А.Л.Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

2-е над.— М.: Паука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 240 с.

В книге на примере решения ряда классических проблем налагаются основы аналитических методов теории чисел. Второе издание значительно отличается от первого: добавлена глава о целых точках, переработаны главы о дзета-функции и ее применениях, даны указания к решению задач.

Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студентам, желающим творчески усвоить аппарат современной аналитической теории чисел.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Аналитическая теория чисел — часть теории чисел, в которой наряду с собственными методами существенно используется аналитический аппарат математики.

Цель настоящей книги — познакомить широкий круг читателей с центральными проблемами аналитической теории чисел. Оставляя в стороне второстепенные детали, я старался изложить то главное, что привело к современному состоянию теории. Поэтому часто даны не лучшие известные к настоящему времени результаты, однако все они принципиально не отличаются от последних.

Книга посвящена четырем проблемам аналитической теории чисел — проблеме целых точек в плоских областях, проблеме распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях, проблеме Гольдбаха и проблеме Варинга. На примере решения этих проблем изложены основные методы аналитической теории чисел — метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова, метод комплексного интегрирования, круговой метод Г. Харди, Д. Литлвуда и С. Рамануджана.

После каждой главы помещены задачи; они объединены по темам и решать их рекомендуется в порядке следования. Задачи уточняют доказанные теоремы или вводят в круг новых идей современной теории чисел.

От читателя требуется знание теории чисел в объеме книги И. М. Виноградова «Основы теории чисел», математического анализа в объеме университетского курса, теории функций комплексного переменного в объеме книги И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного».

Книгу рекомендуется читать подряд, так как все главы связаны между собой. Если какой-то прием в книге повторяется несколько раз, то первое его употребление изложено подробно, следующее — менее подробно. Каждое утверждение, включая переход от одного соотношения к другому (равенство, неравенство), должно быть читателем понято (обосновано). Только такое чтение принесет пользу.

Особое место в книге занимают задачи, которые, в основном, очень трудные; они могут служить темами серьезной исследовательской работы.

Темы, близкие к изложенным в книге, исторические справки и литературу можно найти в монографиях [1]—[12].

Нумерация утверждений и формул в каждой главе своя; при ссылках на утверждения из других глав указывается глава, например, теорема 2, III означает: теорема 2 гл. III.

Второе издание значительно отличается от первого: добавлена глава о целых точках, перестроены доказательства ряда теорем в главах III—VII, X, XI, даны краткие решения или указания к решению задач.

Большую помощь при работе над книгой мне оказали Г. И. Архипов, С. М. Воронин, А. Ф. Лаврик, В. Н. Чубариков. Рукопись была перепечатана и оформлена Л. Н. Абрамочкиной и Р. И. Сорокиной.

Я глубоко благодарен всем названным товарищам.

А. А. Карацуба

ОБОЗНАЧЕНИЯ

c, c_0, c_1, ... — абсолютные положительные постоянные, в разных теоремах, вообще говоря, разные.

При положительном A записи $B = O(A)$, $B \ll A$ означают, что $|B| \leqslant cA$; запись $A \asymp B$ означает, что

$$c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A.$$

ε, ε_1 — положительные сколь угодно малые постоянные числа, n, m, k, l, N — натуральные числа; везде кроме гл. II p, p_1, ... — простые числа. $\mu(n)$ — функция Мёбиуса,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n = p^2 m; \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \ldots p_k. \end{cases}$$

При $x > 0$

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \quad \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

где

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u} \right); \qquad \exp F = e^F.$$

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n = p^k; \\ 0, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

$\varphi(k)$ — функция Эйлера — число натуральных чисел, меньших k и взаимно простых с k.

$\psi(x)$ — функция Чебышёва,

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n); \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1;$$

при $l \leqslant k$, $(l, k) = 1$,

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod k \\ n \leqslant x}} \Lambda(n); \qquad \pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod k \\ p \leqslant x}} 1.$$

$\tau(n)$ — число натуральных делителей n; $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $x_1 \ldots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$; таким образом, $\tau_2(n) = \tau(n)$; $\Omega(n)$ — число простых делителей n. При вещественном α, $[\alpha]$ — целая часть α — наибольшее целое число, не превосходящее α; $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α; $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ — расстояние от α до ближайшего целого числа.

s — комплексное число, $s = \sigma + it$, где $i^2 = -1$, $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$; $\bar{s} = \sigma - it$; вообще $\bar{f}$ — величина, комплексно-сопряженная с f; везде $\ln s = \log s$ — главная ветвь логарифма; γ — постоянная (константа) Эйлера,

$$\gamma = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m\right);$$

нетривиальные нули дзета-функции Римана и L-рядов Дирихле нумеруются в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей; тригонометрическая сумма — конечная сумма вида

$$\sum_{n \leqslant P} G(n) \exp(2\pi i F(n)),$$

где G и F — действительные функции натурального аргумента n,

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

ГЛАВА I

ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ

В этой главе рассматриваются первые задачи теории целых точек, именно «проблема Гаусса о числе целых точек в круге» и «проблема делителей Дирихле». Далее считаем, что на плоскости задана декартова система координат XOY.

§ 1. Постановка задачи, вспомогательные утверждения и простейшие результаты

Определение. *Точка M с координатами (x, y) называется целой, если x и y — целые числа.*

Рассмотрим круг $x^2+y^2 \leqslant R$ и обозначим через $K(R)$ число целых точек в этом круге. При больших R величина $K(R)$ близка к площади круга πR. Обозначим через $\Delta(R)$ разность между $K(R)$ и πR, $\Delta(R)=K(R)-\pi R$.

Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины $|\Delta(R)|$ получить возможно более точную оценку сверху при $R\to+\infty$.

Аналогично формулируется проблема делителей Дирихле. Рассмотрим гиперболу $xy=R$ и число $L(R)$ целых точек с положительными координатами под ней. Пусть

$$\Delta_1(R)=L(R)-R(\ln R+2\gamma-1),\ R\to+\infty,$$

где γ — постоянная Эйлера. Для величины $|\Delta_1(R)|$ требуется получить возможно более точную оценку сверху.

Из определения $L(R)$ и функции $\tau(n)$ — числа делителей n — следует равенство

$$L(R)=\sum_{n\leqslant R}\tau(n),$$

которое объясняет название проблемы.

Сформулированные проблемы являются частными случаями более общей проблемы о числе целых точек в области, ограниченной кривой $y=f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, причем считаются точки $M=(x, y)$

с условием $a < x \leqslant b$, $0 < y \leqslant f(x)$. Обозначим это число буквой T. Тогда

$$T = \sum_{a<x\leqslant b} [f(x)] = \sum_{a<x\leqslant b} f(x) - \sum_{a<x\leqslant b} \{f(x)\}. \qquad (1)$$

Тем самым возникают **две задачи**: 1) нахождение значения первой суммы; 2) нахождение возможно более точных асимптотических формул для второй суммы. Решение первой задачи при достаточно общих предположениях относительно $f(x)$ дается теоремой 1. Вторая задача составляет основную трудность проблем теории целых точек.

Теорема 1 (**формула Эйлера — Маклорена**). *Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определяются равенствами*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u)\, du.$$

Тогда

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)\, dx + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) + \sigma(a) f'(a) - \\ - \sigma(b) f'(b) + \int_a^b \sigma(x) f''(x)\, dx.$$

Доказательство. Будем предполагать, что на интервале (a, b) лежит по крайней мере одна целая точка. Разбивая промежуток интегрирования целыми точками на новые, получаем равенство

$$\int_a^b \sigma(x) f''(x)\, dx = \int_a^{[a]+1} \sigma(x) f''(x)\, dx + \\ + \sum_{n=[a]+1}^{[b]-1} \int_n^{n+1} \sigma(x) f''(x)\, dx + \int_{[b]}^b \sigma(x) f''(x)\, dx.$$

На каждом из получившихся интервалов интегрирования функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ — непрерывно дифференцируемые, причем $\sigma'(x) = \rho(x)$. Поэтому, интегрируя дважды по частям, найдем

$$\int_a^{[a]+1} \sigma(x) f''(x)\,dx =$$

$$= -\sigma(a) f'(a) + \frac{1}{2} f([a]+1) + \rho(a) f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x)\,dx;$$

$$\int_n^{n+1} \sigma(x) f''(x) dx = \frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx;$$

$$\int_{[b]}^{b} \sigma(x) f''(x)\,dx =$$

$$= \sigma(b) f'(b) - \rho(b) f(b) + \frac{1}{2} f([b]) - \int_{[b]}^{b} f(x)\,dx.$$

Подставляя эти формулы в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы.

Замечание. Часто применяется более простая формула суммирования:

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) - \int_a^b \rho(x) f'(x)\,dx. \quad (2)$$

Здесь уже достаточно, чтобы $f(x)$ была непрерывно дифференцируема на $[a, b]$.

Перейдем к проблемам Гаусса и Дирихле.

Теорема 2 (Гаусс). *Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$K(R) = \pi R + \Delta(R),$$
$$\Delta(R) = O(\sqrt{R}).$$

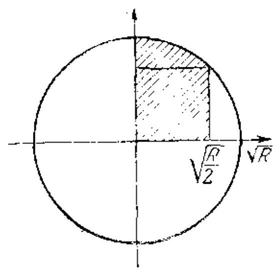

Рис. 1.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию

$$0 < x \leqslant \sqrt{R/2}, \quad 0 < y \leqslant \sqrt{R - x^2}$$

(см. рис. 1). Весь круг K: $x^2 + y^2 \leqslant R$, состоит из восьми областей, равных этой трапеции. Учитывая пересечения этих областей по квадратам со стороной $\sqrt{R/2}$ и применяя формулу 1, находим

$$K(R)=1+4[\sqrt{R}]+8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}[\sqrt{R-x^2}]-$$
$$-4([\sqrt{R/2}])^2=8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}\sqrt{R-x^2}-2R+$$
$$+4\sqrt{2R}\{\sqrt{R/2}\}+4\sqrt{R}-8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}\{\sqrt{R-x^2}\}+O(1).$$

Вычислим предпоследнюю сумму, пользуясь теоремой 1:

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}\sqrt{R-x^2}=\int_0^{\sqrt{R/2}}\sqrt{R-u^2}du+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}\right)\sqrt{\frac{R}{2}}-$$
$$-\frac{\sqrt{R}}{2}+\sigma(\sqrt{R/2})\frac{\sqrt{R/2}}{\sqrt{R/2}}+\int_0^{\sqrt{R/2}}\sigma(u)\frac{d^2}{du^2}(\sqrt{R-u^2})du.$$

Так как $|\sigma(u)|\leqslant 1/8$ и первый интеграл равен площади рассматриваемой криволинейной трапеции $\pi R/8+R/4$, то

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}\sqrt{R-x^2}=\frac{\pi R}{8}+\frac{R}{4}+\frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}}-$$
$$-\sqrt{\frac{R}{2}}\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}-\frac{\sqrt{R}}{2}+O(1).$$

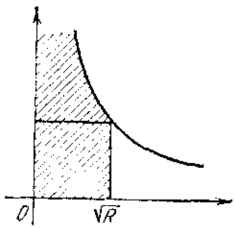

Рис. 2.

Отсюда находим

$$K(R)=\pi R+\Delta(R),$$

где

$$\Delta(R)=2\sqrt{2R}-8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}}\{\sqrt{R-x^2}\}+O(1)=O(\sqrt{R}),\tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Дирихле). *Для $L(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$L(R)=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R),\qquad \Delta_1(R)=O(\sqrt{R}),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию (см. рис. 2) $1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}$, $0<y\leqslant R/x$. Область L состоит из двух областей, равных этой трапеции.

Применяя формулу 1, найдем

$$L(R)=2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left[\frac{R}{x}\right]-([\sqrt{R}])^2=$$

$$=2R\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\frac{1}{x}-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}-R+2\sqrt{R}\{\sqrt{R}\}+O(1).$$

Из теоремы 1 следует

$$\sum_{1<x\leqslant\sqrt{R}}\frac{1}{x}=\int_1^{\sqrt{R}}\frac{du}{u}+\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{1}{2}+\sigma(\sqrt{R})\frac{1}{R}-$$

$$-\sigma(1)+2\int_1^{\sqrt{R}}\sigma(u)\frac{du}{u^3}=\ln\sqrt{R}+\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-$$

$$-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{du}{u^3}+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

По определению постоянной Эйлера,

$$\gamma=\lim_{Y\to+\infty}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant Y}\frac{1}{n}-\ln Y\right);$$

применяя к сумме в скобках теорему 1, найдем

$$\gamma=-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{du}{u^3}.$$

Тем самым для величины $L(R)$ получаем формулу

$$L(R)=R\ln R+2\sqrt{R}\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)+(2\gamma-1)R-$$

$$-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+2\sqrt{R}\{\sqrt{R}\}+O(1)=$$

$$=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R),$$

где

$$\Delta_1(R)=\sqrt{R}-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+O(1)=O(\sqrt{R}),\quad(4)$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если дробные доли функций $f(x)=\sqrt{R-x^2}$ при $0<x\leqslant\sqrt{R/2}$ и $f(x)=R/x$ при $0<x\leqslant\sqrt{R}$

распределены «равномерно», т. е. количество дробных долей $f(x)$, попадающих на любой интервал $(a, b) \subset [0, 1]$, пропорционально длине (a, b), то

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}} \{\sqrt{R-x^2}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2}} + o(\sqrt{R}),$$

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R}} \left\{\frac{R}{x}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{R} + o(\sqrt{R})$$

(для этого достаточно $[0, 1)$ разбить на «малые» равные интервалы), и в теоремах 2 и 3 получается уточнение

$$\Delta(R) = o(\sqrt{R}), \quad \Delta_1(R) = o(\sqrt{R}).$$

§ 2. Связь проблем теории целых точек с тригонометрическими суммами

Проблема целых точек в § 1 сведена к проблеме асимптотического поведения суммы дробных долей $f(x)$. Последняя тесно связана с проблемой распределения значений $\{f(x)\}$, которая в свою очередь сводится к исследованию тригонометрических сумм. Установление этих связей и составляет основное содержание § 2.

В рассматриваемых вопросах часто полезными бывают функции, близкие к характеристическим функциям интервалов, но значительно более гладкие.

В следующей лемме строятся такие функции.

Лемма А. *Пусть $r \geqslant 1$, r — целое, α и β — вещественные, $0 < \Delta < 1/4$, $\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям*

1) $\psi(x) = 1$ *в промежутке* $\alpha + \frac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant \beta - \frac{\Delta}{2}$;

2) $0 < \psi(x) < 1$ *в промежутках*

$$\alpha - \frac{\Delta}{2} < x < \alpha + \frac{\Delta}{2} \quad \text{и} \quad \beta - \frac{\Delta}{2} < x < \beta + \frac{\Delta}{2};$$

3) $\psi(x) = 0$ *в промежутке* $\beta + \frac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - \frac{\Delta}{2}$;

4) $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} g(m)\, e^{2\pi i m x},$$

где $|g(m)| \leqslant \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$

Доказательство. Зададим функцию $\psi_0(x)$ равенствами (см. рис. 3)

1) $\psi_0(x)=1$ при $\alpha<x<\beta$;

2) $\psi_0(\alpha)=\psi_0(\beta)=1/2$;

3) $\psi_0(x)=0$ при $\beta<x<1+\alpha$;

4) $\psi_0(x)=\psi_0(x+1)$.

Раскладывая ее в ряд Фурье, найдем

$$\psi_0(x)=a_{0,0}+\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{+\infty} a_{m,0}e^{2\pi i m x},$$

причем

$$a_{0,0}=\int_0^1 \psi_0(x)\,dx=\beta-\alpha;$$

$$a_{m,0}=\int_0^1 \psi_0(x)\,e^{-2\pi i m x}dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta e^{-2\pi i m x}dx=i\,\frac{e^{-2\pi i m\beta}-e^{-2\pi i m\alpha}}{2\pi m}\quad\text{при}\quad m\neq 0.$$

Возьмем теперь $\delta=\Delta/(2r)$ и последовательно определим

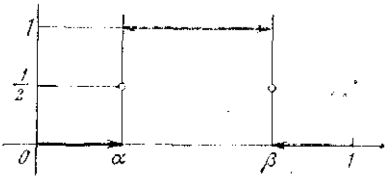

Рис. 3.

$\psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_\rho(x)$ равенствами

$$\psi_\rho(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_{\rho-1}(x+u)\,du.$$

Функция $\psi_\rho(x)$ обладает свойствами

1) $\psi_\rho(x)=1$ при $\alpha+\rho\delta\leqslant x\leqslant\beta-\rho\delta$;

2) $0<\psi_\rho(x)<1$ при $\alpha-\rho\delta<x<\alpha+\rho\delta$ и при $\beta-\rho\delta<$ $<x<\beta+\rho\delta$;

3) $\psi_\rho(x)=0$ при $\beta+\rho\delta\leqslant x\leqslant 1+\alpha-\rho\delta$;

4) $\psi_\rho(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a_{m,\rho} e^{2\pi i m x}$,

где $\quad a_{m,\rho} = i \dfrac{e^{-2\pi i m\beta} - e^{-2\pi i m\alpha}}{2\pi m} \left(\dfrac{e^{2\pi i m\delta} - e^{-2\pi i m\delta}}{4\pi i m\delta} \right)^\rho$.

Свойства 1—3 следуют непосредственно из определения $\psi_\rho(x)$ и свойств $\psi_{\rho-1}(x)$. Докажем свойство 4, предполагая, что оно верно для $\psi_{\rho-1}(x)$.

Имеем

$$a_{0,\rho} = \int_0^1 \psi_\rho(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\delta} \left(\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_{\rho-1}(x+u)\,du \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u)\,dx \right) = \beta - \alpha;$$

$$a_{m,\rho} = \int_0^1 \psi_\rho(x)\, e^{-2\pi i m x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\delta} \left(\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_{\rho-1}(x+u)\,du \right) e^{-2\pi i m x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u)\, e^{-2\pi i m x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{2\pi i m u} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u)\, e^{-2\pi i m (x+u)} dx \right) =$$

$$= \frac{a_{m,\rho-1}}{2\delta} \cdot \frac{e^{2\pi i m\delta} - e^{-2\pi i m\delta}}{2\pi i m} =$$

$$= i \frac{e^{-2\pi i m\beta} - e^{-2\pi i m\alpha}}{2\pi m} \left(\frac{e^{2\pi i m\delta} - e^{-2\pi i m\delta}}{4\pi i m\delta} \right)^\rho \quad \text{при} \quad m \neq 0,$$

что и требовалось доказать. Полагая $\rho = r$, получим утверждение леммы.

Построенная функция $\psi(x)$ изображена на рис. 4.

Следующая лемма сводит вопрос об асимптотическом поведении суммы дробных долей различных функций к оценке тригонометрических сумм.

Л е м м а В. *Пусть* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_Q$ — *вещественные числа*, $0 \leqslant \delta_s < 1$, $s = 1, 2, \ldots, Q$. *Пусть, далее*, r — *целое число*, $r \geqslant 1$, $0 < \Delta < 1/8$, R, α *и* β — *вещественные числа с условием* $\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta$, $\psi(x)$ — *функция леммы А, от-*

вечающая заданным Δ, α, β, r. *Если теперь при любых допустимых значениях* α *и* β *для суммы* $U(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^{Q} \psi(\delta_s)$ *выполняется соотношение* $U(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)Q + O(R)$, *то*

а) *при любом* σ *с условием* $0 < \sigma \leqslant 1$ *число* A_σ *значений* δ_s, *подчиненных неравенству* $\delta_s < \sigma$, *выражается формулой* $A_\sigma = \sigma Q + R_\sigma$, *где* $R_\sigma = O(R) + O(\Delta Q)$;

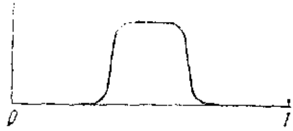

Рис. 4.

б) *имеет место равенство*

$$S = \sum_{s=1}^{Q} \delta_s = \frac{1}{2} Q + O(R) + O(\Delta Q).$$

Доказательство. а) При $0 < \beta - \alpha \leqslant 1$ обозначим через $D(\alpha, \beta)$ *количество чисел* δ_s с условием $\alpha \leqslant \delta_s < \beta \pmod 1$. Если $2\Delta < \beta - \alpha \leqslant 1 - 2\Delta$, то из очевидного неравенства

$$U\left(\alpha + \frac{\Delta}{2}, \beta - \frac{\Delta}{2}\right) \leqslant D(\alpha, \beta) \leqslant U\left(\alpha - \frac{\Delta}{2}, \beta + \frac{\Delta}{2}\right)$$

и условий леммы следует, что

$$D(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)Q + O(R) + O(\Delta Q).$$

Это соотношение распространяется на случай произвольных α и β, $0 < \beta - \alpha \leqslant 1$, с помощью таких равенств: если $0 < \beta - \alpha < 2\Delta$, то

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 1 - 2\Delta) - D(\beta, \alpha + 1 - 2\Delta);$$

если $1 - 2\Delta \leqslant \beta - \alpha < 1$, то

$$D(\alpha, \beta) = D\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right) + D\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta\right).$$

Отсюда при $\alpha = 0$, $\beta = \sigma$ следует первое утверждение леммы.

б) Будем считать $R < 0{,}1Q$, так как в противном случае утверждение становится тривиальным. Возьмем $n = [QR^{-1}]$, $\nu = 1/n$; согласно а) находим (полагаем $A_0 = 0$, $R_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
A_\nu &= \nu Q + R_\nu, & A_\nu - A_0 &= \nu Q + R_\nu - R_0,\\
A_{2\nu} &= 2\nu Q + R_{2\nu}, & A_{2\nu} - A_\nu &= \nu Q + R_{2\nu} - R_\nu,\\
A_{3\nu} &= 3\nu Q + R_{3\nu}, & A_{3\nu} - A_{2\nu} &= \nu Q + R_{3\nu} - R_{2\nu},\\
&\dots & &\dots\\
A_{n\nu} &= n\nu Q + R_{n\nu}, & A_{n\nu} - A_{(n-1)\nu} &= \nu Q + R_{n\nu} - R_{(n-1)\nu}.
\end{aligned}$$

Количество чисел δ_s с условием $(k-1)\nu \leqslant \delta_s < k\nu$ равно $A_{k\nu} - A_{(k-1)\nu}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому, умножая получившиеся выражения для $A_{k\nu} - A_{(k-1)\nu}$ на $(k-1)\nu$ и складывая, получим нижнюю оценку для S, а умножая на $k\nu$ и складывая,— верхнюю оценку, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (\nu Q + R_{k\nu} - R_{(k-1)\nu})(k-1)\nu \leqslant$$
$$\leqslant S \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\nu Q + R_{k\nu} - R_{(k-1)\nu})\, k\nu.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{n} \nu^2 Q (k-1) = \nu^2 Q \frac{n(n-1)}{2} = \frac{Q}{2} + O(R);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \nu^2 Q k = \nu^2 Q \frac{n(n+1)}{2} = \frac{Q}{2} + Q(R);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \nu k (R_{k\nu} - R_{(k-1)\nu}) = \nu \sum_{k=1}^{n} (kR_{k\nu} - (k-1) R_{(k-1)\nu} -$$
$$- R_{(k-1)\nu}) = \nu (nR_{n\nu} - R_{1\nu} - \ldots - R_{(n-1)\nu}) = O(R) + O(\Delta Q);$$

$$\sum_{k=1}^{n} (R_{k\nu} - R_{(k-1)\nu})(k-1)\nu = O(R) + O(\Delta Q).$$

Отсюда утверждение б) следует тривиально.

Из доказанной леммы видно, что для асимптотического вычисления суммы $\{f(x)\}$ надо уметь вычислять сумму $\psi(f(x))$, а из леммы А следует, что это вычисление сводится к оценкам тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x} e^{2\pi i m f(x)}, \qquad m \neq 0.$$

§ 3. Теоремы о тригонометрических суммах

При определенных условиях, наложенных на функцию $f(x)$, стоящую в экспоненте, тригонометрическую сумму можно с хорошей точностью заменить другой, более «короткой», т. е. с меньшим числом слагаемых в ней; тривиальная оценка последней уже дает не тривиальную оценку первоначальной суммы.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим* *условиям: существуют числа H, U, A,*

$$H>0, \quad U \gg A \gg 1, \quad 0<b-a \leqslant U,$$

такие, что

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1},$$

и число участков монотонности функции $\frac{f'(x)}{\varphi(x)-n}$, где n — произвольное целое число, ограничено абсолютной постоянной. Тогда при любом Δ из интервала $(0, 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(a)-\Delta\leqslant n\leqslant f'(b)+\Delta} \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i(f(x)-nx)}dx + \\ + O(H\ln U) + O(H(f'(b)-f'(a))), \quad (5)$$

причем постоянные в знаках O зависят только от Δ.

Доказательство. Будем считать $b-a \geqslant c > 10$, так как в противном случае утверждение леммы тривиально. Кроме того, можно считать, что $0<f'(x) \ll UA^{-1}$, $a \leqslant x \leqslant b$. Действительно, если (5) доказано при последнем ограничении, то

$$0 \leqslant \frac{d}{dx}(f(x)-[f'(a)]\,x) = f'(x)-[f'(a)] = \\ = (x-a)\,f''(\xi)+0 \ll UA^{-1};$$

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i(f(x)-[f'(a)]x)} = \\ = \sum_{f'(a)-[f'(a)]-\Delta\leqslant n\leqslant f'(b)-[f'(a)]+\Delta} \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i(f(x)-[f'(a)]x-nx)}dx + \\ + O(H\ln U) + O((f'(b)-f'(a))H) = \\ = \sum_{f'(a)-\Delta\leqslant n\leqslant f'(b)+\Delta} \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i(f(x)-nx)}dx + \\ + O(H\ln U) + O((f'(b)-f'(a))H).$$

Возьмем $m=[10U^3]$ и при $[a]+2 \leqslant M \leqslant [b]-1$ рассмотрим интеграл W_M,

$$W_M = \int_{-0,5}^{+0,5} \varphi(M+x)\, e^{2\pi i f(M+x)} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x}\, dx.$$

Так как

$$\frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{n=-m}^{m} e^{2\pi i n x}, \tag{6}$$

то $\int\limits_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x}\, dx = 1$, и, следовательно, $W_M = \varphi(M) e^{2\pi i f(M)} + V_M$, где

$$V_M = \int\limits_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \left(\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}\right) dx.$$

Оценим V_M. Для этого представим V_M в виде суммы трех интегралов:

$$V_M = \int\limits_{-1/m}^{+1/m} + \int\limits_{-1/2}^{-1/m} + \int\limits_{+1/m}^{1/2}.$$

Первый интеграл оценим тривиально, воспользовавшись формулой конечных приращений:

$$\int\limits_{-1/m}^{+1/m} \ll \int\limits_{-1/m}^{+1/m} \frac{(|\varphi'| + |\varphi|\,|f'|)\,|x|}{|x|}\, dx \ll \frac{U}{A}\,\frac{H}{m}.$$

Второй и третий интегралы оцениваются одинаково. Оценим, например, второй, предварительно проинтегрировав по частям:

$$\int\limits_{1/m}^{1/2} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \left(\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}\right) dx =$$

$$= -\frac{\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}}{\sin \pi x} \cdot \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} \Bigg|_{1/m}^{1/2} +$$

$$+ \int\limits_{1/m}^{1/2} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi}\, Y_x\, dx,$$

где

$$Y_x = \frac{e^{2\pi i f(M+x)} \left(\varphi'(M+x) + 2\pi i f'(M+x)\right)}{\sin \pi x} -$$

$$- \frac{\left(\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}\right) \pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x},$$

Первое слагаемое является величиной порядка $O\left(\frac{UH}{Am}\right)$. Оценим оставшийся интеграл. Имеем

$$Y_x \ll \frac{UH}{A|x|},$$

$$\int\limits_{1/m}^{1/2} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x dx \ll \frac{UH}{Am} \int\limits_{1/m}^{1/2} \frac{dx}{x} \ll \frac{UH}{Am} \ln m.$$

Таким образом,

$$V_M \ll \frac{UH}{Am} \ln m \ll \frac{H}{AU};$$

$$W_M = \varphi(M) e^{2\pi i f(M)} + O\left(HA^{-1}U^{-1}\right).$$

Суммируя последнее соотношение по M, пользуясь определением W_M и формулой (6), последовательно получаем

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} W_M + O(H) =$$

$$= \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int\limits_{-0,5}^{+0,5} \sum_{n=-m}^{m} \varphi(M+x) e^{2\pi i (f(M+x)-nx)} dx + O(H) =$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int\limits_{M-0,5}^{M+0,5} \varphi(x) e^{2\pi i (f(x)-nx)} dx + O(H) =$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} I_n + O(H), \quad (7)$$

где

$$I_n = \int\limits_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} \varphi(x) e^{2\pi i (f(x)-nx)} dx.$$

Оценим I_n при $n \leqslant f'(a) - \Delta$. Так как $f''(x) > 0$, то функция $f'(x) - n$ монотонно возрастает, т. е.

$$f'(x) \geqslant f'([a]+1,5) \geqslant f'(a),$$

поэтому

$$I_n = \frac{\varphi(x)}{f'(x)-n}\Bigg|_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} - \int\limits_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} e^{2\pi i (f(x)-nx)} d\,\frac{\varphi(x)}{f'(x)-n}.$$

По условию леммы функция $\varphi(x)/(f'(x)-n)$ имеет конечное число участков монотонности. Следовательно,

$$I_n \ll \frac{H}{f'([a]+1{,}5)-n} \leqslant \frac{H}{f'(a)-n}.$$

При $n \geqslant f'(b)+\Delta$ получаем аналогичную оценку:

$$I_n \ll H/(n-f'(b)).$$

Тем самым из (7) и полученных оценок I_n приходим к равенству

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(a)-\Delta\leqslant n\leqslant f'(b)+\Delta} I_n + O(H \ln U).$$

Кроме того, имеем

$$I_n = \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i (f(x)-nx)} dx + O(H);$$

отсюда и из последней формулы следует утверждение леммы.

Следствие. *Пусть выполняются условия леммы 1 и пусть, кроме того,* $|f'(x)| \leqslant \delta < 1$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Тогда

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} dx + O(H \ln U),$$

где постоянная в знаке O зависит только от δ.

Лемма 2. *Пусть $F(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:* 1) *существуют числа H, U, A,*

$$H > 0, \quad U \gg A \gg 1,$$

такие, что

$$A^{-1} \ll F''(x) \ll A^{-1}, \quad F'''(x) \ll A^{-1}U^{-1},$$
$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2};$$

2) *при некотором c, $a \leqslant c \leqslant b$,*

$$F'(c) = 0;$$

3) *функция G,*

$$G = \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F(x+c)-F(c))F''(c)}},$$

имеет конечное число участков монотонности. Тогда *имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i F(x)}dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi(c)\, e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{F''(c)}} + O(H) +$$

$$+ O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \sqrt{A}\right)\right) + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Доказательство. Разбивая точкой c промежуток интегрирования на две части, получаем

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i F(x)}dx = \int_a^c + \int_c^b. \tag{8}$$

Вычислим второй интеграл. Имеем

$$J = \int_c^b \varphi(x)\, e^{2\pi i F(x)}dx = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{b-c} \varphi(x+c)\, e^{2\pi i (F(x+c)-F(c))}dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $F(x+c) - F(c) = u$:

$$J = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{F(b)-F(c)} \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)}\, e^{2\pi i u}du$$

(здесь $\varphi(x+c)$ и $F'(x+c)$ следует рассматривать как функции u). Сравним теперь J с интегралом J',

$$J' = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{F(b)-F(c)} \varphi(c) \sqrt{\frac{1}{2uF''(c)}}\, e^{2\pi i u}du.$$

Имеем оценку

$$|J - J'| \leqslant \left| \int_0^{F(b)-F(c)} G(u)\, e^{2\pi i u}du \right|,$$

где $\quad G(u) = \dfrac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \dfrac{\varphi(c)}{\sqrt{2uF''(c)}}.$

По условию леммы функция $G(u)$ будет кусочно-монотонной. Поэтому, представляя $e^{2\pi i u}$ в виде $\cos 2\pi u + i \sin 2\pi u$, разбивая промежуток интегрирования на промежутки единичной длины и пользуясь кусочной монотонностью $G(u)$, приходим к оценке

$$|J - J'| \ll \max_{0 \leqslant u \leqslant F(b)-F(c)} |G(u)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant b-c} \left| \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F(x+c)-F(c))F''(c)}} \right|.$$

Далее,

$$F(x+c)-F(c)=\frac{1}{2}F''(c)x^2\left(1+O\left(xU^{-1}\right)\right),$$

$$F'(x+c)=F''(c)x\left(1+O\left(xU^{-1}\right)\right),$$

$$\varphi(x+c)=\varphi(c)+O\left(xHU^{-1}\right);$$

поэтому

$$\frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)}-\frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F(x+c)-F(c))F''(c)}}=$$

$$=\frac{\varphi(c)+O\left(xHU^{-1}\right)}{F''(c)x\left(1+O\left(xU^{-1}\right)\right)}-\frac{\varphi(c)}{F''(c)x\sqrt{1+O\left(xU^{-1}\right)}}=$$

$$=O\left(HU^{-1}A\right)=O(H).$$

Вычислим теперь J'. Обозначая через λ разность $F(b)-$ $-F(c)$, будем иметь

$$J'=\frac{\varphi(c)e^{2\pi iF(c)}}{\sqrt{2F''(c)}}\int_0^\lambda\frac{e^{2\pi iu}}{\sqrt{u}}du=$$

$$=\frac{\varphi(c)e^{2\pi iF(c)}}{\sqrt{2F''(c)}}\int_0^\infty\frac{e^{2\pi iu}}{\sqrt{u}}du-\frac{\varphi(c)e^{2\pi iF(c)}}{\sqrt{2F''(c)}}\int_\lambda^\infty\frac{e^{2\pi iu}}{\sqrt{u}}du.$$

Оценим последний интеграл двумя способами. Прежде всего

$$\left|\int_\lambda^\infty\frac{e^{2\pi iu}du}{\sqrt{u}}\right|\leqslant\int_\lambda^{\lambda+1}\frac{du}{\sqrt{u}}+\left|\int_{\lambda+1}^\infty\frac{e^{2\pi iu}}{\sqrt{u}}du\right|\ll 1;$$

кроме того, при $\lambda>0$

$$\left|\int_\lambda^\infty\frac{e^{2\pi iu}}{\sqrt{u}}du\right|\ll\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{F(b)-F(c)}}.$$

Так как

$$F(b)-F(c)=\frac{1}{2}F''(\xi)(b-c)^2\gg(b-c)^2A^{-1},$$

$$|F'(b)|=|F'(c+b-c)|=F''(\xi_1)|b-c|\ll|b-c|A^{-1},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{F(b)-F(c)}}\ll\frac{\sqrt{A}}{|b-c|}\ll\frac{1}{|F'(b)|\sqrt{A}}.$$

Тем самым получили

$$J' = \frac{\varphi(c)\, e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u} du}{\sqrt{u}} + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right),$$

$$J = \frac{\varphi(c)\, e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u} du}{\sqrt{u}} + O(H) + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Аналогично вычисляется первый интеграл в (8):

$$\int_a^c \varphi(x)\, e^{2\pi i F(x)} dx = \frac{\varphi(c)\, e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\, du + O(H) + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi u}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi u}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2},$$

то из доказанных соотношений следует утверждение леммы.

Теорема 4. *Пусть действительные функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x) = f(x) - nx$ удовлетворяют условиям лемм 1 и 2. Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь*

$$\sum_{a < x \leqslant b} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{f'(a) \leqslant n \leqslant f'(b)} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}\, e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)} + O(H \ln U) + O(H(f'(b) - f'(a)) + O(H\sqrt{A}). \quad (9)$$

Доказательство. Из леммы 1 получаем (5). К каждому интегралу I_n,

$$I_n = \int_a^b \varphi(x)\, e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx, \qquad f'(a) + 1 \leqslant n \leqslant f'(b) - 1,$$

применим лемму 2, а при $f'(a) - 1 \leqslant n < f'(a) + 1$, $f'(b) - 1 < n \leqslant f'(b) + 1$ воспользуемся оценкой $I_n \ll H\sqrt{A}$. Складывая асимптотические формулы для I_n, получим утверждение теоремы.

Следствие. *При условиях теоремы 4 справедлива оценка*

$$\sum_{a<x\leqslant b}\varphi(x)\,e^{2\pi i f(x)}\ll H\left(\frac{b-a}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}+\ln U\right).$$

Доказательство. Тривиальная оценка правой части (9) дает

$$\sum_{a<x\leqslant b}\varphi(x)\,e^{2\pi i f(x)}\ll H\left((f'(b)-f'(a)+1)\sqrt{A}+\ln U\right)\ll$$
$$\ll H\left(\frac{b-a}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}+\ln U\right).$$

Из этого следствия и леммы 2 уже легко доказать соотношения

$$\Delta(R)=O(R^{1/3}),\quad \Delta_1(R)=O(R^{1/3}\ln R).$$

Однако в случае проблемы круга и проблемы делителей новую тригонометрическую сумму, стоящую в правой части (9), можно оценить не тривиально, что позволяет получить еще более точные утверждения относительно величин $\Delta(R)$ и $\Delta_1(R)$.

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ — действительная функция на $[a, b]$, $q\leqslant b-a$, q — натуральное число. Тогда*

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b}e^{2\pi i f(n)}\right|\ll\frac{b-a}{\sqrt{q}}+\sqrt{\frac{b-a}{q}\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\leqslant b-r}e^{2\pi i g(n)}\right|},$$

где $g(n)=f(n+r)-f(n)$, а постоянная в знаке $\ll$ — абсолютная.

Доказательство. Для удобства будем полагать $e^{2\pi i f(n)}=0$ при $n\leqslant a$ и $b<n$. Тогда при любом целом m

$$S=\sum_{a<n\leqslant b}e^{2\pi i f(n)}=\sum_{n}e^{2\pi i f(n+m)},$$

и, следовательно,

$$S=\frac{1}{q}\sum_{n}\sum_{m=1}^{q}e^{2\pi i f(n+m)}.$$

Заметим, что внутренняя сумма справа в последнем равенстве равна нулю при $n\leqslant a-q$ и $b<n$, т. е. можно считать $a-q<n<b$. Пользуясь неравенством Коши,

получим

$$|S|^2 \leqslant \frac{1}{q^2} \sum_n 1 \sum_n \left| \sum_{m=1}^{q} e^{2\pi i f(n+m)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q^2}(b-a+q) \sum_n \left| \sum_{m=1}^{q} e^{2\pi i f(n+m)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(b-a)}{q^2} \left\{ 2\ (b-a)q + 2\left| \sum_n \sum_{m>s} \sum e^{2\pi i (f(n+m)-f(n+s))} \right| \right\}.$$

Рассмотрим кратную сумму. Функцию в экспоненте представим в виде разности $f(\nu+r)-f(\nu)$, где $r=1, 2, \ldots, q-1$ и $\nu=[a]+1, \ldots, [b]-r$, так как при остальных значениях параметров получим нуль. При фиксированных r и ν система уравнений

$$\begin{cases} n+m=\nu+r \\ n+s=\nu, \end{cases} \quad 1 \leqslant s < m \leqslant q,$$

имеет ровно $q-r$ решений, так как $m-s=r$ и решениями будут наборы $s=1$, $m=r+1$, $n=\nu-1$; $s=2$, $m=r+2$, $n=\nu-2$, $\ldots$; $s=q-r$, $m=q$, $n=\nu-q+r$. Тем самым находим

$$\left| \sum_n \sum_{m>s} \sum e^{2\pi i (f(n+m)-f(n+s))} \right| = \left| \sum_\nu \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) e^{2\pi i (f(\nu+r)-f(\nu))} \right| =$$

$$= \left| \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{a<\nu\leqslant b-r} e^{2\pi i (f(\nu+r)-f(\nu))} \right| \leqslant$$

$$\leqslant q \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)} \right|.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 5. *Пусть $k \geqslant 2$, $K=2^{k-1}$, функция $f(x)$ имеет k-ю непрерывную производную на $[a, b]$, причем*

$$0 < \lambda_k \leqslant f^{(k)}(\xi) \leqslant h\lambda_k \quad \text{при всех} \quad \xi \in [a, b].$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \right| \ll (b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} h^{\frac{2}{K}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

где постоянная в знаке $\ll$ — абсолютная.

Доказательство. Будем предполагать, что

$$(b-a)^{-4\left(1-\frac{1}{K}\right)} \ll \lambda_k \ll 1,$$

так как в противном случае утверждение теоремы становится тривиальным. Докажем теорему по индукции. При $k=2$ из следствия теоремы 4 имеем (все условия теоремы 4 выполняются)

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \ll (b-a)\, h\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

Предполагая справедливость теоремы для $k-1$, докажем ее для k $(k>2)$. Возьмем $q=\left[\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}}\right]$ и применим лемму 3. Так как

$$\lambda_k \gg (b-a)^{-4\left(1-\frac{1}{K}\right)}; \quad K>4,$$

то

$$1\leqslant q\leqslant \lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} < b-a,$$

и утверждение леммы дает

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant c_0\,(b-a)\,\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + \\ + c_0\left((b-a)\,\lambda_k^{\frac{1}{K-1}} \sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)}\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

где $g(n)=f(n+r)-f(n)$. Так как

$$g^{(k-1)}(x)=f^{(k-1)}(x+r)-f^{(k-1)}(x)=rf^{(k)}(\xi)$$

при некотором $\xi\in[a,\,b]$, то

$$r\lambda_k \leqslant g^{(k-1)}(x)\leqslant rh\lambda_k, \quad x\in[a,\,b].$$

Поэтому к внутренней сумме применима индукционная оценка: $K_1=2^{k-2}$, $2K_1=K$,

$$\sigma_r=\left|\sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)}\right| \leqslant c_{k-1}\,(b-a)\,(r\lambda_k)^{\frac{1}{2K_1-2}} h^{\frac{2}{K_1}} + \\ + c_{k-1}\,(b-a)^{1-\frac{2}{K_1}}(r\lambda_k)^{-\frac{1}{2K_1-2}}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{r=1}^{q-1}\sigma_r \leqslant c_{k-1}\,(b-a)\,q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{\frac{1}{K-2}}h^{\frac{4}{K}} + \\ + 2c_{k-1}\,(b-a)^{1-\frac{4}{K}} q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}} \leqslant \\ \leqslant c_{k-1}\,(b-a)\,h^{\frac{4}{K}} + 2c_{k-1}\,(b-a)^{1-\frac{4}{K}}\lambda_k^{-\frac{2}{K-1}}.$$

Тем самым для нашей суммы получаем оценку

$$\Big|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}\Big| \leqslant c_0 (b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} +$$

$$+ c_0 c_{k-1}^{\frac{1}{2}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} h^{\frac{2}{K}} + c_0 (2c_{k-1})^{\frac{1}{2}} (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_k \Big((b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} h^{\frac{2}{K}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \Big),$$

где $c_k \leqslant \max\left(c_0 + c_0 c_{k-1}^{1/2}, c_0 (2c_{k-1})^{1/2}\right)$. Не ограничивая общности, будем считать $c_1 = 4c_0^2$. Тогда $c_k \leqslant c_1$, и теорема доказана.

§ 4. Целые точки в круге и под гиперболой

Прежде чем применять развитую теорию к проблемам целых точек, докажем еще одну лемму.

Лемма 4 (преобразование Абеля). *Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, c_n — произвольные комплексные числа,*

$$\mathbf{C}(x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbf{C}(x) f'(x)\,dx + \mathbf{C}(b) f(b).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{C}(b) f(b) - \sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = \sum_{a<n\leqslant b} c_n (f(b) - f(n)) =$$

$$= \sum_{a<n\leqslant b} \int_n^b c_n f'(x)\,dx = \sum_{a<n\leqslant b} \int_a^b c_n g(n; x) f'(x)\,dx,$$

где $g(n; x) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{если } x < n. \end{cases}$

Меняя в последней сумме порядок суммирования и интегрирования и замечая, что

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n g(n; x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n = \mathbf{C}(x),$$

получаем утверждение леммы.

Теорема 6. *Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$K(R) = \pi R + O\left(R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{264}} \ln R\right).$$

Доказательство. Вычислим σ,

$$\sigma = \sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}} \{\sqrt{R-x^2}\}.$$

Для этого возьмем $r = [\ln R] \geqslant 1$, $\Delta = R^{-1/6-1/264}$; пусть α и β — произвольные действительные числа, $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, и $\psi(x)$ — функция леммы A, отвечающая заданным r, Δ, α, β. По лемме B достаточно оценить σ_0,

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} g(m) U_m,$$

где $U_m = \sum\limits_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}} e^{2\pi i m\sqrt{R-x^2}}$, $|g(m)| \leqslant \min\left(\frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \times \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right)$. Имеем

$$\left|\sum_{|m|>\Delta^{-1}\ln R} g(m) U_m\right| \leqslant 2\sqrt{\frac{R}{2}} \sum_{m>\Delta^{-1}\ln R} \frac{1}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^r \ll 1.$$

Осталось оценить сумму по m, $1 \leqslant |m| \leqslant \Delta^{-1}\ln R$. К тригонометрической сумме $\overline{U}_m$,

$$\overline{U}_m = \sum_{0<x\leqslant\sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m\sqrt{R-x^2}},$$

применим теорему 4, полагая в ней $H=1$, $f(x) = -m\sqrt{R-x^2}$, $U = \sqrt{R/2}$, $a=0$, $b=\sqrt{R/2}$, $A = \sqrt{R}/m$. Все условия теоремы выполняются, и мы имеем

$$f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{R-x^2}}; \quad x_n = \frac{n\sqrt{R}}{\sqrt{n^2+m^2}};$$

$$g(n) = f(x_n) - n(x_n) = -\sqrt{R(n^2+m^2)};$$

$$f''(x) = \frac{mR}{(R-x^2)^{3/2}}; \quad \sqrt{f''(x_n)} = \frac{(n^2+m^2)^{3/4}}{m\sqrt[4]{R}};$$

$$f'(0) = 0; \quad f'\left(\sqrt{\frac{R}{2}}\right) = m;$$

$$\overline{U}_m = \sum_{0<n\leqslant m} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{m\sqrt[4]{R}}{(m^2+n^2)^{3/4}} e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}} + O\left(\sqrt[4]{R}/\sqrt{m}\right).$$

Отсюда находим, пользуясь оценкой $|g(m)| \leqslant \frac{1}{\pi |m|}$,

$$\left| \sum_{0<|m|\leqslant \Delta^{-1}\ln R} g(m) U_m \right| \ll$$

$$\ll \sqrt[4]{R} \sum_{10<m\leqslant \Delta^{-1}\ln R} \left| \sum_{0<n\leqslant m} (m^2+n^2)^{-3/4} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} \right| + \sqrt[4]{R}. \tag{10}$$

Оценим внутреннюю сумму. Применим лемму 4 (преобразование Абеля), полагая в ней

$$c_n = e^{2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}}, \quad f(n) = (m^2+n^2)^{-3/4}.$$

Тогда

$$S = \sum_{10<n\leqslant m} (m^2+n^2)^{-3/4} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{10}^{m} \mathbf{C}(x)\, x\, (m^2+x^2)^{-7/4}\, dx + \mathbf{C}(m)(2m^2)^{-3/4},$$

где $\quad \mathbf{C}(x) = \sum_{10<n\leqslant x} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}}, \ x \leqslant m.$

Для оценки суммы $\mathbf{C}(x)$ применим теорему 5. Прежде всего находим $f^{(\mathrm{VI})}(n)$:

$$f^{(\mathrm{VI})}(n) = 360\sqrt{R}\,(n^2+m^2)^{-11/2} m^2 \left(n^4 - \frac{3}{2} n^2 m^2 + \frac{1}{8} m^4\right).$$

На промежутке суммирования $\mathbf{C}(x)$ может лежать нуль $f^{(\mathrm{VI})}(n)$, равный n_0,

$$n_0 = \frac{\sqrt{3-\sqrt{7}}}{2}\, m.$$

Рассматривая самый общий случай, промежуток суммирования $\mathbf{C}(x)$ разобьем на $\ll \ln m$ промежутков E_0, E_1, E_2, ..., E_{-1}, E_{-2}, ..., где

$$E_0 = \{n;\ n_0 - 1 \leqslant n \leqslant n_0 + 1\},$$

$$E_\nu = \{n;\ n_0 + 2^{\nu-1} < n \leqslant n_0 + 2^\nu\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$E_{-\nu} = \{n;\ n_0 - 2^\nu \leqslant n < n_0 - 2^{\nu-1}\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Длина E_0 равна 2, длина $E_{\pm\nu}$ равна $2^{\nu-1}$, $\nu \geqslant 1$. Далее, при $n \in E_{\pm\nu}$, $\nu \geqslant 1$,

$$|f^{(\mathrm{VI})}(n)| \asymp \sqrt{R} m^{-6} 2^\nu.$$

Поэтому, полагая в теореме 5 $k=6$, $\lambda_6 = \sqrt{R} m^{-6} 2^\nu$, находим ($\nu \geqslant 1$)

$$\sum_{n\in E_{\pm\nu}} e^{2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}} \ll$$

$$\ll 2^{\nu}\left(\sqrt{R}\cdot 2^{\nu}m^{-6}\right)^{1/62}+2^{\nu(1-1/16)}\left(\sqrt{R}2^{\nu}m^{-6}\right)^{-1/62};$$

$$\mathrm{C}(x) \ll \left|\sum_{n\in E_0}\right| + \sum_{1\leqslant\nu\leqslant\log_2 m}\left|\sum_{n\in E_{\pm\nu}}\right| \ll$$

$$\ll m\left(\sqrt{R}m^{-5}\right)^{1/62}+m^{1-1/16}\left(\sqrt{R}m^{-5}\right)^{-1/62};$$

$$S \ll m^{-1/2}(\sqrt{R}m^{-5})^{1/62}+m^{-9/16}(\sqrt{R}m^{-5})^{-1/62}.$$

Подставляя полученную оценку в (10), будем иметь

$$\left|\sum_{0<|m|\leqslant\Delta^{-1}\ln R} g(m)\,U_m\right| \ll R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{264}}\ln R.$$

Отсюда и из леммы B следует утверждение теоремы.

