}}\overline{B}+\frac{\partial H}{\partial B}A+B\frac{\partial H}{\partial \overline{A}}+A\frac{\partial H}{\partial \overline{B}}\right). \qquad (5.17)$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}B=-2i\left(\frac{\partial H}{\partial B}B+\frac{\partial H}{\partial \overline{A}}\overline{A}-B\frac{\partial H}{\partial B}-A\frac{\partial H}{\partial A}\right). \qquad (5.18)$$

(При преобразованиях учтены свойства функций A, B, вытекающие из их специального вида $A(p,q)=-\varepsilon A(q,p)$, $B(p,q)=-\varepsilon\overline{B}(q,p)$.)

Очевидно, что уравнения (5.17), (5.18) эквивалентны (3.26) с точностью до замены в (3.26) H на $2H$.

§ 6. Заключительные замечания

1. Континуальный интеграл. Рассмотрим вначале случай конечного числа степеней свободы. Пусть $\hat{H}(t)$ — семейство операторов в пространстве $\mathcal{F}_\varkappa$ с ковариантными символами $H(z,\overline{z}\,|\,t)$. Обозначим через $\hat{G}(t)$ эволюционный оператор

$$\frac{\varkappa}{i}\frac{d\hat{G}}{dt}=\hat{H}(t)\,\hat{G},\quad \hat{G}(0)=1.$$

Следуя методу, предложенному в [12], найдем выражение для ковариантного символа $G(z,\overline{z}\,|\,t)$ оператора $\hat{G}(t)$ с помощью континуального интеграла. Положим

$$\hat{G}_N=\hat{U}(t_1,t_2)\,\hat{U}(t_2,t_3)\,\dots\,\hat{U}(t_{N-1},t_N),\quad t_k=\frac{k}{N}t,$$

где $\hat{U}(t_1,t_2)$ — оператор в $\mathcal{F}_\varkappa$ с ковариантным символом

$$U(z,\overline{z}\,|\,t_1t_2)=\exp\left\{\frac{i}{\varkappa}\int_{t_1}^{t_2}H(z,\overline{z}\,|\,t)\,dt\right\}.$$

Используя многократно формулу (4.11), получаем для символа $G_N(z,\overline{z}\,|\,t)$ оператора $\hat{G}_N$ выражение

$$G_N(z,\overline{z}\,|\,t)=\int\exp\left\{\frac{i}{\varkappa}F_N\right\}\Big[\prod d\sigma(z_k,\overline{z}_k), \qquad (6.1)$$

$$F_N=\sum_0^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} H(z_k,\ \bar z_{k+1}\,|\,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon}{i}\sum_0^{N-1}\mathrm{Sp}\,[\ln(I-z_k\bar z_{k+1})-\ln(I-z_k\bar z_k)]+\mathrm{Sp}\,[\ln(I-\bar z_0 z)-\ln(I-z\bar z)],$$

где $z_0=z,\ \bar z_N=\bar z,\ d\sigma(z,\ \bar z)=c_n(\varkappa)\,d\mu_n(z,\ \bar z)$.

Пусть теперь $z_k=z(t_k)$, где $z(t)$ — дифференцируемая кривая, $t_k=\frac{k}{N}t$. Положим $z(t_{k+1})=z(t_k)+\Delta_k$. С точностью до Δ_k в первой степени

$$\mathrm{Sp}\,[\ln(I-z_k\bar z_{k+1})-\ln(I-z_{k+1}\bar z_{k+1})]=$$

$$=\sum\frac{1}{n}\mathrm{Sp}\,[(z_k\bar z_k)^n-(z_k(\bar z_k+\bar\Delta_k))^n]=-\mathrm{Sp}\,(z_k\bar\Delta_k(I-z_k\bar z_k)^{-1}).$$

Положим $\Delta_k=\dot z(t_k)\,\Delta t_k,\quad \bar\Delta_k=\dot{\bar z}(t_k)\,\Delta t_k,\quad \Delta t_k=\frac{1}{N}t$ и совершим в показателе (6.1) формальный предельный переход при $N\to\infty$. В результате получим окончательное выражение для $G(z,\ \bar z\,|\,t)$:

$$G(z,\ \bar z\,|\,t)=\int\exp\left(\frac{i}{\varkappa}F\right)\prod_{0<\tau<t}d\sigma(z(\tau),\ \bar z(\tau)),\tag{6.2}$$

$$F=\int\limits_0^t L(z(\tau),\ \bar z(\tau),\ \dot z(\tau),\ \dot{\bar z}(\tau)\,|\,\tau)\,d\tau+\frac{\varepsilon}{i}\mathrm{Sp}[\ln(I-\bar z(0)z)-\ln(I-z\bar z)],$$

где

$$L(z,\bar z,\dot z,\dot{\bar z}|\tau)=H(z(\tau),\ \bar z(\tau+0)\,|\,\tau)+\frac{\varepsilon}{i}\mathrm{Sp}\,[z(\tau)\,\dot{\bar z}(\tau)\,(I-z(\tau)\,\bar z(\tau))^{-1}],\tag{6.3}$$

$$z(0)=z,\quad \bar z(t)=\bar z.$$

Аргумент $\bar z(\tau+0)$ в (6.3) означает, что континуальный интеграл (6.2) подразумевает дополнительный предельный переход: вначале надо вычислить $G_\alpha(z,\ \bar z\,|\,t)$, где $G_\alpha(z,\ \bar z\,|\,t)$ определяется формулами, полученными из (6.2), (6.3) заменой $H(z(\tau),\ \bar z(\tau)\,|\,\tau)$ на $H(z(\tau),\ \bar z(\tau+\alpha)\,|\,\tau)$, $\alpha>0$. При $\alpha\to 0$ получаем $G(z,\ \bar z\,|\,t)=\lim\limits_{\alpha\to 0}G_\alpha(z,\ \bar z\,|\,t)$.