Теорема 7. *Для числа $L(R)$ целых точек с положительными координатами под гиперболой $xy=R$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$L(R)=R(\ln R+2\gamma-1)+O\left(R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}\ln^2 R\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{R}+O\left(R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}\ln^2 R\right).$$

Точками $2^{-k}\sqrt{R}$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, поделим промежуток $\left(R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}},\ \sqrt{R}\right]$ на $\ll \ln R$ промежутков вида $(a,\ 2a)$, $2a\leqslant\sqrt{R}$, $a>R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}$. Докажем неравенство

$$\sum_{a<x\leqslant 2a}\left\{\frac{R}{x}\right\}-\frac{a}{2}\ll R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}\ln R.$$

Перейдем к тригонометрическим суммам, считая в лемме A $r=[\ln R]$. Как и в теореме 6, надо оценить сумму

$$\sum_{0<m\leqslant\Delta^{-1}\ln R}\frac{1}{m}\,|U(m)|,$$

где Δ — пока некоторый параметр,

$$U(m)=\sum_{a<x\leqslant 2a} e^{-2\pi i\frac{mR}{x}}.$$

Сумму $U(m)$ будем оценивать по-разному, в зависимости от величины a, другими словами, в зависимости от длины промежутка суммирования величин $\{R/x\}$.

1. Пусть

$$R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}<a\leqslant R^{\frac{1}{3}+\frac{1}{87}}.$$

Возьмем $\Delta=R^{\frac{1}{7}}a^{-\frac{4}{7}}\ln^{\frac{2}{7}}R<\frac{1}{10}$, и оценим $U(m)$ по теореме 5, полагая в ней $k=3$, $K=4$, $\lambda_3=mR/a^4$, $h\ll 1$. Найдем

$$U(m)\ll a(mR/a^4)^{\frac{1}{6}}+a^{1-\frac{1}{2}}(mR/a^4)^{-\frac{1}{6}};$$

$$\sum_{0<m\leqslant\Delta^{-1}\ln R}\frac{1}{m}|U(m)|\ll R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{35}}\ln R.$$

2. Пусть теперь $R^{\frac{1}{3}+\frac{1}{87}}\leqslant a\leqslant\sqrt{R}$. В этом случае сделаем переход от $U(m)$ к более короткой сумме по теореме 4, а затем применим теорему 5. Возьмем

$$\Delta=R^{11/41}a^{-36/41}\ln^2 R<1/10$$

(R считаем достаточно большим). Полагая в теореме 4 $f(x)=-mR/x$, находим

$$f'(x)=mR/x^2,\quad f''(x)=-2mR/x^3;$$

$$A=\frac{a^3}{mR}\gg\frac{a^3}{R}\Delta\ln^{-1}R\gg 1;$$

$$x_n=\sqrt{mR/n},\quad g(n)=-2\sqrt{mnR},$$

$$\sqrt{|f''(x_n)|}=\sqrt{2}n^{3/4}(mR)^{-1/4};\quad f'(a)=mR/a^2,$$

$$f'(2a)=mR/4a^2;$$

$$U(m)=\frac{1+i}{2}(mR)^{1/4}\sum_{\frac{mR}{4a^2}\leqslant n\leqslant\frac{mR}{a^2}}n^{-3/4}e^{-2\pi i2\sqrt{mnR}}+O\left(\sqrt{\frac{a^3}{mR}}\right).$$

Вклад остаточного члена последней формулы дает величину порядка

$$\ll\sum_{m\leqslant\Delta^{-1}\ln R}\frac{1}{m}\sqrt{\frac{a^3}{mR}}\ll R^{-1/2}a^{3/2}<R^{1/4}.$$

Далее, применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{\frac{mR}{4a^2}\leqslant n\leqslant\frac{mR}{a^2}} n^{-3/4}e^{-2\pi i2\sqrt{mnR}} =$$

$$= \frac{3}{4}\int\limits_{mR/4a^2}^{mR/a^2} x^{-7/4}\mathbf{C}(x)\,dx + \mathbf{C}\left(\frac{mR}{a^2}\right)\left(\frac{mR}{a^2}\right)^{-3/4},$$

где $\mathbf{C}(x)=\sum\limits_{\frac{mR}{4a^2}\leqslant n\leqslant x} e^{-2\pi i2\sqrt{mnR}}$. Оценим $\mathbf{C}(x)$ по теореме 5, полагая в ней $f(n)=2\sqrt{mnR}$, $k=5$. Находим $K=16$,

$$\lambda_5=(mR)^{1/2}\left(\frac{mR}{a^2}\right)^{-9/2}=(mR)^{-4}a^9;$$

$$\mathbf{C}(x)\ll(mR)^{\frac{13}{15}}a^{-\frac{17}{10}}+(mR)^{\frac{121}{120}}a^{-\frac{41}{20}};$$

$$U(m)\ll(mR)^{11/30}a^{-1/5}+(mR)^{61/120}a^{-11/20};$$

$$\sum_{m\leqslant\Delta^{-1}\ln R}\frac{1}{m}\,|U(m)|\ll R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}\ln R.$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

ЗАДАЧИ

1. Пусть функция $f''(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и при некоторых $A\geqslant 1$, $D\geqslant 1$ удовлетворяет условиям:

$$f''(x)\geqslant 1/A,\quad |f'(x)|\leqslant D.$$

Тогда

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)}\ll(f'(b)-f'(a))\sqrt{A}+\sqrt{A}+\ln((b-a)D).$$

2. Пусть $b-a\ll A$, $A\gg 1$, и функция $f''(x)$ непрерывна на $[a,\,b]$, причем

$$f''(x)\gg 1/A,\quad 0<f'(x)\ll 1,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Тогда имеют место следующие асимптотические равенства:

α) $\sum\limits_{a<x\leqslant b}\{f(x)\}=\dfrac{b-a}{2}+O(A^{2/3}),$

β) $T_f(a,\,b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\rho(b)f(b)-\rho(a)f(a)-$

$$-\frac{b-a}{2}+O(A^{2/3}),$$

где $T_f(a,\,b)$ — число целых точек в криволинейной трапеции $a<x\leqslant b$, $0<y\leqslant f(x)$, и $\rho(x)=\dfrac{1}{2}-\{x\}$.

3. Построить кривую $y = f(x)$, удовлетворяющую условиям задачи 2 и такую, чтобы на ней лежало $\gg A^{2/3}$ целых точек (тем самым будет доказано, что остаточный член в формуле β) не может быть заменен на $o(A^{2/3})$).

4. Пусть $V(R)$ — число целых точек в шаре $X^2 + Y^2 + Z^2 \leqslant R^2$. Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 + O(R^{3/2}\ln^2 R).$$

5. Доказать, что при $a \leqslant \sqrt{|t|}$ выполняются неравенства

α) $\sum\limits_{a<n\leqslant 2a} n^{it} \ll \sqrt{a}\,|t|^{1/6}$,

β) $\sum\limits_{a<n\leqslant 2a} n^{it} \ll \sqrt{a}\,|t|^{\frac{1}{6}-\frac{1}{492}}$.

ГЛАВА II

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава является вспомогательной и содержит необходимые в дальнейшем сведения из теории целых функций.

§ 1. Бесконечные произведения. Формула Вейерштрасса

Введем понятие бесконечного произведения.

Определение 1. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел, отличных от -1. Бесконечным произведением называется выражение вида*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots \tag{1}$$

Выражения вида

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=(1+u_1)\ldots(1+u_k)=v_k \tag{2}$$

называются частичными произведениями.

Определение 2. *Если последовательность* (2) *чисел v_k сходится при $k\to\infty$ к числу $v\neq 0$, то говорят, что бесконечное произведение* (1) *сходится и имеет значение, равное v, т. е.*

$$v=\lim_{k\to\infty}v_k=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{3}$$

Если же последовательность v_k не сходится или $v=0$, то бесконечное произведение (1) *называется расходящимся.*

Для большинства приложений достаточно следующего признака сходимости.

Теорема 1. *Если ряд*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4}$$

абсолютно сходится, то сходится и произведение (1).

Доказательство. Дано, что сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$; следовательно, не ограничивая общности, можно считать $|u_n| \leqslant 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$ Предположим сначала, что $u_n = a$ — действительные числа, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $|\ln(1+u_n)| \leqslant 2|u_n|$. Отсюда следует сходимость последовательности $\ln(1+u_1) + \ldots + \ln(1+u_n) = \ln(1+u_1)\ldots(1+u_n)$ и, следовательно, произведения (1).

Пусть теперь u_n — произвольные комплексные числа. Надо доказать, что при $n \to \infty$ сходятся две последовательности действительных чисел

$$|v_n| = |(1+u_1)\ldots(1+u_n)| = |1+u_1|\ldots|1+u_n|, \tag{5}$$

$$\arg v_n = \arg(1+u_1)\ldots(1+u_n) = \\ = \arg(1+u_1) + \ldots + \arg(1+u_n). \tag{6}$$

Чтобы сходилась последовательность (5), необходимо и достаточно сходимости последовательности $|v_n|^2$. Но

$$|1+u_n|^2 = |1+\alpha_n+i\beta_n|^2 = 1+\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n,$$
$$\alpha_n = \operatorname{Re} u_n, \quad \beta_n = \operatorname{Jm} u_n,$$

и так как $|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n| \leqslant |u_n|^2 + 2|u_n|$, то сходимость $|v_n|^2$ следует из уже доказанного. Сходимость (6) следует из того, что при достаточно большом n_0 и $n > n_0$

$$|\arg(1+u_n)| = \left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}\right| < \pi|\beta_n|.$$

Теорема 1 доказана.

Перейдем к изучению бесконечных произведений аналитических в некоторой области функций.

Теорема 2. *Пусть $u_n(s)$ — бесконечная последовательность аналитических в области G функций, причем*

а) $u_n(s) \neq -1$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $s \in G$;

б) $|u_n(s)| \leqslant a_n$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $s \in G$;

в) *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s)) \tag{7}$$

сходится при любом $s \in G$, а функция $v(s)$, определенная *равенством*

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s)),$$

является аналитической в области G, причем $v(s)\neq 0$ при $s\in G$.

Доказательство. Сходимость (7) при $s\in G$ следует из теоремы 1. Чтобы доказать аналитичность $v(s)$ в G, достаточно доказать равномерную сходимость к $v_k(s)$, $s\in G$, последовательности аналитических функций $v_k(s)$,

$$v_k(s)=\prod_{n=1}^{k}(1+u_n(s)).$$

Положим $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p$, $(1+a_1)\ldots(1+a_n)=p_n$.

Докажем прежде всего, что при любом $s\in G$

$$\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant\frac{p}{p_n}-1. \tag{8}$$

Действительно, если $k\geqslant 1$, то

$$\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right|=|(1+u_{n+1}(s))\ldots(1+u_{n+k}(s))-1|=$$
$$=|u_{n+1}(s)+\ldots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)+\ldots$$
$$\ldots+u_{n+1}(s)\ldots u_{n+k}(s)|\leqslant a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}+$$
$$+a_{n+1}a_{n+2}+\ldots+a_{n+1}\ldots a_{n+k}=\frac{p_{n+k}}{p_n}-1.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим (8). Теперь имеем

$$|v(s)-v_n(s)|=|v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant$$
$$\leqslant p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)=p-p_n<\varepsilon$$

при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ и любом $s\in G$. Теорема доказана.

Определение 3. *Функция $f(s)$, аналитическая в любой конечной части s-плоскости, называется целой.*

Докажем теперь две теоремы о существовании целой функции, имеющей своими нулями только числа заданной бесконечной последовательности, и о разложении целой функции в бесконечное произведение по нулям (обобщение основной теоремы алгебры).

Теорема 3. *Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел, причем*

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0.$$

Тогда существует целая функция $G(s)$, которая имеет своими нулями только числа a_n (если среди a_n есть равные, то нуль $G(s)$ будет иметь соответствующую кратность).

Доказательство. При $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$u_n = u_n(s) = \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

и рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n(s). \tag{9}$$

Докажем, что это произведение сходится во всякой точке $s \neq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, плоскости комплексного переменного и является целой функцией $G(s)$ с нулями $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Для этого рассмотрим круг C с радиусом $|a_n|$ и бесконечное произведение $\prod_{r=n}^{\infty} u_r(s)$. Докажем, что последнее произведение сходится к аналитической функции в круге $|s| < |a_n|$. Тогда (9) также будет аналитической функцией в этом круге, которая имеет там только нули a_i, $|a_i| < |a_n|$. Так как $|a_n| \to \infty$, то тем самым теорема будет доказана. При $|s| < |a_n|$, $r \geqslant n$,

$$\ln u_r(s) = \ln\left(1 - \frac{s}{a_r}\right) + \frac{s}{a_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1}$$

Тогда при $r = n, n+1, \ldots$ и $|s| < |a_n|$

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \ldots$$

и

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \ldots}.$$

Таким образом, достаточно доказать абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\dots\right] \tag{10}$$

при $|s|<|a_n|$. Но при любом $0<\varepsilon<1/2$ и $|s|\leqslant\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ имеем

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\dots\right|\leqslant\frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r+ \\ +\frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1}+\dots<\frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

Отсюда следует равномерная абсолютная сходимость (10) в области $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$, т. е. аналитичность (9) в круге C. Теорема доказана.

Следствие 1 (формула Вейерштрасса). *Пусть $a_1, \dots, a_n, \dots$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям теоремы 3. Тогда функция $G(s)$*

$$G(s)=s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

является целой и имеет своими нулями только числа 0, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Следствие 2. *Пусть последовательность чисел a_1, $a_2, \dots, a_n, \dots$ удовлетворяет условиям теоремы 3, и, кроме того, существует целое число $p\geqslant 0$ такое, что сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}.$$

Тогда функция $G_1(s)$,

$$G_1(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p},$$

удовлетворяет теореме 3.

Действительно, в этом случае при $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ ряд

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{p+2}+\dots\right]$$

мажорируется рядом

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon} \cdot \frac{|a_n|^{p+1}}{|a_r|^{p+1}} < +\infty.$$

Теорема 4. *Каждая целая функция $G(s)$ может быть представлена в виде*

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, \quad (*)$$

где $H(s)$ — целая функция, а числа $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — нули $G(s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей. Если, кроме того, последовательность a_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям следствия 2, то

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}.$$

Доказательство. Нули $G(s)$ не могут иметь предельной точки, т. е. их можно расположить в порядке возрастания модулей. По теореме 3 построим целую функцию $G_1(s)$, имеющую своими нулями нули $G(s)$. Полагая

$$\varphi(s) = \frac{G(s)}{G_1(s)} \quad \text{при} \quad s \neq a_n, \quad \varphi(a_n) = \lim_{s \to a_n} \varphi(s),$$

видим, что $\varphi(s)$ — целая функция, нигде не равная нулю, т. е. и логарифм $\varphi(s)$ — целая функция. Но тогда $\varphi(s) = e^{H(s)}$, где $H(s)$ — целая функция. Так же доказывается второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Целые функции конечного порядка

Введем ряд определений, необходимых для дальнейшего.

Определение 4. *Пусть $G(s)$ — целая функция и*

$$M(r) = M_G(r) = \max_{|s|=r} |G(s)|.$$

Если существует $a > 0$ такое, что

$$M(r) < e^{r^a} \quad \text{при} \quad r > r_0(a) > 0, \quad (11)$$

то $G(s)$ называется целой функцией конечного порядка; в этом случае $\alpha = \inf a$ называется порядком $G(s)$. Если *же* (11) *не выполняется ни при каком* $a>0$, *то говорят, что порядок* $G(s)$ *равен* ∞.

Определение 5. *Пусть* $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ — *последовательность комплексных чисел таких, что*

$$0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\ldots\leqslant|s_n|\leqslant\ldots \tag{12}$$

Если существует $b>0$, *для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty, \tag{13}$$

то говорят, что последовательность (12) *имеет конечный показатель сходимости; в этом случае* $\beta=\inf b$ *называется показателем сходимости* (12). *Если же* (13) *не выполняется ни при каком* $b>0$, *то говорят, что показатель сходимости* (12) *равен* ∞.

Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 5. *Пусть* $G(s)$ — *целая функция конечного порядка* α *и* $G(0)\neq 0$, s_n — *последовательность всех нулей* $G(s)$, *причем* $0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\ldots\leqslant|s_n|\leqslant\ldots$ Тогда *последовательность* s_n *имеет конечный показатель сходимости* $\beta\leqslant\alpha$,

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

где $p\geqslant 0$ — *наименьшее целое число, для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-(p+1)}<+\infty,$$

$g(s)$ — *многочлен степени* $g\leqslant\alpha$ *и* $\alpha=\max(g,\beta)$. *Если, кроме того, для любого* $c>0$ *найдется бесконечная последовательность* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, r_n\to+\infty$, *такая, что*

$$\max|G(s)|>e^{cr_n^{\alpha}},\quad |s|=r_n,\quad n=1,2,\ldots,$$

то $\alpha=\beta$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$ *расходится.*

Для доказательства теоремы 5 понадобится ряд вспомогательных утверждений — лемм. В этих леммах будем предполагать выполнение условий теоремы 5, а также будем использовать обозначения этой теоремы.

Лемма 1. *Пусть* $0<r<R$ *и* m — *число нулей* $G(s)$ *в круге* $|s|<r$. *Тогда*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m\leqslant\frac{M(R)}{|G(0)|},\quad \text{где}\quad M(R)=\max_{|s|=R}|G(s)|.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$

$$F(s_n) = \lim_{s \to s_n} G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)},$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — нули $G(s)$ в круге $|s| < r$.

Функция $F(s)$ — аналитическая в круге $|s| \leqslant R$, и при $|s| = R$

$$|F(s)| = |G(s)|.$$

Следовательно, в силу принципа максимума

$$|F(0)| = |G(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \leqslant \max_{|s|=R} |F(s)| = M(R).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие. *Если m — число нулей функции $G(s)$ в круге радиуса $r = R/2$, то*

$$m \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(R)}{|G(0)|}.$$

Лемма 2. *Если $N(r)$ — число нулей $G(s)$ в круге радиуса r, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется $C = C(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$N(r) < Cr^{\alpha+\varepsilon};$$

кроме того, $\beta \leqslant \alpha$.

Доказательство. Первое неравенство следует из леммы 1 и определения порядка $G(s)$. Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-b}$ при любом $b > \alpha$. Отсюда будет следовать второе утверждение леммы. По уже доказанному неравенству $n < c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. $|s_n|^{-b} \leqslant c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}} n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$, и если $b > \alpha$, то $\frac{b}{\alpha+\varepsilon} > 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что и доказывает сходимость указанного ряда.

Лемма 3. *Пусть s_n — последовательность (12) с конечным показателем сходимости β, $p \geqslant 0$ — наименьшее целое число, для которого $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-(p+1)} < +\infty$, и*

$P(s)$ — целая функция, определенная равенством

$$P(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}. \tag{14}$$

Тогда порядок $P(s)$ равен β. Если, кроме того, $|s_n|\to+\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}<+\infty$, то

$$|P(s)|\leqslant e^{cr^{\beta}},\quad |s|=r.$$

Доказательство. Пусть α — порядок $P(s)$. Из леммы 2 следует, что $\beta\leqslant\alpha$. Осталось доказать, что $\alpha\leqslant\beta+\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$, т. е. надо доказать, что $\ln|P(s)|<c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}$ при $|s|\to\infty$.

Обозначая для краткости множители произведения (14) через $u(s, s_n)$, находим

$$\ln|P(s)|=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

где

$$\sum\nolimits_1=\sum_{|s/s_n|<1/2}\ln|u(s, s_n)|,\quad \sum\nolimits_2=\sum_{|s/s_n|>1/2}\ln|u(s, s_n)|.$$

Далее, для слагаемых в $\sum_1$ имеем

$$\ln|u(s, s_n)|\leqslant\frac{1}{p+1}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+2}+\ldots\leqslant 2\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}$$

для слагаемых в $\sum_2$ имеем

$$\ln|u(s, s_n)|\leqslant\ln\left(1-\left|\frac{s}{s_n}\right|\right)+\left|\frac{s}{s_n}\right|+\ldots+\frac{1}{p}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p=$$

$$=r_p\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|\right)\leqslant\begin{cases}c(p)\left|\frac{s}{s_n}\right|^p, & \text{если}\quad p\geqslant 1;\\ c(\varepsilon)\left|\frac{s}{s_n}\right|^{\varepsilon}, & \text{если}\quad p=0\end{cases}$$

Следовательно,

$$\ln|P(s)|\ll\sum_{|s/s_n|<1/2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}+\sum_{|s/s_n|>1/2}r_p\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|\right).$$

Если $\beta=p+1$, то первая сумма $\ll|s|^{\beta}$.

Пусть $\beta<p+1$ и $\beta+\varepsilon<p+1$. Тогда первая сумма

$$\ll|s|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|s/s_n|<1/2}\frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1-(\beta+\varepsilon)}\ll|s|^{\beta+\varepsilon}.$$

Итак, при любом $p \geqslant 0$ первая сумма $\ll |s|^{\beta+\varepsilon}$. Если $p \geqslant 1$, то вторая сумма (так как $\beta \geqslant p$)

$$\ll \sum_{|s/s_n|>1/2} \left|\frac{s}{s_n}\right|^p = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s/s_n|>1/2} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p-(\beta+\varepsilon)} \ll |s|^{\beta+\varepsilon};$$

если же $p = 0$, то вторая сумма

$$\ll \sum_{|s/s_n|>1/2} \left|\frac{s}{s_n}\right|^{\varepsilon} = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s/s_n|>1/2} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \left|\frac{s}{s_n}\right|^{-\beta} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

Тем самым первая часть леммы доказана. Для доказательства второй части заметим, что $\beta > 0$ (так как $|s_n| \to +\infty$ и ряд $\sum |s_n|^{-\beta}$ сходится). А тогда, заменяя в приведенных рассуждениях $\beta + \varepsilon$ на β (т. е. вынося везде $|s|^{\beta}$) и беря $0 < \varepsilon < \beta$, получим второе утверждение. Лемма доказана.

Пусть теперь $P(s)$ — целая функция конечного порядка α, $P(0) \neq 0$. По теореме 4

$$P(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{n-1}}.$$

По лемме 2 показатель сходимости s_n не превосходит α. Пусть $p \geqslant 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Тогда по теореме 4

$$P(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}, \tag{15}$$

где $g(s)$ — целая функция. Ниже (лемма 5) будет доказано, что $g(s)$ — многочлен. Для этого нужна следующая лемма, которая имеет самостоятельный интерес (см. гл. VI, § 1).

Л е м м а 4. *Пусть $R > 0$, и функция $f(s)$,*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n,$$

аналитическая в круге $|s - s_0| \leqslant R$, причем $\operatorname{Re} f(s) \leqslant M$ *на* *окружности* $|s-s_0|=R$. *Тогда*

$$а)\ \frac{1}{n!}|f^{(n)}(s_0)|=|a_n|\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}R^{-n},\quad n\geqslant 1;$$

б) в круге $|s-s_0|\leqslant r<R$

$$|f(s)-f(s_0)|\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{r}{R-r},$$

$$|f^{(n)}(s)|\leqslant 2n!\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{n+1}},\quad n\geqslant 1.$$

Доказательство. Докажем а) сначала при $s_0=0$, $a_0=f(0)=0$. Так как $\operatorname{Re} f(s)$ достигает максимума на границе, а $f(s)=0$ при $s=0$, то $M\geqslant 0$. Полагая $a_n=|a_n|e^{i\varphi_n}$, $s=Re^{i\varphi}$, будем иметь

$$\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cos(n\varphi+\varphi_n)R^n. \tag{16}$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n$ сходится, то ряд (16) сходится равномерно при $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, т. е. его можно почленно интегрировать, что дает

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\,d\varphi=0.$$

Кроме того,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\cos(n\varphi+\varphi_n)\,d\varphi=\pi|a_n|R^n,\quad n\geqslant 1.$$

Следовательно ($M\geqslant 0$, $1+\cos(n\varphi+\varphi_n)\geqslant 0$), имеем

$$\pi|a_n|R^n=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\{1+\cos(n\varphi+\varphi_n)\}\,d\varphi\leqslant 2\pi M;$$

$$|a_n|\leqslant 2MR^{-n}.$$

Если же $s_0\neq 0$, то рассмотрим $F(s')$, где

$$F(s')=f(s'+s_0)-a_0=a_1s'+a_2s'^2+\ldots$$

Тогда $F(0)=0$, $\operatorname{Re} F(s')\leqslant M-\operatorname{Re} f(s_0)$ при $|s'|=R$. Отсюда и из доказанного следует утверждение а) леммы.

б) Далее,

$$|f(s)-f(s_0)| \leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n <$$
$$< 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{r}{R-r};$$

почленно дифференцируя ряд для $f(s)$, найдем

$$|f^{(n)}(s)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty}|a_m|\, m(m-1)\ldots(m-n+1)\,|s-s_0|^{m-n} \leqslant$$
$$\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-n+1)R^{-m}r^{m-n} =$$
$$= 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{d^n}{dr^n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^m =$$
$$= 2n!\,\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{n+1}}.$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 5. *Целая функция $g(s)$ в (15) — многочлен степени $g \leqslant \alpha$.*

Доказательство. Возьмем $k=[\alpha]$; тогда число p в (15) не превосходит k. Докажем, что $g^{(k+1)}(s)\equiv 0$. Для этого, логарифмируя и дифференцируя (15) $k+1$ раз, найдем

$$g^{(k+1)}(s)=\frac{d^k}{ds^k}\frac{P'(s)}{P(s)}+k!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s_n-s)^{k+1}}. \qquad (17)$$

Рассмотрим круг $|s|\leqslant R/2$; тогда при $|s_n|>R$

$$|s_n-s|>\frac{1}{2}|s_n|,$$

и так как ряд $\sum|s_n|^{-(k+1)}$ сходится, то

$$k!\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{|s_n-s|^{k+1}}<k!\,2^{k+1}\sum_{|s_n|>R}|s_n|^{-(k+1)}\to 0 \qquad (18)$$

при $R\to\infty$. Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{P'(s)}{P(s)}+\sum_{|s_n|\leqslant R}\frac{1}{s_n-s}\right),$$

которая является $(k+1)$-й производной от

$$g_R(s)=\ln\left\{\frac{P(s)}{P(0)}\prod_{|s_n|\leqslant R}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right\}.$$

На окружности $|s| = 2R$ выполняется оценка

$$\left|\frac{P(s)}{P(0)} \sum_{|s_n| < R}\left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right| < c(\varepsilon)\, e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}};$$

по принципу максимума это неравенство справедливо и внутри круга $|s| \leqslant 2R$, т. е. там

$$\operatorname{Re} g_R(s) = \ln\left|\frac{P(s)}{P(0)} \prod_{|s_n| < R}\left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right| < c_1(\varepsilon)\, R^{\alpha+\varepsilon};$$

кроме того, $\operatorname{Re} g_R(0) = 0$. Применяя лемму 4, б) с $r = R/2$, найдем

$$\left|g_R^{(k+1)}(s)\right| < 2(k+1)!\,c_1(\varepsilon)\, R^{\alpha+\varepsilon}\, \frac{R}{(R/2)^{k+2}} <$$

$$< c_2(\varepsilon)\, R^{\alpha-(k+1)+\varepsilon}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, то правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $R \to +\infty$. Отсюда из (17) и (18) получаем, что $g^{(k+1)}(s) \to 0$ при $|s| = R \to \infty$, т. е. $g^{(k+1)}(s) \equiv 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. По теореме 4 имеет место формула (15); по лемме 5 $g(s)$ — многочлен степени $g \leqslant \alpha$. Так как порядок $e^{g(s)}$ равен g, а порядок произведения по нулям в (15) равен β, то порядок $\alpha \leqslant \max(g, \beta)$, т. е. $\alpha = \max(g, \beta)$. Далее, если $\beta < \alpha$, то $\alpha = g$ и, следовательно,

$$|G(s)| \leqslant c(\varepsilon)\, e^{c_1 r^g} e^{c_2 r^{\beta+\varepsilon}},$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — абсолютные постоянные, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало, т. е. ε можно взять таким, что $\beta + \varepsilon < \alpha$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $\alpha = \beta$. Расходимость ряда $\sum |s_n|^{-\beta}$ следует из леммы 3. Теорема 5 доказана.

Следствие. *Если $G_1(s)$ — целая функция конечного порядка α, то $G_1(s) = s^m G(s)$, где $G(s)$ — целая функция теоремы 5, $m \geqslant 0$.*

ЗАДАЧИ

1. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, $A > 0$, и $\mu = \mu(A, f)$ — мера тех точек x отрезка $[0,1]$, для которых $|f(x)| \leqslant A$. Доказать, что

$$\mu \leqslant \min\left(1{,}4e\,(A\alpha^{-1})^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

где

$$\alpha = \max |\alpha_j|, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами
$f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n, \quad \alpha = \max |\alpha_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$
Доказать, что

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqslant \min (1, 32\alpha^{-1/n}).$$

3. Пусть $f(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с действительными коэффициентами,

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \ldots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha(t_1, \ldots, t_r)\, x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r},$$

$$\alpha(0, \ldots, 0) = 0, \quad \alpha = \max_{0 \leqslant t_1, \ldots, t_r \leqslant n} |\alpha(t_1, \ldots, t_r)|.$$

Рассмотрим кратный тригонометрический интеграл I,

$$I = \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_r)}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Тогда справедлива оценка

$$I \leqslant \min (1, 32^r \alpha^{-1/n} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-1}).$$

4. Пусть $\alpha \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $n \geqslant 1$,

$$J = \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{2\pi i \alpha x_1^n \ldots x_r^n}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Тогда

$$|J| \geqslant \frac{1}{2\pi n^r (r-1)!} \alpha^{-1/n} (\ln \alpha)^{r-1}.$$

5. Пусть при $0 < x < 1$ вещественная функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка, $n > 1$, и при некотором $A > 0$ выполняется неравенство

$$A \leqslant |f^{(n)}(x)|, \quad 0 < x < 1.$$

Тогда мера U тех точек x, где $|f'(x)| \leqslant B$, не превосходит

$$(2n-2)\left(BA^{-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

6. При условиях задачи 5 для интеграла J,

$$J = \int_0^1 e^{2\pi i f(x)} dx,$$

справедлива оценка

$$|J| \leqslant \min(1,\ 6nA^{-1/n}).$$

7. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами,

$$f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n,$$

$$\beta_r(x) = \frac{1}{r!} f^{(r)}(x), \qquad r = 1, \ldots, n,$$

$$H = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{r=1}^{n} |\beta_r(x)|^{1/r}.$$

Доказать, что промежуток $a < x < b$ можно покрыть непересекающимися промежутками в количестве m,

$$m \leqslant \frac{n^2+n}{2} - 1,$$

так, что на каждом из них при некотором r, $1 \leqslant r \leqslant n$, выполняется неравенство

$$|\beta_r(x)| \geqslant (n^{-1}H)^r.$$

8. При условиях задачи 7 для интеграла J,

$$J = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx,$$

справедлива оценка

$$|J| \leqslant \min(b-a,\ 6en^3H^{-1}).$$

9. Пусть $\theta = \theta(k)$ — несобственный интеграл («особый интеграл проблемы Терри») вида

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)} dx \right|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Доказать, что θ сходится при

$$2k > \frac{n^2+n}{2} + 1.$$

ГЛАВА III

ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

§ 1. Определение и простейшие свойства

Определение. *Гамма-функция Эйлера* $\Gamma(s)$ *задается равенством*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n},$$

где γ — *постоянная Эйлера.*

Из определения и теорем гл. II следует, что $\Gamma^{-1}(s)$ — целая функция порядка не выше первого. Далее, $\Gamma(s)$ — функция, аналитическая во всей s-плоскости, за исключением точек $s = 0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюсы.

Теорема 1 (формула Эйлера). *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Доказательство. Из определения бесконечного произведения (гл. II, § 1) и определения функции $\Gamma(s)$ последовательно получаем

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \lim_{m\to\infty} e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\log m\right)} \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} =$$

$$= s \lim_{m\to\infty} m^{-s} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right) = s \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right) =$$

$$= s \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{s} =$$

$$= s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1.

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 \ldots (n-1)n^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}.$$

Следствие 2.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

Теорема 2 (функциональное уравнение). *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Доказательство. Из (1) получаем

$$\frac{\Gamma\, s(+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s+1}\left(1+\frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+s}{n+s+1} = \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(s+1)}{m+1+s} = s.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. $\Gamma(n+1) = n!$, n — *натуральное.*

Следствие 2. *При натуральном* n

$$\Gamma(2n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(*формула удвоения*).

Теорема 3 (формула дополнения). *При* s, *не равном целому числу, имеем*

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Доказательство. Прежде всего представим $\sin \pi s$ в виде бесконечного произведения. Функция $\sin \pi s$ — целая, первого порядка, имеет нули $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. по теореме 5, II

$$\sin \pi s = s e^{H(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right),$$

где $H(s) = as + b$.

Логарифмируя это равенство, а затем дифференцируя, найдем

$$\pi \frac{\cos \pi s}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + H'(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s}{n^2 - s^2}.$$

Переходя к пределу при $s \to 0$, получаем $a = 0$, т. е. $H(s) = b$. Далее, $\frac{\sin \pi s}{s} = c \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$. Опять при $s \to 0$ найдем $c = \pi$, т. е.

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Из определения функции $\Gamma(s)$ имеем

$$\Gamma(s)\,\Gamma(-s) = -\frac{1}{s^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = -\frac{\pi}{s \sin \pi s},$$

а по теореме 2 $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Теорема 4 (интегральная формула). *При* $\operatorname{Re} s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\,dt.$$

Доказательство. Заметим, что интеграл справа при $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0 > 0$ сходится равномерно и, следовательно, представляет функцию, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Из (1)

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 \ldots (n-1)}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\,n^s.$$

Рассмотрим функцию

$$\Pi(s; n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{s-1}\,dt = n^s \int_0^1 (1-t)^n\, t^{s-1}\,dt =$$

$$= \frac{n^s}{s}\int_0^1 (1-t)^n\,dt^s = n^s\,\frac{n}{s}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,t^s\,dt = \ldots$$

$$\ldots = n^s\,\frac{n(n-1)\ldots 1}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\int_0^1 t^{s+n-1}\,dt =$$

$$= n^s\,\frac{n(n-1)\ldots 1}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\Pi(s; n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,dt.$$

Пусть $\Gamma_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$. Тогда

$$\Gamma_1(s)-\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n t^{s-1}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt.$$

При $|t|<n$ $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^t$; кроме того, при $0<y<1$

$$1-ny\leqslant(1-y)^n.$$

Поэтому

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left(1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)\leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n};$$

$$\left|\int\limits_0^n t^{s-1}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt\right|\leqslant\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty t^{\sigma+1}e^{-t}dt;$$

$$\Gamma_1(s)=\Gamma(s),$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}.$$

§ 2. Формула Стирлинга

В приложениях важно знать поведение $\Gamma(s)$ при $|s|\to\to\infty$.

Теорема 5. *При* $\delta>0$ *и* $-\pi+\delta\leqslant\arg s\leqslant\pi-\delta$ *имеет место формула (Стирлинга):*

$$\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+\log\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от δ.

Доказательство. Из определения $\Gamma(s)$ находим

$$\log\Gamma(s)=-\gamma s-\log s+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{s}{n}-\log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right).\qquad(2)$$

При натуральном N рассмотрим две суммы:

$$\Sigma_1=\sum_{1/2<n\leqslant N+1/2}1/n,\quad\Sigma_2=\sum_{1/2<n\leqslant N+1/2}\log(n+s).$$

Применяя к каждой из них теорему 1, I, найдем

$$\Sigma_1 = \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right);$$

$$\Sigma_2 = \left(N + \frac{1}{2} + s\right)\log\left(N + \frac{1}{2} + s\right) - \left(N + \frac{1}{2} + s\right) - \\ - \left(s + \frac{1}{2}\right)\log\left(s + \frac{1}{2}\right) + \left(s + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{\sigma\left(\frac{1}{2}\right)}{s + \frac{1}{2}} - \frac{\sigma\left(N + \frac{1}{2}\right)}{N + \frac{1}{2} + s} - \int\limits_{1/2}^{N+1/2} \frac{\sigma(x)\,dx}{(x+s)^2}.$$

Из (2) и полученных формул для Σ_1, Σ_2 следует

$$\log\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + c + J, \tag{3}$$

где c — абсолютная постоянная,

$$J = \int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\sigma(x)\,dx}{(x+s)^2}.$$

Далее,

$$J = O\left(\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + |s|^2 - 2x|s|\cos\delta}\right) = O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Итак, получили

$$\log\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + c + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Возьмем в этой формуле $s = n$, $n + 1/2$, $2n$, воспользуемся формулой удвоения и тем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; при $n \to +\infty$ получим $c = \log\sqrt{2\pi}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Функция $\Gamma^{-1}(s)$ является целой первого порядка.*

Следствие 2. *При $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ и $t \to +\infty$*

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma + it - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2} - it + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{2\pi}\,\{1 + O(1/t)\},$$

причем постоянная в знаке O зависит только от α, β.

Следствие 3. *Дифференцируя* (3), *найдем* ($|\arg s| < \pi$)

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

§ 3. Бета-функция Эйлера и интеграл Дирихле

С гамма-функцией тесно связана бета-функция Эйлера, простейшее свойство которой докажем ниже, и интеграл Дирихле.

Определение. *Бета-функция Эйлера* $B(u, v)$ *при* $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} v > 0$ *задается равенством*

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx.$$

Лемма. *Справедливо равенство*

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $\sigma_1 = \operatorname{Re} u > 1$, $\sigma_2 = \operatorname{Re} v > 1$. Далее, при $Y \geqslant 0$

$$\left|\int_0^Y t^{u-1}e^{-t}dt\right| \leqslant \int_0^Y t^{\sigma_1-1}e^{-t}dt = O(\min(1, Y)),$$

при $X \geqslant 1$

$$\left|\int_X^\infty t^{u-1}e^{-t}dt\right| \leqslant \int_X^\infty t^{\sigma_1-1}e^{-t}dt = O(e^{-X}),$$

где постоянные в знаках O зависят только от σ_1. Пусть $X > 1$, $Y = X^{-0,5}$; тогда

$$\Gamma(u) = \int_Y^X t^{u-1}e^{-t}dt + O(Y); \qquad \Gamma(v) = \int_0^{X^2} \tau^{v-1}e^{-\tau}d\tau + O(Y).$$

Перемножая эти соотношения, получим

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = J + O(Y),$$

где

$$J = \int_Y^X t^{u-1}e^{-t}\left(\int_0^{X^2} \tau^{v-1}e^{-\tau}d\tau\right)dt.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $\tau = zt$, $0 \leqslant z \leqslant X^2t^{-1}$. Тогда получим

$$J = \int_Y^X t^{u+v-1}e^{-t}\left(\int_0^{X^2t^{-1}} z^{v-1}e^{-tz}dz\right)dt =$$

$$= \int_Y^X t^{u+v-1}e^{-t}\left(\int_0^X z^{v-1}e^{-tz}dz\right)dt + O\left(e^{-\sqrt{X}}\right) = J_1 + O\left(e^{-\sqrt{X}}\right),$$

где

$$J_1 = \int_0^X z^{v-1}\left(\int_Y^X t^{u+v-1}e^{-t(z+1)}dt\right)dz.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $t(z+1)=x$, $(z+1)Y \leqslant x \leqslant (z+1)X$; получим

$$J_1 = \int_0^X \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}}\left(\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1}e^{-x}dx\right)dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}}\left(\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1}e^{-x}dx\right)dz + R,$$

где $|R| \leqslant \int_{\sqrt[4]{X}}^{X} \frac{z^{\sigma_2-1}\Gamma(\sigma_1+\sigma_2)}{(z+1)^{\sigma_1+\sigma_2}}dz = O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right)$.

Кроме того, при $0 \leqslant z \leqslant \sqrt[4]{X} = Y^{-0,5}$

$$\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1}e^{-x}dx = \Gamma(u+v) + O\left(\sqrt{Y}\right).$$

Следовательно,

$$J_1 = \Gamma(u+v)\int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}}dz + O(\sqrt{Y}) + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right).$$

Наконец,

$$\int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}}dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}}dz + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right) =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2u-1}(\sin\theta)^{2v-1}d\theta + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right) =$$

$$= \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right) = B(u,v) + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right).$$

Тем самым получили соотношение

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)B(u,v) + O\left(\sqrt{Y}\right) + O\left(Y^{0,5\sigma_1}\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $X \to +\infty$, получим утверждение леммы.

Теорема 6. *Пусть $f(u)$ — непрерывная функция, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$,*

$$I = \underset{\substack{t_1+t_2+\ldots+t_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n \leqslant 1}}{\int \cdots \int} f(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\, t_1^{\alpha_1 - 1} t_2^{\alpha_2 - 1} \ldots$$

$$\ldots t_n^{\alpha_n - 1}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

Тогда

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \ldots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} du.$$

Доказательство. Обозначим $\lambda = t_3 + \ldots + t_n$ и рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^{1-\lambda} \left(\int_0^{1-\lambda-t_2} f(t_1 + t_2 + \lambda)\, t_1^{\alpha_1 - 1} dt_1 \right) t_2^{\alpha_2 - 1} dt_2.$$

Сделаем в I_1 замену $t_1 = \frac{t_2(1-v)}{v}$, а затем поменяем порядок интегрирования:

$$I_1 = \int_0^{1-\lambda} \left(\int_{\frac{t_2}{1-\lambda}}^1 f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right)(1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{-\alpha_1 - 1} dv \right) t_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} dt_2 =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right) t_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} dt_2 \right) (1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{-\alpha_1 - 1} dv.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $t_2 = \tau v$:

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau)\, \tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} d\tau \right) (1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{\alpha_2 - 1} dv =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau)\, \tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} d\tau.$$

Для I получаем формулу

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int\limits_{\substack{\tau+t_3+\ldots+t_n\leqslant 1\\ 0\leqslant\tau,t_3,\ldots t_n\leqslant 1}}\ldots\int f(\tau+t_3+\ldots+t_n)\times$$

$$\times\tau^{\alpha_1+\alpha_2-1}t_3^{\alpha_3-1}\ldots t_n^{\alpha_n-1}d\tau\,dt_3\ldots dt_n.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Интеграл I теоремы 6 называется *интегралом Дирихле.*

ЗАДАЧИ

1. Пусть M и N — натуральные числа, $M\geqslant 2$,

$$I(n)=\int\limits_0^1\frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}e^{2\pi i\frac{(n+u)^2}{N}}du.$$

Доказать, что

$$I(n)=e^{2\pi i\frac{n^2}{N}}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right).$$

2. При условиях задачи 1 справедливо равенство

$$S=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n^2}{N}}=\sum_{k=-M}^{M}J(k)+O\left(\frac{N\ln M}{M}\right),$$

где $\quad J(k)=Ne^{-2\pi i\frac{Nk^2}{4}}\int\limits_{0,5k}^{0,5k+1}e^{2\pi iNu^2}du.$

3. При обозначениях задачи 2 доказать равенство

$$\sum_{k=-2M}^{2M}J(k)=N\int\limits_{-M}^{M+1}e^{2\pi iNu^2}du+Ne^{-2\pi i\frac{N}{4}}\int\limits_{-M+0,5}^{M+0,5}e^{2\pi iNu^2}du.$$

4. Доказать равенство («сумма Гаусса и ее аргумент»):

$$S=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n^2}{N}}=\frac{1+i^{-N}}{1+i^{-1}}\sqrt{N}.$$

5. Пусть $p\geqslant 2$, p — простое число, p делит произведение двух натуральных чисел n и m. Методом математической индукции (индукцию вести по p) доказать, что p делит либо n, либо m.

6. Доказать, что если

$$n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}=q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s},$$

где $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ — простые числа, $p_1 < \ldots < p_r$, $q_1 < \ldots < q_s$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ — натуральные числа, то

$$r = s, \qquad p_1 = q_1, \qquad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, p_r = q_r, \qquad \alpha_r = \beta_r$$

(теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители).

7. а) Доказать, что если $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — целые числа, m — натуральное число, $k! < m$, и, кроме того,

$$a_0 \ln m + a_1 \ln (m+1) + \ldots + a_k \ln (m+k) = 0,$$

то

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_k = 0.$$

б) Доказать, что при любом натуральном числе m и $k \geqslant 8\sqrt[3]{m}$ найдутся целые числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ не все равные нулю и такие, что

$$a_0 \ln m + a_1 \ln (m+1) + \ldots + a_k \ln (m+k) = 0.$$

8. При любом натуральном числе k справедливы неравенства

а) $\displaystyle\sum_{n \leqslant X} \tau_k(n) \leqslant \frac{1}{(k-1)!} X (\ln X + k - 1)^{k-1};$

б) $\displaystyle\sum_{n \leqslant X} \tau_k^2(n) \leqslant k^2 (k!)^{-(k+1)} X \left(\ln X + k^2 - 1\right)^{k^2-1}.$

9. Пусть $1 \leqslant u < N$; тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество

$$\sum_{u < n \leqslant N} \Lambda(n) f(n) = \sum_{d \leqslant u} \mu(d) \sum_{l \leqslant Nd^{-1}} (\log l) f(ld) - \\ - \sum_{d \leqslant u} \mu(d) \sum_{n \leqslant u} \Lambda(n) \sum_{r \leqslant N(dn)^{-1}} f(ndr) - \\ - \sum_{u < m \leqslant Nu^{-1}} \left(\sum_{\substack{d \backslash m \\ d \leqslant u}} \mu(d) \right) \sum_{u < n \leqslant Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm).$$

ГЛАВА IV

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

§ 1. Определение и простейшие свойства

Определение. При $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ функция $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана — задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Из определения следует, что $\zeta(s)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

Лемма 1 (формула или тождество Эйлера). *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *справедливо равенство*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. При целом $X \geqslant 2$, $\operatorname{Re} s > 1$, в силу абсолютной сходимости рядов $1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots$ и однозначности разложения натуральных чисел на простые сомножители, имеем

$$\prod_{p \leqslant X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} + R(s; X),$$

где $|R(s; X)| \leqslant \sum_{n > X} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma - 1} X^{1-\sigma}$. Переходя к пределу при $X \to +\infty$, получим утверждение леммы.

Следствие. $\zeta(s) \neq 0$ *при* $\operatorname{Re} s > 1$.

Действительно, при $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \left|\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right| \leqslant \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}; \quad |\zeta(s)| > \frac{\sigma - 1}{\sigma} > 0.$$

Продолжим $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Лемма 2. *При* $\operatorname{Re} s > 0$, $N \geqslant 1$, *имеет место равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\, du,$$

где $\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$.

Доказательство. Возьмем натуральное число $M > N$, применим формулу (2) гл. I, получим

$$\sum_{N+\frac{1}{2} < n \leqslant M+\frac{1}{2}} \frac{1}{n^s} = \int_{N+1/2}^{M+1/2} \frac{du}{u^s} + s \int_{N+1/2}^{M+1/2} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\, du =$$

$$= \frac{1}{1-s}\left(M + \frac{1}{2}\right)^{1-s} + \frac{1}{s-1} N^{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{M+1/2} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\, du.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\, du.$$

Но последний интеграл определяет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. В силу принципа аналитического продолжения следует утверждение леммы.

Следствие. $\zeta(s)$ — *функция аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 0$ *за исключением точки* $s = 1$; *в точке* $s = 1$ *дзета-функция* $\zeta(s)$ *имеет простой полюс с вычетом, равным* 1.

Прежде чем продолжить $\zeta(s)$ на всю s-плоскость, докажем лемму.

Лемма 3. *Пусть* $x > 0$, α — *вещественное,*

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (n+\alpha)^2},$$

тогда

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}.$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $0 \leqslant \alpha < 1$. Возьмем $N > 10$, $M = N^5$, и рассмотрим интеграл

$$I(n) = \int\limits_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} e^{-\pi x (n+\alpha+u)^2} du.$$

Так как

$$\int\limits_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} du = \sum_{k=-M}^{+M} \int\limits_{-0,5}^{+0,5} e^{-2\pi i k u} du = 1,$$

то

$$I(n) = e^{-\pi x (n+\alpha)^2} + R(n), \tag{1}$$

где

$$R(n) = \int\limits_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} \left(e^{-\pi x (n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x (n+\alpha)^2}\right) du.$$

Оценим $|R(n)|$ при условии, что $-N \leqslant n \leqslant N$. Прежде всего имеем

$$R(n) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-0,5}^{-N^{-3}} \Phi(u)\, du, \quad I_2 = \int\limits_{-N^{-3}}^{+N^{-3}} \Phi(u)\, du, \quad I_3 = \int\limits_{+N^{-3}}^{+0,5} \Phi(u)\, du,$$

$$\Phi(u) = \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} \left(e^{-\pi x (n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x (n+\alpha)^2}\right).$$

Оценим I_2. Для этого оценим $|\Phi(u)|$, $|u| \leqslant N^{-3}$, пользуясь формулой конечных приращений:

$$|\Phi(u)| = O\left(\frac{|u|\, N}{|\sin \pi u|}\right) = O(N).$$

Следовательно,

$$I_2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Интегралы I_1, I_3 оцениваются одинаково. Оценим I_3. Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$I_3 = \frac{-\cos \pi (2M+1) u}{\pi (2M+1) \sin \pi u} \left(e^{-\pi x (n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x (n+\alpha)^2}\right)\Big|_{N^{-3}}^{0,5} +$$

$$+ \int\limits_{N^{-3}}^{0,5} \frac{\cos \pi (2M+1) u}{\pi (2M+1)} Y(u)\, du,$$

где $Y(u) = \frac{d}{du}\left(\frac{e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}}{\sin \pi u}\right)$. Оценивая грубо $|Y(u)|$, $N^{-3} \leqslant u \leqslant 0{,}5$, находим

$$Y(u) = O\left(\frac{1}{u^2}\right) + O\left(\frac{N}{u}\right).$$

Следовательно,

$$I_3 = O\left(\frac{N^3}{M}\right) + O\left(\frac{N \ln N}{M}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Таким образом,

$$R(n) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Суммируя (1) по n, $-N \leqslant n \leqslant N$, получим

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$

$$= \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-0,5}^{+0,5} \sum_{k=-M}^{+M} e^{-2\pi iku-\pi x(n+\alpha+u)^2} du =$$

$$= \sum_{k=-M}^{+M} \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-0,5}^{0,5} e^{-2\pi ik(n+u)-\pi x(n+u+\alpha)^2} du =$$

$$= \sum_{k=-M}^{+M} \int_{-N-0,5}^{N+0,5} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2} du = \sum_{k=-M}^{+M} J(k).$$

Далее,

$$J(k) = \int_{-N-0,5}^{N+0,5} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2} du +$$

$$+ O(e^{-\pi xN}) = e^{2\pi ik\alpha} J(k;\, x) + O(e^{-\pi xN}),$$

где $J(k;\, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iku-\pi xu^2} du$.

Вычислим $J\left(k;\, \frac{1}{x}\right)$. Имеем

$$J\left(k;\, \frac{1}{x}\right) = x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ikux-\pi xu^2} du = xe^{-\pi xk^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+ki)^2} du.$$

Пусть $X>1$ и Γ — контур прямоугольника с вершинами $-X$, $+X$, $-X+ik$, $X+ik$. Тогда

$$0=\int_{\Gamma} e^{-\pi x u^2}du=\int_{-X}^{+X} e^{-\pi x u^2}du-\int_{-X}^{+X} e^{-\pi x(u+ki)^2}du+$$
$$+\int_0^k e^{-\pi x(X+iu)^2}du-\int_0^k e^{-\pi x(-X+iu)^2}du. \quad (2)$$

Оба последних интеграла по абсолютной величине не превосходят

$$\int_0^k e^{-\pi x X^2}e^{+\pi x u^2}du\leqslant ke^{\pi x k^2}e^{-\pi x X^2}.$$

Переходя в (2) к пределу при $X\to+\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+ki)^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$J\left(k;\ \frac{1}{x}\right)=e^{-\pi x k^2}\sqrt{x};$$

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi\frac{1}{x}(n+\alpha)^2}+O\left(\frac{1}{N}\right)=\sqrt{x}\sum_{k=-M}^{+M} e^{-\pi x k^2+2\pi i k\alpha}+$$
$$+O\left(e^{-\pi\frac{1}{x}N}\right).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $N\to+\infty$, получим утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть* $\operatorname{Re} s>0$, α — *вещественное*,

$$\theta(s,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s(n+\alpha)^2};$$

тогда

$$\theta\left(\frac{1}{s},\alpha\right)=\sqrt{s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s-2\pi i n\alpha}.$$

Следствие 2. $\theta\left(\frac{1}{x},0\right)=\sqrt{x}\,\theta(x,0)$.

Теорема 1 (**функциональное уравнение дзета-функции**). *Имеет место равенство*

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Доказательство. По теореме 4, III при $\operatorname{Re} s>0$ и натуральном n

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}du=n^s\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}\pi^{\frac{s}{2}}x^{\frac{s}{2}-1}dx,$$

т. е.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s}=\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s>1$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}\right)dx \tag{3}$$

(возможность перемены порядка суммирования и интегрирования следует из того, что $\sum\limits_{n>N}e^{-\pi n^2 x}=O\left(e^{-\pi N^2 x}\right)$, $x\geqslant 1$, а $\sum\limits_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ при $0<x<1$).

Далее, если $\omega(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$, то из следствия 2 леммы 3 $\omega\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+x^{1/2}\omega(x)$. Поэтому

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx=\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx+\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx=$$

$$=\int_1^\infty\left(x^{-\frac{s}{2}-1}\omega\left(\frac{1}{x}\right)+x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\right)dx=\frac{1}{s(s-1)}+$$

$$+\int_1^\infty\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\,dx. \tag{4}$$

Так как $\omega(x)=O(e^{-\pi x})$ при $x\to+\infty$, то из (4) следует, что правая часть (3) является аналитической функцией при любом $s \neq 0, 1$ и не меняется от замены s на $1-s$, т. е.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Следствие. *Функция*

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

является целой и

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

§ 2. Простейшие теоремы о нулях

Из теоремы 1 видим, что при $s=-2, -4, \ldots$ $\ldots, -2n, \ldots$, дзета-функция равна 0, так как при этих значениях s $\Gamma^{-1}(0{,}5s)=0$; при $s=0$ дзета-функция не равна 0, так как нуль $\Gamma^{-1}(0{,}5s)$ гасится полюсом $\zeta(1-s)$. Выписанные нули называются тривиальными. Кроме тривиальных дзета-функция имеет бесконечно много нетривиальных нулей, лежащих в полосе (критическая полоса) $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$.

Теорема 2. *Функция* $\xi(s)$ *является целой функцией первого порядка, имеющей бесконечно много нулей* ρ_n *таких, что* $0 \leqslant \operatorname{Re}\rho_n \leqslant 1$; *ряд* $\sum|\rho_n|^{-1}$ *расходится, а ряд* $\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ *сходится при любом* $\varepsilon > 0$. *Нули* $\xi(s)$ *являются нетривиальными нулями* $\zeta(s)$.

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ дзета-функция, а следовательно, и $\xi(s)$ не имеет нулей; из теоремы 1 следует, что $\xi(s) \neq 0$ и при $\operatorname{Re} s < 0$. Так как $\xi(0) = \xi(1) \neq 0$, то нулями $\xi(s)$ будут только нетривиальные нули $\zeta(s)$.

Определим порядок $\xi(s)$. Для этого оценим $\xi(s)$ при $|s| \to +\infty$ (достаточно это сделать при $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$). Из леммы 2 при $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ следует, что $\zeta(s) = O(|s|)$. Так как $|\Gamma(s)| \leqslant e^{c|s|\ln|s|}$, то порядок $\xi(s)$ не выше первого. Но при $s \to +\infty$ $\ln\Gamma(s) \sim s\ln s$, поэтому порядок $\xi(s)$ равен 1. Из теоремы 5, II следует, что ряд $\sum|\rho_n|^{-1}$, где ρ_n — нули $\xi(s)$, расходится и, следовательно, $\xi(s)$ имеет бесконечно много нулей, а ряд $\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Имеет место формула*

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{\frac{s}{\rho_n}}. \qquad (5)$$

Следствие 2. *Нетривиальные нули дзета-функции расположены симметрично относительно прямых* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ *и* $\operatorname{Im} s = 0$.

Везде ниже нетривиальные нули дзета-функции будем нумеровать в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей, а при одинаковых абсолютных величинах мнимых частей — в произвольном порядке.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + B_0,$$

где ρ_n — *все нетривиальные нули* $\zeta(s)$, B_0 — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Беря от левой и правой частей (5) логарифмическую производную, получим утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — *все нетривиальные нули* $\zeta(s)$, $T \geqslant 2$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leqslant c \log T.$$

Доказательство. Возьмем $s = 2 + iT$. Тогда

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leqslant \sum_{n\leqslant T}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2} \leqslant c_0 \log T, \tag{6}$$

и, следовательно (теорема 3),

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-1} - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right) -$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leqslant c_1 \log T - \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Так как $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\right| < c_2$, то

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leqslant c_3 \log T.$$

Далее, из того, что

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_n}=\operatorname{Re}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)}=\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{0{,}5}{1+(T-\gamma_n)^2},$$
$$\operatorname{Re}\frac{1}{\rho}=\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\geqslant 0,$$

следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Число нулей ρ_n дзета-функции, для которых $T\leqslant|\operatorname{Im}\rho_n|\leqslant T+1$, не превосходит $c_4\log T$.*

Следствие 2. *При $T\geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{|T-\gamma_n|^2}=O(\log T).$$

Следствие 3. *При $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$, $s=\sigma+it$, $|t|\geqslant 2$,*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log|t|),$$

причем суммирование в последней сумме ведется по нулям ρ_n функции $\zeta(s)$, у которых $|t-\operatorname{Im}\rho_n|\leqslant 1$.

Доказательство. Так как оценка (6) справедлива при $s=\sigma+it$, $|t|\geqslant 2$, $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$, то

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)+O(\log|t|).$$

Вычтем из этого соотношения такое же при $s=2+it$:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+O(\log|t|).$$

Если $|\gamma_n-t|>1$, то

$$\left|\frac{1}{\sigma+it-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right|\leqslant\frac{2-\sigma}{(\gamma_n-t)^2}\leqslant\frac{3}{(\gamma_n-t)^2}$$

и утверждение следует из следствий 1 и 2.

Теорема 5 (Ш. Валле-Пуссен). *Существует абсолютная постоянная $c>0$ такая, что в области s — плоскости*

$$\operatorname{Re}s=\sigma\geqslant 1-\frac{c}{\log(|t|+2)}$$

нет нулей дзета-функции.

Доказательство. Функция $\zeta(s)$ в точке $s=1$ имеет полюс, поэтому при некотором положительном числе γ_0 в области $|s-1|\leqslant\gamma_0$ у нее нет нулей. Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ — нуль $\zeta(s)$, причем $|\gamma_n| > \gamma_0$. При $\operatorname{Re} s=\sigma>1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-\sigma}e^{-it\log n},$$

и, следовательно,

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-\sigma}\cos(t\log n).$$

Так как для вещественных φ справедливо неравенство

$$3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \geqslant 0,$$

то

$$3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right\} + 4\left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right\} + \left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)}\right\} \geqslant 0. \tag{7}$$

Оценим сверху каждое слагаемое, стоящее в левой части (7). Из теоремы 3 и следствия 1 теоремы 4 при $s=\sigma$, $1<\sigma\leqslant 2$, получаем

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + B_1,$$

где $B_1>0$ — абсолютная постоянная. Далее, опять из теоремы 3 при $s=\sigma+it$, $1<\sigma\leqslant 2$, $|t|>\gamma_0$, находим

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A\log(|t|+2) - \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_k}+\frac{1}{\rho_k}\right),$$

где $A>0$ — абсолютная постоянная. Так как $0\leqslant\beta_k\leqslant 1$, $\rho_k=\beta_k+i\gamma_k$, то

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_k} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-\beta_k+i(t-\gamma_k)} = \frac{\sigma-\beta_k}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2} > 0;$$

кроме того,

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\rho_k} = \frac{\beta_k}{\beta_k^2+\gamma_k^2} \geqslant 0.$$

Поэтому

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < A\log(|t|+2) - \frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}.$$

Из этого неравенства следует и такое:

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)}<A\log(2|t|+2).$$

Подставляя найденные оценки в (7), получим

$$\frac{3}{\sigma-1}-4\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}+A_1\log(|t|+2)\geqslant 0,$$

где $A_1>1$ — абсолютная постоянная. Последнее неравенство имеет место при любом t, $|t|>\gamma_0$, и любом σ, $1<\sigma\leqslant 2$. Возьмем в нем $t=\gamma_n$, $\sigma=1+\frac{1}{2A_1\log(|\gamma_n|+2)}$; тогда будем иметь

$$\frac{4}{\sigma-\beta_n}\leqslant\frac{3}{\sigma-1}+A_1\log(|\gamma_n|+2),$$

$$\beta_n\leqslant 1-\frac{1}{14A_1\log(|\gamma_n|+2)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть $T\geqslant 2$ и $c>0$ — абсолютная постоянная теоремы. Тогда в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{2\log(T+2)},\quad 2\leqslant|t|\leqslant T,$$

имеет место оценка

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|=O(\log^2 T).$$

Доказательство. По следствию 3 теоремы 4

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log T),$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{|\sigma-\beta_n+i(t-\gamma_n)|}+O(\log T).$$

Так как

$$\beta_n\leqslant 1-\frac{c}{\log(T+2)},\quad \sigma\geqslant 1-\frac{c}{2\log(T+2)},$$

то

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\frac{2}{c}\log(T+2)\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}1+O(\log T)=O(\log^2 T),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Приближение конечной суммой

Для решения ряда задач теории чисел требуется оценка $|\zeta(s)|$ в критической полосе. Поэтому $\zeta(s)$ приближают суммой первых членов ряда, которым она определяется при $\operatorname{Re} s > 1$, а затем оценивают эту сумму. Ниже будет получено простейшее приближение $\zeta(s)$.

Теорема 6. *При* $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $\pi x \geqslant |t| \geqslant 2\pi$, *имеет место формула*

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O\left(x^{-\sigma} \ln x\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0.

Доказательство. По лемме 2 при $N > x$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{u\}}{u^{s+1}} du. \qquad (8)$$

Последнее слагаемое есть величина порядка $O(|t| N^{-\sigma})$. Рассмотрим сумму S,

$$S = \sum_{x < n \leqslant N} \frac{1}{n^s}, \qquad s = \sigma + it.$$

Вводя обозначения $\varphi(n) = n^{-\sigma}$, $f(n) = -\frac{t}{2\pi} \ln n$, видим, что к S применимо следствие леммы 1, I, т. е.

$$S = \int_x^N u^{-s} du + O\left(x^{-\sigma} \ln x\right) = \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O\left(x^{-\sigma} \ln x\right).$$

Отсюда, из (8), устремляя N к $+\infty$, получим утверждение теоремы.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если $|\arg \tau| < \pi/2$, то

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}, \pi \tau n^2\right)}{n^s} +$$
$$+ \pi^{s-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}, \frac{\pi n^2}{\tau}\right)}{n^{1-s}} - \pi^{\frac{1}{2}} \frac{(\pi\tau)^{\frac{s-1}{2}}}{1-s} - \frac{(\pi\tau)^{\frac{s}{2}}}{s},$$

где $\Gamma(z, x)$ — неполная гамма-функция,

$$\Gamma(z, x) = \int_x^\infty e^{-\xi}\xi^{z-1}d\xi.$$

2. Вывести из формулы задачи 1 соотношения:

а) $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$;

б) пусть $h > 0$, $2\pi xy = |t|$, $x > h$, $y > h$, $K > 0$. Тогда при $-K < \sigma < K$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x}\frac{1}{n^s} + \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n \leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}} + O\left(x^{-\sigma}\right) + O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}\right).$$

3. Функция $Z(t)$,

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $e^{i\theta(t)} = \dfrac{\pi^{-it/2}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|}$, принимает действительные значения при действительных значениях t.

4. Доказать, что функция $\theta(t)$, $t \geqslant 2$, определенная в задаче 3, имеет вид

$$\theta(t) = t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

$$\Delta(t) = \frac{t}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t} - \frac{t}{2}\int_0^\infty\frac{\rho(u)\,du}{\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4}},$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

5. При любом целом $k \geqslant 0$, $t \geqslant 2$, справедливы формулы

$$Z^{(2k)}(t) = (-1)^k\cdot 2\sum_{n \leqslant \sqrt{t/2\pi}}\frac{(\theta'(t) - \ln n)^{2k}}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t) - t\ln n) + O\left(t^{-1/4}(\ln t)^{2k+1}\right),$$

$$Z^{(2k+1)}(t) = (-1)^{k+1}2\sum_{n \leqslant \sqrt{t/2\pi}}\frac{(\theta'(t) - \ln n)^{2k+1}}{\sqrt{n}}\sin(\theta(t) - t\ln n) + O\left(t^{-1/4}(\ln t)^{2k+2}\right),$$

где постоянные в знаках O зависят только от k.

6. Пусть $k \geqslant 0$, k — целое фиксированное число, $T \geqslant 2$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, функция $\Phi(t)$ определена равенством

$$\Phi(t) = \sum_{n \leqslant P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O\left(T^{-\frac{1}{4}} (\ln T)^{k+1}\right).$$

Пусть, далее,

$$\nu_0 = \left[\frac{T \ln P}{\pi}\right] + 1, \quad r = [\ln T], \quad H_1 = \left[\frac{H \ln P}{\pi r}\right],$$

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r, \quad 0 \leqslant \nu_1, \ldots, \nu_r \leqslant H_1 - 1.$$

Сравнивая $|S_1|$ и $|S_2|$,

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} \ldots \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \Phi(t_\nu), \quad S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} \ldots \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} (-1)^\nu \Phi(t_\nu),$$

доказать существование нуля нечетного порядка функции $\Phi(t)$ на промежутке $(T, T+H)$, где

$$H \geqslant T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^2, \qquad T \geqslant T_0.$$

7. Пусть k — целое, $k \geqslant 0$, $T \geqslant T_0$,

$$H \geqslant T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^2.$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.

ГЛАВА V

СВЯЗЬ МЕЖДУ СУММОЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ДИРИХЛЕ И ФУНКЦИЕЙ, ЗАДАВАЕМОЙ ЭТИМ РЯДОМ

Метод, которым доказываются теоремы этой главы, носит название метода комплексного интегрирования.

§ 1. Общая теорема

Определение 1. *Рядом Дирихле называется выражение*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \tag{1}$$

где a_n — комплексные числа (коэффициенты ряда Дирихле), $s=\sigma+it$.

Рассмотрим сумматорную функцию коэффициентов ряда Дирихле $\Phi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}a_n$. Функцию $\Phi(x)$ можно выразить при определенных условиях на ряд (1) через $f(s)$.

Теорема 1. *Пусть ряд* (1) *для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma>1$, $|a_n|\leqslant A(n)$, где $A(n)>0$ — монотонно возрастающая функция n и при $\sigma\to 1+0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right),\quad \alpha>0.$$

Тогда при любых $b_0\geqslant b>1$, $T\geqslant 1$, $x=N+\frac{1}{2}$, имеет место формула

$$\Phi(x)=\sum_{n<x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}\,ds+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right)+ \\ +O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от b_0.

Доказательство. Прежде всего имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}\,ds=\begin{cases}1+O\left(\dfrac{a^b}{T\,|\log a|}\right), & \text{если } a>1;\\ O\left(\dfrac{a^b}{T\,|\log a|}\right), & \text{если } 0<a<1.\end{cases}\tag{2}$$

Действительно, пусть $a>1$ $(0<a<1)$. Возьмем $U>b$ и рассмотрим контур $\Gamma(\Gamma_1)$ (см. рис. 5).

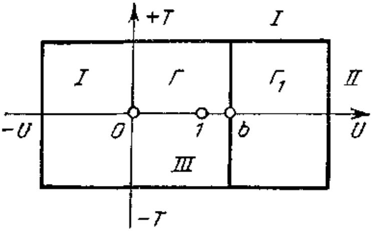

Рис. 5.

По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{a^s ds}{s}=1\qquad(a>1),$$

и соответственно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{a^s ds}{s}=0\qquad(a<1),$$

т. е.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s ds}{s}&=1+R\qquad(a>1),\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s ds}{s}&=R_1\qquad(0<a<1),\end{aligned}\tag{3}$$

где R и R_1 — соответствующие интегралы по сторонам I, II, III. Интегралы по I и III равны по абсолютной величине; поэтому если $a>1$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\left|\int\limits_{I}\frac{a^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-U}^{b}\frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}}\leqslant\frac{a^b}{T\log a};$$

если $0<a<1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{I}\frac{a^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{b}^{U}\frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}}\leqslant\frac{a^b}{T\,|\log a|}.$$

Кроме того, если $a>1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{II}\frac{a^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{+T}\frac{a^{-U}dt}{\sqrt{U^2+t^2}}=O\left(a^{-U}\right)\to 0$$

$$\text{при}\quad U\to+\infty,$$

и если $0<a<1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{II}\frac{a^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{+T}\frac{a^U dt}{\sqrt{U^2+t^2}}=O(a^U)\to 0$$

$$\text{при}\quad U\to+\infty.$$

Переходя в (3) к пределу при $U\to+\infty$, получим (2). Так как $x=N+\frac{1}{2}$, то $\frac{x}{n}\neq 1$ при натуральном n. Ряд (1) абсолютно сходится при $s=b+it$. Интегрируя его почленно, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}f(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right)=\sum_{n\leqslant x}a_n+R,$$

где

$$R=O\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1}\left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1}\right).$$

Сумму под знаком O разобьем на две: в первую отнесем те слагаемые, где $\frac{x}{n}\leqslant\frac{1}{2}$ или $\frac{x}{n}\geqslant 2$; для них $\left|\log\frac{x}{n}\right|\geqslant$ $\geqslant\log 2$, и так как по условию теоремы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}=$ $=O\left(\frac{1}{(b-1)^{\alpha}}\right)$, то первая сумма будет

$$O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right);$$

вторая сумма имеет вид

$$\sum_{\frac{1}{2}x<n<2x}|a_n|\left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1}\left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant T^{-1}A(2x)\,2^b\sum_{\frac{1}{2}x<n<2x}\left|\log\frac{N+0{,}5}{n}\right|^{-1}.$$

Выделяя в последней сумме слагаемые с $n=N-1$, N, $N+1$, которые являются величинами порядка $O(x)$, для оставшейся части $\varkappa$ находим оценку

$$\varkappa \leqslant \int\limits_{x/2}^{N-1} \left(\log \frac{N+0,5}{u}\right)^{-1} du + \int\limits_{N+1}^{2x} \left(\log \frac{u}{N+0,5}\right)^{-1} du =$$
$$= O(x \log x).$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

§ 2. Асимптотический закон распределения простых чисел

Асимптотическим законом распределения простых чисел называется утверждение $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ или, эквивалентное ему, $\psi(x) \sim x$. Сейчас будет доказано более сильное утверждение.

Теорема 2 (Ш. Валле-Пуссен). *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right);$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right).$$

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Не ограничивая общности, будем предполагать $x = (N + 1/2) \geqslant 100$. Применим теорему 1; из гл. IV следует, что в теореме 1 можно взять $\alpha = 1$, $A(n) = \log n$. Возьмем теперь

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, \quad T = e^{\sqrt{\log x}}.$$

Тогда

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

По теореме 5, IV и следствию из нее при некоторой абсолютной постоянной $c_1 > 0$ в области $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant \sigma_1 = 1 - \frac{c_1}{2 \log(T+2)}$, $|t| \leqslant T$, дзета-функция $\zeta(s)$ не обращается в нуль, и, кроме того,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T)$$

при $s = \sigma_1 + it$, $s = \sigma \pm iT$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant b$, $s = b + it$.

Рассмотрим интеграл J по контуру Г (см. рис. 6):

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

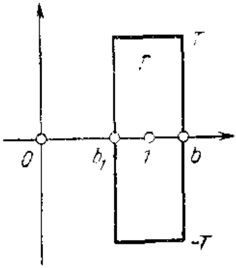

Рис. 6.

Подынтегральная функция имеет внутри контура полюс первого порядка с вычетом, равным x. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds = x + R,$$

где R — сумма интегралов по верхней, нижней и левой стороне Г. Оценим эти интегралы. Первые два равны по абсолютной величине и оцениваются

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1+iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\sigma_1}^{b}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|\frac{x^{\sigma}}{T}\,d\sigma = O\left(\frac{x\log^2 T}{T}\right);$$

интеграл по левой стороне равен

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\frac{\zeta'(\sigma_1+it)\,x^{\sigma_1+it}}{\zeta(\sigma_1+it)(\sigma_1+it)}\,dt\right| =$$

$$= O\left(x^{\sigma_1}\log^2 T\left(\int_0^1\frac{dt}{\sigma_1} + \int_1^T\frac{dt}{t}\right)\right) = O\left(x^{\sigma_1}\log^3 T\right).$$

Из полученных оценок, определения T и σ_1 следует первое утверждение теоремы.

Рассмотрим

$$S = \sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{p<x}1 + \sum_{\substack{n=p^h\\ h\geqslant 2}}\frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

Во второй сумме $k \leqslant \log x$ и при каждом $k \geqslant 2$ в сумме $\leqslant \sqrt{x}$ слагаемых, не превосходящих 1. Поэтому

$$S = \pi(x) + O(\sqrt{x} \log x). \tag{4}$$

Полагая в лемме 4, I $c_n = \Lambda(n)$, $f(x) = 1/\log x$, т. е. $C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n = \psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right)$, $f'(x) = -1/x \log^2 x$, найдем

$$S = \int_2^x \frac{\psi(u)}{u \log^2 u} du + \frac{\psi(x)}{\log x} = \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} + R,$$

где

$$R = O\left(\int_2^x e^{-c\sqrt{\log u}} \frac{du}{\log^2 u} + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) =$$

$$= O\left(\int_2^{\sqrt{x}} du + \int_{\sqrt{x}}^x e^{-c\sqrt{\log u}} du + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$$

и

$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} = -\frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{x}{\log x} =$$

$$= \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{2}{\log 2}.$$

Отсюда и из (4) следует второе утверждение теоремы.

§ 3. Представление функции Чебышёва в виде суммы по нулям дзета-функции

Метод комплексного интегрирования позволяет написать явные формулы, связывающие различного вида суммы по простым числам с нулями дзета-функции. Одна из таких формул будет сейчас доказана.

Теорема 3. *Пусть $2 \leqslant T \leqslant x$. Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нули дзета-функции в критической полосе.

Доказательство. По теореме 3, IV при $\operatorname{Re} s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} =$$

$$= \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - B_0, \quad (5)$$

где ρ_n — все нетривиальные нули $\zeta(s)$. Как и при доказательстве теоремы 2 $\left(b = 1 + \frac{1}{\log x}\right)$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right), \quad (6)$$

где $T \leqslant T_1 \leqslant T+1$ и T_1 взято так, что расстояние от прямой $\operatorname{Im} s = T_1$ до ближайшего нуля $\zeta(s)$

$$\gg \frac{1}{\log T}$$

(это всегда можно сделать, так как (теорема 4, IV, следствие 1) число нулей $\zeta(s)$, у которых $T \leqslant \operatorname{Im} \rho \leqslant T+1$, есть $O(\log T)$). Рассмотрим интеграл J,

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds,$$

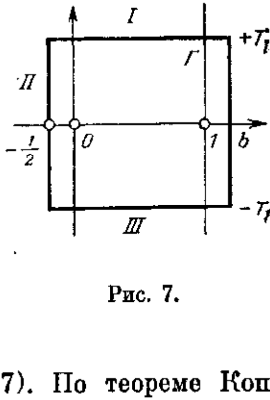

Рис. 7.

где Г — прямоугольник (см. рис. 7). По теореме Коши и (5)

$$J = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leqslant T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \quad (7)$$

Осталось оценить интегралы по сторонам Г I, II и III. Интегралы по I и III равны по абсолютной величине и оцениваются величиной

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-0,5+iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\, ds\right| < \frac{x}{T_1}\int_{-0,5}^{b}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)}\right| d\sigma. \quad (8)$$

Интеграл по II не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-0,5-iT_1}^{-0,5+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right|<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_{-T_1}^{T_1}\left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right|\quad\frac{dt}{(\log x)^{-1}+|t|}. \qquad (9)$$

Оценим величину $\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|$, где $-0,5\leqslant\sigma\leqslant b$ и $t=T_1$, или $\sigma=-0,5$ и $2\leqslant|t|\leqslant T_1$. Опять (теорема 4, IV, следствие 3)

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}=\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{\sigma-\sigma_n+i(t-\gamma_n)}+O(\log(|t|+2)).$$

Последняя сумма имеет порядок $O(\log^2 x)$, так как если $|t|\leqslant T_1$, то $\sigma=-0,5$ и нулей $\zeta(s)$ таких, что $|t-\gamma_n|\leqslant 1$, не больше $O(\log(|t|+2))$; если же $t=T_1$, $-0,5\leqslant\sigma\leqslant b$, то в силу выбора T_1

$$|T_1-\gamma_n|\gg(\log T)^{-1}.$$

Из полученной оценки, (8), (9) и (7) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Возьмем в доказанной теореме $T=\exp(\sqrt{\ln x})$. Из теорем 4 и 5 гл. IV будет следовать еще одно доказательство теоремы 2.

ЗАДАЧИ

1. Пусть ряд $f(s)$, $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$, абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s>1$, и пусть при некотором $b>1$ $A(\xi)=\sum\limits_{n\leqslant\xi}a_n$, $B(b)=\int\limits_1^{\infty}\frac{A(\xi)|}{\xi^{b+1}}\,d\xi$. Тогда при $x\geqslant 1$ и $T\geqslant 2$ имеет место равенство

$$\int\limits_1^{x}A(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\frac{f(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds+R,$$

где $|R| \leqslant c\left\{B(b)\frac{x^{b+1}}{T}+2^b\left(\frac{x\log x}{T}+\log T\right)\max_{\frac{1}{2}x\leqslant\xi\leqslant\frac{3}{2}x}|A(\xi)|\right\}$.

2. Доказать, что при $T \geqslant 2$

$$\int_T^{2T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt = O\left(T\ln^4 T\right).$$

3. Доказать, что при $X \geqslant 2$

$$\sum_{n\leqslant X}\tau_4(n) = XP_3(\ln X)+O\left(\sqrt{X}\ln^5 X\right),$$

где $P_3(u)$ — многочлен третьей степени.

4. Доказать, что при $X \geqslant 2$

$$M(X)=\sum_{n\leqslant X}\mu(n)=O\left(Xe^{-c\sqrt{\log X}}\right).$$

5. Чтобы $\zeta(s)$ не имела нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$, $1/2<\gamma<1$, необходимо и достаточно выполнения одного из соотношений ($\varepsilon > 0$ — произвольно мало): а) $\psi(x)=x+O\left(x^{\gamma+\varepsilon}\right)$;

б) $\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\log u}+O\left(x^{\gamma+\varepsilon}\right)$; в) $M(x)=O\left(x^{\gamma+\varepsilon}\right)$.

6. Пусть $0\leqslant\alpha<1$, $N\geqslant 2$. Тогда

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-n/N}e^{-2\pi i\alpha n}\Lambda(n)=\frac{1}{x}-\sum_{\rho_h}x^{-\rho_h}\Gamma(\rho_h)+O\left(\log^3 N\right),$$

где ρ_k — нули $\zeta(s)$ и $x=\frac{1}{N}+2\pi i\alpha$.

7. Полагая $\psi_0(x)=\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2}$, доказать, что при $x\geqslant 2$

$$\psi_0(x)=x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

8. а) Пусть $r(n)$ — число решений уравнения $\varphi(n)=n$. Тогда $\sum_{n\leqslant x}r(n)=c_0x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$. б) Доказать, что $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}=c_0\ln x+O(\ln\ln x)$.

9. Пусть $x>2$. Тогда

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=c_1+\ln\ln x+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{c_2}{\ln x}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

ГЛАВА VI

МЕТОД И. М. ВИНОГРАДОВА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

В этой главе будет доказана теорема о среднем И. М. Виноградова и на ее основе — оценка дзета-функции в окрестности $\operatorname{Re} s = 1$, новая граница нулей дзета-функции и новый остаточный член в асимптотической формуле распределения простых чисел.

§ 1. Теорема о среднем значении модуля тригонометрической суммы

Средним значением модуля тригонометрической суммы называется величина J,

$$J = J_{k,n}(P) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

В ряде задач теории чисел важно знать порядок роста J с ростом P (теорема о среднем значении).

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *целые числа и* $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *число решений системы уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + \ldots - x_{2k} = \lambda_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^n + \ldots - x_{2k}^n = \lambda_n, \end{cases} \qquad (1)$$

$$1 \leqslant x_1, \ldots, x_{2k} \leqslant P.$$

Справедливы следующие соотношения:

а) $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} e^{-2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n)} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n;$$

б) $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant J_{k,n}(0, \ldots, 0) = J_{k,n}(P) = J;$

в) $\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = P^{2k}$;

г) $|\lambda_1| < kP, \ldots, |\lambda_n| < kP^n$;

д) $J = J_{k,n}(P) > (2k)^{-n} P^{2k - \frac{n^2+n}{2}}$;

е) если $x_1, \ldots, x_{2k}$ *удовлетворяют* (1) *с* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, *то* $x_1 + A, \ldots, x_{2k} + A$ *удовлетворяют* (1) *с* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ *при любом* A.

Доказательство. При целом λ имеем

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha\lambda} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = 0; \\ 0, & \text{если } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда а) следует, если возвести модуль подынтегральной функции в степень $2k$ и проинтегрировать по $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; б) следует из того, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции; в) следует из того, что левая часть равенства есть число всех возможных наборов $x_1, \ldots, x_{2k}$ системы (1), т. е. P^{2k}; г) следует из условий на $x_1, \ldots, x_{2k}$;

д) следует из в), б) и г); е) следует, если последовательно подставим в первое, второе, ..., последнее уравнение системы (1) числа $x_1 + A, \ldots, x_{2k} + A$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $u_\nu, v_\nu \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. *Тогда*

$$\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^{1/\beta}\right)^{\beta}$$

(*неравенство Гёльдера*).

Доказательство. При $x \geqslant 1$ имеем

$$x^\alpha \leqslant \alpha x + \beta,$$

так как функция $x^\alpha - \alpha x - \beta$ — убывающая. Отсюда при $a, b \in [0, 1]$ получаем

$$a^\alpha b^\beta \leqslant \alpha a + \beta b. \tag{2}$$

Полагая

$$a = \frac{u_\nu^{1/\alpha}}{\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^{1/\alpha}}, \quad b = \frac{v_\nu^{1/\beta}}{\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^{1/\beta}},$$

получим утверждение леммы.

Следствия.

1. *Неравенство Коши:*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^2\right);$$

2. $\left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\right)^k \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu\right)^{k-1} \sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu^k;$

3. $\left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu\right)^k \leqslant P^{k-1} \sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^k.$

4. *Пусть* $u_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k$; *тогда*

$$u_1 \ldots u_k \leqslant \frac{u_1^k + \ldots + u_k^k}{k}$$

(*среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического*). *При* $k = 1$ *неравенство очевидно; предполагая его правильность при* $k-1$ *и пользуясь* (2), *получим*

$$u_1 \ldots u_k = \left((u_1 \ldots u_{k-1})^{k/(k-1)}\right)^{(k-1)/k} (u_k^k)^{1/k} =$$

$$= \frac{k-1}{k} (u_1 \ldots u_{k-1})^{\frac{k}{k-1}} + \frac{1}{k} u_k^k \leqslant \frac{u_1^k + \ldots + u_k^k}{k}.$$

Лемма 3. *Пусть* $n > 2$, $P > (2n)^{4n}$, $H = (2n)^4$, R — *наименьшее целое число с условием* $HR \geqslant P$, *наконец,* $v_1, \ldots, v_n$ *пробегают целые числа интервалов*

$$X_1 < v_1 \leqslant Y_1, \ \ldots, \ X_n < v_n \leqslant Y_n,$$

где при некотором ω *с условием* $0 \leqslant \omega < P$ *имеем*

$$-\omega < X_1, \quad X_1 + R = Y_1, \quad Y + R \leqslant X_2, \ \ldots,$$
$$X_n + R = Y_n, \quad Y_n \leqslant -\omega + P.$$

Тогда число E_1 *систем значений* $v_1, \ldots, v_n$ *таких, что суммы* $V_1 = v_1 + \ldots + v_n, \ \ldots, V_n = v_1^n + \ldots + v_n^n$ *лежат соответственно в каких-либо интервалах с длинами*

$$1, \ \ldots, \ P^{n-1}, \tag{3}$$

удовлетворяет неравенству

$$E_1 < e^{r(n)-1} H^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad r(n) = -\frac{n^2}{2}\ln n + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n.$$

А если $v_1^*, \ldots, v_n^*$ *пробегают те же значения, что и* $v_1, \ldots$

..., v_n (независимо от последних), то число E случаев, когда разности $V_1 - V_1', \ldots, V_n - V_n'$ лежат соответственно в каких-либо интервалах с длинами

$$P^{1-1/n}, \ldots, P^{n(1-1/n)}, \tag{4}$$

удовлетворяет неравенству

$$E < 2e^{r(n)} H^{\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}}.$$

Доказательство. Сначала оценим E_1. Пусть s — целое число с условием $1 < s \leqslant n$. Если при заданных $v_{s+1}, \ldots, v_n$ суммы $V_1, \ldots, V_n$ лежат соответственно в интервалах с длинами (3), то суммы $v_1 + \ldots + v_s, \ldots, v_1^s + \ldots + v_s^s$ лежат соответственно в некоторых интервалах с длинами $1, \ldots, P^{s-1}$.

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_s$ и $\eta_1 + \xi_1, \ldots, \eta_s + \xi_s$ — две системы значений $v_1, \ldots, v_s$ с таким свойством и с наименьшим значением η_s (следовательно, $\xi_s > 0$). Находим

$$\frac{(\eta_1 + \xi_1) - \eta_1}{\xi_1} \xi_1 + \ldots + \frac{(\eta_s + \xi_s) - \eta_s}{\xi_s} \xi_s = \theta_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(\eta_1 + \xi_1)^s - \eta_1^s}{s\xi_1} \xi_1 + \ldots + \frac{(\eta_s + \xi_s)^s - \eta_s^s}{s\xi_s} \xi_s = \frac{\theta_{s-1}}{s} P^{s-1},$$

откуда выводим

$$\Delta \xi_s - \Delta' = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1 + \xi_1) - \eta_1}{\xi_1} & \ldots & \frac{(\eta_s + \xi_s) - \eta_s}{\xi_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^s - \eta_1^s}{s\xi_1} & \ldots & \frac{(\eta_s + \xi_s)^s - \eta_s^s}{s\xi_s} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1 + \xi_1) - \eta_1}{\xi_1} & \ldots & \frac{(\eta_{s-1} + \xi_{s-1}) - \eta_{s-1}}{\xi_s} & \theta_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^s - \eta_1^s}{s\xi_1} & \ldots & \frac{(\eta_{s-1} + \xi_{s-1})^s - \eta_{s-1}^s}{s\xi_{s-1}} & \frac{\theta_{s-1}}{s} P^{s-1} \end{vmatrix}.$$

Далее к равенству (5) применим следующее преобразование. Оба стоящие в нем определителя разложим по элементам первого столбца и, рассматривая результат как разность значений некоторой функции от v_1 при $v_1 = \eta_1 + \xi_1$ и при $v_1 = \eta_1$, применим формулу Лагранжа.

Получим новое равенство, где элементы первого столбца заменяются соответственно числами $1, \ldots, x_1^{s-1}$ с некоторым x_1, подчиненным условию $X_1 < x_1 < Y_1$. Проведя далее аналогичное преобразование в отношении второго, третьего и т. д. и наконец предпоследнего столбца и затем еще в отношении последнего столбца, но только лишь для первого определителя, получим

$$\Delta_s \xi_s - \Delta_s' = 0,$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{s-1} & \ldots & x_s^{s-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_s' = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \theta_0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{s-1} & \ldots & x_{s-1}^{s-1} & \frac{\theta_{s-1}}{s} & P^{s-1} \end{vmatrix},$$

$$X_1 < x_1 < Y_1, \ldots, X_s < x_s < Y_s.$$

Отсюда находим

$$\Delta_s' = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\theta_r}{r+1} P^r U_r,$$

где U_r является коэффициентом при x_s^r в разложении

$$\Delta_s = (x_s - x_1) \ldots (x_s - x_{s-1}) \Delta_{s-1}$$

по степеням x_s и, следовательно, равен произведению Δ_{s-1} на сумму произведений чисел $-x_1, \ldots, -x_{s-1}$, взятых по $s-1-r$. Поэтому будем иметь

$$U_r \leqslant \Delta_{s-1} \binom{s-1}{r} P^{s-1-r},$$

$$\xi_s < \sum_{r=1}^{s-1} \frac{\binom{s-1}{r} P^{s-1}}{(r+1)(x_s - x_1) \ldots (x_s - x_{s-1})},$$

откуда, ввиду справедливого при $t \geqslant 1$ неравенства $x_{j+t} - x_j \geqslant (2t-1)R$, получим

$$\xi_s < \sum_{r=1}^{s} \frac{\binom{s}{r} H^{s-1}}{1 \cdot 3 \ldots (2s-3)\, s} < \frac{(2^{s+1}-2) H^{s-1}}{3 \ldots (2s-1)} < L_s H^{s-1} - 1;$$

$$L_s = \frac{4}{(2-0,5) \ldots (s-0,5)},$$

где, ввиду

$$\ln(2-0,5) + \ldots + \ln(s-0,5) > \int_1^s \ln x\, dx = s \ln s - s + 1,$$

будем иметь

$$L_s < 4e^{s-1}s^{-s}.$$

Из доказанного следует, что v_s при $s > 1$ и при заданных $v_{s+1}, \ldots, v_n$ может иметь лишь меньше чем $4e^{s-1}s^{-s}H^{s-1}$ различных значений. А так как v_1 при заданных $v_2, \ldots, v_n$ лежит в интервале с длиною 1 и, следовательно, не может иметь более двух различных значений, то имеем

$$E_1 < 2\prod_{s=2}^{n}\left(4e^{s-1}s^{-s}H^{s-1}\right) = 2\cdot 4^{n-1}(eH)^{n(n-1)/2}\prod_{s=2}^{n}s^{-s},$$

откуда, ввиду

$$\sum_{s=2}^{n} s\ln s > \int_1^n s\ln s\,ds > \frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4},$$

находим

$$E_1 < e^{r(n)-1}H^{n(n-1)/2}.$$

А отсюда, ввиду

$$\left(\frac{P^{1-1/n}}{1}+1\right)\ldots\left(\frac{P^{(n-1)(1-1/n)}}{P^{n-1}}+1\right) < eP^{(n-1)/2},$$

для числа E' систем значений $v_1, \ldots, v_n$ таких, что суммы $V_1, \ldots, V_n$ лежат соответственно в каких-либо интервалах с длинами (4), получим неравенство

$$E' < e^{r(n)}H^{n(n-1)/2}P^{(n-1)/2}.$$

Наконец, замечая, что число всех систем $v_1, \ldots, v_n$ меньше, чем $2P^nH^{-n}$, найдем

$$E < 2e^{r(n)}H^{n(n-3)/2}P^{(3n-1)/2}.$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 1 (о среднем И. М. Виноградова). *Пусть* $\tau \geqslant 0$ — *целое*, $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$. *Тогда*

$$J = J_k(P) = J_{k,n}(P) \leqslant D_\tau \cdot P^{2k-\Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}\right),$$

$$D_\tau = (n\tau)^{6n\tau}(2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать лишь для $k = n\tau$. При $\tau = 1$ и любом P теорема верна, т. к. интеграл $J_n(P)$ равен числу решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+\ldots+x_n-x_{n+1}-\ldots-x_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n+\ldots+x_n^n-x_{n+1}^n-\ldots-x_{2n}^n=0, \end{cases}$$

$$1\leqslant x_i\leqslant P, \quad i=1,\ldots,2n,$$

которое не превосходит

$$n!P^n<D_1P^{2n-n}.$$

Кроме того, при $\tau\geqslant 1$ и $P\leqslant D_\tau^{1/\Delta(\tau)}$ утверждение теоремы тривиально. Поэтому будем рассматривать лишь случай, когда $\tau>1$, $P>D_\tau^{1/\Delta(\tau)}$.

Пусть m и P_0 — натуральные числа, и пусть теорема верна при $\tau\leqslant m$, $P\leqslant P_0$, а также при $\tau\leqslant m+1$, $P<P_0$. Докажем, что она верна и при $\tau\leqslant m+1$, $P=P_0$; тем самым, согласно принципу математической индукции, будет доказано, что теорема верна всегда.

Положим $k=n(m+1)$, $H=(2n)^4$, $R=[PH^{-1}+1]$. Тогда $P\leqslant RH$ и $J_k(P)\leqslant J_k(RH)$.