В другой статье будет показано, что этот предельный переход осуществляет определенную регуляризацию континуального интеграла (6.2).

2. Размерность пространства $\tilde{\mathcal H}_{A_N}$ в фермиевском случае. Гамильтониан модели A_N в первоначальном виде определен в пространстве $\mathcal H_{A_N}$ более широком, чем $\tilde{\mathcal H}_{A_N}$. Возникает вопрос, не теряем ли мы при переходе от $\mathcal H_{A_N}$ к $\tilde{\mathcal H}_{A_N}$ существенной информации. До некоторой степени ответом на этот вопрос является сравнение размерностей этих пространств в фермиевском случае с конечным числом степеней свободы:

$$\dim \mathcal{H}_A = 2^{n+1}, \quad \dim \mathcal{H}_{A_N} = 2^{(n+1)N}.$$

Согласно общей формуле, установленной в [2], $\dim \tilde{\mathcal{H}}_{A_N} = \dfrac{c_n(\varkappa)}{c_n(\infty)}$. Таким образом,

$$\dim \tilde{\mathcal{H}}_{A_N} = \frac{\Gamma(N+n+1)\ldots\Gamma(N+2n)\,\Gamma(1)\,\Gamma(3)\ldots\Gamma(2n-1)}{\Gamma(N+1)\ldots\Gamma(N+2n-1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+2)\ldots\Gamma(2n)}. \quad (6.4)$$

Заметим, что

$$\frac{\Gamma(N+n+1)}{\Gamma(n+1)} = (n+1)\ldots(N+n),$$

$$\frac{\Gamma(N+2n-1)}{\Gamma(2n-1)} = (2n-1)(2n)\ldots(2n-2+N).$$

Преобразуя аналогичным образом остальные дроби в (6.4) и переставляя множители, преобразуем (6.4) к виду

$$\dim \tilde{\mathcal{H}}_{A_N} = \prod_{k=1}^{N} T_k, \quad T_k = \frac{(n+k)(n+k+1)\ldots(2n+k-1)}{k(k+2)\ldots(k+2n-2)}. \quad (6.5)$$

Далее

$$T_{2s} = \frac{(n+2s)\ldots(2n+2s-1)}{2^n s(s+1)\ldots(s+n-1)} = 2^{-n}\frac{(2n+2s-1)!\,(s-1)!}{(n+2s-1)!\,(s+n-1)!},$$

$$T_{2s+1} = \frac{(n+2s+1)\ldots(2n+2s)(2s+2)(2s+4)\ldots(2s+2n)}{(2s+1)\ldots(2s+2n-1)(2s+2)(2s+4)\ldots(2s+2n)} = 2^n\frac{(2s)!\,(s+n)!}{s!\,(2s+n)!}.$$

Применяя формулу Стирлинга, находим асимптотику T_k при $n \to \infty$:

$$T_{2s} \sim 2^n n^{-s+\frac{1}{2}} 2^{2s}(s-1)!, \quad T_{2s+1} \sim 2^n (n+1)^{-s}.$$

Отсюда

$$\ln \dim \tilde{\mathcal{H}}_{A_N} = nN\ln 2 - c\ln 2n + O(1). \quad (6.6)$$

Таким образом, в главном логарифмическом члене $\dim \mathcal{H}_{A_N} = \dim \tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$. Это позволяет надеяться, что переход от пространства $\mathcal{H}_{A_N}$ к $\tilde{\mathcal{H}}_{A_N}$ в случае большого числа степеней свободы не влечет к существенной потере информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gross D., Neveu A.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, № 10, p. 3235.
2. Березин Ф. А.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, т. 38, № 5, с. 1116—1175.
3. Березин Ф. А.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т. 39, № 2, с. 363—402.
4. Klauder U. R. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1055.
5. Березин Ф. А.—Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 5, с.1134—1167.

6. Berezin F. A., Marinov M. S. Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of classical Mechanics.— Ann. of Phys., 1977, v. 104, № 2, p. 336.
7. Хуа Ло Кен. Гармонический анализ функций многих переменных в классических областях.— М.: ИЛ, 1959.
8. Berezin F. A.— Rep. Math. Phys., 1976, v. 9, № 2, p. 15—30.
9. Шерешевский И. А. Вестн. МГУ, 1977, № 4, с. 28—36.
10. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
11. Березин Ф. А.— Функц. анализ и его прил., 1967, т. 1, вып. 2, с. 1—14.
12. Березин Ф. А.— ТМФ, 1971, т. 6, № 2, с. 194—211.
13. Гиндикин С. Г.— Функц. анализ и его прил., 1975, т. 9, с. 59—61.