Преобразуем подынтегральное выражение интеграла $J_k(RH)$. Прежде всего

$$S=\sum_{x=1}^{RH}e^{2\pi i f(x)}=\sum_{y=0}^{H-1}S(y),$$

где

$$S(y)=\sum_{z=1}^{R}e^{2\pi i f(z+Ry)}, \quad f(x)=\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n.$$

Следовательно,

$$S^k=\sum_{y_1=0}^{H-1}\ldots\sum_{y_k=0}^{H-1}S(y_1)\ldots S(y_k).$$

Набор чисел $y_1, \ldots, y_k$, а вместе с ним и произведение

$$S(y_1)\ldots S(y_k),$$

назовем *правильным*, если среди чисел $y_1, \ldots, y_k$ есть n таких, что разность между любыми двумя из них по абсолютной величине превосходит единицу. Остальные наборы и отвечающие им произведения назовем *неправильными*. Пусть теперь

$$S^k=W_1+W_2,$$

где W_1 состоит из правильных произведений $S(y_1)\ldots$ $\ldots S(y_k)$, а W_2 — из неправильных. Тогда (лемма 2, следствие 3)

$$J_k(RH)\leqslant 2J_1+2J_2,$$

где

$$J_\mu = \int_0^1 \dots \int_0^1 |W_\mu|^2 \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad \mu = 1, 2.$$

Оценим J_1. Применяя лемму 2, следствие 3, найдем

$$J_1 \leqslant H^{2k} \max_{y_1, \dots, y_k} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_k)|^2 \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Будем считать, что максимум достигается на числах $y_1, \dots, y_k$, и числа $y_1, \dots, y_k$ расположены так, что $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, причем $y_{\nu+1} - y_\nu > 1$, $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Сумму $S(y_\nu)$, $\nu \geqslant n+1$, мы разобьем на $\leqslant t = [RP^{-1+1/n} + 1]$ малых сумм, каждая с длиною интервала суммирования $P^{1-1/n}$ или, быть может, меньшей (последняя). Тогда произведение

$$S(y_{n+1}) \dots S(y_k)$$

представится суммою не более чем t^{k-n} слагаемых вида

$$S'(y_{n+1}) \dots S'(y_k),$$

где $S'(y_\nu)$ — одна из сумм, полученных разбиением $S(y_\nu)$. Далее, пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, найдем

$$|S'(y_{n+1})|^2 \dots |S'(y_k)|^2 \leqslant \frac{|S'(y_{n+1})|^{2(k-n)} + \dots + |S'(y_k)|^{2(k-n)}}{k-n}.$$

Следовательно,

$$J_1 \leqslant$$
$$\leqslant t^{2(k-n)} H^{2k} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_n)|^2 |S'(y)|^{2(k-n)} \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где y — одно из $y_{n+1}, \dots, y_k$. Но последний интеграл равен числу решений следующей системы уравнений:

$$(z_1 + Ry_1)^\nu + \dots + (z_n + Ry_n)^\nu -$$
$$- (z_{n+1} + Ry_1)^\nu - \dots - (z_{2n} + Ry_n)^\nu =$$
$$= (z_{2n+1} + a)^\nu + \dots - (z_{2k} + a)^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

в которой $y_1, \dots, y_n$, a — фиксированные целые числа, $0 \leqslant a = A + Ry < P$, $y_{\mu+1} - y_\mu > 1$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, неизвестные $z_1, \dots, z_{2n}$ меняются в пределах от 1 до R, а неизвестные $z_{2n+1}, \ldots, z_{2k}$ меняются в пределах от 1 до $P' \leqslant P^{1-1/n}$. Эта система эквивалентна такой (лемма 1, *е*):

$$(z_1 + Ry_1 - a)^\nu + \ldots + (z_n + Ry_n - a)^\nu -$$
$$- (z_{n+1} + Ry_1 - a)^\nu - \ldots - (z_{2n} + Ry_n - a)^\nu =$$
$$= z_{2n+1}^\nu + \ldots - z_{2k}^\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть J — число решений последней системы уравнений, $J'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $J''(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — числа решений таких систем:

$$(z_1 + Ry_1 - a)^\nu + \ldots + (z_n + Ry_n - a)^\nu - (z_{n+1}+Ry_1-a)^\nu - \ldots$$
$$\ldots - (z_{2n} + Ry_n - a)^\nu = \lambda_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$z_{2n+1}^\nu + \ldots + z_{k+n}^\nu - z_{k+n+1}^\nu - \ldots - z_{2k}^\nu = \lambda_\nu, \ \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда

$$J = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J'(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \, J''(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Применяя лемму 1, б), находим

$$J \leqslant J''(0,\ldots,0) \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J'(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) =$$
$$= J_{k-n}\left(P^{1-1/n}\right) \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J'(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Но последняя сумма равняется числу решений системы неравенств

$$|(z_1 + Ry_1 - a)^\nu + \ldots + (z_n + Ry_n - a)^\nu -$$
$$- (z_{n+1} + Ry_1 - a)^\nu - \ldots - (z_{2n} + Ry_n - a)^\nu| < (k-n)P^{\nu(1-1/n)},$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Применяя второе утверждение леммы 3, получаем

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J'(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) < (2k)^n \, 2e^{r(n)} H^{\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}}.$$

Объединяя найденные оценки, приходим к неравенству

$$J_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2\,(2k)^n e^{r(n)} \left(RP^{-1+\frac{1}{n}} + 1\right)^{2(k-n)} H^{2k+\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}} J_{k-n}\left(P^{1-\frac{1}{n}}\right).$$

По предположению индукции

$$J_{k-n}\left(P^{1-1/n}\right) < D_m P^{(1-1/n)(2k-2n-\Delta(m))}.$$

Далее находим (пользуемся тем, что $P > D_{m+1}^{1/\Delta(m+1)}$)

$$k = n(m+1) > \Delta(m+1) = \frac{n(n+1)}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right) \leqslant \leqslant \frac{(m+1)(n+1)}{2}$$

и

$$P > (2n)^{8n} \quad \text{при} \quad m \leqslant n;$$

$$\Delta(m+1) \leqslant n(n+1)/2$$

и

$$P > (2n)^{8(m+1)} \quad \text{при} \quad m > n.$$

Поэтому

$$\left(RP^{-1+1/n}+1\right)^{2(k-n)} \leqslant P^{2(k-n)/n} H^{-2(k-n)}\left(1+2P^{-1/n}H\right)^{2mn} \leqslant \leqslant 2P^{2(k-n)/n} H^{-2(k-n)};$$

$$J_1 \leqslant 2(2k)^n e^{r(n)} \cdot 2P^{\frac{2(k-n)}{n}} H^{-2(k-n)} H^{2k+\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}} \times \times D_m P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)(2k-2n-\Delta(m))} < \frac{1}{4} D_{m+1} P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Теперь оценим J_2. Из чисел $0, 1, \ldots, H-1$ можно не более чем $H^{n-1}/(n-1)!$ способами выбрать возрастающий ряд из $n-1$ чисел. С каждым таким рядом связано $(2n-2)^k$ наборов $y_1, \ldots, y_k$. Поэтому общее число неправильных наборов $y_1, \ldots, y_k$ будет не больше чем

$$\frac{H^{n-1}}{(n-1)!}(2n-2)^k = B.$$

Следовательно, J_2 не превосходит

$$B^2 \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(y_1) \ldots S(y_k)|^2 \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

где $y_1, \ldots, y_k$ — такой набор чисел, при котором последний интеграл принимает максимальное значение. Опять пользуясь неравенством между средним арифметическим и геометрическим, леммой 2, и предположением индукции, получаем, что

$$J_2 \leqslant B^2 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y)|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n =$$

$$= B^2 J_k(R) \leqslant B^2 D_{m+1} R^{2k-\Delta(m+1)} < \frac{1}{4} D_{m+1} P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Из оценок интегралов J_1 и J_2 следует доказываемое утверждение.

§ 2. Оценка дзетовой суммы

Тригонометрические суммы вида

$$\sum_{n=1}^{N} n^{it}, \quad \sum_{a<n\leqslant 2a} n^{it}$$

будем называть дзетовыми суммами.

Для оценок таких сумм потребуются две леммы.

Лемма 4. *При* $P \geqslant 1$

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x} \right| \leqslant \min\left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right).$$

Доказательство. Можно предположить, что $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x} \right| = \frac{|e^{2\pi i\alpha P} - 1|}{|e^{2\pi i\alpha} - 1|} \leqslant \frac{1}{|\sin \pi\alpha|} \leqslant \frac{1}{2\|\alpha\|}.$$

Лемма 5. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q \geqslant 1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда при любом β, $U > 0$, $P \geqslant 1$ *имеем*

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|}\right) \leqslant 6\left(\frac{P}{q} + 1\right)(U + q\log q).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом β_1

$$S = \sum_{x=1}^{q} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|}\right) \leqslant 6(U + q\log q).$$

Имеем

$$\alpha x+\beta_1=\frac{ax+[q\beta_1]}{q}+\frac{\theta'(x)}{q^2},$$

$$\theta'(x)=\theta x+\{q\beta_1\}q, \quad |\theta'(x)|<2q.$$

Так как функция $\|x\|$ — периодическая с периодом 1, то, делая замену $y=ax+[q\beta_1]$, найдем

$$S=\sum_{|y|\leqslant q/2}\min\left(U, \frac{1}{\left\|\frac{y}{q}+\frac{\theta''(y)}{q}\right\|}\right),$$

где $|\theta''(y)|<2$. Если $2<|y|\leqslant q/2$, то

$$\left\|\frac{y}{q}+\frac{\theta''(y)}{q}\right\|\geqslant\frac{|y|-2}{q}$$

и

$$S\leqslant 5U+\sum_{2<|y|\leqslant q/2}\frac{q}{|y|-2}<6(U+q\log q).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Существуют две абсолютные постоянные $c>0$ и $\gamma>0$ такие, что при $2\leqslant N\leqslant t$*

$$\left|\sum_{n=1}^{N}n^{it}\right|\leqslant cN\exp\left(-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2 t}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $100\leqslant M\leqslant N$; оценим

$$S=\sum_{n=M}^{2M}n^{it}.$$

Возьмем $a=[M^{5/11}]$, $1\leqslant x,\ y\leqslant a$. Имеем

$$S=\sum_{n=M}^{2M}e^{it\log(n+xy)}+2\theta a^2, \quad |\theta|\leqslant 1.$$

Отсюда

$$|S|\leqslant a^{-2}\sum_{n=M}^{2M}|W(n)|+2a^2,$$

где $W(n)=W=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}e^{it\log\left(1+\frac{xy}{n}\right)}$. Оценим $|W|$. Так как $|e^{i\varphi}-1|=2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\leqslant|\varphi|$, то при $r\geqslant 1$

$$e^{it\log(1+xy/n)}=e^{itF_r(xy)}+t\theta_1\left(\frac{a^2}{n}\right)^{r+1},$$

где

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

Определим целое число r из условий

$$r - 1 < \frac{11 \log t}{\log M} \leqslant r.$$

Тогда

$$W = W_1 + 4\theta_2 a^2 M^{-1/13},$$

где

$$W_1 = \sum_{x=1}^{a} \sum_{y=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \ldots + \alpha_r x^r y^r)},$$

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi m} \cdot \frac{t}{n^m}, \quad m = 1, \ldots, r; \quad |\theta_2| \leqslant 1.$$

При целом $k \geqslant 1$ (леммы 2 и 1)

$$|W_1|^{2k} \leqslant a^{2k-1} \sum_{x=1}^{a} \left| \sum_{y=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \ldots + \alpha_r x^r y^r)} \right|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant a^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \ldots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|.$$

Далее (леммы 1, 2, 4),

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant a^{4k^2-2k} \left(\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \right)^{2k-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \ldots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \ldots, 0) \times$$

$$\times \left| \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_r \\ \mu_1, \ldots, \mu_r}} J_{k,r}(\mu_1, \ldots, \mu_r) e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \ldots, 0) \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_r} J_{k,r}(\mu_1, \ldots, \mu_r) \times$$

$$\times \min\left(2A_1, \frac{1}{\|\alpha_1 \mu_1\|}\right) \ldots \min\left(2A_r, \frac{1}{\|\alpha_r \mu_r\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \ldots, 0) \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m \mu_m\|}\right),$$

где

$$A_m = 2ka^m, \qquad m = 1, \ldots, r.$$

Для целых m из отрезка

$$4\frac{\log t}{\log M} \leqslant m \leqslant 8\frac{\log t}{\log M} \tag{7}$$

сумму по μ_m оценим, пользуясь леммой 5; для остальных m сумму по μ_m оценим тривиально, именно, величиной $(2A_m)^2$. Имеем (m из (7))

$$\sigma_m = \sum_{\mu_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m\mu_m\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 6\left(\frac{2A_m}{q_m}+1\right)(2A_m + q_m \ln q_m) \leqslant$$
$$\leqslant 6(2A_m)^2\left(\frac{1}{q_m}+\frac{1}{A_m}+\frac{q_m}{4A_m^2}\right)\ln q_m,$$

где

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m}+\frac{\theta_m}{q_m^2},$$
$$a_m = (-1)^{m-1}, \quad q_m = \left[\frac{2\pi m n^m}{t}\right], \quad |\theta_m| \leqslant 1.$$

Из условий на m находим

$$\sigma_m \leqslant 400\cdot(32)^r(2A_m)^2 t^{-2/11};$$

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant$$
$$\leqslant a^{8k^2-4k}J_{k,r}^2(0, \ldots, 0)\cdot(400)^r(32)^{r^2}(4k)^{2r}a^{r^2+r}t^{-\frac{8}{11}\frac{\log t}{\log M}}.$$

Так как $a \leqslant M^{5/11}$, то, выбирая наименьшее целое τ из условия $e^\tau \geqslant 380^r$ и применяя к оценке $J_{k,r}(0, \ldots, 0)$ теорему 1 при $k = r\tau$, получим

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant a^{8k^2}(400)^r(32)^{r^2}(4k)^{2r}(2r\tau)^{10r^2\tau}t^{-\frac{4}{11}\frac{\log t}{\log M}};$$
$$|W_1| \leqslant c_1a^2\exp\left(-\gamma_1\frac{\log^3 M}{\log^2 t}\right),$$

где $c_1 > 0$ и $\gamma_1 > 0$ — абсолютные постоянные.

Отсюда следует нужная оценка $|S|$, а из нее — оценка теоремы (6). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *При* $|t| \geqslant 2$

$$\zeta(1+it) = O(\log^{2/3}|t|).$$

Доказательство получается из леммы 4, IV и леммы 4, I.

§ 3. Оценка дзета-функции вблизи единичной прямой

Оценку типа оценки следствия теоремы 2 можно получить и в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$.

Теорема 3. *Существует абсолютная постоянная* $\gamma_1 > 0$ *такая, что при* $\sigma \geqslant 1 - \gamma_1 \log^{-2/3} |t|$, $|t| \geqslant 2$, *выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) = O(\log^{2/3} |t|).$$

Доказательство. Можно предполагать $\sigma \leqslant 2$. Возьмем $\gamma_1 = \gamma/2$, где $\gamma > 0$ — абсолютная постоянная теоремы 2, $N = [\exp(\ln^{2/3} |t|)]$, $x = |t|$. По лемме 4, IV

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^s} + \sum_{N < n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

Модуль первой суммы не превосходит

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u} du =$$
$$= O(\ln N) = O(\ln^{2/3} |t|).$$

Для оценки второй суммы применим лемму 4, I, полагая

$$c_n = n^{-it}, \quad \mathrm{C}(u) = \sum_{N < n \leqslant u} n^{-it}, \quad f(u) = u^{-\sigma},$$

и теорему 2:

$$\left| \sum_{N < n \leqslant x} \frac{1}{n^s} \right| \leqslant \sigma \int_N^x |\mathrm{C}(u)| u^{-1-\sigma} du + |\mathrm{C}(x)| x^{-\sigma} =$$
$$= O\left(\int_N^x u^{-\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma \log^3 u}{\log^2 |t|} \right) du \right) + O(|t|^{1-\sigma-\gamma}) =$$
$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x} \exp\left(v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\log^2 |t|} \right) dv \right) + O(1) =$$
$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \frac{v^3}{\log^2 |t|} \right) dv \right) + O(1) = O(\log^{2/3} |t|).$$

Теорема доказана.

§ 4. Теоретико-функциональная лемма

Для уточнения границы нулей дзета-функции потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $F(s)$ — *аналитическая в круге* $|s-s_0|\leqslant r$ *функция*, $F(s_0)\neq 0$, *и в этом круге*

$$\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right|\leqslant M.$$

Если $F(s)\neq 0$ *в области* $|s-s_0|\leqslant r/2$, $\operatorname{Re}(s-s_0)\geqslant 0$, *то*

$$a)\quad \operatorname{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant -\frac{4}{r}\log M;$$

$$б)\ \operatorname{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant -\frac{4}{r}\log M+\operatorname{Re}\frac{1}{s_0-\rho},$$

где ρ — *любой нуль* $F(s)$ *в области* $|s-s_0|\leqslant r/2$, $\operatorname{Re}(s-s_0)<0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(s)=F(s)\prod_{\rho}(s-\rho)^{-1},\quad s\neq\rho,\quad g(\rho)=\lim_{s\to\rho}g(s),$$

где ρ — все нули $F(s)$ в круге $|s-s_0|\leqslant r/2$ с кратностью; $g(s)$ — аналитическая в круге $|s-s_0|\leqslant r$ функция. На окружности $|s-s_0|=r$ имеем

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\prod_{\rho}\frac{s_0-\rho}{s-\rho}\right|\leqslant M.$$

Следовательно, такое же неравенство имеет место в круге $|s-s_0|\leqslant r$. Рассмотрим меньший круг $|s-s_0|\leqslant r/2$; в нем $g(s)\neq 0$. Поэтому, беря главную ветвь логарифма, видим, что $f(s)=\ln\dfrac{g(s)}{g(s_0)}$ — аналитическая функция в этом же круге и

$$\operatorname{Re}f(s)=\log\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant\log M$$

($M\geqslant 1$ по принципу максимума, так как при $s=s_0$ $\dfrac{g(s)}{g(s_0)}=1$ и $\operatorname{Re}f(s_0)=0$). Поэтому, применяя лемму 4, а), II, получим

$$|f'(s_0)|=\left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right|\leqslant\frac{4}{r}\log M;$$

$$\left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}-\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right|\leqslant\frac{4}{r}\log M,$$

т. е.

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}-\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right\}\geqslant-\frac{4}{r}\log M.$$

Так как $\operatorname{Re}(s_0-\rho)>0$, то из

$$\operatorname{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M+\operatorname{Re}\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}$$

следуют утверждения леммы.

§ 5. Новая граница нулей дзета-функции

Уточнением результатов гл. IV, § 3, является

Теорема 4. *Существует абсолютная постоянная $c>0$ такая, что $\zeta(s)\neq 0$ в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(|t|+10)\ln\ln(|t|+10)}.$$

Доказательство. Пусть $t\geqslant t_0>0$, t — ордината нуля $\rho=\sigma+it$; положим

$$\sigma=1-\frac{d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)},\qquad d\leqslant 1.$$

Надо доказать, что $d\geqslant c_1>0$. Будем считать, что t_0 настолько велико, что

$$\frac{1}{\ln\ln(2t+2)}<\frac{\gamma_1}{10},$$

где $\gamma_1>0$ — постоянная теоремы 3. Тогда

$$\frac{d}{\ln\ln(2t+2)}<\frac{\gamma_1}{10}.$$

Рассмотрим точку

$$s_0=1+\frac{4d}{\ln^{2/3}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}+it=\sigma_0+it$$

(см. рис. 8). Из точки s_0 опишем круг радиуса r,

$$r=\frac{\gamma_1}{\ln^{2/3}(2t+2)};$$

точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$ с центром s_0, ввиду того, что

$$\frac{\gamma_1}{2\ln^{2/3}(2t+2)} > \frac{5d}{\ln^{2/3}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}.$$

Полагая в лемме 6 $F(s)=\zeta(s)$, оценим

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|$$

в круге $|s-s_0|\leqslant r$. По теореме 3 в круге $|s-s_0|\leqslant r$

$$\zeta(s)=O(\log^{2/3}t).$$

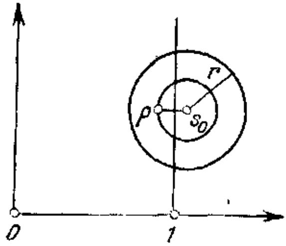

Рис. 8.

Кроме того,

$$\frac{1}{|\zeta(s_0)|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}}=\frac{\ln^{2/3}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}{4d}+1.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|\leqslant M=c_2\frac{\log^2 t}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s-s_1|\leqslant r$, $s_1=\sigma_0+i2t$. Так как $\zeta(s)\neq 0$ в областях $|s-s_0|\leqslant r/2$, $\operatorname{Re}(s-s_0)\geqslant 0$ и $|s-s_1|\leqslant r/2$, $\operatorname{Re}(s-s_1)\geqslant 0$, то, применяя лемму 6, найдем

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M+\operatorname{Re}\frac{1}{s_0-\rho}=$$

$$=-\frac{4}{\gamma_1}\ln^{2/3}(2t+2)\ln M+\frac{\ln^{2/3}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}{5d},$$

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M=-\frac{4}{\gamma_1}\ln^{2/3}(2t+2)\ln M.$$

Кроме того, при $\sigma_0>1$

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}<\frac{1}{\sigma_0-1}+c_3.$$

Далее (как в гл. IV, § 3),

$$3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}\right\}+4\left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_0+it)}{\zeta(\sigma_0+it)}\right\}+\left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_0+i2t)}{\zeta(\sigma_0+i2t)}\right\}\geqslant 0.$$

Подставляя полученные оценки в последнее неравенство и производя сокращения, найдем

$$-\frac{\ln\ln(2t+2)}{20d}-\frac{20}{\gamma_1}\ln d+\frac{40}{\gamma_1}\ln\ln(2t+2)+c_4\geqslant 0,$$

или

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{\ln\ln(2t+2)}{20}+\frac{20d}{\gamma_1}\ln d\right)+\left(\frac{40}{\gamma_1}\ln\ln(2t+2)+c_4\right)\geqslant 0.$$

Так как $d\ln d\to 0$ и $\frac{1}{d}\to\infty$ при $d\to 0$, то из последнего неравенства видим, что $d\geqslant c_1>0$. Утверждение теоремы следует из уже доказанного и теоремы 5, IV.

§ 6. Новый остаточный член в асимптотической формуле распределения простых чисел

Простым следствием теоремы 4 и результатов § 3, V является

Теорема 5. *Справедливы следующие асимптотические формулы* ($x\geqslant x_0>0$):

$$\psi(x)=x+O\left(x\exp\left(-c_1\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{0,6}\right)\right),$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c_2\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{0,6}\right)\right).$$

Доказательство. Возьмем T, $\ln T=\ln^{3/5}x\times\times(\ln\ln x)^{-3/5}$, применим теорему 3, V и теорему 4; будем иметь

$$|\psi(x)-x|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}\right|+O\left(\frac{x\ln^2x}{T}\right)\leqslant x^\sigma\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T}\frac{1}{|\rho|}+O\left(\frac{x\ln^2x}{T}\right),$$

где

$$\sigma=1-\frac{c}{\ln^{2/3}T\ln\ln T}.$$

Отсюда получаем первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из первого (см. § 2, V).

1. Пусть $c > 0$ — произвольное фиксированное число, γ — постоянная, $1 < \gamma < 3/2$, $m \neq 0$, $P \geqslant 1$,

$$f(x) = e^{c(\log x)^{\gamma}}, \quad S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Если $0 < |m| < e^{(\log P)^{3-2\gamma-\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 3-2\gamma$, то

$$|S| \leqslant c_1 P e^{-c_2(\log P)^{3-2\gamma}}.$$

2. Пусть $0 < \sigma \leqslant 1$ и $D(\sigma)$ — количество чисел ряда $x = 1, 2, \ldots, P$ с условием $\{f(x)\} < \sigma$,

$$D(\sigma) = \sigma P + \lambda(\sigma).$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи 1, то

$$\lambda(\sigma) = O\left(P e^{-c_2(\log P)^{3-2\gamma}}\right).$$

3. Пусть $0{,}5 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$, $|t| \geqslant 2$; тогда

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{c(1-\sigma)^{3/2}} \log|t|\right).$$

4. При $x \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{n \leqslant X} \tau_k(n) = X P_{k-1}(\log X) + \theta X^{1-\rho}(c_1 \log X)^k,$$

где $\rho = c/k^{2/3}$, $|\theta| \leqslant 1$, $P_{k-1}(u)$ — многочлен степени $k-1$.

5. Пусть вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $0 < \varepsilon < 1/4$. Тогда для любых вещественных чисел $\beta_1, \ldots, \beta_N$ найдется t такое, что $\|\alpha_1 t - \beta_1\| < \varepsilon, \ldots, \|\alpha_N t - \beta_N\| < \varepsilon$.

6. Пусть

$$\Phi(X; s, \vec{\theta}) = \sum_{n \leqslant X} n^{-s} e^{2\pi i \sum_{p} \alpha_p(n)\theta_p},$$

где $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$ — каноническое разложение n на простые сомножители, θ_p — независимые вещественные переменные, индексированные простыми числами. Если

$$\Phi(X; s_0, \vec{\theta}) = 0,$$

то для всякого $\delta > 0$ найдется s_1 такое, что $\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_0 - \delta$ и

$$\Phi(X; s_1) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^{s_1}} = 0.$$

7. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где

$$\lambda(n) = (-1)^{\sum_{p/n} \alpha_p(n)}, \qquad n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}.$$

8. Доказать, что

а) $\left.\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right|_{s=1} = 0;$ б) $\left.\dfrac{d}{ds}\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right|_{s=1} > 0.$

9. Пусть

$$F\left(\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots, \theta_{p_k}\right) = \sum_{n=1}^{k} \ln\left(1 - \frac{e^{2\pi i \theta_{p_n}}}{p_n}\right)^{-1},$$

где $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots, \theta_{p_k}$ — независимые вещественные переменные, индексированные простыми числами в порядке следования. Доказать, что для всякого натурального m найдется $k_0 = k_0(m)$ такое, что при любом $k \geqslant k_0$ уравнение

$$\operatorname{Im} F\left(\theta_{p_1}, \ldots, \theta_{p_k}\right) = \pi m$$

имеет вещественное решение $\left(\theta_{p_1}, \ldots, \theta_{p_k}\right)$.

10. Доказать, что существует вполне мультипликативная функция $\lambda'(n)$, т. е. $\lambda'(nm) = \lambda'(n)\lambda'(m)$ при любых натуральных n и m, с условиями

а) $|\lambda'(n)| = 1$;

б) равенство $\lambda'(p) = \lambda(p) = -1$ выполняется для всех простых p кроме конечного их числа;

в) функция $F(s)$, определенная при $\operatorname{Re} s > 1$ равенством

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^s},$$

имеет мероморфное продолжение на всю s-плоскость;

г) $F'(s)|_{s=1} < 0$;

д) справедливы соотношения

α) $\displaystyle\sum_{n \leqslant X} \frac{\lambda'(n)}{n} = O\left(e^{-c\sqrt{\ln X}}\right),$

β) при $\sigma \geqslant 1$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sum_{n \leqslant X} \frac{\lambda'(n)}{n^\sigma}\right) = F'(\sigma) + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

11. При любом $\sigma \in \left[1, 1 + \dfrac{1}{\ln X}\right]$, $X \geqslant X_0 > 0$, множество значений функции F_1,

$$F_1 = F_1\left(\vec{\theta}_p\right) = \sum_{0,5X < p \leqslant X} \left(\frac{1}{p^\sigma} + \frac{e^{2\pi i \theta_p}}{p^\sigma}\right),$$

от вещественных переменных θ_p, $0{,}5X < p \leqslant X$, является кругом $K = K(R)$ радиуса $R > c/\ln X$ с центром в точке $(R, 0)$.

12. Существует $c_1 > 0$ такая, что при $X \geqslant X_0 > 0$ и $\sigma = 1 + c_1/\ln X$ имеет место соотношение

$$-\sum_{n \leqslant X} \frac{\lambda'(n)}{n^{\sigma}} \in K = K(R).$$

13. При $\sigma = 1 + c_1/\ln X$, $X \geqslant X_0 > 0$, существует решение уравнения

$$\Phi\left(X; \sigma, \vec{\theta}\right) = \sum_{n \leqslant X} n^{-\sigma} \cdot e^{2\pi i \sum_p \alpha_p(n) \theta_p} = 0$$

с вещественными $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots$ $\left(\Phi\left(X; \sigma, \vec{\theta}\right)\right.$ из задачи 6).

14. При $X \geqslant X_0 > 0$ уравнение

$$\Phi(X; s) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} = 0$$

имеет решение s_1 такое, что

$$\operatorname{Re} s_1 > 1 + \frac{c_1}{2 \ln X}.$$

ГЛАВА VII

ПЛОТНОСТЬ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ И ПРОБЛЕМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ИНТЕРВАЛАХ МАЛОЙ ДЛИНЫ

Из асимптотической формулы для $\pi(x)$ (теорема 5, VI) следует, что на интервале $(x, x+y)$, $x > x_0 > 0$,

$$y = x\exp\left(-c\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{0,6}\right)$$

есть простое число. Применение теорем о плотности распределения нулей дзета-функции в критической полосе позволяет получить значительно более сильный результат (см. следствие теоремы 2).

§ 1. Простейшая плотностная теорема

Определение. *При* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T \geqslant 2$ *функции* $N(T)$ *и* $N(\sigma, T)$ *задаются равенствами*

$$N(T) = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} 1, \quad N(\sigma, T) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T \\ \operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma}} 1;$$

другими словами, $N(T)$ — *число нетривиальных нулей дзета-функции в прямоугольнике* $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$, $N(\sigma, T)$ — *число нулей дзета-функции в прямоугольнике* $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma$.

Проблема состоит в том, чтобы для $N(\sigma, T)$ получить возможно более точную оценку. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть* $S(t)$ — *комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[t_0, t_k]$ *функция,*

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k.$$

Тогда, полагая $\delta = \min\limits_{0 \leqslant r < k} (t_{r+1} - t_r)$, *будем иметь*

$$\sum_{r=1}^{k} |S(t_r)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2\,dt + 2\left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Определим функцию $\omega_r(t)$ следующим образом (характеристическая функция интервала (t_r, t_{r+1})):

$$\omega_r(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t_r \leqslant t \leqslant t_{r+1}; \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_0}^{t} \omega_r(u)\, du.$$

Тогда

$$\int_{t_r}^{t_r+1} \varphi_r(t) \left(|S(t)|^2\right)' dt = \varphi_r(t) |S(t)|^2 \Big|_{t_r}^{t_{r+1}} - \\ - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 \omega_r(t)\, dt = |S(t_{r+1})|^2 - \\ - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2\, dt,$$

$$|S(t_{r+1})|^2 \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2\, dt + 2 \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|\, |S'(t)|\, dt.$$

Суммируя обе части неравенства по r и применяя к интегралу от произведения неравенство Коши (квадрат интеграла от произведения неотрицательных функций не превосходит произведения интегралов от квадратов функций), получим утверждение леммы.

Теорема 1. *При* $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$N(\sigma, T) \leqslant cT^{4\sigma(1-\sigma)} (\log T)^{12}.$$

Доказательство. Пусть $T \geqslant 2$; возьмем в теореме 6, IV $x = T$. Тогда при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} + \frac{T^{s-1}}{s-1} + O\left(T^{-\sigma} \ln T\right).$$

Умножая последнее равенство на

$$M_X(s) = \sum_{n \leqslant X} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad X = T^{2\sigma-1},$$

найдем

$$\zeta(s)M_x(s)=\Phi(s)+R(s), \tag{1}$$

где

$$\Phi(s)=M_X(s)\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n^s},\quad R(s)=O\left(\frac{T^{1-\sigma}\ln T}{|t|+1}\,|M_X(s)|\right).$$

Далее,

$$\Phi(s)=\sum_{m\leqslant X}\frac{\mu(m)}{m^s}\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n^s}=\sum_{n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^s},$$

где

$$a_n=\sum_{\substack{m\backslash n\\ m\leqslant X\leqslant T\\ n/m\leqslant T}}\mu(m)=\begin{cases}1, \text{ если } n=1;\\ 0, \text{ если } 1<n\leqslant X.\end{cases} \tag{2}$$

Кроме того, всегда $|a_n|\leqslant\tau(n)$. Пусть теперь $s=\rho$, $\zeta(\rho)=0$; тогда из (1) и (2)

$$1\leqslant\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|+O\left(\frac{T^{1-\sigma}\ln T}{|t|+1}|M_X(\rho)|\right);$$

$$1\ll\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|^2+\frac{T^{2-2\sigma}\ln^2 T}{|t|^2+1}|M_X(\rho)|^2.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по всем нулям дзета-функции из прямоугольника $\sigma\leqslant\operatorname{Re}\rho\leqslant 1$, $|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T$, найдем

$$N(\sigma,T)\ll\sum_\rho\left\{\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|^2+\frac{T^{2-2\sigma}\ln^2 T}{|t|^2+1}|M_X(\rho)|^2\right\}.$$

Преобразуем сумму по ρ так, чтобы можно было применить лемму. Возьмем $A=[\ln T]$ и разобьем отрезок $[-T, +T]$ на отрезки длины 1 вида

$$Am+n,\quad n=1,\ldots,A;\quad |m|<TA^{-1}+1.$$

Тогда

$$\sum_\rho=\sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{n=1}^{A}\sum_{Am+n-1<\operatorname{Im}\rho\leqslant Am+n}\leqslant$$

$$\leqslant A\max_{1\leqslant n\leqslant A}\sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{Am+n-1<\operatorname{Im}\rho\leqslant Am+n}.$$

Так как в каждом прямоугольнике $Am+n-1<\operatorname{Im}\rho\leqslant\leqslant Am+n$ не более $c_2\ln T$ нулей, то, выбирая по одному нулю из каждого такого прямоугольника, получим не более $c_3 \ln T$ сумм; обозначая через $\sum\limits_{\rho}'$ наибольшую из них, найдем

$$\sum_{\rho} \ll \ln^2 T \sum_{\rho}'.$$

Разбивая $\sum\limits_{\rho}'$ на не более чем $c_4 \ln T$ сумм, объединяя в одну сумму слагаемые, у которых $T_1 \leqslant |\operatorname{Im}\rho| \leqslant 2T_1$, $2T_1 \leqslant \leqslant T$, найдем

$$N(\sigma, T) \ll \ln^3 T \sum_{\rho}'' \left\{ \left| \sum_{X<n\leqslant TX} \frac{a_n}{n^{\rho}} \right|^2 + \frac{T^{2-2\sigma}\ln^2 T}{T_1^2+1} |M_X(\rho)|^2 \right\}, \tag{3}$$

причем суммирование в Σ'' ведется по нулям ρ дзета-функции, $T_1 \leqslant |\operatorname{Im}\rho| \leqslant 2T_1 \leqslant T$, $\sigma \leqslant \operatorname{Re}\rho \leqslant 1$, $|\operatorname{Im}\rho - \operatorname{Im}\rho'| \geqslant \ln T - 1$. Оценим теперь сумму

$$\sum_{\rho}'' \left| \sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{b_n}{n^{\rho}} \right|^2,$$

где b_n — произвольные числа с условием $|b_n| \leqslant \tau(n)$, $Y \geqslant \geqslant 1$ — любое целое.

Имеем ($\rho = \sigma_r + it_r$)

$$\sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{b_n}{n^{\sigma_r}} n^{-it_r} = \sum_{Y<n<2Y} \left(\frac{1}{n^{\sigma_r}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_r}} \right) \times$$
$$\times \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{-it_r} + \frac{1}{(2Y)^{\sigma_r}} \sum_{Y<m\leqslant 2Y} b_m m^{-it_r}.$$

Так как $\sigma \leqslant \sigma_r \leqslant 1$, то

$$\sum_{\rho}'' \left| \sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{b_n}{n^{\rho}} \right|^2 \ll Y^{-2\sigma-1} \sum_{Y<n<2Y} \sum_{r} \left| \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{it_r} \right|^2 +$$
$$+ Y^{-2\sigma} \sum_{r} \left| \sum_{Y<m\leqslant 2Y} b_m m^{it_r} \right|^2.$$

К сумме S_n по r, $Y < n \leqslant 2Y$, применим лемму; получим

$$S_n = \sum_{r} \left| \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{it_r} \right|^2 \ll \frac{1}{\ln T} \int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{it} \right|^2 dt +$$
$$+ \left(\int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y<m\leqslant n} b_m m^{it} \log m \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Осталось оценить интеграл J,

$$J = \int_{T_1}^{2T_1} \Big| \sum_{Y<m\leqslant n} c_m m^{it} \Big|^2 dt,$$

где $|c_m| \leqslant \tau(m) \log m$.

Возводя модуль суммы по m в квадрат, интегрируя, найдем

$$J \ll T_1 \sum_{Y<m\leqslant 2Y} |c_m|^2 + \sum_{Y<m<k\leqslant 2Y} |c_m||c_k| \frac{1}{\log \frac{k}{m}};$$

$$\sum_{Y<m\leqslant 2Y} |c_m|^2 \ll \log^2 Y \sum_{Y<m\leqslant 2Y} \tau^2(m) \ll Y \log^5 Y;$$

$$\sum_{Y<m<k\leqslant 2Y} |c_m||c_k| \frac{1}{\log \frac{k}{m}} \leqslant \sum_{Y<m\leqslant 2Y} \sum_{r=1}^{Y} |c_m||c_{m+r}| \frac{m}{r} \ll$$

$$\ll Y \sum_{r=1}^{Y} \frac{1}{r} \sqrt{\sum_{Y<m\leqslant 2Y} |c_m|^2 \sum_{Y<m\leqslant 2Y} |c_{m+r}|^2} \ll Y^2 \log^6 Y.$$

Отсюда

$$J \ll (T_1 Y + Y^2) \log^6 Y; \quad S_n \ll (T_1 Y + Y^2) \log^6 Y;$$

$$\sum_{\rho}'' \Big| \sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{b_n}{n^\rho} \Big|^2 \ll \left(T_1 Y^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}\right) \log^6 Y. \tag{4}$$

Теперь, разбивая в (3) первую сумму в фигурных скобках на $\ll \ln T$ сумм и применяя полученную оценку (4) (заметим, что в этом случае $X < Y \leqslant XT$), найдем

$$\sum_{\rho}'' \Big| \sum_{X<n\leqslant XT} \frac{a_n}{n^\rho} \Big|^2 \ll \left(T_1 X^{1-2\sigma} + (XT)^{2-2\sigma}\right) \ln^7 T;$$

аналогично, разбивая вторую сумму в фигурных скобках (3) на $\ll \ln T$ сумм вида (4) (заметим, что в этом случае $1 \leqslant Y \leqslant X$), найдем

$$\frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2+1} \sum_{\rho}'' |M_X(\rho)|^2 \ll \frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2+1} \left(T_1 + X^{2-2\sigma}\right) \ln^7 T \ll$$

$$\ll \left(T^{2-2\sigma} + (TX)^{2-2\sigma}\right) \ln^7 T \ll T^{4\sigma(1-\sigma)} \ln^7 T.$$

Из полученных оценок, выбора X и (3), следует утверждение теоремы.

§ 2. Простые числа в интервалах малой длины

Теорема 2. *Пусть* $h \geqslant x^{0,75}\exp(\ln^{0,8} x)$, $x \geqslant x_0 > 0$; *тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O(h\exp(-\ln^{0,1} x).$$

Доказательство. При $2 \leqslant T \leqslant x$ (теорема 3, IV)

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right).$$

Следовательно (можно считать $h \leqslant x$),

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right). \tag{5}$$

Оценим сумму по ρ. Имеем

$$\left|\frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho}\right| = \left|\int_x^{x+h} u^{\rho-1}du\right| \leqslant \int_x^{x+h} u^{\sigma-1}du \leqslant hx^{\sigma-1},$$

где $\sigma = \operatorname{Re}\rho$. Далее,

$$S = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} x^\sigma = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T}\left(\log x\int_0^\sigma x^u du + 1\right) =$$

$$= N(T) + \log x \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T}\int_0^1 x^u F(u, \sigma)\, du,$$

где

$$F(u, \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant u \leqslant \sigma; \\ 0, & \text{если } \sigma < u \leqslant 1. \end{cases}$$

Из определения $F(u, \sigma)$ следует равенство

$$\sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} F(u, \sigma) = N(u, T).$$

Теперь заметим, что если $u \geqslant 1/2$, то по теореме 1

$$N(u, T) \ll T^{4(1-u)}(\ln T)^{10};$$

если же $0 \leqslant u < 1/2$, то будем пользоваться тривиальной оценкой (следствие 1 теоремы 4, IV):

$$N(u, T) \ll N(T) \ll T\ln T.$$

Кроме того, по теореме 2, VI

$$N(u, T) = 0, \text{ если только}$$

$$u > 1 - \frac{c}{\ln^{2/3}(T+10)\ln\ln(T+10)} = 1 - \gamma(T).$$

Учитывая все это, приходим к оценке (считаем $x \geqslant 2T^4$)

$$S \ll T\ln T + \log x \int_0^{1/2} x^u T \ln T du +$$

$$+ \log x \int_{1/2}^{1-\gamma(T)} x^u T^{4(1-u)} (\ln T)^{10} du \ll$$

$$\ll x^{1/2} T \ln T + \left(xT^{-4}\right)^{1-\gamma(T)} T^4 (\ln T)^{10} \ln x.$$

Отсюда и из (5) получаем

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = 1 + O\left(\frac{T\ln T}{\sqrt{x}}\right) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{T^4}{x}\right)^{\gamma(T)} (\ln T)^{10} \ln x\right) + O\left(\frac{x\ln^2 x}{Th}\right).$$

Полагая в последнем соотношении

$$T^4 = x\exp(-\ln^{0,8} x),$$

видим, что при

$$h \geqslant x^{0,75}\exp(\ln^{0,8} x)$$

остаточные члены есть

$$O(\exp(-\ln^{0,1} x)).$$

Теорема доказана.

Следствие. *При обозначениях и условиях теоремы 2 на интервале $(x, x+h)$ есть простое число.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{x<p\leqslant x+h} \ln p = \psi(x+h) - \psi(x) + O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right) =$$

$$= h + O\left(h\exp\left(-\ln^{0,1} x\right)\right) \geqslant 1,$$

если $x \geqslant x_0$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть α — произвольное фиксированное число из промежутка $0 < \alpha \leqslant 1/4$, $t \geqslant t_0 > 0$, $X \leqslant \sqrt{t}$. Рассмотрим два соотношения А и В:

A. $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O\left(t^{\alpha+\varepsilon}\right)$,

B. $\sum\limits_{n\leqslant X} n^{it}=O\left(\sqrt{X}t^{\alpha+\varepsilon}\right)$.

Доказать, что выполнение одного из них влечет за собой выполнение другого.

2. Для того чтобы выполнялось соотношение (гипотеза Линделёфа)

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O\left(|t|^{\varepsilon}\right),$$

необходимо и достаточно выполнение любого из условий:

а) $\frac{1}{T}\int\limits_1^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt=O\left(T^{\varepsilon}\right),\quad k=1,2,\ldots;$

б) $\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt=O\left(T^{\varepsilon}\right),\quad \sigma>1/2,\quad k=1,2,\ldots;$

в) $\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}},\quad \sigma>\frac{1}{2},\quad k=1,2,\ldots;$

г) $\zeta^k(s)=\sum\limits_{n\leqslant|t|^{\delta}}\frac{\tau_k(n)}{n^s}+O\left(|t|^{-\lambda}\right),\quad k=1,2,\ldots;\quad \sigma\geqslant$

$\geqslant\sigma_0>1/2,\quad 0<\delta<1$—любое, $\quad\lambda=\lambda(k,\delta,\sigma_0)>0.$

д) $T_k(X)=\sum\limits_{n\leqslant X}\tau_k(n)=XP_{k-1}(\ln X)+O\left(X^{1/2+\varepsilon}\right),\ k=2,3,\ldots$

3. Пусть $\varepsilon>0$ — фиксированное число, и пусть выполняется гипотеза Линделёфа. Доказать, что

$$N(\sigma,T)=O\left(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)}\ln^c T\right).$$

4. а) Доказать, что при $N\geqslant N_0$ найдутся простые числа p и p' с условием

$$N=p+p'+O(N^{\gamma}),\qquad \gamma>1/2. \tag{6}$$

б) При выполнении условий задачи 3, доказать (6) с произвольным $\gamma>0$.

5. При выполнении условий задачи 3 доказать, что

$$\psi(x+h)-\psi(x)=h+O\left(h\exp\left(-\ln^{0,1}x\right)\right),$$

где $h\geqslant x^{0,5+\varepsilon}$.

ГЛАВА VIII

L-РЯДЫ ДИРИХЛЕ

Подобно задачам о распределении простых чисел в натуральном ряде можно ставить и решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с разностью $k \geqslant 1$ и начальным членом l, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k) = 1$. Эти задачи важны не только как обобщения классических, они имеют исключительно большое значение при решении многих аддитивных проблем с простыми числами (см., например, гл. X).

Благодаря существованию мультипликативной функции, позволяющей выделить из заданной последовательности целых чисел подпоследовательность, принадлежащую арифметической прогрессии вида $kn + l$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, удается применить уже развитые в гл. V методы. Такой функцией является функция $\chi(n)$, введенная Дирихле и названная им характером. Везде ниже под характером будем понимать характеры Дирихле.

§ 1. Характеры и их свойства

Прежде всего определим характеры по модулю k, равному степени простого числа, и докажем их основные свойства. Характеры по произвольному модулю k определим затем через характеры по модулю, равному степени простого числа; при этом основные свойства последних сохранятся.

Пусть $k = p^\alpha$, где $p > 2$ — простое число, $\alpha \geqslant 1$. Как известно, по модулю k существуют первообразные корни, и пусть g — наименьший из них. Через $\operatorname{ind} n$ будем обозначать индекс числа n, $(n, k) = 1$, по модулю k при основании g, т. е. число $\gamma = \gamma(n) = \operatorname{ind} n$ такое, что

$$g^\gamma \equiv n \pmod k.$$

Таким образом, индекс числа определяется с точностью до слагаемых, кратных $\varphi(k)$.

Определение 1. *Характером по модулю* $k = p^\alpha$, $p > 2$ — *простое*, $\alpha \geqslant 1$, *называется функция* $\chi(n)$, *областью определения которой является множество целых чисел* n, *и такая, что*

$$\chi(n) = \chi(n;\, k) = \chi(n;\, k,\, m) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (n,\, k) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \operatorname{ind} n}{\varphi(k)}}, & \text{если} \quad (n,\, k) = 1, \end{cases}$$

где m — *целое число*.

Из определения характера видно, что функция $\chi(n) = \chi(n;\, k,\, m)$ зависит от параметра m, является периодической по m с периодом $\varphi(k)$, т. е. существует, вообще говоря, $\varphi(k)$ характеров по модулю k, которые получаются, если брать m равным $0, 1, \ldots, \varphi(k) - 1$.

Пусть теперь $k = 2^\alpha$, $\alpha \geqslant 3$. Как известно, для любого нечетного числа n существует система индексов $\gamma_0 = \gamma_0(n)$ и $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ по модулю k, т. е. такие числа γ_0 и γ_1, что

$$n \equiv (-1)^{\nu_0} 5^{\nu_1} \pmod{k}.$$

Таким образом, числа γ_0 и γ_1 определяются с точностью до слагаемых, кратных соответственно 2 и $2^{\alpha-2}$.

Определение 2. *Характером по модулю* $k = 2^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, *называется функция* $\chi(n)$, *областью определения которой является множество целых чисел* n, *определенная одной из следующих формул*:

$$\chi(n) = \chi(n;\, 2) = \chi(n;\, 2,\, 0,\, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ (n,\, 2) > 1; \\ 1, & \text{если} \ (n,\, 2) = 1, \end{cases}$$

$$\chi(n) = \chi(n;\, 4) = \chi(n;\, 4;\, m_0,\, 0) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (n,\, 4) > 1; \\ (-1)^{m_0 \nu_0}, & \text{если} \quad (n,\, 4) = 1, \end{cases}$$

где $\quad n \equiv (-1)^{\nu_0} \pmod{4}$, $\quad m_0$—*целое*;

$$\chi(n) = \chi\left(n;\, 2^\alpha\right) = \chi\left(n;\, 2^\alpha,\, m_0,\, m_1\right) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \left(n,\, 2^\alpha\right) > 1; \\ (-1)^{\nu_0 m_0} e^{2\pi i \frac{m_1 \nu_1}{2^{\alpha-2}}}, & \text{если} \quad \left(n,\, 2^\alpha\right) = 1, \quad \alpha \geqslant 3, \end{cases}$$

где m_0, m_1 — *целые числа*.

Из определения 2 видно, что функция $\chi(n)=\chi(n;\ 2^\alpha, m_0, m_1)$ зависит от параметров m_0 и m_1, является периодической по m_0 и m_1 с периодами соответственно 2 и $2^{\alpha-2}$, т. е. существует, вообще говоря, $\varphi(k)=\varphi(2^\alpha)$ характеров по модулю $k=2^\alpha$, которые получаются, если брать m_0 равным 0, 1, а m_1 равным 0, 1, ..., $2^{\alpha-2}-1$.

Ввиду того, что индекс числа или система индексов числа периодические с периодом, равным модулю функции, аддитивные, т. е. индекс произведения (соответственно система индексов произведения) равняется сумме индексов сомножителей (соответственно сумме систем индексов сомножителей), получаем следующие *свойства характера* $\chi(n)$:

1. $\chi(n)$ *по модулю* k — *периодическая с периодом* k *функция, т. е.* $\chi(n)=\chi(n+k)$;

2. $\chi(n)$ — *мультипликативная функция, т. е.* $\chi(nm)=\chi(n)\chi(m)$.

Очевидно также, что $\chi(1)=1$.

Лемма 1. *Существует ровно* $\varphi(k)$ *характеров по модулю* $k=p^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$.

Доказательство. Надо доказать, что из определенных $\varphi(k)$ характеров нет двух тождественных. Прежде всего при любом целом a справедливо равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\begin{cases}0, & \text{если } a\not\equiv 0 \pmod m;\\ 1, & \text{если } a\equiv 0 \pmod m.\end{cases} \tag{1}$$

Первое равенство следует из того, что сумма равняется

$$\frac{e^{2\pi i\frac{am}{m}}-1}{e^{2\pi i\frac{a}{m}}-1}=0, \text{ так как } e^{2\pi i\frac{a}{m}}\neq 1;$$

второе равенство очевидно. Далее, если n по модулю k пробегает приведенную систему вычетов, то $\gamma(n)$ или соответственно $\gamma_0(n)$ и $\gamma_1(n)$ пробегают полные системы вычетов по модулю $\varphi(k)$ или соответственно по модулям 2 и $2^{\alpha-2}$ (случаи $k=2$, $k=4$ тривиальны). Если теперь $\chi(n;\ k, m_1)$ и $\chi(n;\ k, m_2)$ — разные характеры $k=p^\alpha$, $p>2$, т. е. $m_1\not\equiv m_2 (\mathrm{mod}\ \varphi(k))$, то из тождественного их равенства следует противоречие:

$$\varphi(k)=\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{k}\frac{\chi(n;\ k, m_1)}{\chi(n;\ k, m_2)}=\sum_{x=0}^{\varphi(k)-1} e^{2\pi i\frac{(m_1-m_2)x}{\varphi(k)}}=0.$$

Случай $k=2^\alpha$ доказывается так же.

Определение 3. *Характер $\chi(n)$, равный 1 на числах, взаимно простых с модулем, называется главным и обозначается $\chi_0(n)$.*

Из определений 1—3 следует, что по модулю $k=2$ $\chi_0(n)=\chi(n)$, по модулю $k=4$ $\chi_0(n)=\chi(n;\ 4,\ 0)$, по модулю $k=2^\alpha$, $\alpha\geqslant 3$, $\chi_0(n)=\chi(n;\ k,\ 0,\ 0)$, и по модулю $k=p^\alpha$, $p>2$, $\chi_0(n)=\chi(n;\ k,\ 0)$.

Основное свойство характеров — свойство ортогональности — содержится в следующей лемме.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi \bmod k}\chi(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n\equiv 1 \pmod k;\\ 0, & \text{если } n\not\equiv 1 \pmod k,\end{cases}$$

где суммирование ведется по всем $\varphi(k)$ характерам модуля k;

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\begin{cases}1, & \text{если } \chi=\chi_0;\\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_0.\end{cases}$$

Доказательство леммы получается из (1) и определений 1—3.

Наименьший период характера $\chi(n)$ может быть меньше, чем его модуль. Важную роль в дальнейшем будут играть характеры, называемые примитивными (иногда первообразными), наименьший период которых равен их модулю.

Определение 4. *Неглавный характер $\chi(n)=\chi(n;\ k,\ m)$ по модулю $k=p^\alpha$, $p>2$ — простое, называется примитивным (первообразным), если $(m,\ k)=1$; неглавный характер $\chi(n)=\chi(n;\ k)=\chi(n;\ k,\ m_0,\ m_1)$ по модулю $k=2^\alpha$, $\alpha\geqslant 3$, называется примитивным (первообразным), если $m_0=1$, $(m_1,\ 2)=1$; неглавный характер по модулю 4 называется примитивным (первообразным). Все остальные неглавные характеры по модулю k называются производными.*

Непосредственным следствием определения 4 является тот факт, что каждому производному характеру по модулю $k=p^\alpha$ отвечает равный ему тождественно примитивный характер по модулю $k_1=p^\beta$, $\beta<\alpha$.

Для примитивных характеров справедлива формула, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса S:

$$S=S(k;\ a,\ \chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)\,e^{2\pi i\frac{an}{k}}.$$

Лемма 3. *Если $\chi(n)$ — примитивный характер по модулю k, то*

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}, \tag{2}$$

где

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}},\quad |\tau(\chi)|=\sqrt{k}. \tag{3}$$

Доказательство. При $k=4$ равенства (2) и (3) проверяются непосредственно. Пусть $k\neq 4$, $(n,k)=1$; определяя m из сравнения $mn\equiv 1 \pmod k$, будем иметь

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi})=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)\overline{\chi}(m)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=$$

$$=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(am)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}$$

(воспользовались мультипликативностью $\overline{\chi}(n)$, периодичностью $\overline{\chi}(n)$ и $e^{2\pi in/k}$ и тем, что вместе с a числа am пробегают полную систему вычетов по модулю k). Осталось рассмотреть случай $(n,k)>1$. Слева в (2) стоит нуль. Если $k=p>2$, то $(n,k)=p$, и справа в (2) также будет нуль, так как $\chi\neq\chi_0$ и

$$\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=0.$$

Пусть теперь $k=p^\alpha$, $\alpha>1$, $n=rp$. Тогда

$$\sum_{a=1}^{p^\alpha}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{arp}{p^\alpha}}=\sum_{\substack{v=1\\(v,p)=1}}^{p^{\alpha-1}}\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}\left(up^{\alpha-1}+v\right)e^{2\pi i\frac{vr}{p^{\alpha-1}}}.$$

Докажем, что

$$\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}\left(up^{\alpha-1}+v\right)=0.$$

Пользуясь тем, что $(v,p)=1$, периодичностью и мультипликативностью $\overline{\chi}$, достаточно доказать равенство

$$\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}\left(up^{\alpha-1}+1\right)=0.$$

Пусть $p>2$. Тогда первообразным корнем по модулю p^α

будет число $g+pt$, где g — первообразный корень по модулю p, t — такое, что

$$(g+pt)^{p-1}=1+pb, \qquad (b,\ p)=1.$$

Если γ — индекс числа $1+up^{\alpha-1}$ по модулю p^{α}, то $\gamma = (p-1)\gamma_1$;

$$(g+pt)^{\gamma}=(1+pb)^{\gamma_1}\equiv 1+up^{\alpha-1} \pmod{p^{\alpha}}.$$

Отсюда находим

$$\gamma_1 = ub_1p^{\alpha-2}, \qquad bb_1\equiv 1 \pmod p.$$

Следовательно,

$$\bar\chi(up^{\alpha-1}+1)=e^{-2\pi i\frac{m \operatorname{ind}(1+up^{\alpha-1})}{\varphi(p^{\alpha})}}=e^{-2\pi i\frac{mub_1}{p}},$$

где

$$(mb_1,\ p)=1; \quad \sum_{u=0}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{mub_1}{p}}=0.$$

Пусть $p=2$, $k=2^{\alpha}$, $\alpha\geqslant 3$. Тогда система индексов числа $1+u2^{\alpha-1}$ равна $0,\ 2^{\alpha-3}$, поэтому $(m_0=1,\ (m_1,\ 2)=1)$,

$$\sum_{u=0}^{1}\bar\chi(1+u\cdot 2^{\alpha-1})=1+(-1)^0 e^{-2\pi i\frac{m_1 2^{\alpha-3}}{2^{\alpha-2}}}=0.$$

Таким образом, (2) доказано при любом n. Из (2) и (1) находим

$$\sum_{n=1}^{k}|\tau(\bar\chi)|^2|\chi(n)|^2=\varphi(k)|\tau(\bar\chi)|^2=\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{a=1}^{k}\bar\chi(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\right|^2=$$
$$=\sum_{a,b=1}^{k}\bar\chi(a)\chi(b)\sum_{n=1}^{k}e^{2\pi i\frac{(a-b)n}{k}}=k\varphi(k),$$

что доказывает (3).

Лемма полностью доказана.

Определим теперь характер по произвольному модулю k. Везде ниже $k=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение k на простые сомножители.

Определение 5. *Характером $\chi(n)$ по модулю k называется функция, задаваемая равенством*

$$\chi(n)=\chi(n;\,k)=\prod_{t=1}^{r}\chi\left(n;\,p_t^{\alpha_t}\right). \tag{4}$$

Определение 6. *Характер по модулю k называется главным, если в* (4)

$$\chi(n;\ p_t^{\alpha_t}) = \chi_0(n;\ p_t^{\alpha_t}), \quad t = 1, \ldots, r.$$

Определение 7. *Неглавный характер по модулю k называется примитивным (первообразным), если в* (4) $\chi(n;\ p_t^{\alpha_t})$ — *примитивные характеры по модулю* $p_t^{\alpha_t}$, $t = 1, \ldots, r$. *В противном случае* $\chi(n)$ *называется производным.*

Из определения (7) следует, что каждому производному характеру $\chi(n)$ по модулю k отвечает равный ему на числах, взаимно простых с k, примитивный характер $\chi_1(n)$ по модулю k_1, причем k_1 делит k. В этом случае говорят, что $\chi(n)$ является характером, индуцированным $\chi_1(n)$, а $\chi_1(n)$ называют примитивным (первообразным характером, отвечающим (порожденным) χ.

Все доказанные выше утверждения относительно характеров по модулю $k = p^\alpha$ справедливы для произвольного k и являются простыми следствиями уже доказанных.

Сформулируем основные свойства характера $\chi(n)$ по модулю k.

1. *Характер* $\chi(n)$ *по модулю* k — *периодическая с периодом k функция, не равная тождественно нулю, причем* $\chi(n) = 0$, *если* $(n, k) > 1$, *и* $\chi(n) \neq 0$, *если* $(n, k) = 1$.

2. $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ *при любых n и m (мультипликативность).*

3. *Существует ровно* $\varphi(k)$ *различных характеров по модулю k.*

4. *Свойство ортогональности:*

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

где суммирование ведется по всем $\varphi(k)$ *характерам модуля k;*

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^{k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

5. *Пусть* χ — *примитивный характер по модулю k. Тогда*

$$\tau(\bar{\chi})\,\chi(n) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m)\, e^{2\pi i \frac{mn}{k}}, \tag{5}$$

где

$$\tau(\chi) = \sum_{n=1}^{k} \chi(n) e^{2\pi i \frac{n}{k}}, \quad |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{k}.$$

Свойства 1—5 доказываются просто. Докажем, например, свойство 5. Пусть $k = k_1 k_2$, $(k_1, k_2) = 1$; тогда

$$\chi(m; k) = \chi(m; k_1)\chi(m; k_2).$$

Выражение $m_1 k_2 + m_2 k_1$ пробегает полную систему вычетов по модулю $k_1 k_2$, когда m_1 и m_2 пробегают полные системы вычетов соответственно по модулям k_1 и k_2. Поэтому

$$S = S(n, k) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{k}} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_1 k_2 + m_2 k_1; k_1) \bar{\chi}(m_1 k_2 + m_2 k_1; k_2) \times$$

$$\times e^{2\pi i \frac{(m_1 k_2 + m_2 k_1) n}{k_1 k_2}} =$$

$$= \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \bar{\chi}(m_1 k_2; k_1) e^{2\pi i \frac{m_1 n}{k_1}} \right) \left(\sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_2 k_1; k_2) e^{2\pi i \frac{m_2 n}{k_2}} \right) =$$

$$= \bar{\chi}(k_2; k_1) \bar{\chi}(k_1; k_2) S(n, k_1) S(n, k_2).$$

Кроме того, $\tau(\chi) = S(1, k)$. Отсюда и из леммы 3 получаем (5).

Характер $\chi(n)$ по модулю k можно определять свойствами 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть $Y(n)$ — периодическая с периодом k функция целочисленного аргумента n, не равная тождественно нулю, мультипликативная, т. е. $Y(nm) = Y(n)Y(m)$, причем $Y(n) = 0$, если $(n, k) > 1$. Тогда*

$$Y(n) = \chi(n; k, m)$$

при некотором m.

Доказательство. Пусть $(a, k) = 1$; тогда

$$T = \sum_{n=1}^{k} Y(n) \bar{\chi}(n) = \sum_{n=1}^{k} Y(an) \bar{\chi}(an) = Y(a) \bar{\chi}(a) T.$$

Поэтому либо $Y(a) = \chi(a)$ при некотором χ, либо $T = 0$

при любом χ. Но тогда при любом b, $(b, k) = 1$,

$$0 = \sum_{\chi} \chi(b) \sum_{n=1}^{k} Y(n) \overline{\chi}(n) = \sum_{n=1}^{k} Y(n) \sum_{\chi} \chi(b) \chi(\overline{n}) =$$
$$= Y(b) \varphi(k),$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Следствие. *Произведение двух характеров по модулям k_1 и k_2 есть характер по модулю $k_1 k_2$.*

Характеры являются комплекснозначными функциями. Особое место занимают характеры, отличные от главных и принимающие только действительные значения; они называются **действительными** (**вещественными**). Например, если $p > 2$ — простое, то действительным характером по модулю p будет такой:

$$\chi(n) = \chi\left(n;\ p,\ \frac{p-1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n,\ p) > 1; \\ (-1)^{\operatorname{ind} n}, & \text{если } (n,\ p) = 1. \end{cases}$$

Этот характер называется **символом Лежандра** и обозначается $\left(\frac{n}{p}\right)$. *Характер, принимающий хотя бы одно комплексное значение, называется комплексным характером $\chi(n)$, а характер, принимающий значения, комплексно-сопряженные к $\chi(n)$, называется комплексно-сопряженным к $\chi(n)$ и обозначается $\overline{\chi}(n)$. Для любого характера $\chi(n)$ по модулю k выполняется равенство*

$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

*Наименьшее натуральное r, для которого $\chi^r(n) = \chi_0(n)$, называется **степенью характера***; таким образом, главный характер имеет первую степень, действительный — вторую, комплексный — третью или выше.

В силу мультипликативности характера

$$\chi^2(-1) = 1,$$

т. е. $\chi(-1) = \pm 1$. *Характеры, для которых $\chi(-1) = +1$, называются четными, а характеры, для которых $\chi(-1) = -1$, называются нечетными.*

Отметим еще одно свойство характеров. Если $\chi \neq \chi_0$ — характер по модулю k, то при любом M

$$\left| \sum_{n=1}^{M} \chi(n) \right| \leqslant \varphi(k).$$

Последнее неравенство можно уточнить, если χ — примитивный характер.

Лемма 5. *Пусть χ — примитивный характер по модулю k,*

$$S = \sum_{n < M} \chi(n).$$

Тогда

$$|S| < \sqrt{k} \ln k.$$

Доказательство. Можно считать $M \leqslant k-1$. По свойству 5

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{k}},$$

и поэтому

$$S = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n<M} e^{2\pi i \frac{mn}{k}} = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^{k-1} \bar{\chi}(m) \frac{e^{2\pi i \frac{mM}{k}} - 1}{e^{2\pi i \frac{m}{k}} - 1}.$$

Переходя к неравенствам, найдем

$$|S| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\left|\sin \pi \frac{mM}{k}\right|}{\left|\sin \pi \frac{m}{k}\right|} < \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{m}{k}\right|}.$$

Если k — нечетное число, то

$$|S| \leqslant \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{\sin \pi \frac{m}{k}} \leqslant \sqrt{k} \sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{m},$$

так как $\sin \pi\alpha \geqslant 2\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$.

Если k — четное число, то

$$|S| < \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{\sin \pi \frac{m}{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} \sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{m} \leqslant \ln \frac{2m+1}{2m-1}, \quad m \geqslant 1,$$

$$\sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{m} \leqslant \ln k, \quad k \text{ — нечетное};$$

$$\sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{m} \leqslant \ln(k-1) \leqslant \ln k - \frac{1}{k}, \quad k \text{ — четное}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

§ 2. Определение L-рядов и их простейшие свойства

L-ряды Дирихле — функции комплексного переменного, подобные дзета-функции Римана, введены Дирихле при исследовании вопроса о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. Везде ниже под L-рядом будем понимать L-ряд Дирихле.

Пусть k — натуральное число и χ — какой-либо характер по модулю k.

Определение 8. *L-рядом называется ряд*

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Ввиду того, что $|\chi(n)| \leqslant 1$, следует аналитичность $L(s, \chi)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Для $L(s, \chi)$ имеет место аналог формулы Эйлера (эйлеровское произведение).

Лемма 6. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *справедливо равенство*

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. При $X > 1$ рассмотрим функцию

$$\Phi(s; X) = \prod_{p \leqslant X} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Так как $\operatorname{Re} s > 1$, то

$$\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots ;$$

следовательно,

$$\Phi(s; X) = \prod_{p \leqslant X} \left\{1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right\} = \sum_{n \leqslant X} \frac{\chi(n)}{n^s} + R(s, X) \tag{7}$$

(воспользовались мультипликативностью $\chi(n)$ и однозначностью разложения натуральных чисел на простые сомножители). Далее,

$$|R(s; X)| \leqslant \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} < \int_X^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{1}{\sigma - 1} X^{1-\sigma},$$

где $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Переходя в (7) к пределу $X \to +\infty$, получим утверждение леммы.

Из (6) находим

$$\left|\frac{1}{L(s, \chi)}\right| = \left|\prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma - 1},$$

$$|L(s, \chi)| > \frac{\sigma - 1}{\sigma},$$

т. е. $L(s, \chi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$. Если характер χ по модулю k является главным, то $L(s, \chi)$ лишь простым множителем отличается от дзета-функции $\zeta(s)$.

Лемма 7. *Пусть $\chi(n) = \chi_0(n)$ по модулю k. Тогда при* $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Доказательство леммы следует из (6) и определения главного характера $\chi_0(n)$.

Следствие. *$L(s, \chi_0)$ — аналитическая функция во всей s-плоскости, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным*

$$\prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Если характер $\chi(n)$ является производным, а $\chi_1(n)$ — примитивный характер по модулю k_1, $k_1 \backslash k$, отвечающий $\chi(n)$, то $L(s, \chi)$ лишь простым множителем отличается от $L(s, \chi_1)$.

Лемма 8. *Пусть χ_1 — примитивный характер по модулю k_1 и χ — индуцированный χ_1 производный характер по модулю k, $k_1 \neq k$. Тогда при* $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{\substack{p \backslash k \\ p \times k_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

Доказательство леммы следует из (6) и свойств χ_1 и χ.

Функцию $L(s, \chi)$ легко продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Лемма 9. *Пусть $\chi \neq \chi_0$; тогда при* $\operatorname{Re} s > 0$ *справедливо равенство*

$$L(s, \chi) = s \int_1^\infty S(x) x^{-s-1} dx, \tag{8}$$

где

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n).$$

Доказательство. Пусть $N \geqslant 1$, $\operatorname{Re} s > 1$. Применяя преобразование Абеля (лемма 4.1), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + s \int_1^N c(x) x^{-s-1} dx + \frac{c(N)}{N^s},$$

где

$$c(x) = S(x) - 1.$$

Переходя к пределу $N \to +\infty$, получим (8) при $\operatorname{Re} s > 1$. Но $|S(x)| \leqslant \varphi(k)$; поэтому интеграл в (8) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и определяет там аналитическую функцию, что и требовалось доказать.

Следствие. *При* $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$, $\chi \neq \chi_0$, *выполняется оценка*

$$|L(s, \chi)| \leqslant 2|s|\varphi(k).$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя (6), получаем

Лемма 10. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *справедливо равенство*

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{9}$$

Применим теперь к (9) теорему 1, V с $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $\alpha = 1$, $T \geqslant 2$, будем иметь

$$\psi(x, \chi) = \\ = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right); \tag{10}$$

далее, при $(k, l) = 1$

$$\psi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l).$$

Таким образом, чтобы знать поведение $\psi(x; k, l)$, надо знать поведение $\psi(x, \chi)$ при всех χ по модулю k, т. е.

надо знать поведение интеграла в (10), а чтобы исследовать интеграл в (10), надо об $L(s, \chi)$ иметь те же сведения, что и о дзета-функции (см. гл. IV—V).

Изучение $L(s, \chi)$ проводится по той же схеме, что и $\zeta(s)$, однако здесь появляются специфические трудности. Прежде всего $L(s, \chi)$ продолжается на всю s-плоскость; доказывается, что соответствующая ей функция $\xi(s, \chi)$ является целой функцией первого порядка, к которой применяется теорема 5, II.

§ 3. Функциональное уравнение

Функциональное уравнение будет получено для $L(s, \chi)$ с примитивным характером χ; тем самым и в силу леммы 8 $L(s, \chi)$ будет продолжена на всю s-плоскость при любом χ. Вид функционального уравнения зависит от того, четным или нечетным является характер χ, т. е. $\chi(-1) = +1$ или $\chi(-1) = -1$.

Прежде чем вывести функциональное уравнение для $L(s, \chi)$ и продолжить $L(s, \chi)$ на всю s-плоскость, докажем вспомогательное утверждение, аналогичное функциональному уравнению для $\theta(x)$ (см. лемму 3, IV).

Лемма 11. *Пусть χ — примитивный характер по модулю k. Для четного характера χ определим функцию $\theta(x, \chi)$ равенством*

$$\theta(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}, \quad x > 0,$$

а для нечетного характера χ определим функцию $\theta_1(x, \chi)$ равенством

$$\theta_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}, \quad x > 0.$$

Тогда для введенных функций $\theta(x, \chi)$ и $\theta_1(x, \chi)$ справедливы следующие соотношения (функциональные уравнения):

$$\tau(\bar{\chi})\,\theta(x, \chi) = \sqrt{\frac{k}{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right); \tag{11}$$

$$\tau(\bar{\chi})\,\theta_1(x, \chi) = i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\,\theta_1\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right), \tag{12}$$

где $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса.

Доказательство. Воспользуемся доказанным в лемме 3, IV равенством

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(n+\alpha)^2}{x}} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n\alpha}, \tag{13}$$

где $x > 0$, α — вещественное.

Имеем

$$\tau(\bar{\chi})\,\theta(x, \chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi\left(n+\frac{m}{k}\right)^2}{x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}(m)\, e^{-\frac{\pi m^2}{kx}} = \sqrt{\frac{k}{x}}\, \theta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right),$$

что доказывает равенство (11).

Чтобы доказать равенство (12), продифференцируем почленно (13) и заменим x на x/k, α на m/k (указанные ряды можно почленно дифференцировать, так как получающиеся после этого ряды равномерно сходятся). Получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (kn+m)\, e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}}.$$

Отсюда, как и выше, выводим

$$\tau(\bar{\chi})\,\theta_1(x, \chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} =$$

$$= i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (kn+m)\, e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} =$$

$$= i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\bar{\chi}(n)\, e^{-\frac{\pi n^2}{kx}} = i \sqrt{\frac{k}{x^3}}\, \theta_1\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right).$$

Лемма доказана.

Теорема 1 (функциональное уравнение). *Пусть χ — примитивный характер по модулю k,*

$$\delta = \begin{cases} 0, \text{ если } \chi(-1) = +1; \\ 1, \text{ если } \chi(-1) = -1; \end{cases}$$

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+\delta)/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi).$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi). \tag{14}$$

Доказательство, по-существу, повторяет вывод функционального уравнения для дзета-функции (теорема 1, IV).

Предположим, что $\chi(-1) = +1$. Имеем

$$\pi^{-\frac{s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}} x^{\frac{s}{2}-1} \, dx.$$

Умножая последнее равенство на $\chi(n)$ и суммируя по n, при $\operatorname{Re} s > 1$ получим

$$\pi^{-\frac{s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}\right) dx.$$

Ввиду того, что χ — четный характер, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}} = \frac{1}{2} \theta(x, \chi);$$

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x, \chi) \, dx.$$

Разбивая последний интеграл на два, производя в одном из них замену переменной интегрирования $(x \to 1/x)$ и пользуясь (11), найдем

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x, \chi) \, dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \theta\left(\frac{1}{x}, \chi\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)\,dx + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{k}}{\tau(\bar\chi)}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta(x,\bar\chi)\,dx. \qquad (15)$$

Правая часть этого равенства является аналитической функцией при любом s и, следовательно, дает аналитическое продолжение $L(s, \chi)$ на всю s-плоскость. Так как $\Gamma(s/2) \neq 0$, то $L(s, \chi)$ — регулярная всюду функция. Далее, при замене s на $1-s$ и χ на $\bar\chi$, правая часть (15) умножается на $\sqrt{k}/\tau(\chi)$, так как $\chi(-1) = 1$ и, следовательно, $\tau(\chi)\tau(\bar\chi) = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = k$. Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 0$.

Предположим, что $\chi(-1) = -1$. Имеем

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta_1(x,\chi)\, x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta_1(x,\chi)\, x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,dx + \frac{i\sqrt{k}}{2\tau(\bar\chi)}\int_1^\infty \theta_1(x,\bar\chi)\, x^{-\frac{s}{2}}\,dx.$$

Последнее равенство дает регулярное продолжение $L(s, \chi)$ на всю s-плоскость; правая часть его при замене s на $1-s$ и χ на $\bar\chi$ умножается на $i\sqrt{k}\tau(\chi)$ ввиду того, что

$$\tau(\chi)\tau(\bar\chi) = -k.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 1$. Теорема доказана.

Следствие. *$\xi(s, \chi)$ — целая функция; если $\chi(-1) = +1$, то единственными нулями $L(s, \chi)$ при $\operatorname{Re} s \leqslant 0$ являются полюсы $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, т. е. точки $s = 0, -2, -4, \ldots$; если $\chi(-1) = -1$, то единственными нулями $L(s, \chi)$ при $\operatorname{Re} s \leqslant 0$ являются полюсы $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$, т. е. точки $s = -1, -3, -5, \ldots$*

Ниже (см. § 2 гл. IX) будет доказано, что $L(1, \chi) \neq 0$. Отсюда и в силу (14) следует $\xi(0, \chi) \neq 0$.

§ 4. Нетривиальные нули; разложение логарифмической производной в ряд по нулям

Из следствия к теореме 1 видно, что функция $L(s, \chi)$, χ — примитивный характер, имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ лишь действительные нули; эти нули являются полюсами $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ или $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ и называются тривиальными; тривиальным также называется нуль $s = 0$. Кроме тривиальных функция $L(s, \chi)$ имеет подобно дзета-функции бесконечно много нетривиальных нулей, лежащих в полосе (критическая полоса) $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть χ — примитивный характер. Тогда функция $\xi(s, \chi)$ является целой функцией первого порядка, имеющей бесконечно много нулей ρ_n таких, что $0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_n \leqslant 1$, $\rho_n \neq 0$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Нули $\xi(s, \chi)$ являются нетривиальными нулями $L(s, \chi)$.*

Доказательство. При $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$

$$|L(s, \chi)| \leqslant 2|s| \varphi(k) < 2|s|k;$$

$$|\xi(s, \chi)| \leqslant 2k^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}} |s| \left|\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\right| \ll k^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}} e^{c|s||\ln|s||}.$$

Последняя оценка $|\xi(s, \chi)|$ в силу функционального уравнения (14) и равенства

$$\left|\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\right| = 1$$

справедлива также при $\operatorname{Re} s < 1/2$; кроме того, $\xi(0, \chi) \neq 0$. Поскольку $\ln \Gamma(s) \sim s \ln s$ при $s \to +\infty$, по теореме 5, II получаем первое утверждение теоремы. Так как $L(s, \chi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$, то из (14) следует, что $\xi(s, \chi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s < 0$, т. е. нули $\xi(s, \chi)$ являются нетривиальными нулями $L(s, \chi)$, лежащими в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$. Теорема доказана.

Следствие. *Имеет место формула*

$$\xi(s, \chi) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}}, \tag{16}$$

где $A = A(\chi)$, $B = B(\chi)$ — постоянные.

Нетривиальные нули $L(s, \chi)$ **симметричны относительно прямой** $\operatorname{Re} s = 1/2$, что следует из (14). Везде ниже будем считать, что нули ρ_n, $n = 1, 2, \ldots$, нумеруются в порядке возрастания абсолютной величины их мнимой части.

Следующее вспомогательное утверждение устанавливает связь постоянной $B = B(\chi)$ с нетривиальными нулями $L(s, \chi)$.

Лемма 12. *При обозначениях следствия из теоремы 2 справедливо равенство*

$$\operatorname{Re} B(\chi) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n}\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Возьмем логарифмическую производную от обеих частей (16) и применим (14):

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0, \chi)}{\xi(0, \chi)} = -\frac{\xi'(1, \bar{\chi})}{\xi(1, \bar{\chi})} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1 - \bar{\rho}_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n}\right) - B(\bar{\chi}).$$

Так как $L(\rho_n, \chi) = L(1 - \rho_n, \bar{\chi}) = L(\bar{\rho}_n, \bar{\chi}) = L(1 - \bar{\rho}_n, \chi) = 0$, то $\bar{\rho}_n$ и $1 - \bar{\rho}_n$ — нули $L(s, \chi)$. Отсюда следует утверждение леммы.

§ 5. Простейшие теоремы о нулях

Докажем несколько простых утверждений о нетривиальных нулях $L(s, \chi)$, аналогичных соответствующим утверждениям о нулях дзета-функции.

Теорема 3. *Пусть* $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — *все нетривиальные нули* $L(s, \chi)$, χ — *примитивный характер по модулю* k, $T \geqslant 2$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leqslant c \log kT.$$

Доказательство. При $s = 2 + iT$ имеем ($\delta = 0$ или 1)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s + \delta + 2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leqslant \sum_{n \leqslant T}\frac{1}{n} + \sum_{n > T}\frac{|s|}{n^2} \leqslant c_1 \log T;$$

из (16) и (14)

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}-\operatorname{Re}B(\chi)-$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{Re}\frac{1}{s+\delta}-$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right);$$

отсюда и из (17)

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}+c_1\log kT<c_2\log kT;$$

кроме того,

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_n}=\operatorname{Re}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)}=$$

$$=\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}\geqslant\frac{1}{4+(T-\gamma_n)^2}.$$

Объединяя полученные оценки, из первого равенства выводим утверждение теоремы.

При условиях и обозначениях теоремы 3 справедливы следующие следствия.

Следствие 1. *Число нулей ρ_n, для которых $T\leqslant|\operatorname{Im}\rho_n|\leqslant T+1$, не превосходит $c\log kT$.*

Следствие 2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{(T-\gamma_n)^2}\leqslant c_1\log kT.$$

Теорема 4. *При $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$, $s=\sigma+it$, $|t|\geqslant 2$, имеет место равенство*

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{|t-\gamma_n|<1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log k|t|),$$

причем суммирование ведется по нулям ρ_n функции $L(s,\chi)$, χ — примитивный характер, у которых $|t-\operatorname{Im}\rho_n|=|t-\gamma_n|\leqslant 1$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, имеем

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + B(\chi) - \frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi} + \\ + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{s+\delta} + O(\log|t|),$$

где $s=\sigma+it$, $|t|\geqslant 2$, $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$.

Вычитая из этого соотношения такое же при $s = 2+it$, найдем

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right) + O(\log|t|).$$

Если $|\gamma_n - t| > 1$, то

$$\left|\frac{1}{\sigma+it-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right| \leqslant \frac{2-\sigma}{(\gamma_n-t)^2} \leqslant \frac{3}{(\gamma_n-t)^2},$$

и утверждение теоремы получается из следствия 2.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ произвольные комплексные числа. Доказать, что для любого $n\geqslant 0$ найдутся два многочлена

$$P=p_0+p_1 t+\ldots+p_n t^n, \quad Q=q_0+q_1 t+\ldots+q_n t^n$$

такие, что

$$f(t)-\frac{P}{Q}=r_{2n+1}t^{2n+1}+r_{2n+2}t^{2n+2}+\ldots$$

2. Пусть $p\geqslant 3$, p — простое число, $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, i=0, 1, \ldots$ — целые числа; будем говорить, что 1) многочлен $F(x)$, $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_mx^m$, имеет степень $n\geqslant 0$ по модулю p, если $a_m\equiv\ldots\equiv a_{n+1}\equiv 0 \pmod p$, $a_n\not\equiv 0 \pmod p$; 2) многочлен $G(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$ сравним с $F(x)$ по модулю p, если $b_i\equiv a_i \pmod p$, $i=0, 1, \ldots, m$; 3) число a является корнем $F(x)$ по модулю p кратности $k\geqslant 1$, если

$$F(x)\equiv(x-a)^k(bx^r+cx^{r-1}+\ldots+d) \pmod p.$$

Доказать, что 1) если числа $a_1, \ldots, a_r$ различны по модулю p, являются корнями многочлена $F(x)$ по модулю p с кратностями $k_1, \ldots, k_r$, степень $F(x)$ по модулю p равна n, то $k_1+\ldots+k_r\leqslant n$; 2) если $F(a)\equiv 0 \pmod p$, то a является корнем $F(x)$ по модулю p; 3) если $k\geqslant 1$ и $F(a)\equiv\frac{1}{1!}\quad F'(a)\equiv\ldots\equiv\frac{1}{(k-1)!}\ F^{(k-1)}(a)\equiv 0 \pmod p$, то a является корнем $F(x)$ по модулю p кратности k.

3. Пусть $f(x) = x^3 + ax + b$, $F(x) = \pm(f(x))^{(p-1)/2} + 1$, $g(x) = 2f(x)(\pm(f(x))^{(p-1)/2} + 1) + f'(x)(x^p - x)$.

Доказать, что каждый корень $F(x)$ по модулю p является по крайней мере двукратным корнем $g(x)$. Вывести отсюда, что для числа N_p решений сравнения $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$ справедлива оценка

$$|N_p - p| \leqslant (p+3)/2.$$

4. Пусть n — нечётное положительное число,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c, \quad (a, p) = 1,$$

$$F_1(x) = f^{(p-1)/2}(x) + 1, \quad F_2(x) = f^{(p-1)/2}(x) - 1, \quad F(x) = F_i(x).$$

Раскладывая разность $F(x^p) - F(x)$ по степеням $H = x^p - x$ и пользуясь задачей 1, доказать существование многочлена $g(x)$ степени m,

$$1 \leqslant m \leqslant kp + (k^2 + k)(n-1) + \frac{p-1}{2}n$$

и такого, что каждый корень $F(x)$ является корнем g кратности $2k+1$, $k \leqslant (p-1)/4$.

5. При условиях задачи 4 доказать неравенство

$$\left|\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{f(x)}{p}\right)\right| < 2n\sqrt{p}.$$

6. Если $V(X)$ и $N(X)$ — число квадратичных вычетов и, соответственно, невычетов по модулю p на отрезке $[1, X]$, то

$$V(X) = \frac{1}{2}X + \theta\sqrt{p}\log p, \quad N(X) = \frac{1}{2}X - \theta\sqrt{p}\log p,$$

$$|\theta| \leqslant 1.$$

7. Пусть $X = X(p) \longrightarrow +\infty$ при $p \longrightarrow +\infty$ и для каждого $Y \geqslant X$ выполняется равенство $V(Y) = Y/2 + o(Y)$. Обозначая через $n = n(p)$ наименьший квадратичный невычет по модулю p, будем иметь

$$n \leqslant cX^{1/\sqrt{e}}.$$

8. При $k \geqslant 1$, $1 \leqslant Z < p$, справедливо неравенство

$$\sum_{\lambda=1}^{p}\left(\sum_{m=1}^{Z}\left(\frac{\lambda+m}{p}\right)\right)^{2k} \leqslant (2k)^k Z^k p + 4kZ^{2k}\sqrt{p}.$$

9. Пусть U и V — целые числа, $p \geqslant p_0(\varepsilon)$, $p^{0,5+\varepsilon} \leqslant U < p$, $p^{\varepsilon} < V < p$, $W = \sum_{u}^{U}\sum_{v}^{V}\left(\frac{u+v}{p}\right)$, где u и v в последней сумме пробегают соответственно U и V различных по модулую p значений. Тогда

$$|W| \leqslant cUVp^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad c = c(\varepsilon).$$

10. Пусть $X \geqslant p^{0,25+\varepsilon}$. Тогда

$$|S| = \left| \sum_{m<X} \left(\frac{m}{p}\right) \right| < cXp^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad c = c(\varepsilon).$$

11. Для наименьшего квадратичного невычета $n = n(p)$ по модулю p справедлива оценка

$$n = n(p) = O\left(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}\right).$$

12. Пусть x_r — последовательность вещественных чисел такая, что $\|x_r - x_m\| > \delta > 0$, $r \neq m$. Тогда при любых a_n

$$\sum_{r=1}^{R} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n x_r} \right|^2 \leqslant c\left(N + \frac{1}{\delta}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

13. Для $\pi(x)(1 + o(1))$ значений p, $p \leqslant x$, наименьший квадратичный невычет $n = n(p)$ и наименьший простой квадратичный вычет $v = v(p)$ не превосходят $c \log^{2+\varepsilon} x$.

ГЛАВА IX

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Метод комплексного интегрирования и доказанные в гл. VIII утверждения об L-рядах позволяют выписать явную формулу, связывающую сумму значений функции $\Lambda(n)$ по числам, принадлежащим заданной арифметической прогрессии, с нулями L-рядов. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях будет следовать из этой явной формулы и теорем о границе нулей L-рядов. Всюду ниже предполагаем $k \leqslant x$.

§ 1. Явная формула

Введем две функции, подобные ψ-функции Чебышёва.

Определение. *Пусть χ — произвольный характер по модулю k. Функции* $\psi(x, \chi)$ и $\psi(x; k, l)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k) = 1$, *задаются равенствами*

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \chi(n),$$

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{k} \\ n \leqslant x}} \Lambda(n).$$

В силу свойства ортогональности характеров (свойство 4, VIII) имеем

$$\psi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n, k)=1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l). \quad (1)$$

Первое слагаемое отличается от $\frac{1}{\varphi(k)} \psi(x)$ на величину

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n, k)>1}} \Lambda(n) \leqslant \frac{\ln^2 x}{\varphi(k)}.$$

Далее, если χ_1 — примитивный характер по модулю k_1, $k_1\backslash k$, порожденный характером χ, то в силу свойства χ_1

$$\psi(x,\ \chi)=\psi(x,\ \chi_1)+\theta \sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,\ k)>1}} \Lambda(n)=$$
$$=\psi(x,\ \chi_1)+\theta_1 \log^2 x,\quad |\theta|\leqslant 1,\ |\theta_1|\leqslant 1.$$

Тем самым изучение $\psi(x;\,k,\,l)$ свелось к изучению $\psi(x,\chi_1)$, где χ_1 — примитивный харатер по модулю k_1, $k_1\backslash k$.

Теорема 1. *Пусть χ — примитивный характер по модулю k, $2\leqslant T\leqslant x$; тогда*

$$\psi(x,\ \chi)-\psi(k,\ \chi)=-\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T}\frac{x^{\rho}-k^{\rho}}{\rho}+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули $L(s,\chi)$.

Доказательство. По следствию 1, VIII найдется T_1, $T\leqslant T_1\leqslant T+1$, такое, что $|T_1-\mathrm{Im}\,\rho_n|>1/c\log kT$, где ρ_n — нули $L(s,\chi)$. Рассмотрим прямоугольник Γ с вершинами в точках $b-iT_1$, $b+iT_1$, $-0{,}5+iT_1$, $-0{,}5-iT_1$, где $b=1+(\log x)^{-1}$. Интегрируя $\frac{x}{s}\frac{d}{ds}(\ln L(s,\chi))$ по контуру Γ, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\}\frac{x^s-k^s}{s}\,ds=-\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T_1}\frac{x^{\rho}-k^{\rho}}{\rho}+\theta\ln x,$$

где $|\theta|\leqslant 1$. По теореме 1, V ($\alpha=1$, $x=N+0{,}5$)

$$\psi(x,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\}\frac{x^s}{s}\,ds+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right).$$

Осталось оценить интегралы по верхней, нижней и левой сторонам прямоугольника Γ. Интегралы по верхней и нижней сторонам Γ оцениваются одинаково. Пользуясь теоремой 4, VIII и выбором T_1, получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-0{,}5+iT_1}^{b+iT_1}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\}\frac{x^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{e}{2\pi}\int_{-0{,}5}^{b}\left|\frac{L'(\sigma+iT_1)}{L(\sigma+iT_1)}\right|\frac{x}{T_1}d\sigma=$$
$$=\frac{e}{2\pi}\int_{-0{,}5}^{b}\left|\sum_{|T_1-\gamma_n|<1}\frac{1}{\sigma-\sigma_n+i(T_1-\gamma_n)}+\right.$$
$$\left.+O(\log kT)\right|\frac{x}{T_1}\,d\sigma=O\left(\frac{x\log^2 kT}{T}\right)=O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right).$$

Интеграл по левой стороне Г оценивается так:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1}^{+T_1}\left\{-\frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)}\right\}\frac{x^{-0,5+it}}{-0,5+it}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant x^{-0,5}\int_{-T_1}^{+T_1}\left|\frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)}\right|\frac{dt}{0,5+|t|} = O\left(\frac{\log^2 kT}{\sqrt{x}}\right),$$

так как из теоремы 4, VIII

$$\left|\frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)}\right| = O(\ln k(|t|+2)).$$

Объединяя оценки, получим утверждение теоремы.

§ 2. Теоремы о границе нулей

Как и при доказательстве теоремы 5, IV о границе нулей дзета-функции, будет использоваться неравенство

$$3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi \geqslant 0,$$

φ — вещественное, и оценки сверху величин

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

при $s=\sigma+it$, $\chi=\chi_1$ и $s=\sigma+i2t$, $\chi=\chi_1^2$. Особую трудность доставляет вопрос о границе вещественных нулей $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ.

Теорема 2. *Если χ — комплексный характер по модулю k, $s=\sigma+it$, то $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$\operatorname{Re} s=\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)}.$$

Если же χ — действительный характер по модулю k, $s=\sigma+it$, то $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s=\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)}, \qquad |t|>0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай примитивных характеров χ. Пусть χ — комплексный характер, $s=\sigma+it$, $\sigma>1$, $t\geqslant 0$; тогда $\chi(n)=e^{i\omega(n)}$,

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}e^{-it\log n+i\omega(n)};$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-\sigma}\cos\{t\log n-\omega(n)\},$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-\sigma}\cos 2\{t\log n-\omega(n)\}.$$

Поэтому

$$3\left\{-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right\}+4\left\{-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right\}+ \\ +\left\{-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}\right\}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Оценим сверху каждое слагаемое в (2), при этом будем пользоваться леммой 12, VIII и оценкой $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$ (см., например, доказательство теоремы 3, VIII):

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_0(n)\Lambda(n)\,n^{-\sigma}\leqslant-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}<\frac{1}{\sigma-1}+c_1;$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}=$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{Re}\frac{1}{s+\delta}-$$

$$-\operatorname{Re}B(\chi)-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right)\leqslant c_2\log k(t+2)- \\ -\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}. \qquad (3)$$

Если через χ_1 обозначить примитивный характер, индуцированный χ^2, то $\chi_1\neq\chi_0$ и

$$\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)}-\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}\right|\leqslant\sum_{p\backslash k}\frac{p^{-\sigma}\log p}{1-p^{-\sigma}}\leqslant\sum_{p\backslash k}\log p\leqslant\log k.$$

Следовательно, применяя уже полученную оценку (3), найдем

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}\leqslant-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi_1)}{L(\sigma+i2t,\chi_1)}+\log k\leqslant \\ \leqslant c_3\log k(t+2). \qquad (4)$$

Так как $\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}=\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2}\geqslant 0$, то

$$\frac{3}{\sigma-1}-4\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}+c\log k(t+2)\geqslant 0. \qquad (5)$$

Пусть теперь $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$; не ограничивая общности, можно считать $\gamma\geqslant 0$. Возьмем в (5) $t=\gamma$, $\sigma=1+1/2c\log k(t+2)$; получим

$$\beta\leqslant 1-1/14c\log k(\gamma+2).$$

Докажем утверждение теоремы для действительного примитивного характера χ. Имеем $\chi^2=\chi_0$,

$$\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\log k;$$

из теорем 3 и 4 гл. IV

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<\operatorname{Re}\frac{1}{s-1}+c_2\log(t+2).$$

Подставим эту оценку и оценки (3) в (2), возьмем $t=\gamma$, где $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$, $\gamma\geqslant 0$, получим

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+i2\gamma}+c_4\log k(\gamma+2)\geqslant 0;$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+i2\gamma}=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2};$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta}\leqslant\frac{3}{\sigma-1}+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2}+c_4\log k(\gamma+2).$$

Рассмотрим два случая — случай больших γ и случай малых γ. Пусть $\gamma>\varkappa/\log k$, где $0<\varkappa<1/5c_4$, $\varkappa$ — абсолютная постоянная. Полагая $\sigma=1+\varkappa/\log k(\gamma+2)$, найдем

$$\beta\leqslant 1-\frac{c_5}{\log k(\gamma+2)},\quad c_5\geqslant\frac{3}{5c_4+16\varkappa^{-1}}.$$

Пусть теперь $0<\gamma<\varkappa/\log k$. Тогда, пользуясь (3), будем иметь

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}<c_2\log k-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma-\rho_n}<c_2\log k-\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}, \qquad (6)$$

так как нули ρ функции $L(s,\chi)$ имеют вид $\rho=\beta\pm i\gamma$.

Далее,

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-\sigma} \geqslant -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \\ = \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} > -\frac{1}{\sigma-1} - c_6.$$

Отсюда и из (6)

$$\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} < \frac{1}{\sigma-1} + c_7 \log k.$$

Возьмем $\sigma = 1 - \lambda/\log k$, $\varkappa = \lambda/10$; тогда из последнего неравенства найдем

$$\beta \leqslant 1 - \frac{\lambda}{10 \log k}, \quad \lambda > \frac{2}{3c_7}.$$

Таким образом, теорема доказана для примитивного характера χ. Для производного характера χ теорема следует из уже доказанного и леммы 8, VIII.

Перейдем к исследованию расположения действительных нулей $L(s, \chi)$ с действительным примитивным характером χ. Граница для таких нулей к настоящему времени значительно более грубая, чем та, которая получена в теореме 2. Прежде всего оценим снизу $L(1, \chi)$.

Лемма 1. *Пусть χ — действительный примитивный характер по модулю k. Тогда*

$$L(1, \chi) \geqslant \frac{c}{\sqrt{k} \log^2 k}.$$

Доказательство. Пользуясь оценкой суммы характеров (лемма 5, VIII) и преобразованием Абеля (лемма 4, I), находим ($m > 0$)

$$\left| \sum_{m<n\leqslant M} \frac{\chi(n)}{n} \right| = \\ = \left| \int_m^M \left(\sum_{m<n\leqslant x} \chi(n) \right) x^{-2} dx + \frac{1}{M} \sum_{m<n\leqslant M} \chi(n) \right| \leqslant c_1 \frac{\sqrt{k} \log k}{m};$$

$$\left| L(1, \chi) - \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} \right| \leqslant \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{x}.$$

Рассмотрим при $1/2 \leqslant t < 1$ функцию $H(t)$,

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \sum_{d \setminus n} \chi(d).$$

Если $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_u^{\alpha_u}$ — каноническое разложение n на простые сомножители, то

$$a_n = \prod_{r=1}^{u} \left(1 + \chi(p_r) + \ldots + \chi\left(p_r^{\alpha_r}\right)\right);$$

поэтому $a_n \geqslant 0$, $a_{m^2} \geqslant 1$. Отсюда

$$H(t) > \sum_{m=1}^{\infty} t^{m^2} > \int_2^{\infty} t^{u^2} du > \int_0^{\infty} t^{u^2} du - 2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(1-(1-t))}} - 2 > \frac{1}{2\sqrt{1-t}} - 2.$$

Далее,

$$H(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n \setminus m} \chi(n)\right) t^m = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \sum_{r=1}^{\infty} t^{rn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) t^n}{1-t^n}.$$

Оценим сверху разность $H(t) - \frac{L(1, \chi)}{1-t} = G(t)$,

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{t^n}{1-t^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \frac{t^n}{1-t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n+1}) \frac{t^n}{1-t} - \frac{L(1, \chi)}{1-t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left\{\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n(1-t)}\right\} - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} t^n,$$

где $S_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m}$. Имеем

$$|S_n| \leqslant \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{n},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} t^n\right| < c_1 \sqrt{k} \log k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = c_1 \sqrt{k} \log k \log \frac{1}{1-t};$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\left\{\frac{t^n}{1-\ t}-\frac{t^n}{n(1-t)}\right\}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\right)\left\{\frac{t^n}{1-t^n}-\frac{t^n}{n(1-t)}-\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}\right\}\right|\leqslant\frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{t^{n+1}}{1+t+\ldots+t^n}-\frac{t^n}{n(n+1)}-\frac{(1-t)\,t^n}{n+1}\right|<$$

$$<\frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}-\frac{t^{n+1}}{1+t+\ldots+t^n}-\right.$$

$$\left.-\frac{t^n}{n(n+1)}\right)+c_1\sqrt{k}\log k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}<2c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

Получили $\quad |G(t)|<3c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.\quad$ Отсюда

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t}=H(t)-G(t)>\frac{1}{2\sqrt{1-t}}+3c_1\sqrt{k}\log k\log(1-t)-2.$$

Возьмем

$$t=1-\frac{1}{c_0k\log^4 k},\qquad c_0=(64(c_1+1))^2;$$

тогда

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t}>\frac{1}{4}\sqrt{c_0k}\log^2 k,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему А. Пейджа о границе действительного нуля и следствия из нее.

Теорема 3. *Пусть χ — действительный примитивный характер по модулю k. Тогда*

$$L(\sigma,\chi)\neq 0 \textit{ при } \sigma>1-\frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k}.$$

Доказательство. Рассмотрим σ на отрезке $[1-1/8\log k,\ 1]$. По теореме о среднем значении

$$L(1,\chi)=L(\sigma,\chi)+(1-\sigma)L'(\sigma_1,\chi),$$

где $\sigma\leqslant\sigma_1\leqslant 1$. Применяя преобразование Абеля (лемма 4, I) и оценку суммы характеров (лемма 5, VIII), находим

$$|L'(\sigma_1, \chi)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\log n}{n^{\sigma_1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant k} \frac{\log n}{n^{\sigma_1}} + \int_k^{\infty} \left|\sum_{k<n\leqslant x} \chi(n)\right| \left(\frac{1}{x^{1+\sigma_1}} + \frac{\log x}{x^{1+\sigma_1}}\right) dx \leqslant c_1 \log^2 k.$$

Отсюда и из леммы 1

$$L(\sigma, \chi) \geqslant L(1, \chi) - (1-\sigma) c_1 \log^2 k >$$

$$> \frac{c_0}{\sqrt{k}\log^2 k} - (1-\sigma) c_1 \log^2 k > 0,$$

если $\sigma > 1 - \frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k}$, $c < \frac{c_0}{c_1}$. Теорема доказана.

Следствием теорем 2, 3 и теоремы 5, IV является отличие от нуля $L(1, \chi)$ при любом χ, т. е. отличие от нуля $\xi(0, \chi)$ при любом χ (см. доказательство теоремы 2, VIII).

В приложениях часто недостаточно полученной в теореме 3 границы действительных нулей $L(s, \chi)$. Однако модули, для которых действительный нуль может быть большим, расположены крайне редко. Это обстоятельство может быть использовано для доказательства утверждений, которые дают возможность во многих приложениях с успехом применять теорему 3 (см., например, гл. X).

Теорема 4. *Пусть χ_1 — действительный примитивный характер по модулю k_1, χ_2 — действительный примитивный характер по модулю k_2, $\chi_1 \neq \chi_2$, $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ имеют действительные нули соответственно β_1 и β_2, тогда*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\log k_1 k_2}.$$

Доказательство. Рассмотрим характер $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$ — характер по модулю $k_1 k_2$ (см. следствие, лемма 4, VIII), причем $\chi(n) \neq \chi_0(n)$, так как $\chi_1 \neq \chi_2$. При $\sigma > 1$ имеем

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n)) n^{-\sigma} =$$

$$= -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} - \frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} - \frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)}. \qquad (7)$$

Подобно тому, как доказывалось неравенство (4), находим

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_1 \log k_1 k_2;$$

кроме того, из (3)

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_1)}{L(\sigma,\chi_1)}<c_1\log k_1-\frac{1}{\sigma-\beta_1},$$

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_2)}{L(\sigma,\chi_2)}<c_1\log k_2-\frac{1}{\sigma-\beta_2}.$$

Подставим полученные оценки в (7):

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1}+\frac{1}{\sigma-\beta_2}<\frac{1}{\sigma-1}+c_2\log k_1k_2.$$

Возьмем $\sigma=1+\frac{1}{2c_2\log k_1k_2}$, тогда найдем

$$\min(\beta_1,\beta_2)\leqslant 1-\frac{1}{7c_2\log k_1k_2}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть χ — все характеры по модулю k и $L(s,\chi)$ — отвечающие им функции. Тогда лишь одна из $L(s,\chi)$ может иметь действительный нуль β с условием*

$$\beta\geqslant 1-\frac{c}{\log k}.$$

Доказательство. Если χ_1 и χ_2 — два нетождественных характера по модулю k, то порожденные ими примитивные характеры χ_1^* и χ_2^* нетождественны, а модули их k_1^* и k_2^* не больше k. Отсюда получаем утверждение следствия.

Следствие 2. *Пусть $3\leqslant k\leqslant x$. Существует не более одного k_0, $3\leqslant k_0\leqslant x$, и не более одного действительного примитивного характера χ_1 по модулю k_0, для которого $L(s,\chi_1)$ имеет однократный действительный нуль β_1 такой, что*

$$\beta_1\geqslant 1-\frac{c}{\log x}.$$

Если, кроме того, есть $L(s,\chi)$, где χ — действительный характер по модулю k, такие, что

$$L(\beta,\chi)=0,\quad \beta\geqslant 1-\frac{c}{\log x},$$

то $k\equiv 0 \pmod{k_0}$.

Доказательство. Если β_1 — m-кратный нуль $L(s,\chi_1)$, $m\geqslant 2$, то, повторяя доказательство теоремы 4, найдем

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1+\chi_1(n)) n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)}, \quad \sigma>1;$$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + c_1, \quad -\frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} < c_1 \log x - \frac{m}{\sigma-\beta_1};$$

$$\frac{2}{\sigma-\beta_1} \leqslant \frac{m}{\sigma-\beta_1} < \frac{1}{\sigma-1} + c_2 \log x; \quad \beta_1 \leqslant 1 - \frac{1}{7c_2 \log x},$$

что противоречит условию следствия. Далее, если имеется еще один действительный примитивный характер χ_2, не тождественный χ_1, для которого $L(s, \chi_2)$ имеет большой действительный нуль β_2,

$$\beta_2 \geqslant 1 - \frac{c}{\log x},$$

то получаем противоречие с утверждением теоремы. Пусть теперь χ — действительный характер по модулю k такой, что

$$L(\beta, \chi) = 0, \quad \beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log x}.$$

Если χ_2 — примитивный характер, порожденный χ, по модулю k_2, то $k \equiv 0 (\operatorname{mod} k_2)$ и

$$L(\beta, \chi_2) = 0, \quad \beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log x}.$$

Отсюда следует, что $k_2 = k_0$, $\chi_2 \equiv \chi_1$. Следствие доказано.

Следствие 3. *В обозначениях и при условиях следствия 2 выполняется неравенство*

$$k_0 \geqslant \frac{c' \log^2 x}{(\log \log x)^8}.$$

Доказательство. По теореме 3 и условию следствия

$$1 - \frac{c}{\log x} < \beta_1 \leqslant 1 - \frac{c_1}{\sqrt{k_0} \log^4 k_0}.$$

Отсюда получаем утверждение.

Следующая теорема К. Зигеля устанавливает более точную границу действительного нуля, чем предыдущая.

Теорема 5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $c = c(\varepsilon) > 0$ *такое, что если* χ *— действительный характер по модулю* k *и* β *— действительный нуль* $L(s, \chi)$, *то*

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть χ_1 и χ_2 — различные действительные примитивные характеры по модулям соответственно k_1 и k_2. Пусть, далее,*

$$F(s)=\zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2).$$

Тогда при $9/10<\sigma<1$ имеет место оценка

$$F(\sigma)>\frac{1}{2}-\frac{c\lambda}{1-\sigma}(k_1k_2)^{8(1-\sigma)},$$

где $\lambda=L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Доказательство. Прежде всего $\chi_1\chi_2$ — неглавный характер по модулю k_1k_2. Следовательно, $F(s)$ — регулярная во всей s-плоскости функция, за исключением точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом $\lambda=L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$. При $\operatorname{Re}s>1$ разложим $F(s)$ в ряд Дирихле:

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nn^{-s}.$$

Так как при $\operatorname{Re}s>1$

$$F(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(1-\frac{\chi_1(p)\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

а $\chi_1(p)=0,\ \pm1$, $\chi_2(p)=0,\ \pm1$, то легко найти, что

$$b_1=1,\quad b_n\geqslant 0\quad\text{при}\quad n>1.$$

Действительно, если $\chi_1(p)=-1$, $\chi_2(p)=+1$, то

$$\prod\nolimits_1=\prod_p{}'\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=$$
$$=\prod_p{}'\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}=\left(\prod_p{}'\left(1+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\dots\right)\right)^2;$$

если $\chi_1(p)=0$, $\chi_2(p)=+1$, то

$$\prod\nolimits_2=\prod_p{}''\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=$$
$$=\left(\prod_p{}'\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right)\right)^2;$$

если $\chi_1(p)=0$, $\chi_2(p)=-1$, то

$$\Pi_3=\prod_p{}''' \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \\ = \prod_p{}''' \left(1+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\ldots\right);$$

если $\chi_1(p)=\chi_2(p)=0$, то

$$\Pi_4=\prod_p{}'''' \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p{}'''' \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right).$$

Остальные возможные случаи аналогичны уже разобранным. Перемножая все Π_i, получим ряд Дирихле $F(s)$, причем $b_1=1$, $b_n\geqslant 0$.

Следовательно, при $|s-2|<1$

$$F(s)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(2-s)^m, \quad a_0\geqslant 1, \quad a_m\geqslant 0,$$

так как

$$F^{(m)}(2)=(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\log^m n.$$

Функция $g(s)$, задаваемая равенством

$$g(s)=F(s)-\frac{\lambda}{s-1},$$

регулярна во всей s-плоскости. Поэтому равенство

$$g(s)=F(s)-\frac{\lambda}{s-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m-\lambda)(2-s)^m \tag{8}$$

имеет место и в круге

$$|s-2|\leqslant 3/2. \tag{9}$$

Оценим $g(s)$ в круге (9). На границе $|s-2|=3/2$ имеем

$$\zeta(s)=O(1), \quad \frac{1}{s-1}=O(1);$$

$$|L(s,\chi_1)|<ck_1, \quad |L(s,\chi_2)|<ck_2, \quad |L(s,\chi_1\chi_2)|<ck_1k_2$$

(следствие к лемме 9, VIII); следовательно,

$$|g(s)|<c_1(k_1k_2)^2, \qquad |s-2|=3/2.$$

Последнее неравенство по принципу максимума имеет место и внутри круга (9). Оценивая $a_m-\lambda$ в (8) по теореме Коши о коэффициентах степенного ряда, найдем

$$|a_m-\lambda|<c_2(k_1k_2)^2(2/3)^m, \quad m=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

При $M>1$ и $9/10<\sigma<1$ имеем

$$\sum_{m=M}^{\infty}|a_m-\lambda|(2-\sigma)^m\leqslant\sum_{m=M}^{\infty}c_2(k_1k_2)^2\left(\frac{2}{3}(2-\sigma)\right)^m< \\ <c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M;$$

$$F(\sigma)-\frac{\lambda}{\sigma-1}\geqslant 1-\lambda\sum_{m=0}^{M-1}(2-\sigma)^m-c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M= \\ =1-\lambda\frac{(2-\sigma)^M-1}{1-\sigma}-c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M.$$

Определим целое M из соотношения

$$c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M<\frac{1}{2}\leqslant c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^{M-1};$$

тогда

$$F(\sigma)\geqslant\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{1-\sigma}(2-\sigma)^M.$$

Так как $M<8\log k_1k_2+c_4$, то

$$(2-\sigma)^M=e^{M\log(1+1-\sigma)}<e^{M(1-\sigma)}<c_5(k_1k_2)^{8(1-\sigma)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем существование такого $k_0=k_0(\varepsilon)$, что при $k>k_0$ и $\sigma>1-1/k^{\varepsilon}$

$$L(\sigma,\chi)\neq 0, \tag{10}$$

где χ — действительный примитивный характер по модулю k. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Предположим, что нет таких k, для которых есть нуль $L(s,\chi)$ на отрезке $1-\frac{\varepsilon}{10}\leqslant\sigma<1$. Обозначая через $k_1=k_1(\varepsilon)$ наименьшее k с условием $k^{\varepsilon}\geqslant 10/\varepsilon$, получим (10) при $k>k_1(\varepsilon)$.

Предположим теперь существование такого k_1, для которого $L(s,\chi_1)$, χ_1 — действительный примитивный характер по модулю k_1, имеет нуль $s=\sigma_1$ на отрезке $\left[1-\frac{\varepsilon}{10},1\right)$. Пусть k_2 — пока произвольное натуральное число, большее k_1, и χ_2 — действительный примитивный характер по модулю k_2 ($\chi_2\neq\chi_1$, так как $k_2>k_1$).

По лемме 2, ввиду равенства $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$,

$$0 = F(\sigma_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma_1}(k_1k_2)^{8(1-\sigma_1)}, \quad 1 - \frac{\varepsilon}{10} \leqslant \sigma_1 < 1,$$

где

$$F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2),$$

$$\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2).$$

Таким образом,

$$L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2) > c_1(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-0,8\varepsilon}.$$

Применяя оценки для $L(1, \chi_2)$ и $L(1, \chi_1\chi_2)$ из следствия леммы 9, VIII, найдем

$$L(1, \chi_2) \geqslant c_2(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-0,8\varepsilon}(\log k_1k_2)^{-2}.$$

Возьмем теперь $k_2 = k_2(\varepsilon, k_1, \sigma_1)$ настолько большим, чтобы было $k_1^{-0,8\varepsilon}c_2(1-\sigma_1)(\ln k_1k_2)^{-2} > k_2^{-0,1\varepsilon}$. Тогда при всех $k > k_2$ будем иметь

$$L(1, \chi) > k^{-0,9\varepsilon},$$

где χ — действительный примитивный характер по модулю k. Отсюда и из оценки сверху для $L'(\sigma, \chi)$ получаем

$$L(\sigma, \chi) = L(1, \chi) - (1-\sigma)L'(\sigma_2, \chi) \geqslant$$
$$\geqslant k^{-0,9\varepsilon} - (1-\sigma)c_3\log^2 k > 0,$$

если $1 - \frac{1}{k^{\varepsilon}} \leqslant \sigma < 1$, $k \geqslant k_3(\varepsilon) = k_3$. Следовательно, при $k > \max(k_1, k_3)$ получим (10). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. *Постоянная $c = c(\varepsilon)$ в доказанной теореме неэффективна, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ найти $c = c(\varepsilon)$ нельзя. Поэтому все утверждения, в которых, по существу, применяется эта теорема, неэффективны* (см., например, следствие 2 теоремы 6).

§ 3. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях

Применяя результаты предыдущих параграфов, получим асимптотические формулы для величин $\psi(x; k, l)$ и $\pi(x; k, l)$.

Теорема 6. *При $x > 1$ справедливы равенства*

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{x^{\beta_1}\chi_1(l)}{\beta_1 \varphi(k)} + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)} \int\limits_2^x \frac{u^{\beta_1 - 1}}{\log u}\, du + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right),$$

где $E_1 = 1$, если по модулю k существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 > 1 - c/\log k$ и $E_1 = 0$ в противном случае.

Доказательство. Предполагаем $k \leqslant e^{\sqrt{\log x}}$. Характер χ_1, для которого $E_1 = 1$, может быть только один (следствие 1 теоремы 4). По формуле (1)

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - \frac{E_1}{\varphi(k)} \chi_1(l)\psi(x, \chi_1) + \\ + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_1} \psi(x, \chi)\overline{\chi}(l) + O(\log^2 x).$$

Пусть $\chi \neq \chi_0, \chi_1$ и χ^* — примитивный характер по модулю k_1, $k_1 \backslash k$, порожденный χ. Тогда по теореме 1 при $T = e^{\sqrt{\log x}}$

$$\psi(x, \chi^*) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi^*(n) = - \sum_{|\mathrm{Im}\, \rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(xe^{-0,5\sqrt{\log x}}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули $L(s, \chi^*)$. По теореме 2

$$\mathrm{Re}\, \rho = \beta \leqslant 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leqslant 1 - \frac{c_2}{\sqrt{\log x}};$$

поэтому

$$|\psi(x, \chi^*)| \leqslant \sum_{|\mathrm{Im}\, \rho| < T} \frac{x^\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} + c_3 xe^{-0,5\sqrt{\log x}} \leqslant xe^{-c_0\sqrt{\log x}}$$

(воспользовались следствием 1 теоремы 3, VIII).

Таким образом,

$$\psi(x, \chi) = \psi(x, \chi^*) + \theta_1 \log^2 x = O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right).$$

Пусть теперь $\chi = \chi_1$. Тогда

$$\psi(x, \chi_1) = -E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{|\mathrm{Im}\, \rho| < T \\ \rho \neq \beta_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(xe^{-0,5\sqrt{\log x}}\right),$$

причем

$$\operatorname{Re}\rho = \beta \leqslant 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leqslant 1 - \frac{c_2}{\sqrt{\log x}}.$$

Оценивая последнюю сумму по $\rho \neq \beta_1$ так же, как это было сделано выше, найдем

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1} \frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right).$$

Так как

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right),$$

получаем первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы получается из первого преобразованием Абеля (лемма 4, I):

$$\pi(x; k, l) = \sum_{2<n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)\,\alpha(n)}{\log n} + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right),$$

где

$$\alpha(n) = \alpha(n; k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod k; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod k; \end{cases}$$

отсюда

$$\pi(x; k, l) = \int_2^x \frac{\psi(u; k, l)}{u\log^2 u}\,du + \frac{\psi(x; k, l)}{\log x} + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(k)}\int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}du}{\log^2 u} +$$

$$+ \frac{x}{\varphi(k)\log x} - E_1 \frac{\chi_1(l)\,x^{\beta_1}}{\beta_1\varphi(k)\log x} + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\,du + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы, теорем 3, 5 и следствий 2 и 3 теоремы 4 выведем три следствия о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leqslant k \leqslant (\log x)^{2-\varepsilon}$, *где* $0 < \varepsilon < 1/2$. *Тогда*

$$\psi(x;\, k,\, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}\right),$$

$$\pi(x;\, k,\, l) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c'(\log x)^{\varepsilon/3}}\right).$$

Доказательство. По теореме 3

$$\beta_1 \leqslant 1 - \frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k};$$

поэтому

$$x^{\beta_1} \leqslant xe^{-\frac{c\log x}{\sqrt{k}\log^4 k}} = O\left(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Для любого фиксированного* $A > 1$ *и* $1 \leqslant k \leqslant (\ln x)^A$ *справедливы асимптотические формулы*

$$\psi(x;\, k,\, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right),$$

$$\pi(x;\, k,\, l) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right),$$

где $c_1 = c_1(A) > 0$.

Доказательство. По теореме 5 при любом $\varepsilon > 0$

$$\beta_1 \leqslant 1 - c(\varepsilon)/k^{\varepsilon}.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/2A$, тогда

$$x^{\beta_1} \leqslant xe^{-\frac{c(\varepsilon)\log x}{k^{\varepsilon}}} \leqslant xe^{-c(\varepsilon)(\log x)^{1-A\varepsilon}} = xe^{-c_1\sqrt{\log x}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. *Постоянная* $c_1 = c_1(A)$ *неэффективна, т. е.* $c_1 = c_1(A)$ *не может быть вычислена по заданному* A (см. теорему 5).

Следствие 3. *Пусть* $x \geqslant y > 3$, *и рассмотрим все* k, *не превосходящие* y. *Тогда, за исключением, быть может, «особых» модулей* k, *которые кратны некоторому* k_0, $k_0 \geqslant c\log^2 y(\log\log y)^{-8}$, *для остальных справедливы асимптотические формулы*

$$\psi(x;\, k,\, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-c_2\frac{\log x}{\log y}}\right),$$

$$\pi(x;\, k,\, l) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_2'\sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-c_2'\frac{\log x}{\log y}}\right).$$

Доказательство получается из следствий 2 и 3 к теореме 4.

1. а). Пусть χ — примитивный характер по модулю k, $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, $Z \geqslant k(|t|+1)$. Тогда (простейшее приближение)

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leqslant Z} \frac{\chi(n)}{n^s} + O(kZ^{-\sigma}).$$

б) Пусть χ — примитивный характер по модулю k, $|\arg \eta| \leqslant \pi/2$; тогда (в обозначениях гл. VIII)

$$\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}, \frac{\pi\eta n^2}{k}\right) + \\ + \frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{0,5-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}, \frac{\pi n^2}{k\eta}\right),$$

где $\Gamma(z, x)$ — неполная гамма-функция (см. гл. IV, задача 1).

2. Пусть χ — примитивный характер по модулю k, $k \leqslant Q$; тогда при любых a_n выполняется неравенство

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}' \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leqslant c(Q^2 + N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

3. Пусть $2 \geqslant \operatorname{Re} s_\chi = \sigma_\chi \geqslant 0$, $\operatorname{Im} s_\chi = t_\chi$, $A \leqslant t_\chi \leqslant A+1$; при условиях задачи 2 имеем

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}' \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-s_\chi} \right|^2 \leqslant c(Q^2 + N) L^2 \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$
$$L = \ln N.$$

4. Пусть $\operatorname{Re} s > 0$, χ — характер по модулю k. Доказать, что при $s = \rho$, $L(\rho, \chi) = 0$, $\operatorname{Re} \rho > 0$, $Z \geqslant k(|t|+1)$, $1 \leqslant X < Y < Z$, выполняется одно из неравенств:

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{X \leqslant n \leqslant X^2} a(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 = \varkappa_1;$$

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{X^2 < n \leqslant XY} a(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 = \varkappa_2;$$

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} \left| \sum_{Y < n \leqslant Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} = \varkappa_3;$$

$$1 \leqslant c_2 k^2 Z^{-2\sigma} \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 = \varkappa_4,$$

где $|a_n| \leqslant \tau(n)$.

5. Пусть $N(\alpha, T, \chi)$ — число нулей $L(s, \chi)$ в области $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$; тогда для $0,5 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $T \geqslant 2$, $Q \geqslant 1$, и при условиях

задачи 2 имеем

$$\sum_{k<Q}\sum_{\chi \bmod k}{}' N(\alpha, T, \chi) \leqslant cT\left(Q^2 + QT\right)^{\frac{4(1-\alpha)}{3-2\alpha}} \log^{10}(Q+T).$$

6. а) При любом $A > 0$ найдется $B = B(A) > 0$ такое, что

$$\sum_{k<\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l,k)=1}\left|\psi(X; k, l) - \frac{X}{\varphi(k)}\right| \leqslant c\,\frac{X}{(\ln X)^A},$$

где постоянная $c = c(A) > 0$ эффективно не вычисляется.

б) Существует константа $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l,k)=1}\left|\psi(X; k, l) - \frac{X}{\varphi(k)}\right| \leqslant c_1\frac{X}{(\ln X)^{2-\varepsilon}},$$

где $c_1 > 0$ — эффективно вычисляемая постоянная.

7. Пусть $k = p^n$, $p \geqslant 3$ — простое число, s и m — натуральные числа, причем $s \leqslant n-1$, $n - s \leqslant sm < n + s - 1$, $\operatorname{ind} v$ — индекс числа v по модулю k; тогда

$$\frac{\operatorname{ind}(1+p^s u)}{p-1} \equiv a_1 p^s u + \frac{1}{2}a_2(p^s u)^2 + \ldots + \frac{1}{m}a_m(p^s u)^m \pmod{p^{n-1}},$$

где $(a_1, p) = (a_2, p) = \ldots = (a_m, p) = 1$, и число $v^{-1} \pmod{p^{n-1}}$ определяется из сравнения $vv_1 \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

8. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $k = p^n$, $p \geqslant 3$, p — фиксированное простое число; тогда при $1 \leqslant r \leqslant 0{,}5n$, $N^r = k$, выполняется оценка

$$\left|\sum_{m<N}\chi(m)\right| \leqslant c_1 N^{1-c/r^2}.$$

9. При условиях задачи 8 функция $L(s, \chi) \neq 0$ в области

$$|\operatorname{Im} s| < e^{c_2(\ln\ln k)^2}, \quad \operatorname{Re} s = \sigma > 1 - \frac{c_3}{(\ln k)^{2/3}(\ln\ln k)^2}.$$

10. Доказать, что при $k = p^n$, $p \geqslant 3$, p — фиксированное простое число, $k \leqslant x^{1/9}$, $x \to +\infty$, справедлива асимптотическая формула

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)}\left\{1 + O\left(e^{-c(\ln\ln x)_2}\right)\right\}.$$

ГЛАВА X

ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Настоящая глава посвящена исследованию вопроса о представимости нечетного N суммою трех простых чисел (проблема Гольдбаха). Здесь будет доказана теорема И. М. Виноградова об асимптотической формуле для числа представлений N суммою трех простых чисел, из которой следует представимость всех достаточно больших нечетных N суммою трех простых чисел.

Сначала дано более простое, но неэффективное доказательство (теорема 3), которое затем заменено эффективным (теорема 4).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Выразим аналитической формулой число представлений натурального числа N суммою трех простых чисел.

Лемма 1. *Пусть $J(N)$ — число решений в простых числах p_1, p_2, p_3 уравнения $N = p_1 + p_2 + p_3$. Тогда*

$$J(N) = \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \tag{1}$$

где $S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$.

Доказательство. Если m — целое отличное от нуля число, то

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \left. \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{2\pi i m} \right|_0^1 = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \text{ — целое число, } m \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$J(N) = \sum_{p_1, p_2, p_3 < N} \int_0^1 e^{2\pi i\alpha(p_1+p_2+p_3-N)} d\alpha =$$

$$= \int_0^1 (S(\alpha))^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Существо кругового метода Г. Харди, Д. Литтлвуда и С. Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова состоит в том, что из $J(N)$ выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины $J(N)$ при $N \to +\infty$. Для этого интервал интегрирования $[0, 1)$ в (1) разбивается несократимыми рациональными дробями (дроби Фарея) на непересекающиеся интервалы; сумма интегралов по интервалам, отвечающим дробям с малыми знаменателями, и дает предполагаемый главный член. Нам нужна будет лемма о приближении действительных чисел рациональными.

Лемма 2. *Пусть* $\tau \geqslant 1$, α — *вещественное число, тогда существуют целые взаимно простые числа* a *и* q, $1 \leqslant q \leqslant \tau$, *такие, что*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $0 \leqslant \alpha < 1$. Рассмотрим при $m = 0, 1, \ldots, [\tau]$ числа $\{\alpha m\}$. Они лежат на промежутке $[0, 1)$, следовательно найдутся значения m, $m = m_1$, $m = m_2$, такие, что

$$\{\alpha m_1\} - \{\alpha m_2\} = \theta/\tau, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

или

$$\alpha(m_1 - m_2) - [\alpha m_1] + [\alpha m_2] = \theta/\tau,$$

где $1 \leqslant |m_1 - m_2| \leqslant [\tau] \leqslant \tau$. Отсюда следует утверждение леммы.

§ 2. Круговой метод в проблеме Гольдбаха

Выделим предполагаемый главный член асимптотической формулы величины $J(N)$. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое фиксированное положительное число. Предварительно преобразуем $J(N)$.

Пусть A и B — два положительных числа (конкретные значения A и B выберем позднее), $L = \ln N$, $\tau = N \cdot L^{-B}$, $Q = L^{A}$, $\varkappa\tau = 1$. В силу периодичности подынтегральной функции в (1) по α, имеем

$$J(N) = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha. \tag{2}$$

По лемме 2 каждое α из промежутка $[-\varkappa, 1-\varkappa]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{3}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leqslant a \leqslant q-1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через E_1 обозначим те α, для которых в представлении (3) $q \leqslant Q$, через E_2 обозначим оставшиеся α. Множество E_1 состоит из непересекающихся отрезков. Действительно, E_1 состоит из отрезков $E(a, q)$ вида

$$\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau} \leqslant \alpha \leqslant \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}, \quad 0 \leqslant a < q,$$
$$(a, q) = 1, \quad q = 1, 2, \ldots, [Q].$$

Если $E(a, q)$ и $E(a_1, q_1)$ — два разных отрезка E_1, т. е. $(a-a_1)^2 + (q-q_1)^2 \neq 0$, то расстояние между центрами этих отрезков равно

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{qq_1},$$

а сумма полудлин их равна

$$\frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q_1\tau} < \frac{1}{qq_1}.$$

Следовательно, $E(a, q)$ и $E(a_1, q_1)$ не пересекаются.

Обозначая через J_1 интеграл по множеству E_1, а через J_2 — интеграл по множеству E_2, т. е.

$$J_1 = J_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

$$J_2 = J_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

будем иметь

$$J = J_1 + J_2.$$

Цель настоящего параграфа — получить асимптотическую формулу для величины J_1. Нам нужна будет

Лемма 3. *Пусть α имеет вид* (3) *и* $\alpha \in E_1$. *Тогда*

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right),$$

где

$$M(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n} = \int_{3}^{N} \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u}\, du + O(1).$$

Доказательство. При любом n из промежутка $\sqrt{N} < n \leqslant N$ по следствию 2 теоремы 6, IX имеем

$$\pi(n; q, l) = \frac{\mathrm{Li}\, n}{\varphi(q)} + O\left(ne^{-c_1\sqrt{L}}\right).$$

Поэтому

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\sqrt{N} < p \leqslant N} e^{2\pi i \frac{ap}{q}} e^{2\pi i z p} + O\left(\sqrt{N}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{al}{q}} T(l) + O\left(\sqrt{N}\right), \quad (4)$$

где

$$T(l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{q} \\ \sqrt{N} < p \leqslant N}} e^{2\pi i z p} =$$

$$= \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N} (\pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)) e^{2\pi i z n}.$$

Применим к последней сумме преобразование Абеля (лемма 4, I), полагая $c_n = \pi(n;\ q,\ l) - \pi(n-1;\ q,\ l)$, $f(u) = e^{2\pi i z u}$. Пользуясь асимптотической формулой для $\mathbf{C}(u)$,

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant u} c_n = \frac{1}{\varphi(k)} \mathrm{Li}\, u + O\left(ue^{-c_1\sqrt{L}}\right),$$

и том, что при $n \geqslant 3$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u}\, du = \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n} + O(|z|) + O\left(\frac{1}{n \log^2 n}\right),$$

из (4) получим утверждение леммы.

Замечание. Постоянная в знаке O не эффективна, так как мы существенно пользовались следствием 2 теоремы 6, IX.

Лемма 4. *Для величины J_1 справедлива следующая формула:*

$$J_1 = \sigma\varkappa + O(N^2L^{-A-1}) + O(N^2L^{-2B+2A}),$$

где

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q); \qquad \gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

$$\varkappa = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z)\, e^{-2\pi i z N} dz; \qquad M(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n}.$$

Доказательство. По определению

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q),$$

где

$$I(a, q) = \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) N} dz.$$

По лемме 3 в этой формуле

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right);$$

отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} M^3(z) + O\left(N^3e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Тем самым для $I(a, q)$ находим

$$I(a, q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} M^3(z)\, e^{-2\pi i z N} dz + O\left(N^2L^Bq^{-1}e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Интеграл в последней формуле заменим близким к нему интегралом $\varkappa$. Имеем

$$\int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} M^3(z)\, e^{-2\pi i z N} dz = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z)\, e^{-2\pi i z N} dz + R = \varkappa + R,$$

где $\quad |R| \leqslant 2 \int_{+1/q\tau}^{+0,5} |M(z)|^3 dz.$

Оценим $|M(z)|$ при $0<|z|\leqslant 1/2$. Интегрируя один раз по частям, найдем

$$\int_3^N \frac{e^{2\pi izu}}{\log u}\,du = \frac{1}{2\pi iz}\frac{e^{2\pi izu}}{\log u}\Big|_3^N - \frac{1}{2\pi iz}\int_3^N e^{2\pi izu}d\,\frac{1}{\log u};$$

$$|M(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Поэтому

$$|R| \ll \int_{+1/q\tau}^{+0,5} \frac{dz}{z^3} \ll q^2\tau^2 \ll N^2L^{-2B+2A}.$$

Итак, последовательно получаем

$$I(a, q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\,e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\varkappa + O\left(\frac{1}{\varphi^3(q)}\,N^2L^{-2B+2A}\right);$$

$$J_1 = \varkappa\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} + O\left(N^2L^{-2B+2A}\right).$$

Двойную сумму в последнем равенстве преобразуем так же, как раньше преобразовали интеграл по z. Имеем

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} - R_1 = \sigma - R_1,$$

где

$$|R_1| < \left|\sum_{q>Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q>Q}\frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \int_Q^{\infty}\frac{(\log\log u)^2}{u^2}\,du \ll L^{-A+1}.$$

Следовательно,

$$J_1 = \sigma\varkappa + O(\varkappa L^{-A+1}) + O(N^2L^{-2B+2A}).$$

Наконец,

$$|\varkappa| = \left|\int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z)\,e^{-2\pi izN}dz\right| \leqslant N\int_{-0,5}^{+0,5}|M(z)|^2\,dz =$$

$$= N\sum_{3\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{\log^2 n} \ll N^2L^{-2}.$$

Таким образом, получили окончательную формулу:

$$J_1 = \sigma\varkappa + O(N^2L^{-A-1}) + O(N^2L^{-2B+2A}),$$

что и требовалось доказать.

Исследуем более подробно величины $\varkappa$ и σ.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$\varkappa = \varkappa(N) = \frac{N^2}{2\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$M_0(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi izn}}{\log N}.$$

Тогда

$$|M(z) - M_0(z)| \leqslant \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_2^N \left(\frac{1}{\log u} - \frac{1}{\log N}\right) du = O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right).$$

Полагая, далее,

$$\varkappa_0 = \varkappa_0(N) = \int_{-0,5}^{+0,5} M_0^3(z)\, e^{-2\pi izN} dz,$$

находим

$$|\varkappa - \varkappa_0| \ll \frac{N}{\log^2 N} \int_{-0,5}^{+0,5} (|M(z)|^2 + |M(z_0)|^2)\, dz \ll \frac{N^2}{\log^4 N}.$$

Следовательно,

$$\varkappa = \varkappa_0 + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) = \frac{1}{\log^3 N} I_0(N) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

где $I_0(N)$ — число решений уравнения

$$n_1 + n_2 + n_3 = N, \quad 3 \leqslant n_1,\ n_2,\ n_3 \leqslant N - 6.$$

При фиксированном n_3, $3 \leqslant n_3 \leqslant N - 6$, уравнение

$$n_1 + n_2 = N - n_3, \quad 3 \leqslant n_1, \quad n_2 \leqslant N - 6$$

имеет $N - n_3 - 5$ решений; поэтому

$$I_0(N) = \sum_{n_3=3}^{N-6} (N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Итак,

$$\varkappa(N)=\frac{N^2}{2\log^3 N}+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Имеет место равенство*

$$\sigma=\sigma(N)=\prod_{p\setminus N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\times N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что сумма $T(q)$,

$$T(q)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N},$$

является мультипликативной функцией q. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1, q_2)=1$. Тогда

$$T(q_1q_2)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q_1q_2} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i\frac{a_2q_1+a_1q_2}{q_1q_2}N}=$$
$$=T(q_1)\,T(q_2).$$

Отсюда следует мультипликативность $T(q)$ и $\gamma(q)$. Далее, так как

$$|\gamma(q)|\leqslant 1/\varphi^2(q),$$

то

$$\prod_{p\leqslant X}(1+\gamma(p)+\gamma(p^2)+\ldots)=\sum_{q\leqslant X}\gamma(q)+O\left(\sum_{q>X}\frac{1}{\varphi^2(q)}\right)=$$
$$=\sum_{q\leqslant X}\gamma(q)+O\left(\frac{\log\log X}{X}\right).$$

Переходя к пределу $X\to+\infty$, найдем

$$\sigma=\prod_{p}(1+\gamma(p)+\gamma(p^2)+\ldots).$$

Из определения $\gamma(q)$ получаем

$$\gamma(p)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } p\setminus N;\\[2mm] \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } p\times N;\end{cases}$$

$$\gamma(p^r)=0, \quad \text{если } r\geqslant 2.$$

Таким образом,

$$\sigma = \prod_{p \setminus N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p \times N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) =$$
$$= \prod_{p}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p \setminus N}\left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанных лемм следует основной результат настоящего параграфа.

Теорема 1. *Для J_1 справедлива асимптотическая формула*

$$J_1 = J_1(N) = \frac{N^2}{2(\log N)^3}\sigma + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \setminus N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p \times N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Замечания.

1. Постоянная в знаке O в доказанной теореме неэффективна, так как, по существу, применялось следствие 2 теоремы 6, IX.

2. Ниже (см. § 3) будет получена асимптотическая формула для J_1 с эффективной постоянной в знаке O.

3. При нечетном N ввиду очевидных неравенств

$$\prod_{p \setminus N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}, \quad \prod_{p \times N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) > 2$$

находим

$$\sigma(N) > 1.$$

Чтобы получить асимптотическую формулу для $J = J(N)$, надо оценить J_2, а для этого нужна оценка $|S(\alpha)|$ при α, принадлежащих множеству E_2.

§ 3. Линейные тригонометрические суммы с простыми числами

Докажем теорему И. М. Виноградова об оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами. Следствием этой теоремы и теоремы 1 будет асимптотическая формула для числа представлений нечетного N суммою трех простых чисел.

Теорема 2. *Пусть*

$$H = e^{0,5\sqrt{\log N}}, \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

$$(a, q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad 1 < q \leqslant N;$$

$$S = S(\alpha) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда

$$S \ll N (\log N)^3 \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Доказательство. Возьмем

$$P = \prod_{p \leqslant \sqrt{N}} p;$$

пользуясь свойством функции Мёбиуса, найдем

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,P)=1}}^{N} e^{2\pi i \alpha n} = \sum_{d \setminus P} \mu(d) S(d),$$

$$S(d) = \sum_{0 < m \leqslant N d^{-1}} e^{2\pi i \alpha m d}.$$

Отсюда

$$S = S_0 - S_1 + O(\sqrt{N}), \tag{5}$$

где

$$S_0 = \sum_{d_0 m \leqslant N} \sum e^{2\pi i \alpha m d_0}, \qquad \mu(d_0) = +1,$$

$$S_1 = \sum_{m d_1 \leqslant N} \sum e^{2\pi i \alpha m d_1}, \qquad \mu(d_1) = -1.$$

Суммы S_0 и S_1 оцениваются одинаково. Оценим S_0. Отрезок $0 < m \leqslant N$ разобьем на $\ll \log N$ отрезков вида $M < m \leqslant M'$, $M' \leqslant 2M$ и рассмотрим сумму

$$S(M) = \sum_{\substack{m d_0 \leqslant N \\ M < m \leqslant M'}} \sum e^{2\pi i \alpha m d_0}. \tag{6}$$

Если $M \geqslant H$, то, применяя лемму 5, VI, найдем

$$S(M) = \sum_{d_0 \leqslant N M^{-1}} \sum_{M < m \leqslant \min\left(M', \frac{N}{d_0}\right)} e^{2\pi i \alpha m d_0} \ll$$

$$\ll \sum_{d_0 \leqslant N M^{-1}} \min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{\|\alpha d_0\|}\right) \leqslant \sum_{n \leqslant N M^{-1}} \min\left(\frac{N}{n}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0 < n \leqslant 0,5q} + \sum_{0,5q < n \leqslant 1,5q} + \ldots + \sum_{(r-0,5)q < n \leqslant (r+0,5)q}, \tag{7}$$

где $r \leqslant NM^{-1}q^{-1}$. Пусть k — наименьший неотрицательный вычет числа an по модулю q при $1 \leqslant n < q$; тогда

$$\|\alpha n\| = \left\| \frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2} \right\| = \left\| \frac{k + 0{,}5\,\theta_1}{q} \right\|, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

Отсюда, полагая

$$u = \begin{cases} k, & \text{если } k \leqslant 0{,}5\,q; \\ q - k, & \text{если } k > 0{,}5\,q, \end{cases}$$

найдем

$$\|\alpha n\| \geqslant \frac{u - 0{,}5}{q}.$$

Поэтому первое слагаемое в (7)

$$\leqslant q \sum_{0 < u \leqslant 0{,}5q} \frac{1}{u - 0{,}5} \ll q \log q.$$

К остальным слагаемым в (7) применим лемму 6, VI; получим

$$S(M) \ll q \log q + \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{N}{(l - 0{,}5)\, q} + q \log q \right) \ll$$

$$\ll q \log q + Nq^{-1} \log N + NM^{-1} \log q \ll$$

$$\ll N (\log N) \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H} \right). \quad (8)$$

Пусть теперь $M < H$. Сумму $S(M)$ представим в виде

$$S(M) = \sum_{M < m \leqslant M'} \sum_{d_0 \leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i \alpha m d_0}.$$

Обозначим буквой δ_k каждое d_0, имеющее ровно k простых сомножителей, превосходящих H^2. Если k_0 — максимальное значение k для $d_0 \leqslant N$, то $2^{k_0} \leqslant N$, т. е. $k_0 \ll \log N$. Имеем

$$S(M) = \sum_{k=0}^{k_0} S_k(M),$$

$$S_k(M) = \sum_{M < m \leqslant M'} \sum_{\delta_k \leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi \alpha m \delta_k}.$$

Оценим $S_0(M)$. Пусть $\varkappa$ — число простых сомножителей δ_0, $\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$; тогда

$$H^{2\varkappa} > NH^{-2}; \quad (2\varkappa + 2)\, 0{,}5 \sqrt{\log N} > \log N;$$

$$\varkappa > \sqrt{\log N} - 1; \quad \tau(\delta_0) > 2^{\sqrt{\log N} - 1}.$$

Применяя тривиальное неравенство

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]\ll x\log x,$$

будем иметь

$$S_0(M)\ll\sum_{M<m\leqslant M'}\left(\sum_{\delta_0\leqslant NM^{-1}H^{-1}}1+\sum_{NM^{-1}H^{-1}<\delta_0\leqslant Nm^{-1}}\frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\log N}}}\right)\ll$$

$$\ll M\left(\frac{N}{MH}+\frac{N\log N}{M\cdot 2^{\sqrt{\log N}}}\right)\ll\frac{N}{H}.$$

Оценим $S_k(M)$, $k>0$. Сравним $S_k(M)$ с суммой

$$T_k=\sum_{M<m\leqslant M'}\sum_{pt\leqslant Nm^{-1}}e^{2\pi i\alpha mpt},$$

где p пробегает простые числа интервала $H^2<p\leqslant\sqrt{N}$, а t пробегает значения d_1, имеющие ровно $k-1$ простых сомножителей, превосходящих H^2. Пусть $k>1$. Членов с $(p, t)=p$ сумма T_k имеет

$$\ll\sum_{M<m\leqslant M'}\sum_{H^2<p\leqslant\sqrt{N}}\frac{NM^{-1}}{p^2}\ll\frac{N}{H}.$$

Остальные члены суммы T_k такие же, что и члены суммы $S_k(M)$, причем каждый член суммы $S_k(M)$ входит в T_k ровно k раз. Поэтому

$$S_k(M)=\frac{1}{k}T_k+O\left(\frac{N}{kH}\right).$$

Последнее равенство справедливо и при $k=1$. Оценим T_k. Обозначим $mp=u$; интервал

$$MH^2<u\leqslant M'\sqrt{N}$$

разобьем на $\ll\log N$ интервалов $U<u\leqslant U'$, $U<U'\leqslant 2U$, и пусть

$$T_k(U)={\sum_{U<u\leqslant U'}}'\sum_{ut\leqslant N}e^{2\pi i\alpha ut}.$$

Применяя лемму 6, VI, получим

$$|T_k(U)|^2\leqslant U\sum_{u=U+1}^{2U}\left|\sum_{ut\leqslant N}e^{2\pi i\alpha ut}\right|^2=$$

$$=U\sum_{t_1\leqslant NU^{-1}}\sum_{t_2\leqslant NU^{-1}}\sum_{U<u\leqslant\min\left(2U,\frac{N}{t_1},\frac{N}{t_2}\right)}e^{2\pi i\alpha u(t_1-t_2)}\ll$$

$$\ll U \sum_{t_1 \leqslant NU^{-1}} \sum_{t_2 \leqslant NU^{-1}} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha(t_1 - t_2)\|}\right) \ll$$

$$\ll U\frac{N}{U}\left(\frac{N}{Uq}+1\right)(U+q\log q) \ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{U}{N}+\frac{1}{U}+\frac{q}{N}\right)\times$$

$$\times \log N \ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{H^2}\right)\log N;$$

$$|T_k(U)| \ll N\sqrt{\log N}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$|T_k| \ll N(\log N)^{3/2}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right).$$

Отсюда и из (8)

$$S(M) \ll |S_0(M)| + \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}|T_k| + \frac{N}{kH}\right) \ll$$

$$\ll N(\log N)^{3/2}(\log\log N)\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$S \ll N(\log N)^3\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для числа $J(N)$ представлений нечетного N суммою трех простых чисел справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$J(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$
$$\sigma(N) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p \setminus N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right) > 1. \tag{9}$$

Доказательство. Из леммы 1, формул § 2 и теоремы 1 при $A = 15$ имеем

$$J(N) = J_1(N) + J_2(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + J_2(N) +$$

$$+ O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$J_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha.$$

По определению множества E_2 для $\alpha \in E_2$ выполняется равенство

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

$$|\theta| \leqslant 1, \quad (\log N)^{15} < q < N(\log N)^{-20};$$

по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-4}, \qquad \alpha \in E_2.$$

Поэтому

$$J_2(N) \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2 (\log N)^{-5}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие (проблема Гольдбаха). *Существует такое N_0, что каждое нечетное $N > N_0$ есть сумма трех простых чисел.*

В силу замечания к теореме 1 постоянная в знаке O в формуле (9) неэффективна, поэтому и постоянная N_0 неэффективна. В следующем параграфе будет получена эффективная асимптотическая формула для $J(N)$, тем самым и постоянная N_0 в следствии станет эффективной.

§ 4. Эффективная теорема

Прежде всего получим нетривиальную оценку тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha)$ и в том случае, когда знаменатель рационального приближения α мал.

Лемма 7. *Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое постоянное число,*

$$\tau \geqslant N e^{-\varepsilon_0 \sqrt{\log N}}, \quad N_1 \geqslant N e^{-\varepsilon_0 \sqrt{\log N}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + z; \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant e^{\varepsilon_0 \sqrt{\log N}}, \quad |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Тогда

$$S(\alpha) = \sum_{N - N_1 < p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p} \ll \frac{N_1 \log\log q}{\sqrt{q} \log N}.$$

Доказательство. По теореме 6, IX

$$\pi(n;\,q,\,l)=\frac{\operatorname{Li} n}{\varphi(q)}-E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\,du+$$
$$+O\left(ne^{-c'\sqrt{\log n}}\right),\qquad \sqrt{N}\leqslant n\leqslant N.$$

Поэтому, повторяя первую часть доказательства теоремы 1 — преобразование $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$, будем иметь

$$S(\alpha)=S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}T(l)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}l}+O(\sqrt{N}),$$

$$T(l)=\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}(t(n)-t(n-1))\,e^{2\pi izn}+$$
$$+O\left(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}}\right)+O\left(N^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}\,|z|\right),$$

где

$$t(n)=\frac{\operatorname{Li} n}{\varphi(q)}-E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\,du;$$

таким образом,

$$S(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^{n}\frac{du}{\log u}\right)e^{2\pi izn}-$$
$$-\frac{E_1}{\varphi(q)}\left(\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right)\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^{n}\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\,du\right)e^{2\pi izn}+$$
$$+O\left(qNe^{-c_1\sqrt{\log N}}\right)+O\left(qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}\,|z|\right).\qquad(10)$$

Так как χ_1 — некоторый действительный характер по модулю q, то (см. гл. VIII, § 1)

$$\left|\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right|^2=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{m=1\\(m,q)=1}}^{q}\left|\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)\,e^{2\pi i\frac{m}{q}l}\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{m=1}^{q}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q}\chi_1(l)\chi_1(n)e^{2\pi i\frac{m}{q}(l-n)}\leqslant q.$$

Переходя к неравенствам в (10), найдем

$$S(\alpha) \ll \frac{\operatorname{Li} N - \operatorname{Li}(N-N_1)}{\varphi(q)} + \frac{\sqrt{q}\,(\operatorname{Li} N - \operatorname{Li}(N-N_1))}{\varphi(q)} +$$
$$+ qNe^{-c_1\sqrt{\log N}} + qN^2 e^{-c_1\sqrt{\log N}}\,|z| \ll \frac{N_1}{\log N}\cdot\frac{\log\log q}{\sqrt{q}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Для числа $J(N)$ представлений нечетного N суммою трех простых чисел справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$J(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right),$$

где

$$\sigma(N) = \prod_p\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\setminus N}\left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

и постоянная в знаке O — эффективная.

Доказательство. Возьмем $\tau = N(\log N)^{-20}$; по лемме 2 для $\alpha \in \left[-\frac{1}{\tau},\ 1 - \frac{1}{\tau}\right]$

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{11}$$

Через E_1 обозначим те α, для которых $q \leqslant (\log N)^3$, а через E_2 — множество остальных α. Как и раньше,

$$J = J_1 + J_2,$$

где $J_1 = \int\limits_{E_1} S^3(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha, \quad J_2 = \int\limits_{E_2} S^3(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$

Оценим J_2. Если в представлении (11)

$$q \geqslant (\log N)^{20},$$

то по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-7};$$

если же $(\log N)^3 < q \leqslant (\log N)^{20}$, то по лемме 7

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-2,5}(\log\log N).$$

Поэтому

$$J_2 \ll \max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)|\int\limits_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2(\log N)^{-3,5}(\log\log N).$$

Вычислим теперь J_1. Прежде всего рассмотрим множество всех q, не превосходящих y,

$$y = e^{\frac{\log N}{(\log\log N)^2}};$$

по следствию 3 теоремы 6, IX при $\sqrt{N} \leqslant x \leqslant N$, за исключением, быть может, «особых» модулей q, которые кратны некоторому q_0,

$$q_0 \geqslant c \log^2 y (\log\log y)^{-8} \geqslant c \log^2 N (\log\log N)^{-12},$$

для остальных справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x;\, q,\, l) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(q)} + O\left(x e^{-c_1(\log\log x)^2}\right).$$

Интеграл J_1 представим в виде суммы двух интегралов:

$$J_1 = J_1' + J_1'',$$

где интегрирование в J_1' ведется по таким α, у которых в представлении (11) $q \leqslant (\log N)^3$ не принадлежат к «особым» модулям, а в J_1'' интегрирование ведется по таким α, у которых в представлении (11) $q \leqslant (\log N)^3$ принадлежат множеству «особых» модулей. Повторяя доказательство теоремы 1 для неособых модулей, будем иметь

$$J_1' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sideset{}{'}\sum_{q \leqslant (\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right), \tag{12}$$

где суммирование в последней сумме ведется по q, не принадлежащим к «особым» модулям,

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

Оценим J''. Возьмем $D = [(\log N)^{30}]$, $A = ND^{-1}$. Тогда

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A < p \leqslant sA} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p} =$$

$$= \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A < p \leqslant sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \cdot e^{2\pi i z s A} + O(|z| AN) =$$

$$= \sum_{s=1}^{D} e^{2\pi i z s A} \sum_{(s-1)A < p \leqslant sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} + O\left(N q^{-1} (\log N)^{-10}\right);$$

отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}=$$

$$=\sum_{s_1,s_2,s_3=1}^{D}e^{2\pi izA(s_1+s_2+s_3-D)}W(s_1,s_2,s_3)+$$

$$+O\left(\left|S\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2Nq^{-1}(\log N)^{-10}\right)+O\left(N^3q^{-3}(\log N)^{-30}\right),$$

где

$$W(s_1,s_2,s_3)=$$

$$=\sum_{(s_1-1)A<p_1\leqslant s_1A}\ \sum_{(s_2-1)A<p_2\leqslant s_2A}\ \sum_{(s_3-1)A<p\leqslant s_3A}e^{2\pi i\frac{a}{q}(p_1+p_2+p_3-N)}.$$

Таким образом, для J_1'' получаем оценку

$$J_1''\ll\sum_{q\leqslant(\log N)^3}''\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{1}{q\tau}\sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\s_1+s_2+s_3=D}}^{D}|W(s_1,s_2,s_3)|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\s_1+s_2+s_3\neq D}}^{D}\frac{1}{|s_1+s_2+s_3-D|A}|W(s_1,s_2,s_3)|\right)+$$

$$+N^2(\log N)^{-10}.$$

Для оценки $|W(s_1,s_2,s_3)|$ применим лемму 7; находим

$$|W(s_1,s_2,s_3)|\ll\left(\frac{A\log\log N}{\sqrt{q}\log N}\right)^3.$$

Далее, число решений уравнения

$$s_1+s_2+s_3-D=\lambda$$

не превосходит D^2, $\lambda\ll D$.

Поэтому

$$J_1''\ll\sum_{q\leqslant(\log N)^3}''\left(\frac{1}{\tau}D^2\frac{A^3(\log\log N)^3}{q^{3/2}(\log N)^3}+\frac{q}{A}D^2\frac{A^3(\log\log N)^4}{q^{3/2}(\log N)^3}\right)+$$

$$+N^2(\log N)^{-10}\ll N^2(\log N)^{-10}+\frac{N^2(\log\log N)^4}{(\log N)^3}\sum_{q\leqslant(\log N)^3}''\frac{1}{\sqrt{q}},$$

причем суммирование в последней сумме ведется по «особым» q. Поэтому

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{1}{\sqrt{q}} \ll \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sum_{m\leqslant(\log N)(\log\log N)^{22}} \frac{1}{\sqrt{m}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{q_0}}\sqrt{\log N}(\log\log N)^6 \ll \frac{(\log\log N)^{12}}{\sqrt{\log N}}.$$

Окончательно получаем

$$J_1'' \ll \frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}. \tag{13}$$

Из определения $\gamma(q)$ и «особых» модулей q следует

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \gamma(q) \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{(\log\log q)^2}{q^2} \ll$$

$$\ll q_0^{-2}(\log\log\log N)^2 \ll (\log N)^{-4}(\log\log N)^{25};$$

из (13) и последней оценки находим

$$J_1'' = \frac{N^2}{2(\log N)^3}\sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}\right).$$

Объединяя полученное выражение для J_1'' с (12), будем иметь асимптотическую формулу для J_1, а следовательно, и для J:

$$J_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3}\sum_{q\leqslant(\log N)^3}\gamma(q) + O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}\right) =$$

$$= \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right);$$

$$J = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right),$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. При фиксированных натуральных числах n, m, k получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$np_1 + mp_2 + kp_3 = N$$

в простых числах p_1, p_2, p_3.

2. Пусть $K(X)$ — число четных чисел, не превосходящих X и не представимых суммою двух простых чисел. Доказать, что при

любом фиксированном $D > 0$

$$K(X) = O(X(\ln X)^{-D}).$$

3. Пусть P — целое положительное число; z пробегает целые числа $z_1, \ldots, z_n$; S' обозначает сумму значений функции $f(z) \geqslant 0$, распространенную на значения z, взаимно простые с P; S_d означает сумму значений функции $f(z)$, распространенную на значения z, кратные d. Тогда при четном $m > 0$ имеем

$$S' \leqslant \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d) S_d.$$

4. а) Пусть $k \leqslant x^{0,9}$, $\ln b = \ln x \cdot (1000 \ln\ln x)^{-1}$; $0 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$. Тогда для числа T чисел вида $kn + l$, $n = 0, 1, \ldots$, не делящихся на простые $\leqslant b$ и не превосходящих x, имеем оценку

$$T \leqslant \frac{cx \ln\ln x}{\varphi(k) \ln x}.$$

б) Пусть $0 < \alpha < 1$, $k \leqslant x^{\alpha}$, $x \geqslant x_0 > 0$. Тогда

$$\pi(x; k, l) \leqslant \frac{cx \ln\ln x}{\varphi(k) \ln x}.$$

5. Доказать, что

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) = c_0 x + O\left(\frac{x(\ln\ln x)^3}{\ln x}\right),$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

6. а) Пусть p — простое число, $(k, p) = 1$, q — простые числа. Тогда существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\sigma = \left| \sum_{q < p^{\gamma}} \left(\frac{q+k}{p}\right) \right| \leqslant cp^{\gamma - \delta},$$

где $\delta = \delta(\gamma) > 0$.

б) При условиях а) число квадратичных вычетов (невычетов) вида $q + k$, $q \leqslant p^{\gamma}$, по модулю p равно

$$\pi(p^{\gamma}) + O(p^{\gamma-\delta}).$$

7. Пусть p — простое число, $(k, p) = 1$; существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что

а) $$\left| \sum_{\substack{n \leqslant p^{\gamma} \\ \mu(n) \neq 0}} \left(\frac{\mu(n) n + k}{p}\right) \right| \leqslant cp^{\gamma-\delta}, \qquad \delta = \delta(\gamma) > 0;$$

б) число квадратичных вычетов (невычетов) вида $\mu(n) n + k$, $\mu(n) \neq 0$, $n \leqslant p^{\gamma}$, по модулю p равно

$$\frac{6}{\pi^2} p^{\gamma} + O(p^{\gamma-\delta}), \qquad \delta = \delta(\gamma) > 0.$$

ГЛАВА XI

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА

В настоящей главе исследуется вопрос о представимости натуральных чисел N суммою фиксированного числа одних и тех же фиксированных степеней натуральных чисел, т. е. вопрос о разрешимости в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N, \tag{1}$$

где $n \geqslant 3$, $k = k(n)$ (проблема Варинга). Проблема Варинга обобщает теорему Лагранжа о том, что каждое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел.

Здесь будут доказаны два утверждения И. М. Виноградова относительно $J_{k,n}(N)$ — числа решений уравнения (1); одно касается асимптотической формулы для $J_{k,n}(N)$, $N \to +\infty$, которая будет получена при числе слагаемых k порядка $n^2 \log n$; отсюда, в частности, следует существование $k = k(n)$, для которого (1) разрешимо в целых неотрицательных числах при любом $N \geqslant 1$; другое утверждение касается оценки сверху наименьшего k как функции n, при котором уравнение (1) разрешимо для всех достаточно больших N; именно, будет доказано существование такого $N_0 = N_0(n)$, что все $N \geqslant N_0$ представляются в виде (1) при числе слагаемых k порядка $n \log n$, и будет доказано существование бесконечной последовательности N, которые непредставимы в виде (1) при $k \leqslant n$.

§ 1. Круговой метод в проблеме Варинга

Пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N.$$

Везде ниже будем предполагать, что натуральное число N больше некоторого фиксированного $N_0 = N_0(n) > 0$, которое зависит только от n, $n \geqslant 3$. Как и при доказательстве леммы 1, X, имеем формулу, выражающую $J_{k,n}(N)$ через интеграл от тригонометрической суммы:

$$J = J_{k,n}(N) = \int_0^1 S^k(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} S^k(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

где теперь

$$S(\alpha) = \sum_{0 < x \leqslant P} e^{2\pi i\alpha x^n}, \quad P = N^{1/n}, \quad \tau = 2nP^{n-1}, \quad \varkappa\tau = 1.$$

По лемме 2, X каждое α из промежутка $[-\varkappa, 1-\varkappa)$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leqslant \frac{1}{q\tau};$$

через E_1 обозначим те α, для которых в последнем представлении $q \leqslant P^{0,25}$, через E_2 обозначим оставшиеся α. Множество E_1 состоит из непересекающихся отрезков $E(a, q)$ вида

$$\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau} \leqslant \alpha \leqslant \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}, \quad 0 \leqslant a < q, \quad (a, q) = 1,$$
$$q = 1, 2, \ldots, [P^{0,25}].$$

Обозначая через J_1 интеграл по множеству E_1, а через J_2 — интеграл по множеству E_2, будем иметь

$$J = J_1 + J_2.$$

Цель настоящего параграфа — получить асимптотическую формулу для J_1. Прежде всего оценим сверху модуль «полной» тригонометрической суммы $S(a, q)$ и модуль тригонометрического интеграла $\gamma(z)$,

$$S(a, q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{ax^n}{q}}, \quad (a, q) = 1;$$

$$\gamma(z) = \int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dx.$$

Лемма 1. *Для* $|S(a, q)|$ *справедливо неравенство*

$$|S(a, q)| \leqslant n^{n^6} q^{1-1/n}.$$

Доказательство. Если $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, то

$$S(a, q) = S(a_1, q_1) S(a_2, q_2).$$

Действительно, выражение $x_1q_2+x_2q_1$ пробегает полную систему вычетов по модулю q, когда x_1 и x_2 пробегают полные системы вычетов по модулям соответственно q_1 и q_2; кроме того,

$$(x_1q_2+x_2q_1)^n \equiv x_1^n q_2^n + x_2^n q_1^n \pmod q.$$

Поэтому

$$S(a, q) = \sum_{x_1=1}^{q_1} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a(x_1q_2+x_2q_1)^n}{q}} =$$

$$= \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{aq_2^{n-1}}{q_1} x_1^n} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{aq_1^{n-1}}{q_2} x_2^n} = S(a_1, q_1)\, S(a_2, q_2),$$

где
$a_1 \equiv aq_2^{n-1} \pmod{q_1}$, $(a_1, q_1)=1$, $a_2 \equiv aq_1^{n-1} \pmod{q_2}$, $(a_2, q_2)=1$.
Отсюда

$$S(a, q) = S(a_1, p_1^{\alpha_1}) \ldots S(a_r, p_r^{\alpha_r}), \qquad (2)$$

где $q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение числа q. Оценим $|S(a, p^\alpha)|$, $\alpha \geqslant 1$, p — простое. Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$S(a, p) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a}{p} x^n} = \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n y^n}{p}}.$$

Так как сравнение $y^n \equiv \lambda \pmod p$, $1 \leqslant y \leqslant p-1$, имеет не более n решений, то

$$|S(a, p)|^2 \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p} y^n} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{p-1} \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p} \lambda} \right|^2 = \frac{n}{p-1} (pK - p^2),$$

где через K обозначено число решений сравнения

$$x_1^n \equiv x_2^n \pmod p, \quad 1 \leqslant x_1, \quad x_2 \leqslant p.$$

Далее, $K \leqslant 1 + n(p-1)$, следовательно,

$$|S(a, p)|^2 \leqslant \frac{n}{p-1} (p - p^2 + np(p-1)) < n^2 p,$$

$$|S(a, p)| < n\sqrt{p}.$$

Пусть теперь $1 < \alpha \leqslant n$, $(n, p) = 1$. Тогда

$$S(a, p^\alpha) = \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{z=1}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{a(yp^{\alpha-1}+z)^n}{p^\alpha}} =$$

$$= \sum_{z=1}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} \sum_{y=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{anz^{n-1}y}{p}} = p \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv 0 \pmod p}}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} = p^{\alpha-1}.$$

Если $\alpha > n$, то, обозначая через τ показатель, с которым p входит в каноническое разложение числа n, будем иметь

$$S(a, p^\alpha) = \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{a(p^{\alpha-\tau-1}y+z)^n}{p^\alpha}} =$$

$$= \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{anz^{n-1}y}{p^{\tau+1}}} = p^{\tau+1} \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv 0 \pmod p}}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} =$$

$$= p^{\tau+1} \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-2}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^{\alpha-n}}} = p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}).$$

Для дальнейших рассуждений введем функцию $T(a, q)$,

$$T(a, q) = q^{-1+1/n} S(a, q).$$

Из полученных оценок $S(a, p^\alpha)$ находим: при $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $(p, n) = p$

$$|T(a, p^\alpha)| = p^{-\alpha(1-1/n)} |S(a, p^\alpha)| \leqslant p^{\alpha/n} \leqslant p \leqslant n;$$

при $\alpha = 1$, $(p, n) = 1$

$$|T(a, p^\alpha)| < p^{-1+1/n} n \sqrt{p} \leqslant np^{-1/6};$$

при $1 < \alpha \leqslant n$, $(p, n) = 1$

$$|T(\alpha, p^\alpha)| = p^{-\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right)} p^{\alpha-1} = p^{\frac{\alpha}{n}-1} \leqslant 1.$$

Таким образом, при $1 \leqslant \alpha \leqslant n$

$$|T(a, p^\alpha)| \leqslant \begin{cases} n, \text{ если } p \leqslant n^6; \\ 1, \text{ если } p > n^6. \end{cases}$$

Последние неравенства справедливы при любом α, так как при $\alpha > n$

$$T(a, p^\alpha) = p^{-\alpha(1-1/n)} p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}) = T(a, p^{\alpha-n}).$$

Из (2) получаем

$$|S(a, q)|\,q^{-1+1/n} = \left|T\left(a_1, p_1^{\alpha_1}\right)\right| \ldots \left|T\left(a_r, p_r^{\alpha_r}\right)\right| \leqslant n^{n^6},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *При* $k \geqslant 2n+1$ *сходится «особый» ряд* $\sigma = \sigma(N)$ *проблемы Варинга:*

$$\sigma = \sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q)\right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}}.$$

Лемма 2. *Для* $|\gamma(z)|$ *справедливо неравенство*

$$|\gamma(z)| \leqslant \min\left(1, 2|z|^{-1/n}\right) = \mathbf{Z}(z).$$

Доказательство. Будем считать $z > 2^n$ и докажем второе утверждение леммы, так как при $0 \leqslant z \leqslant 2^n$ утверждение леммы тривиально. Замена переменной интегрирования $zx^n = u$ дает

$$\int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dx = \frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}} \int_0^z u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du =$$

$$= \frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du + \int_1^z u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du\right).$$

Первый интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\int_0^1 u^{-1+1/n} du = n;$$

второй интеграл, взятый один раз по частям, равен

$$\int_1^z u^{-1+1/n} e^{2\pi i u} du = \frac{1}{2\pi i} u^{-1+1/n} e^{2\pi i u}\Big|_1^z +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_1^z u^{-2+1/n} e^{2\pi i u} du,$$

и по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_1^z u^{-2+1/n} du < \frac{3}{2\pi} < n.$$

Отсюда получаем

$$|\gamma(z)| < 2z^{-1/n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *При $k > n$ сходится «особый» интеграл $\gamma = \gamma(n, k)$ проблемы Варинга:*

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi i z x^n}dx\right)^k e^{-2\pi i z}dz.$$

Теорема 1. *Для величины J_1 при $k \geqslant 2n+1$ справедлива следующая формула:*

$$J_1 = \sigma\gamma N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}}\left(\frac{1}{q}S(a, q)\right)^k e^{-2\pi i\frac{aN}{q}},$$

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi i z x^n}dx\right)^k e^{-2\pi i z}dz.$$

Доказательство. По определению J_1 и свойству множества E_1 имеем

$$J_1 = \sum_{q \leqslant P^{0,25}}\sum_{\substack{0 \leqslant a < \\ (a,q)=1}}\int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} S^k\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}dz.$$

Преобразуем $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$. Представляя x, $1 \leqslant x \leqslant P$, в виде $x = qt + s$, где $s = 1, 2, \ldots, q$, а при фиксированном s переменная t меняется в пределах $\frac{1-s}{q} \leqslant t \leqslant \frac{P-s}{q}$, будем иметь

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)x^n} = \sum_{s=1}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}s^n}\sum_{\frac{1-s}{q} \leqslant t \leqslant \frac{P-s}{q}} e^{2\pi i z(qt+s)^n}.$$

Так как

$$\left|\frac{d}{dt}z(qt+s)^n\right| = \left|nzq(qt+s)^{n-1}\right| \leqslant 1/2,$$

то по следствию к лемме 1. I

$$\sum_{\frac{1-s}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P-s}{q}} e^{2\pi iz(qt+s)^n}=\int\limits_{(1-s)/q}^{(P-s)/q} e^{2\pi iz(qt+s)^n}dt+O(1)=$$

$$=\frac{1}{q}\int\limits_0^P e^{2\pi izx^n}dx+O(1)=\frac{P}{q}\gamma(zN)+O(1).$$

Таким образом,

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{P}{q}S(a,\,q)\,\gamma(zN)+O(q). \tag{3}$$

Из лемм 1 и 2 находим

$$S^k\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}=$$

$$=P^k\gamma^k(zN)\,e^{-2\pi izN}\left(\frac{1}{q}S(a,\,q)\right)^k e^{-2\pi i\frac{aN}{q}}+$$

$$+O\left(P^{k-1}q^{-\frac{k-1}{n}+1}\,\mathbf{Z}^{k-1}(zN)\right)+O(q^k);$$

$$J_1=P^kV+O(R),$$

где

$$V=\sum_{q\leqslant P^{0,25}}\ \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}\left(\frac{1}{q}S(a,\,q)\right)^k e^{-2\pi i\frac{N}{q}}\int\limits_{-1/q\tau}^{+1/q\tau}\gamma^k(zN)\,e^{-2\pi izN}dz,$$

$$R=P^{k-0,75}\int\limits_{-\varkappa}^{+\varkappa}|\gamma(zN)|^k dz+P^{\frac{k+1}{4}-n+1}\leqslant$$

$$\leqslant 2P^{k-0,75}\left(\int\limits_0^{2^nN^{-1}}dz+\int\limits_{2^nN^{-1}}^{\varkappa}2^k(zN)^{-k/n}dz\right)+P^{k-n-1}=$$

$$=O\left(P^{k-n-0,75}\right).$$

Преобразуем V. Прежде всего имеем

$$\int\limits_{-1/q\tau}^{+1/q\tau}\gamma^k(zN)\,e^{-2\pi izN}dz=\frac{1}{N}\int\limits_{-N/q\tau}^{+N/q\tau}\gamma^k(z)\,e^{-2\pi iz}dz=$$

$$=\frac{1}{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma^k(z)\,e^{-2\pi iz}dz+O(R_1)=\frac{1}{N}\gamma+O(R_1),$$

где

$$R_1 \leqslant \frac{1}{N} \int\limits_{N/q\tau}^{\infty} |\gamma(z)|^k dz \leqslant \frac{2^k}{N} \int\limits_{N/q\tau}^{\infty} z^{-\frac{k}{n}} dz = O\left((q\tau)^{\frac{k}{n}-1} P^{-k}\right).$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{N} \gamma \sum_{q \leqslant P^{0,25}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q)\right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}} +$$

$$+ O\left(P^{-n-0,75}\right) = \frac{1}{N} \gamma\sigma + O(R_2) + O\left(P^{-n-0,75}\right),$$

где

$$R_2 \leqslant \frac{1}{N} \sum_{q > P^{0,25}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} |S(a, q)|^k q^{-k} = O\left(P^{-n-1/4n}\right).$$

Окончательно находим

$$V = \frac{1}{N} \gamma\sigma + O\left(P^{-n-1/4n}\right);$$

$$J_1 = \gamma\sigma N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Исследуем $\sigma = \sigma(N)$ и вычислим $\gamma = \gamma(n, k)$.

Лемма 3. *Существует положительная постоянная c, зависящая только от n и k, $c = c(n, k) > 0$, такая, что сингулярный ряд $\sigma = \sigma(N)$ теоремы 1, при $k \geqslant 4n$ больше c, т. е. $\sigma > c > 0$.*

Доказательство. Функция

$$\Phi(q) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 \leqslant a < q}} \left(\frac{S(a, q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

мультипликативна. Действительно, если $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $a = a_1 q_2 + a_2 q_1$, то

$$S(a, q) = \sum_{x_1=1}^{q_1} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a(x_1 q_2 + x_2 q_1)^n}{q}} =$$

$$= \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{a q_2^{n-1} x_1^n}{q_1}} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a q_1^{n-1} x_2^n}{q_2}} = \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{a_1 x_1^n}{q_1}} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a_2 x_2^n}{q_2}};$$

$$\Phi(q) =$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,q_1)=1 \\ 0\leqslant a_1<q_1}} \sum_{\substack{(a_2,q_2)=1 \\ 0\leqslant a_2<q_2}} \left(\frac{S(a_1q_2+a_2q_1)\,q_1q_2}{q_1q_2}\right)^k e^{-2\pi i\left(\frac{a_1N}{q_1}+\frac{a_2N}{q_2}\right)} =$$

$$= \Phi(q_1)\,\Phi(q_2).$$

Далее, так как

$$\Phi(q) \ll q^{-\frac{k}{n}+1}, \qquad (4)$$

то

$$\prod_{p\leqslant X}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots) = \sum_{q\leqslant X}\Phi(q)+R(X),$$

где

$$R(X) \ll \sum_{q\geqslant X}|\Phi(q)| \ll X^{-\frac{k}{n}+2}.$$

Переходя к пределу при $X\to+\infty$ в последнем равенстве, получим

$$\sigma(N) = \prod_p(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots).$$

Заметим, что $\Phi(p^r)$ — действительные числа, $r\geqslant 1$.

Применим еще раз оценку (4):

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty}\Phi(p^r)\right| \leqslant c_1(k,n)\sum_{r=1}^{\infty}p^{-\left(\frac{k}{n}-1\right)r} \leqslant c_2(k,n)\,p^{-3};$$

поэтому при $p>c_2(k,n)$

$$1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots > 1-1/p^2,$$

т. е.

$$\sigma(N) = \left(\prod_{p\leqslant c_2(k,n)}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots)\right)\times$$

$$\times\prod_{p>c_2(k,n)}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{6}{\pi^2}\prod_{p\leqslant c_2(k,n)}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\ldots).$$

Осталось доказать, что каждая скобка последнего произведения больше нуля.

Обозначим $T_k(p^m)$ число решений сравнения

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n \equiv N \pmod{p^m}. \qquad (5)$$

Тогда будем иметь

$$\Phi(p^r) = \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^r}\left(p^{-r}\sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^r}}\right)^k e^{-2\pi i\frac{a}{p^r}N} =$$

$$= p^{-rk}\sum_{a=1}^{p^r}\left(\sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^r}}\right)^k e^{-2\pi i\frac{a}{p^r}N} -$$

$$- p^{-rk+k}\sum_{a=1}^{p^{r-1}}\left(\sum_{x=1}^{p^{r-1}} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^{r-1}}}\right)^k e^{-2\pi i\frac{a}{p^{r-1}}N} =$$

$$= p^{-r(k-1)}T_k(p^r) - p^{-(r-1)(k-1)}T_k(p^{r-1});$$

$$1 + \sum_{r=1}^{m}\Phi(p^r) = p^{-m(k-1)}T_k(p^m). \tag{6}$$

Оценим снизу $T_k(p^m)$ при достаточно большом m. Прежде всего рассмотрим $T_k(p^\gamma)$, где

$$\gamma = \begin{cases}\tau+1, \text{ если } p>2,\ n=p^\tau n_1,\ (n_1,p)=1;\\ \tau+2, \text{ если } p=2,\ n=p^\tau n_1,\ (n_1,p)=1.\end{cases}$$

Докажем, что $T_k(p^\gamma)>0$ при $k\geqslant 4n$, т. е. сравнение (5) имеет решение $x_1^{(0)},\ldots,x_k^{(0)}$, причем такое, что хотя бы одно из $x_j^{(0)}$, $1\leqslant j\leqslant k$, не делится на p. Не ограничивая общности, можно считать $0<N<p^\gamma$, $(N,\ p)=1$, $k=4n-1$.

Если $p=2$, то $p^\gamma=2^{\tau+2}\leqslant 4n$, и нужным решением будет следующий набор чисел:

$$x_1=\ldots=x_N=1,\quad x_{N+1}=\ldots=x_k=0.$$

Пусть $p>2$ и g — первообразный корень по модулю p^γ. Если

$$N\equiv g^\alpha(\operatorname{mod} p^\gamma),\quad N_1\equiv g^\beta(\operatorname{mod} p^\gamma),\quad \alpha\equiv\beta(\operatorname{mod} n),$$

то количество решений сравнения

$$x_1^n+\ldots+x_k^n\equiv N(\operatorname{mod} p^\gamma) \tag{7}$$

совпадает с количеством решений сравнения

$$x_1^n+\ldots+x_k^n\equiv N_1(\operatorname{mod} p^\gamma),$$

так как $\alpha=\beta+n\delta$,

$$(x_1g^\delta)^n+\ldots+(x_kg^\delta)^n\equiv Ng^{\delta n}\equiv N_1(\operatorname{mod} p^\gamma).$$

Обозначим $k(N)$ наименьшее k, при котором (7) имеет нужное решение, и пусть m — число всех различных

$k(N)$. Очевидно, что $m \leqslant n$. Множество всех N разобьем на m классов, относя в один класс числа N_1 и N_2, для которых $k(N_1) = k(N_2)$, и пусть $N_1, N_2, \ldots, N_m$ — наименьшие натуральные представители своих классов, расположенные в порядке возрастания. Докажем, что $k(N_r) \leqslant \leqslant 2r-1$, $r = 1, 2, \ldots, m$. При $r=1$ должно быть $N_1 = 1$, $k(N_1) = 1 \leqslant 2 \cdot 1 - 1$. Если неравенство доказано для $r = = 1, 2, \ldots, h$, то, рассматривая два числа $N_{h+1} - 1$ и $N_{h+1} - 2$, видим, что одно из них не кратно p, меньше N_{h+1} и, следовательно, принадлежит к одному из уже рассмотренных классов, т. е. $k(N_{h+1}) \leqslant 2h - 1 + 2 = 2(h+1) - - 1$, что и требовалось доказать. Итак, $k(N) \leqslant k(N_m) \leqslant \leqslant 2m - 1 \leqslant 2n - 1 < 4n$. Таким образом, сравнение (7) имеет решение $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ такое, что $(x_1^{(0)}, p) = 1$.

Далее, покажем, что если разрешимо сравнение

$$y^n \equiv a (\operatorname{mod} p^\gamma), \tag{8}$$

причем $(y, p) = 1$, то при любом $m > \gamma$ разрешимо сравнение

$$x^n \equiv a (\operatorname{mod} p^m). \tag{9}$$

Пусть y_0 — решение сравнения (8), $(y_0, p) = 1$ и g — первообразный корень по модулю p^m, если $p > 2$; $g = 5$, если $p = 2$. Возьмем натуральное b таким, чтобы

$$g^b y_0^n \equiv a (\operatorname{mod} p^m);$$

тогда

$$g^b \equiv 1 (\operatorname{mod} p^\gamma), \qquad b = p^\tau (p-1) b_1.$$

При произвольном натуральном r рассмотрим выражение

$$b + rp^{m-1}(p-1) = p^\tau (p-1)(b_1 + rp^{m-1-\tau});$$

так как $n = p^\tau n_1$, $(n_1, p) = 1$, то возьмем r таким, чтобы $b_1 + rp^{m-1-\tau}$ делилось на n_1; тогда

$$b_1 + rp^{m-1-\tau} = n_1 h; \quad b + rp^{m-1}(p-1) = nh(p-1);$$

$$g^{b + rp^{m-1}(p-1)} \equiv g^b (\operatorname{mod} p^m); \quad g^{b + rp^{m-1}(p-1)} y_0^n \equiv a (\operatorname{mod} p^m)$$

и $x_0 = y_0 g^{h(p-1)}$ — решение сравнения (9).

Перейдем к оценке снизу $T_k(p^m)$. Рассмотрим сравнение

$$x_1^n + (x_2 + p^\gamma y_2)^n + \ldots + (x_k + p^\gamma y_k)^n \equiv N (\operatorname{mod} p^\gamma),$$
$$1 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_k \leqslant p^\gamma, \quad 1 \leqslant y_2, \ldots, y_k \leqslant p^{m-\gamma}.$$

При $k \geqslant 4n$ оно имеет решение $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ такое, что $(x_1^{(0)}, p) = 1$, т. е. оно имеет

$$p^{(k-1)(m-\gamma)}$$

решений в числах $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y_2, \ldots, y_k$. Но тогда сравнение

$$x_1^n \equiv N - (x_2^{(0)} + p^\gamma y_2)^n - \ldots - (x_k^{(0)} + p^\gamma y_k)^n \pmod{p^m}$$

разрешимо относительно x_1 при любых $y_2, \ldots, y_k$, $1 \leqslant \leqslant y_2, \ldots, y_k \leqslant p^{m-\gamma}$, т. е.

$$T_k(p^m) \geqslant p^{(k-1)(m-\gamma)}.$$

Отсюда и из (6) следует

$$1 + \sum_{r=1}^{m} \Phi(p^r) = p^{-m(k-1)} T_k(p^m) \geqslant p^{-\gamma(k-1)};$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi(p^r) \geqslant p^{-\gamma(k-1)};$$

$$\prod_{p \leqslant c_2(k,n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \ldots) \geqslant \prod_{p \leqslant c_2(k,n)} p^{-\gamma(k-1)} \geqslant$$

$$\geqslant c_3(k, n) > 0;$$

$$\sigma = \sigma(N) > c(k, n) > 0.$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 4. *При $k \geqslant n+1$ справедливо равенство*

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k e^{-2\pi i z} dz = \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Доказательство. Рассмотрим более общий интеграл

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k e^{-2\pi i x z} dz, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Так как

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right| \ll \min\left(1, \frac{1}{|z|^{1/n}}\right),$$

то $g(x)$ сходится абсолютно при $k \geqslant n+1$.

Функция $g(x)$ непрерывна на интервале $0 < x < 2$. Действительно,

$$|g(x+\Delta x) - g(x)| < 4 \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right|^k |\sin \pi \Delta x z| \, dz <$$

$$< 4\pi |\Delta x| \int_0^{|\Delta x|^{-1/3}} z\,dz + 8 \cdot 2^k \int_{|\Delta x|^{-1/3}}^{\infty} z^{-k/n} dz \ll |\Delta x|^{1/3n}.$$

Поэтому $F(c)$, $0 < c < 2$,

$$F(c) = \int_0^c g(x)\,dx,$$

дифференцируема. Далее, при $0 < c \leqslant 1$

$$F(c) = \int_0^c g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k \frac{1 - e^{-2\pi i z c}}{2\pi i z} dz =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 du_1 \ldots du_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i z\left(u_1^n + \ldots + u_k^n\right)} - e^{2\pi i z\left(u_1^n + \ldots + u_k^n - c\right)}}{2\pi i z} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \ldots \int_0^1 du_1 \ldots du_k \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi z \lambda}{z} - \frac{\sin 2\pi z (\lambda - c)}{z} \right) dz,$$

где $\lambda = u_1^n + \ldots + u_k^n$.

Так как $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$, то

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ldots \int_0^1 (\operatorname{sign} \lambda - \operatorname{sign}(\lambda - c))\, du_1 \ldots du_k =$$

$$= \int_{0 \leqslant \lambda \leqslant c} \ldots \int du_1 \ldots du_k.$$

Сделаем замену переменных интегрирования $u_1 = t_1^{1/n} c^{1/n}, \ldots$ $\ldots, u_k = t_k^{1/n} c^{1/n}$; получим интеграл Дирихле (теорема 7, III):

$$F(c) = n^{-k} c^{k/n} \int_{\substack{0 \leqslant t_1 + \ldots + t_k \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t_1, \ldots, t_k \leqslant 1}} \ldots \int t_1^{\frac{1}{n} - 1} \ldots t_k^{\frac{1}{n} - 1} dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= n^{-k} c^{k/n} \frac{\Gamma^k\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n} + 1\right)} = \frac{n}{k} c^{k/n} \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Дифференцируя $F(c)$, найдем $g(c)$:

$$g(c)=c^{\frac{k}{n}-1}\frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(k\,n\right)}.$$

При $c=1$ получаем утверждение леммы.

§ 2. Оценка суммы Г. Вейля и асимптотическая формула в проблеме Варинга

Чтобы получить асимптотическую формулу для $J_{k,n}(N)$, необходимо нетривиально оценить сверху $|J_2|$, а для этого надо уметь оценивать $|S(\alpha)|$ при $\alpha\in E_2$.

Определение. *Суммою Г. Вейля называется тригонометрическая сумма вида*

$$S=S(\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_1)=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, α_ν — *действительные числа*, $\nu=n+1,\ n,\ \ldots,\ 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_{n+1}=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, $|\theta|\leqslant 1$, $P^{1/4}\leqslant q\leqslant P^{n+1-1/4}$, S — *сумма Г. Вейля. Тогда*

$$|S|\leqslant C(n)\,P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}}.$$

Доказательство. Будем применять введенные в лемме 1, VI обозначения, пользоваться леммами 1, 3, 5, 6 гл. VI и теоремой 1, VI. Схема доказательства теоремы близка к схеме доказательства теоремы 2, VI.

Прежде всего при $Y=\left[P^{1-1/n^2}\right]$ имеем

$$S=W+O(Y),$$

где $W=Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x+y)}$. Разложим $f(x+y)$ по степеням x:

$$f(x+y)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+g_1(y)x^n+\ldots+g_n(y)x+g_0(y).$$

При целом $k\geqslant 1$, применяя леммы 3 и 1 гл. VI, находим

$$|W|^{2k}\leqslant Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i(\alpha_{n+1}x^{n+1}+g_1(y)x^n+\ldots)}\right|^{2k}=$$

$$=Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}}J_{k,n+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\times$$

$$\times e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}+g_1(y)\lambda_n+\ldots)} \leqslant$$

$$\leqslant Y^{-1} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}} J_{k,n+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \times$$

$$\times \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}+g_1(y)\lambda_n+\ldots)} \right| =$$

$$= Y^{-1} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\ldots+g_n(y)\lambda_1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant Y^{-1} \sqrt{\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\ldots+g_n(y)\lambda_1)} \right|^2}. \qquad (10)$$

По лемме 1, VI

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant J_{k,n}(0, \ldots, 0) P^{2k}; \qquad (11)$$

по теореме 1, VI при $k \geqslant n\tau$

$$J_{k,n}(0, \ldots, 0) \leqslant (n\tau)^{6n\tau}(2n)^{4n(n+1)\tau} P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}\right)}. \qquad (12)$$

Далее,

$$g_1(y) = (n+1)\alpha_{n+1}y + \alpha_n, \ |\lambda_\nu| < kP^\nu, \ \nu = 1, \ldots, n;$$

поэтому, применяя лемму 4, VI, получим

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\ldots+g_n(y)\lambda_1)} \right|^2 =$$

$$= \sum_{y,y_1=1}^{Y} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_n(n+1)\alpha_{n+1}(y-y_1)+\ldots+\lambda_1(g_n(y)-g_n(y_1)))} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{y,y_1=1}^{Y} \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|((n+1)(y-y_1)\alpha_{n+1})\|}\right) \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant (2k)^{n-1} P^{\frac{n(n-1)}{2}} Y \sum_{y=1}^{(n+1)Y} \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|(\alpha_{n+1}y+\beta)\|}\right). \qquad (13)$$

Наконец, пользуясь леммой 5, VI, найдем оценку последней суммы:

$$\sum_{y=1}^{(n+1)Y} \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|(\alpha_{n+1}y+\beta)\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6\left(\frac{(n+1)Y}{q}+1\right)(2kP^n + q\log q) \leqslant 8knP^{n+0,75}\log P.$$

Из (10)—(13) при $\tau = [4n\log n]+1$, получаем

$$|W| \leqslant c_1(n)\,P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}}; \quad |S| \leqslant c(n)\,P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для числа $J_{k,n}(N)$ представлений натурального N в виде* (1) *при $k \geqslant cn^2\log n$ справедлива асимптотическая формула*

$$J_{k,n}(N) = \gamma\sigma(N)\,N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-\frac{c_1}{n^2}-1}\right),$$

где

$$\gamma = \frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}, \quad \sigma(N) > c_0(n,k) > 0.$$

Доказательство. Применяя круговой метод (см. § 1), будем иметь

$$J = J_{k,n}(N) = J_1 + J_2,$$

где $J_1 = \int\limits_{E_1} S^k(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha, \quad J_2 = \int\limits_{E_2} S^k(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$

Из теоремы 1, лемм 2 и 3 следует

$$J_1 = \gamma\sigma(N)\,N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right).$$

Из теоремы 2 для $\alpha \in E_2$

$$|S(\alpha)| \leqslant c_3(n)\,P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}}.$$

Отсюда, пользуясь обозначениями леммы 1, VI и теоремой 1, VI при $n\tau \leqslant k_1 < k/2$, находим

$$|J_2| \leqslant c_4(n,k)\,P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)} \int\limits_0^1 |S(\alpha)|^{2k_1}d\alpha =$$

$$= c_4(n,k)\,P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}} J_{k_1,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0) \leqslant$$

$$\leqslant (2k)^n c_4(n, k) P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)} P^{2k_1-n+\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}.$$

Возьмем теперь

$$\tau = [4n\log n] + 1 \geqslant 4n\log n,\ k_1 = n\tau,\ k = 2k_1 + 800n^2,$$

получим утверждение теоремы.

§ 3. Оценка $G(n)$

Введем новое удобное при дальнейших исследованиях

Определение. *При $n \geqslant 3$ функция $G(n)$ равняется наименьшему k такому, что любое натуральное $N \geqslant N_0(n)$ представимо суммою k натуральных слагаемых вида x^n.*

Теорема 4. *Для $G(n)$ справедливы оценки*

$$n < G(n) \leqslant cn\log n.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел X вида $X = P^n + P^{n-2}$, $P \geqslant P_0(n)$ — натуральное число. Так как $[X^{1/n}] = P$, то натуральных чисел, не превосходящих X и представимых суммою k натуральных слагаемых вида x^n, не больше

$$P^k \leqslant P^n < X = P^n + P^{n-2},$$

если $k \leqslant n$. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения рассмотрим уравнение

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n + u_1^n + \ldots + u_m^n + u_{m+1}^n + \ldots \\ \ldots + u_{2m}^n = N, \qquad (14)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_{2m}$ — натуральные числа, причем

$$P_1 = \frac{1}{4} N^{1/n} < u_1,\ u_{m+1} < \frac{1}{2} N^{1/n} = 2P_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P_1^{1-1/n} < u_2,\ u_{m+2} < P_1^{1-1/n} = 2P_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_m = \frac{1}{2} P_{m-1}^{1-1/n} < u_m,\ u_{2m} < P_{m-1}^{1-1/n} = 2P_m.$$

Прежде всего

$$4^{-n}N = P_1^n \leqslant u_1^n + \ldots + u_m^n + u_{m+1}^n + \ldots + u_{2m}^n \leqslant$$
$$\leqslant 4(2P_1)^n = 2^{-n+2}N.$$

Далее, уравнение

$$u_1^n + \ldots + u_m^n = u_{m+1}^n + \ldots + u_{2m}^n \qquad (15)$$

имеет только решения вида $u_1 = u_{m+1}$, $u_2 = u_{m+2}$, ..., $u_m = u_{2m}$. Действительно, если, например, $u_s \neq u_{m+s}$, $s < m$, и $u_1 = u_{m+1}$, ..., $u_{s-1} = u_{m+s-1}$, то

$$|u_s^n - u_{m+s}^n| > nP_s^{n-1},$$
$$|u_{s+1}^n + \ldots + u_m^n - u_{m+s+1}^n - \ldots - u_{2m}^n| \leqslant (2P_{s+1})^n = P_s^{n-1},$$

и равенство (15) невозможно.

Пусть $I(N)$ — число решений уравнения (14). Тогда

$$I(N) = \int_0^1 S^k(\alpha)\, T_1^2(\alpha) \ldots T_m^2(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i\alpha x^n}, \qquad P = N^{1/n},$$
$$T_1(\alpha) = \sum_{u_1} e^{2\pi i\alpha u_1^n},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$T_m(\alpha) = \sum_{u_m} e^{2\pi i\alpha u_m^n}.$$

Пользуясь определением множеств E_1, E_2 § 1, будем иметь

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

Оценим $I_2(N)$. По теореме 2 для $\alpha \in E_2$

$$|S(\alpha)| \leqslant c_3(n)\, P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}}, \quad P = N^{\frac{1}{n}}.$$

Поэтому

$$|I_2(N)| \leqslant$$
$$\leqslant c_4(n, k)\, P^{k\left(1 - \frac{1}{800n^2 \log n}\right)} \int_0^1 |T_1(\alpha)|^2 \ldots |T_m(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Последний интеграл равен числу решений уравнения (15), т. е. числу наборов $u_1, \ldots, u_m$, и не превосходит

$$P_1P_2 \ldots P_m \leqslant c_5(n, m)\, N^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Следовательно,

$$|I_2(N)| \leqslant c_4(n, k)\, P_1P_2 \ldots P_m N^{\frac{k}{n}-\frac{k}{800n^3\log n}}.$$

Оценим снизу $I_1(N)$. По определению $I_1(N)$

$$I_1(N) = \sum_{u_1, u_{m+1}} \ldots \sum_{u_m, u_{2m}} \int_{E_1} S^k(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha\left(N-u_1^n-\ldots-u_{2m}^n\right)}\, d\alpha.$$

Но интеграл

$$\int_{E_1} S^k(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha N_1} d\alpha$$

при $\left(1-\frac{4}{2^n}\right)N \leqslant N_1 \leqslant \left(1-\frac{1}{4^n}\right)N$ и $k \geqslant 4n$ вычисляется по теореме 1 (см. также леммы 2 и 3):

$$\int_{E_1} S^k(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha N_1} d\alpha = \gamma\sigma(N_1)\, N_1^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N_1^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant c(k, n)\, N^{\frac{k}{n}-1} - c_1(k, n)\, N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}.$$

Отсюда

$$I_1(N) \geqslant \sum_{u_1, u_{m+1}} \ldots \sum_{u_m, u_{2m}} \left(c(k, n)\, N^{\frac{k}{n}-1} - \right.$$

$$\left. - c_1(k, n)\, N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right) \geqslant 2^{-2m}(P_1P_2 \ldots P_m)^2 c(k, n)\, N^{\frac{k}{n}-1} -$$

$$- c_1(k, n)\,(P_1P_2 \ldots P_m)^2 N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}.$$

Так как

$$P_1P_2 \ldots P_m \geqslant c_6(n, m)\, N^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m},$$

то при $k = 4n$, $m = [c_0 n \log n]$, $N \geqslant N_0(n)$ будем иметь

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N) > 0,$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $p \geqslant 3$, p — простое число, $n_1, \ldots, n_k$ — фиксированные натуральные числа, T — число решений сравнения

$$x_1^{n_1} + \ldots + x_k^{n_k} \equiv \lambda \pmod p.$$

Доказать, что при $\lambda \not\equiv 0 \pmod p$

$$T = p^{k-1} + O(p^{0,5(k-1)}).$$

2. Пусть $p \geqslant 3$ — фиксированное простое число,

$$Q = p^{\alpha}, \quad P \leqslant Q, \quad m = \frac{\log Q}{\log P} \leqslant \sqrt{n}, \quad Q \to +\infty.$$

Доказать, что при любом N сравнение

$$x_1^n + \ldots + x_k^n \equiv N \pmod Q, \quad 1 \leqslant x_1, \ldots, x_k \leqslant P,$$

разрешимо, если $k \geqslant 30m$, и существуют такие N, что при $k < m$ это сравнение не имеет решений.

3. Пусть $1 \leqslant r \leqslant n$, p — простое число, $p > n$, $1 \leqslant P \leqslant p^r$. Тогда для числа T решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n \equiv y_1 + \ldots + y_n \pmod p, \\ x_2^2 + \ldots + x_n^2 \equiv y_1^2 + \ldots + y_n^2 \pmod{p^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \ldots + x_n^n \equiv y_1^n + \ldots + y_n^n \pmod{p^n}, \end{cases}$$

$$1 \leqslant x_1, \ldots, y_n \leqslant P, \quad x_i \not\equiv x_j \pmod p, \quad i \neq j,$$

справедлива оценка

$$T \leqslant n!\, p^{\frac{r(r-1)}{2}} P^n.$$

4. Доказать, что при любом натуральном числе n и $x \geqslant (2n)^2$ на отрезке $[x, 2x]$ лежит по крайней мере n различных простых чисел.

5. Пусть $P > (4n^2)^n$ и $p_1, \ldots, p_n$ — некоторые различные простые числа отрезка $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k, \\ x_1^2 + \ldots + x_k^2 = y_1^2 + \ldots + y_k^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n, \end{cases}$$

$$1 \leqslant x_1, \ldots, \quad y_k \leqslant P,$$

и через J_2 обозначим такие решения этой системы, что для каждого p_j, $j = 1, \ldots, n$, как среди чисел $x_1, \ldots, x_k$, так и среди чисел $y_1, \ldots, y_k$ имеется не более чем $n-1$ не сравнимых по модулю p_j чисел. Доказать, что

$$J_2 \leqslant n^{2kn} P^{k-1}.$$

6. Пусть $k \geqslant n$, $P \geqslant 1$, $J = J(P;\ n,\ k)$ — число решений системы уравнений задачи 5. Тогда существует число p, принадлежащее отрезку $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ и такое, что

$$J = J(P;\ n,\ k) \leqslant 4k^{2n} p^{2k+\frac{n(n-5)}{2}} P^n J(P_1;\ n,\ k-n) + (2n)^{2kn} P^k,$$

где $\quad P_1 = Pp^{-1} + 1.$

7. Пусть τ, n, k — натуральные числа, $\tau \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$. Тогда для числа $J = J(P;\ n,\ k)$ решений системы уравнений задачи 5 справедлива следующая оценка:

$$J = J(P;\ n,\ k) \leqslant n^{2n\Delta(n)} 2^{\varkappa} (8k)^{2n\tau} P^{2k-\Delta(n)},$$

где

$$\Delta(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau},$$

$$\varkappa = n^2\tau + \frac{n(n+1)}{2}\tau - \frac{n^2(n-1)}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}\right) < \frac{3(n+1)^2\tau}{2}.$$

8. Пусть $n \geqslant 2$; построить многочлен $f(x)$ степени n с целыми коэффициентами и такой, что

$$f(x) \equiv 0 \pmod{2^n}, \quad \text{если} \quad x \equiv 0 \pmod 2,$$

$$f(x) \equiv 1 \pmod{2^n}, \quad \text{если} \quad x \equiv 1 \pmod 2.$$

9. Рассмотрим систему сравнений следующего вида (система Гильберта — Камке):

$$\begin{cases} x_1^n + \ldots + x_k^n = N_n, \\ x_1^{n-1} + \ldots + x_k^{n-1} \equiv N_{n-1} \pmod{2^n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad x_1 + \ldots + x_k \equiv N_1. \end{cases}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_k$ — неизвестные, $N_n, \ldots, N_1$ — фиксированные целые. Доказать, что для разрешимости системы необходимо, чтобы k было не меньше, чем наименьший неотрицательный вычет по модулю 2^n числа $a_nN_n + a_{n-1}N_{n-1} + \ldots + a_1N_1$, где $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x$ — многочлен предыдущей задачи.

10. Пусть $n = 2^h$, $h \geqslant 2$ — целое, доказать, что из сравнения $x_1^n + \ldots + x_k^n \equiv 0 \pmod{4n}$, где $k < 4n$, следует, что

$$x_1 \equiv \ldots \equiv x_k \equiv 0 \pmod 2.$$

11. Пусть $96m \geqslant n \geqslant 1024$, $j_1, \ldots, j_m$ — любые целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{3}{16}n < j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant \frac{1}{2}n.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} x_1^{2j_1} + \ldots + x_k^{2j_1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^{2j_1}\right), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{2j_m} + \ldots + x_k^{2j_m} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^{2j_m}\right) \end{cases}$$

с условием, что среди неизвестных этой системы есть нечетные числа. Тогда из ее разрешимости следует, что $k \geqslant 2^u$, $u = n/32$.

12. Говорят, что форма $F = F(x_1, \ldots, x_k)$ от k переменных с целыми коэффициентами тривиально представляет нуль по модулю p, если при некотором натуральном числе M из сравнения $F(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^M}$ следует, что $x_1 \equiv \ldots \equiv x_k \equiv \equiv 0 \pmod{p}$.

Доказать, что для любого натурального числа r, существует такое $n_0 = n_0(r)$, что при любом $n \geqslant n_0$ существует форма $F(x_1, \ldots \ldots, x_k)$ степени, не превосходящей n, с целыми коэффициентами, число переменных которой k,

$$k \geqslant 2^u, \quad u = \frac{n}{(\log_2 n)(\log_2 \log_2 n) \ldots \underbrace{(\log_2 \ldots \log_2 n)}_{r} \underbrace{(\log_2 \ldots \log_2^3 n)}_{r+1}},$$

и тривиально представляющая нуль по модулю 2.

13. а) Пусть p — нечетное простое число, $m \geqslant n/64(p-1)$, $n \geqslant (p-1)^8$, $j_1, \ldots, j_m$ — любые целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{3n}{8(p-1)} < j_1 < \ldots < j_m \leqslant \frac{n}{p-1}.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} x_1^{j_1(p-1)} + \ldots + x_k^{j_1(p-1)} \equiv 0 \left(\bmod\ p^{j_1(p-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{j_m(p-1)} + \ldots + x_k^{j_m(p-1)} \equiv 0 \left(\bmod\ p^{j_m(p-1)}\right) \end{cases}$$

с условием, что среди неизвестных этой системы есть не кратные p. Тогда из ее разрешимости следует, что $k \geqslant p^u$, $u = = n/64(p-1)$.

б) Пусть p — нечетное простое число. Для любого натурального числа r существует такое $n_1 = n_1(r;\ p)$, что при $n \geqslant n_1$ существует форма $F(x_1, \ldots, x_k)$ степени, не превосходящей n, с целыми коэффициентами, число переменных которой k,

$$k \geqslant p^u, \quad u = \frac{n}{(\log_p n)(\log_p \log_p n) \ldots \underbrace{(\log_p \ldots \log_p n)}_{r} \underbrace{(\log_p \ldots \log_p^3 n)}_{r+1}}$$

и тривиально представляющая нуль по модулю p.

14. Пользуясь тем, что при $k \geqslant cn^2 \ln n$ справедлива оценка («упрощенная верхняя граница интеграла И. М. Виноградова»)

$$J = J_{k,n}(P) \leqslant c_1(n) P^{2k - \frac{n^2+n}{2}},$$

доказать следующую теорему:

Пусть $f(x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots + \alpha_1 x$, α_ν — *действительные числа*, $\nu = n+1, \ldots, 1$, $\alpha_{n+1} = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$, $1 \leqslant q \leqslant P^{n+1}$, $(a, q) = 1$,

$|\theta| \leqslant 1$; *тогда*

$$\left|\sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x)}\right| \leqslant c_2(n)\, P\Delta,$$

где $\Delta = \left(\min\left(P,\, P^{n+1}q^{-1},\, q\right)\right)^{-\frac{1}{16cn^2\ln n}}$.

15. а) Найти асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + x^n = N,$$

где $n \geqslant 2$, n фиксировано, p_1, p_2 — простые числа, x — натуральные числа.

б) Найти асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p + x^2 + y^2 + z^n = N,$$

где $n \geqslant 2$, n фиксировано, p — простые числа, x, y, z — натуральные числа.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ГЛАВА I

1. Повторить доказательство теоремы 4, полагая $m = [10(b-a)D]$; вместо асимптотической формулы для I_n, воспользоваться оценкой $I_n \ll \sqrt{A}$.

2. α) Взять в лемме 1 $r = 1$, $\Delta = A^{-1/3}$; для коэффициентов ряда Фурье функции $\psi(x)$ применить оценки

$$|g(m)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{|m|}, & \text{если } 1 \leqslant |m| \leqslant A^{1/3}; \\ \dfrac{1}{|m|^2} A^{1/3}, & \text{если } |m| > A^{1/3}; \end{cases}$$

сумму U_m, $1 \leqslant |m| \leqslant A^{2/3}$,

$$U_m = \sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i m f(x)},$$

оценить, пользуясь результатом задачи 1 (см. также доказательства теорем 6 и 7).

β) Следует из α) и теоремы 1.

3. (*В. Ярник*). Пусть $N \gg 1$, $m = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n)$, $\xi_\nu = l_\nu/k_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, ξ_ν — дроби Фарея, отвечающие N, $K_\nu = \sum_{r=1}^{\nu} k_r$, $L_\nu = \sum_{r=1}^{\nu} l_r$, M_ν — точки на плоскости $X \circ Y$ с координатами K_ν, L_ν, $M_\nu = (K_\nu, L_\nu)$.

Через точки M_ν провести кривую $y = f(x)$ так, чтобы

$$f''(x) \gg 1/N^3, \quad 1 = K_1 \leqslant x \leqslant K_m, \quad K_m \gg N^3,$$

$$0 < f'(x) \ll 1, \quad K_1 \leqslant x \leqslant K_m.$$

(См. также Jarnik V. Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Zeitschrift, 1925, Band. 24, h. 3, 500—518.)

4. Плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = y$, $y = z$, $z = x$ область шара разбивается на 48 равновеликих областей. Рассмотреть одну такую область:

$$0 \leqslant y \leqslant R/\sqrt{3}, \quad y \leqslant x \leqslant \sqrt{(R^2 - y^2)/2}, \quad x \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$$

и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2. (См. также [3], с. 29—39.)

5. α) Следствие теоремы 5;

β) Взять $q = [a^{36/41}t^{-11/41}]$, применить к сумме лемму 3, к новой тригонометрической сумме применить теорему 4, к новой тригонометрической сумме применить теорему 5 при $k = 5$. (См. также [4], с. 117—119).

ГЛАВА II

1. Пусть E — множество тех точек отрезка $[0, 1]$, для которых $|f(x)| \leqslant A$ (следовательно, $\mu(E) = \mu$). Тогда в E найдется n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $|x_k - x_j| \geqslant |k - j| \frac{\mu}{n-1}$. Рассмотреть линейную относительно $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ систему уравнений вида

$$f(x_i) = \theta_i A, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad |\theta_i| \leqslant 1$$

и найти из нее α_j, $|\alpha_j| = \alpha$.

2. Пусть

$$U = \int_0^1 \cos 2\pi f(x)\, dx.$$

Интервал интегрирования разбить на два множества E_1 и E_2: к E_1 отнести те точки, для которых

$$|f'(x)| \leqslant \left(\frac{n-1}{4e}\right)^{1-\frac{1}{n}} \alpha^{-\frac{1}{n}};$$

к E_2 отнести остальные точки. Интеграл по E_1 оценить тривиально, т. е. величиной $\mu(E_1)$; множество E_2 разбить на $\leqslant 2n - 2$ интервала, в каждом из которых $f'(x)$ монотонна и знакопостоянна, рассмотреть интеграл по одному такому интервалу (воспользоваться при этом приемом оценки интеграла, который применялся при доказательстве теоремы 4,I). (См. также [1], с. 27—30.)

3. Доказательство вести индукцией по числу переменных r, пользоваться результатами задач 1 и 2, предварительно представив многочлен $f(x_1, \ldots, x_r)$ в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \ldots \sum_{t_{r-1}=0}^{n} x_1^{t_1} \ldots x_{r-1}^{t_{r-1}} \varphi(x_r).$$

(См. также Чубариков В. Н., О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах, Матем. заметки, 20, № 1, 1976, 61—68.)

4. Предварительно доказать равенство

$$J = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha x^n} (\ln x)^{r-1} dx.$$

5. Как и в задаче 1, выбрать n точек $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих U и таких, что

$$|x_k - x_j| \geqslant |k - j| \frac{\mu}{n-1}, \quad \mu = \mu(U),$$

построить интерполяционный многочлен Лагранжа $g(x)$, отвечающий $f'(x)$ и узлам интерполяции $x_1, \ldots, x_n$,

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu) \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\nu-x_1)\ldots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\ldots(x_\nu-x_n)},$$

и к функции $F(x) = g(x) - f'(x)$ применить последовательно $n-1$ раз теорему Ролля. (См. также Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., Тригонометрические интегралы.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 43, № 5, 1979, 971—1003.)

6. Следует по схеме задачи 2 с использованием задачи 5.

7. Покрытие произвести за $\leqslant n$ шагов, рассматривая последовательно при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ функции

$$\beta_{n-k}(x) = \frac{1}{(n-k)!} f^{(n-k)}(x)$$

и замечая, что при любом $D > 0$ число промежутков, в каждой точке которых выполняется неравенство

$$|\beta_{n-k}(x)| < D,$$

не превосходит k, а число промежутков, в каждой точке которых выполняется неравенство

$$|\beta_{n-k}(x)| \geqslant D,$$

не превосходит $k+1$.

8. Следует из задач 6 и 7.

9. Воспользоваться результатом задачи 8, предварительно оценив сверху объем области $\Omega = \Omega(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ тех точек $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$, где величина H не превосходит P, P — натуральное число; для этого рассмотреть при $r = 1, 2, \ldots, P$ области $\Omega_r = \Omega_r(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ тех точек $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$, где выполняются неравенства

$$\left|\beta_s\left(\frac{r}{P}\right)\right| \leqslant 2^n P^s, \; s = 1, 2, \ldots, n,$$

доказать равенство

$$\mu(\Omega_r) = \int\limits_{\Omega_r}\ldots\int d\alpha_n \ldots d\alpha_1 = 2^{n^2+n} P^{(n^2+n)/2},$$

и, далее, доказать, что каждая точка области Ω принадлежит при некотором r, $1 \leqslant r \leqslant P$, области Ω_r. (Доказательство расходимости θ при $2k \leqslant 0{,}5(n^2+n)+1$, а также обобщения задач 5—9, литературу, см. в статье к задаче 5).

ГЛАВА III

1. См. доказательство теоремы 4.1.

2. Следует из задачи 1.

3. Следует из задачи 2.

4. Воспользоваться задачами 2, 3 и тем, что при $N = 1$ сумма $S = 1$.

(К задачам 1—4 см. также [6], с. 19—24).

5. Если n_1 и m_1 — остатки от деления n и m на p, $0 < n_1 < p$, $0 < m_1 < p$, то по условию $n_1 m_1 = kp$; каждый простой делитель

n_1m_1 меньше p; по предположению индукции он делит k; производя сокращения, получим противоречивое равенство: $1 = k_1 p$.

6. Следует из задачи 5.

7. а) Пусть $0 < a_q = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} |a_j|$, $p^u \| m + q$, $p^v \| k!$; тогда $u \leqslant v$. (См. также Никишин Е. М. О логарифмах натуральных чисел.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 43, № 6, 1979, 1319—1327.)

б) (*В. К. Рыжов*). Следует из тождества

$$((n+2)(n-1)^2)((n-2)(n+1)^2)(n^3) =$$
$$= ((n+2)(n-2)n)((n-1)(n+1)n)^2.$$

8. а) При $k = 1$ по определению $\tau_k(n) \equiv 1$; поэтому

$$\sum_{n \leqslant X} \tau_1(n) \leqslant X.$$

Предполагая справедливость утверждения при $k = m$, докажем его при $k = m + 1$. Так как $\tau_{k+1}(n) = \sum\limits_{d \setminus n} \tau_k(d)$, то

$$\sum_{n \leqslant X} \tau_{k+1}(n) = \sum_{n \leqslant X} \sum_{d \setminus n} \tau_k(d) = \sum_{d \leqslant X} \tau_k(d) \sum_{\substack{n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, d) \\ n \leqslant X}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant X \sum_{d \leqslant X} \frac{\tau_k(d)}{d} = X \left(\int_1^X \left(\sum_{d \leqslant u} \tau_k(d) \right) u^{-2} du + X^{-1} \sum_{d \leqslant X} \tau_k(d) \right) <$$

$$< X \left(\int_1^X \frac{1}{(k-1)!} u^{-1} (\ln u + k - 1)^{k-1} du + \frac{1}{(k-1)!} (\ln X + k - 1)^{k-1} \right) \leqslant$$

$$\leqslant X \left(\frac{1}{k!} (\ln X + k - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!} (\ln X + k - 1)^{k-1} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!} X (\ln X + k)^k,$$

что и требовалось доказать.

б) Как и в а), неравенство доказывается по индукции. При $k = 1$ оно тривиально. Предполагая, что неравенство имеет место при $k = m$, доказать его при $k = m + 1$, пользуясь преобразованием Абеля, неравенством $\tau_k(nr) \leqslant \tau_k(n)\tau_k(r)$ и рассуждениями а) (см. также Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы.— ДАН СССР, 22, № 7, 1939, 391—393).

9. Пусть $F(m, n)$ — произвольная функция натуральных аргументов; тогда

$$\sum_{n \leqslant N} F(1, n) = \sum_{m \leqslant u} \sum_{n \leqslant Nm^{-1}} F(m, n) \sum_{d \setminus m} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d \leqslant u} \sum_{r \leqslant ud^{-1}} \sum_{n \leqslant N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n) =$$

$$= \sum_{d \leqslant u} \sum_{r \leqslant Nd^{-1}} \sum_{n \leqslant N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n) -$$

$$- \sum_{d \leqslant u} \sum_{ud^{-1} < r \leqslant Nd^{-1}} \sum_{n \leqslant N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n);$$

полагая $m = dr$, последнюю кратную сумму перепишем так:

$$\sum_{u<m\leqslant N} \sum_{\substack{d \setminus m \\ d\leqslant u}} \mu(d) \sum_{n\leqslant Nm^{-1}} F(m, n).$$

Если взять теперь

$$F(m, n) = \begin{cases} \Lambda(n) f(nm), & u < n; \\ 0, & u \geqslant n, \end{cases}$$

то получим требуемое:

$$\sum_{u<n\leqslant N} \Lambda(n) f(n) = \sum_{d\leqslant u} \sum_{r\leqslant Nd^{-1}} \sum_{u<n\leqslant N(dr)^{-1}} \mu(d) \Lambda(n) f(n\,dr) -$$

$$- \sum_{u<m\leqslant N} \sum_{\substack{n\leqslant Nm^{-1} \\ u<n}} \left(\sum_{\substack{d\setminus m \\ d\leqslant u}} \mu(d) \right) \Lambda(n) f(nm) = S_1 - S_2,$$

$$S_1 = \sum_{d\leqslant u} \sum_{rd\leqslant N} \sum_{ndr\leqslant N} \mu(d) \Lambda(n) f(n\,dr) -$$

$$- \sum_{d\leqslant u} \sum_{rd\leqslant N} \sum_{\substack{n\leqslant u \\ nrd\leqslant N}} \mu(d) \Lambda(n) f(n\,dr) =$$

$$= \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \sum_{l\leqslant Nd^{-1}} (\log l) f(ld) -$$

$$- \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \sum_{n\leqslant u} \Lambda(n) \sum_{r\leqslant N(dn)^{-1}} f(n\,dr),$$

$$S_2 = \sum_{u<m\leqslant Nu^{-1}} \left(\sum_{\substack{d\setminus m \\ d\leqslant u}} \mu(d) \right) \sum_{u<n\leqslant Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm).$$

(См. также Vaughan R. C. On the distribution of αp modulo 1.— Mathematika, vol. 24, p. 2, № 48, 1977, 135—141.)

ГЛАВА IV

1. При $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\operatorname{Re} s > 1$, производя замену переменной интегрирования $x \longrightarrow x\tau$ (поворот луча интегрирования на угол $\varphi = \arg\tau$) и пользуясь следствием 1 леммы 3, будем иметь (см. также доказательство теоремы 1):

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty (\tau x)^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 \tau x} \right) d(\tau x) = \tau^{\frac{s}{2}} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 \tau x} \right) dx +$$

$$+\tau^{\frac{s}{2}}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2\tau\frac{1}{x}}\right)dx=\tau^{\frac{s}{2}}\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2\tau x}\right)dx-$$

$$-\frac{\tau^{\frac{s}{2}}}{s}-\frac{\tau^{\frac{s}{2}-1}}{1-s}+\tau^{\frac{s}{2}-1}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2\frac{1}{\tau}x}\right)dx;$$

кроме того,

$$\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 x\tau}dx=\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\tau^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2},\ \pi n^2\tau\right);$$

$$\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}e^{-\pi n^2\frac{1}{\tau}x}dx=\tau^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}n^{s-1}\Gamma\left(\frac{1-s}{2},\ \pi n^2\frac{1}{\tau}\right).$$

Отсюда следует утверждение задачи.

2. а) Взять $\tau=1$ и повторить рассуждения доказательства теоремы 1.

б) Взять $\tau=\dfrac{t}{\pi X^2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}\right)}$, $t>0$, соответствующие интегралы оценивать, пользуясь леммой 2, I. (См. также Лаврик А. Ф. Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 32, № 1, 1968, 134—185.)

3. Из функционального уравнения дзета-функции (теорема 1) при $s=\dfrac{1}{2}+it$ следует

$$\pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+it\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\pi^{\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right),$$

т. е.

$$Z(t)=\overline{Z(t)}.$$

4. Следует воспользоваться равенством

$$e^{i2\theta(t)}=\frac{\pi^{-it}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)}$$

и формулой

$$\ln\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s-s+\ln\sqrt{2\pi}+\int_0^\infty\frac{\rho(u)\,du}{u+s}.$$

5. По формуле Лейбница при целом k, $k\geqslant 0$,

$$Z^{(k)}(t)=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{d^r}{dt^r}\left(e^{i\theta(t)}\right)\frac{d^{k-r}}{dt^{k-r}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right).\tag{1}$$

Из задачи 4

$$\frac{d^r}{dt^r}\left(e^{i\theta(t)}\right)=i^r\left(\theta'(t)\right)^r e^{i\theta(t)}+O\left(t^{-1}\right). \tag{2}$$

Из леммы 2 при $0\leqslant m\leqslant k,\ N\geqslant 1$,

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2}+it\right)=(-i)^m\sum_{n=1}^{N}\frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2}+it}}+\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{N^{\frac{1}{2}-it}}{it-\frac{1}{2}}\right)+O\left(\frac{t\ln^m N}{\sqrt{N}}\right).$$

Полагая $N>N_0=t/2\pi$, преобразуем сумму S,

$$S=\sum_{N_0<n\leqslant N}\frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2}+it}},$$

применив к ней следствие леммы 1, I (см. доказательство теоремы 6). Устремляя $N\longrightarrow+\infty$, получим

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2}+it\right)=(-i)^m\sum_{n\leqslant t/2\pi}\frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2}+it}}+O\left(\frac{(\ln t)^m}{\sqrt{t}}\right).$$

Применяя теорему 2, I, доказать соотношение

$$\sum_{\sqrt{\frac{t}{2\pi}}<n\leqslant\frac{t}{2\pi}}\frac{(\ln n)^m}{\sqrt{n}}\,n^{-it}=e^{i\theta_1(t)}\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{\left(\ln\frac{t}{2\pi n}\right)^m}{n^{\frac{1}{2}-it}}+$$
$$+O\left(t^{-1/4}(\ln t)^{m+1}\right),$$

где $\theta_1(t)=-t\ln t+t\ln 2\pi+t+\pi/4$.

Из приближенного функционального уравнения для $\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2}+it\right)$:

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2}+it\right)=(-i)^m\left\{\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2}+it}}+\right.$$
$$\left.+e^{i\theta_1(t)}\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{\left(\ln\frac{t}{2\pi n}\right)^m}{n^{\frac{1}{2}-it}}\right\}+O\left(t^{-1/4}(\ln t)^{m+1}\right),$$

формул (1), (2), следует задача.

6. Взять $\Delta=8H_1^{-1}\ln P$ и сумму S_1 разбить на две:

$$S_1=S_{11}+S_{12},$$

где $\quad S_{11}=\sum\limits_{n\leqslant(1-\Delta)P},\quad S_{12}=\sum\limits_{P\geqslant n>(1-\Delta)P}.$

Для S_{11} имеем

$$S_{11} \ll \sum_{n \leqslant (1-\Delta)P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} \left| \sum_{\nu=0}^{H_1-1} e^{2\pi i \nu \alpha} \right|^r;$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{H_1-1} e^{2\pi i \nu \alpha} \right| \leqslant \min\left(H_1, \frac{1}{\|\alpha\|}\right) \leqslant \frac{H_1}{4}.$$

Для S_{12} имеем

$$S_{12} \ll H_1^r \left| \sum_{P(1-\Delta) < n \leqslant P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} e^{i \frac{\pi \nu}{\ln P} \ln n} \right|,$$

где ν — некоторое целое число с условием $T < \frac{\pi \nu}{\ln P} < T + H$.

После замены переменных и преобразований, приходим к суммам σ, $\sigma(a)$:

$$\sigma = \sum_{m < \Delta P} \frac{\left(-\ln\left(1 - \frac{m}{P}\right)\right)^k}{\sqrt{P-m}} e^{it \ln(P-m)},$$

$$\sigma(a) = \sum_{a < m \leqslant 2a} \frac{\left(-\ln\left(1 - \frac{m}{P}\right)\right)^k}{\sqrt{P-m}} e^{it \ln(P-m)}.$$

Наконец, преобразование Абеля дает

$$\sigma(a) \ll a^k P^{-k-1/2} \left| \sum_{a < m \leqslant a_1} e^{it \ln(P-m)} \right|, \qquad a_1 \leqslant 2a.$$

Последнюю сумму оценим тривиально, если $a \leqslant \sqrt[3]{P}$, и по третьей производной (теорема 5, I), если $a > \sqrt[3]{P}$. Для $|S_1|$ получим

$$|S_1| \ll H_1^r (\ln P)^k \left(T^{1/6} H^{-k-1} \ln^2 T + T^{-1/4} \ln T\right).$$

В $|S_2|$ выделим слагаемое при $n = 1$, а оставшуюся часть оценим так же, как оценивали S_{11}. Получим

$$S_2 = H_1^r (\ln P)^k \left\{1 + O\left(T^{1/4} \left(4H_1^{-1} \ln P\right)^r\right) + O\left(T^{-1/4} \ln T\right)\right\}.$$

7. Следует из задач 5 и 6. (См. также Мозер Я. Об одной теореме Харди — Литтлвуда в теории дзета-функции Римана.— Acta Arithm., 31, 1976, 45—51; Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой.— Труды МИАН, 157, 1981, 49—63.)

1. При $\operatorname{Re} s > 1$ преобразованием Абеля получаем

$$\frac{f(s)}{s} = \int_1^\infty A(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}.$$

Умножить обе части равенства на $x^{s+1}/(s+1)$, проинтегрировать по отрезку $[b+iT,\ b-iT]$ и применить рассуждения теоремы 1. (См. также Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 36, № 3, 1972, 475—483.)

2. Применяя следствие теоремы 6, IV, получаем

$$\int_T^{2T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt \ll \int_T^{2T} \left|\sum_{n\leqslant T} \frac{\tau'(n)}{\sqrt{n}}\, n^{it}\right|^2 dt + 1,$$

где $0 \leqslant \tau'(n) \leqslant \tau(n)$. Последний интеграл оценить, пользуясь рассуждениями, подобными тем, которые применялись при доказательстве теоремы 1, и оценкой

$$\sum_{n\leqslant X} \tau^2(n) \ll X \ln^3 X.$$

3. (*Харди — Литтлвуд*). При $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta^4(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\tau_4(n)}{n^s};$$

применить теорему 1 и задачу 2. (См. также Hardy G. H., Littlewood I. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz.— Proc. London Math. Soc. (2), 21, 1922, 39—74.)

4. По следствию к теореме 5, IV при некотором $c > 0$ в области $2 \leqslant |t| \leqslant T$, $\sigma \geqslant 1 - c/\log T$, выполняется оценка

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T).$$

В этой же области

$$\int_\sigma^{1+\frac{1}{\log T}} d\,(\ln\zeta(u+i\,|t|)) = \ln\zeta\left(1+\frac{1}{\log T}+i\,|t|\right) - \ln\zeta(\sigma+i\,|t|),$$

т. е.

$$|\ln\zeta(\sigma+i\,|t|)| \ll \ln\ln T, \qquad \frac{1}{|\zeta(\sigma+i\,|t|)|} \ll \ln^A |t|.$$

Кроме того, при $b > 1$ по теореме 1

$$\sum_{n\leqslant X} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{X^s}{s}\,ds + O\left(\frac{X^b}{T(b-1)}\right) + O\left(\frac{X\ln X}{T}\right).$$

Далее следует повторить рассуждения теоремы 2.

5. Достаточность. Во-первых, а) и б) следуют одно из другого с помощью преобразования Абеля (см. теорему 2). Далее, при $\operatorname{Re} s > 1$ применяя преобразование Абеля, находим

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \psi(x)\, x^{-s-1}dx = s\int_1^{\infty} x^{-s}dx +$$

$$+ s\int_1^{\infty} R(x)\, x^{-s-1}dx = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{\infty} R(x)\, x^{-s-1}dx,$$

где $R(x) = O(x^{\gamma+\varepsilon})$. Последний интеграл определяет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$. Следовательно, в силу принципа аналитического продолжения, функция $\zeta'(s)/\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ является аналитической во всех точках, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка; отсюда следует, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} s > \gamma$. Если же в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ нет нулей, то а) и б) следуют из теоремы 3 (см. следствие). Утверждение с) следует по схеме решения задачи 4.

6. (*Литтлвуд Д. Е.*) Воспользоваться формулой (преобразование Меллина)

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-w}\Gamma(w)\, dw \qquad (\operatorname{Re} x > 0,\ \alpha > 0)$$

и теоремой 3.

7. Доказать, что при $c > 0$, $T \geqslant 2$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

воспользоваться формулой (2), V, теоремой 3, IV и методом доказательства теоремы 3.

8. а) При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотреть функцию $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{\varphi^s(p)} + \frac{1}{\varphi^s(p^2)} + \ldots\right),$$

которую сравнить с $\zeta(s)$;

б) При $\operatorname{Re} s > 0$ рассмотреть функцию $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s\varphi(n)} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s\varphi(p)} + \frac{1}{p^{2s}\varphi(p^2)} + \ldots\right).$$

9. Следует из теоремы 2.

Замечание. В задачах 8 и 9 получить остаточные члены, отвечающие остаточному члену теоремы 2 (см. также теорему 3, VI).

ГЛАВА VI

1. Повторить доказательство теоремы 2: рассмотреть сумму S,

$$S = \sum_{x=N+1}^{2N} e^{2\pi i m f(x)}, \quad P^{9/10} < N < P,$$

взять $a = [N^{5/11}]$, $r = c_1(\log N)^{\gamma-1}$, разложить функцию $mf(n+xy)$ в ряд Тейлора по степеням xy и оценить (как в теореме 2) двойную сумму W,

$$W = \sum_{x=1}^{a} \sum_{y=1}^{a} e^{2\pi i F(xy)}, \qquad F(xy) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s x^s y^s$$

(нетривиально оценить сумму минимумов для тех s, которые лежат в промежутке $c_2(\log N)^{\gamma-1} < s < c_3(\log N)^{\gamma-1}$, где c_1, c_2, c_3 следует подобрать, пользуясь условиями задачи).

2. Следует из задачи 1 и леммы В, I.

3. Следует из теоремы 2 и теоремы 6, IV (применить преобразование Абеля).

4. К функции $f(s) = \zeta^k(s)$ применить задачу 1, V: для оценки $A(\xi)$ воспользоваться задачей 7, III; взять $\alpha = 1 - (2ck)^{-2/3}$, где $c > 0$ — постоянная задачи 3, $T = X^{1-\alpha}$, и рассмотреть соответствующий интеграл по контуру прямоугольника с вершинами $b + iT$, $\alpha + iT$, $\alpha - iT$, $b - iT$, $(b = 1 + (\log X)^{-1})$; так как $A(\xi)$ — неубывающая функция ξ, то при $h = X^{(\alpha+1)/2}$

$$\frac{1}{h} \int_{X-h}^{X} A(\xi)\, d\xi \leqslant A(X) \leqslant \frac{1}{h} \int_{X}^{X+h} A(\xi)\, d\xi.$$

(См. также Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения.— Труды МИАН, 112, 1971, 241—255, и статью к задаче 1, V).

5. При каждом j, $j = 1, \ldots, N$, построить ε-«стаканчик» точки β_j, т. е. функцию $\varphi_j(x_j) = 0$ при $|x_j - \beta_j| \geqslant \varepsilon$, $\varphi_j(\beta_j) = 1$ (см. лемму А, I), разложить в ряд Фурье $f(x_1, \ldots, x_N) = \varphi_1(x_1) \ldots \ldots \varphi_N(x_N)$ и доказать, что

$$\int_0^T f(\alpha_1 t, \ldots, \alpha_N t)\, dt = T \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N + o(T).$$

6. Рассмотреть две функции комплексного переменного z: $\Phi(X;\, s_0 + z,\, \vec{\theta})$ и $\Phi(X;\, s_0 + z)$, воспользоваться принципом аргумента и задачей 5.

7. Воспользоваться эйлеровским произведением для $\zeta(s)$.

8. Используя соотношение (4), § 1, IV, провести вычисления.

9. Функцию $F\left(\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots, \theta_{p_k}\right)$ можно представить в виде

$$F = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n} e^{2\pi i \theta_{p_n}} + O(1) = L\left(\theta_{p_1}, \ldots, \theta_{p_k}\right) + O(1),$$

причем $O(1)$ является непрерывной функцией аргументов $\theta_{p_1}, \ldots, \theta_{p_k}$.

Множество значений $L\left(\theta_{p_1}, \ldots, \theta_{p_k}\right)$ есть круг ($k > 10$) радиуса

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n}.$$

В силу расходимости ряда $\sum p^{-1}$ (см. задачу 9, V) утверждение задачи является следствием непрерывности F.

10. Воспользовавшись предыдущей задачей, изменить конечное количество $\lambda(p)$ так, чтобы выполнялись пункты а), б), в), г). Справедливость пункта д) проверить методом комплексного интегрирования (см. гл. V).

11. См. указание к решению задачи 9.

12. Используя результаты д) α и д) β задачи 10, применить теорему Лагранжа о конечном приращении.

13. При $X > X_1$ рассмотреть

$$F_2(\bar{\theta}) = \sum_{n \leqslant X} \frac{\lambda'(n)}{n^{\sigma}} + \sum_{\frac{1}{2}X < p \leqslant X} \left(\frac{1}{p^{\sigma}} + \frac{1}{p^{\sigma}} e^{2\pi i \theta_p}\right),$$

и применить задачи 11 и 12.

14. Воспользоваться задачами 13 и 6.

(К задачам 5—14 см. также Воронин С. М. О нулях частных сумм ряда Дирихле дзета-функции Римана.— ДАН СССР 216, № 5, 1974, 964—967).

ГЛАВА VII

1. Для доказательства B применить теорему 1, V и воспользоваться A. Для доказательства A воспользоваться результатом задачи 2, IV, применить преобразование Абеля и B.

2. Необходимость: а) и б) следуют из задачи 1; в) следует из г); для доказательства г) получить предварительно оценку

$$\left|\sum_{n \leqslant X} \tau_k(n) n^{it}\right| \ll \sqrt{X} |t|^{\varepsilon}, \quad 1 \ll X \leqslant |t|^k$$

(см. задачу 1, B); д) следует из теоремы 1, V.

Достаточность. Пусть выполняется а) и пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность чисел $T_j \to +\infty$ такая, что

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + iT_j\right)\right| \geqslant T_j^{\varepsilon_0};$$

из теоремы 6, IV следует, что при $|t - T_j| \leqslant 1/2$.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \zeta\left(\frac{1}{2} + iT_j\right) + O\left(|t - T_j| T_j^{\frac{1}{4}} \ln T_j\right) + O(1),$$

т. е.

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \gg T_j^{\varepsilon_0} \text{ при } |t - T_j| \ll T_j^{-1/4};$$

отсюда

$$\int_1^{2T_j} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \gg T_j^{2k\varepsilon_0-1/4};$$

при $k > 1/\varepsilon_0$ получаем противоречие.

Достаточность б) и в) доказывается аналогично, г) тривиально. Докажем д). При $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} T_k(X)\, X^{-s-1}dX =$$

$$= s\int_1^{\infty} XP_{k-1}(\ln X)\, X^{-s-1}dX + s\int_1^{\infty} R_k(X)\, X^{-s-1}dX = f(s) + g(s);$$

функция $f(s)$ регулярна при любом $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$, $g(s)$ — регулярна при $\operatorname{Re} s > 1/2$; оценивая $|f(s)|$ и $|g(s)|$ при $\operatorname{Re} s \geqslant s_0 > 1/2$, $|t| \geqslant 2$, найдем

$$|\zeta^k(s)| \ll |t|; \quad |\zeta(\sigma + it)| \ll |t|^{1/k}$$

при любом $k \geqslant 2$; отсюда следует, например, б) (см. также [4], с. 324—326).

3. Воспользоваться задачей 2, г) и повторить доказательство теоремы 1.

4. а) Пусть $N > H > 0$, J — число решений неравенства

$$N - p < p' \leqslant N - p + H, \quad p \leqslant N/2,$$

т. е.

$$J = \sum_{p \leqslant \frac{N}{2}} (\psi(N-p+H) - \psi(N-p)) =$$

$$= H\pi\left(\frac{N}{2}\right) - \sum_{p \leqslant \frac{N}{2}} \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{(N-p+H)^{\rho} - (N-p)^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{N^2 \ln N}{T}\right);$$

двойная сумма по абсолютной величине не превосходит ω,

$$\omega = \sum_{p \leqslant N/2} \int_{N-p}^{N-p+H} \left| \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} x^{\rho-1} \right| dx \ll HN^{-1} \int_{N/2}^{N+H} \left| \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} x^{\rho} \right| dx.$$

Последний интеграл оценить, пользуясь неравенством Коши и теоремой 1.

б) Следует из задачи 3 подобно а).

5. Повторить доказательство теоремы 2. (См. также Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха.— Изв. АН СССР, сер. Матем, 16, № 6, 1952, 503—520.)

ГЛАВА VIII

1. Рассмотреть систему n линейных уравнений с $n+1$ неизвестными числами $q_0, q_1, \ldots, q_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 q_n + \alpha_2 q_{n-1} + \ldots + \alpha_{n+1} q_0 = 0, \\ \alpha_2 q_n + \alpha_3 q_{n-1} + \ldots + \alpha_{n+2} q_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n q_n + \alpha_{n+1} q_{n-1} + \ldots + \alpha_{2n} q_0 = 0. \end{cases}$$

2. 1) Пусть $k_1 + \ldots + k_r \geqslant n+1$; не ограничивая общности, можно считать $k_1 + \ldots + k_r = n+1$. Раскрывая скобки, последовательно выберем $b, c, d, \ldots, l, m$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$a_n (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \ldots (x-a_r)^{k_r-1} + b (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \ldots$$
$$\ldots (x-a_r)^{k_r-2} + \ldots + c (x-a_1)^{k_1} + d (x-a_1)^{k_1-1} + \ldots$$
$$\ldots + l (x-a_1) + m \equiv F(x) \pmod p.$$

Из определения следует, что если

$$(x-a) G(x) \equiv 0 \pmod p,$$

то $G(x) \equiv 0 \pmod p$. Полагая, далее, в первом соотношении $x = a_1$, найдем, что $m \equiv 0 \pmod p$; вынося за скобки $x - a_1$ и повторяя такие же рассуждения, последовательно получим $l \equiv 0, \ldots, d \equiv 0, c \equiv 0, \ldots, b \equiv 0$ по модулю p. Наконец, из

$$a_n (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \ldots (x-a_r)^{k_r-1} \equiv (x-a_r)^{k_r} G(x) \pmod p$$

следует, что $a_n \equiv 0 \pmod p$, что противоречит условию задачи. 2) $F(x) \equiv F(x) - F(a) \equiv (x-a) G(x) \pmod p$. 3) Раскладывая $F(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, получаем

$$F(x) \equiv F(x) - F(a) - \frac{F'(a)}{1!}(x-a) - \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{F^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \equiv (x-a)^k G(x) \pmod p.$$

3. (*А. Г. Постников*). Воспользоваться задачей 2. 3) при $k=1$. Далее, если J_1, J_2, J_0 — числа решений сравнений $(f(x))^{(p-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod p$, $-(f(x)^{(p-1)/2}) + 1 \equiv 0 \pmod p$, $f(x) \equiv 0 \pmod p$, то $N_p = 2J_2 + J_0$, а по задаче 2, 1)

$$2J_1 + J_0 \leqslant \text{ст. } g(x) = \frac{3}{2}(p+1), \qquad 2J_2 + J_0 \leqslant \text{ст. } g(x);$$

кроме того, $J_1 + J_2 + J_0 = p$. (См. также П о с т н и к о в а Л. П. Тригонометрические суммы и теория сравнений по простому модулю, уч. пособие МГПИ им. В. И. Ленина, 1973. A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen.— J. reine ang. Math, 1909, 135, 284—305.)

4. Имеем

$$F(x^p) = F(x+H) = a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + \ldots + a_r H^r,$$

где

$$r = \frac{n(p-1)}{2}, \quad a_0 = F(x),$$

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x) = (f(x))^{\frac{p-1}{2}-\nu} B_\nu(x),$$

$$B_\nu = B_\nu(x) = C_r^\nu a^\nu x^{(n-1)\nu} + \ldots, \quad \nu = 1, 2, \ldots, (p-1)/2.$$

Пользуясь задачей 1, найдем многочлен $h(x)$ вида

$$h = h(x) = b_0 + b_1 H + \ldots + b_k H^k$$

и такой, что

$$F(x) h(x) = c_0 + c_1 H + \ldots + c_k H^k + c_{2k+1} H^{2k+1} + \ldots$$

Коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_k$ определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0, \\ 0 = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_{k+1} b_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_k b_k + a_{k+1} b_{k-1} + \ldots + a_{2k} b_0. \end{cases}$$

Последние n уравнений этой системы можно записать так $(f(x) = f)$:

$$\begin{cases} f^k B_1 b_k + f^{k-1} B_2 b_{k-1} + \ldots + B_{k+1} b_0 = 0, \\ f^k B_2 b_k + f^{k-1} B_3 b_{k-1} + \ldots + B_{k+2} b_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^k B_k b_k + f^{k-1} B_{k+1} b_{k-1} + \ldots + B_{2k} b_0 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $b_0, b_1, \ldots, b_k$:

$$b_{k-s+1} = (-1)^s f^{s-1} \begin{vmatrix} B_1 & \ldots & B_{s-1} & B_{s+1} & \ldots & B_{k+1} \\ B_2 & \ldots & B_s & B_{s+2} & \ldots & B_{k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_k & \ldots & B_{s+k-2} & B_{s+k} & \ldots & B_{2k} \end{vmatrix}.$$

Старший одночлен многочлена b_{k-s+1} имеет вид

$$(-1)^s a^{k(k-1)} x^{k(k+1)(n-1)+s-1} \begin{vmatrix} C_r^1 & \ldots & C_r^{s-1} & C_r^{s+1} & \ldots & C_r^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_r^k & \ldots & C_r^{k+s-2} & C_r^{k+s} & \ldots & C_r^{2k} \end{vmatrix}.$$

Степень многочлена $a_s(x)$ равна $\frac{p-1}{2} n - s$, а коэффициент при старшей степени $a_s(x)$ равен $a^{(p-1)/2}$. Степень c_k не превосходит степени $a_s b_{k-s}$, $0 \leqslant s \leqslant k$; но степень $a_s b_{k-s}$ при любом s,

$0 \leqslant s \leqslant k$, равна

$$k(k+1)(n-1)+\frac{p-1}{2}n.$$

Коэффициент при этой степени в многочлене c_k равен $\varkappa$,

$$\varkappa=\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}a^{k(k+1)+\frac{p-1}{2}}\begin{vmatrix} C_r^1 & \dots & C_r^{s-1} & C_r^{s+1} & \dots & C_r^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_r^k & \dots & C_r^{k+s-2} & C_r^{k+s} & \dots & C_r^{2k}\end{vmatrix}=$$

$$=a^{k(k+1)+\frac{p-1}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_r^1 & C_r^2 & \dots & C_r^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_r^k & C_r^{k+1} & \dots & C_r^{2k}\end{vmatrix}.$$

Так как n — нечетное число, $k \leqslant (p-1)/4$, то $\varkappa \not\equiv 0 \pmod p$. Таким образом, многочлен $g(x)$,

$$g(x)=c_0+c_1H+\dots+c_kH^k,$$

имеет степень m по модулю p,

$$m=kp+k(k+1)(n-1)+\frac{p-1}{2}n,$$

и каждый корень $F(x)$ по модулю p, является корнем кратности $2k+1$ многочлена $g(x)$.

5. Будем считать $n \geqslant 3$, $p > 4n^2$. Пусть J_ν — число решений сравнения

$$F_\nu(x)=f^{\frac{p-1}{2}}(x)+(-1)^\nu \equiv 0 \pmod p, \qquad \nu=1,\ 2.$$

Тогда

$$S=\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{f(x)}{p}\right)=J_1-J_2.$$

Возьмем в задаче 4 $k=\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p}-1\right)\right]+1$, применим задачу 2, найдем

$$(2k+1)J_\nu \leqslant m=kp+k(k+1)(n-1)+\frac{p-1}{2}n,$$

$$J_\nu \leqslant \frac{1}{2}p+(n-1)\left(\sqrt{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\right).$$

Кроме того,

$$J_1+J_2 \geqslant p-n.$$

Следовательно,

$$J_2 \geqslant p-n-J_1 \geqslant \frac{1}{2}p-(n-1)\left(\sqrt{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\right)-n;$$

$$|S| \leqslant |J_1-J_2| \leqslant 2(n-1)\left(\sqrt{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\right)+n<2n\sqrt{p}.$$

(К задачам 4—5 см. также Степанов С. А. О числе точек гиперэллиптической кривой над конечным полем.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 33, № 5, 1969, 1171—1181; Коробов Н. М. Оценка суммы символов Лежандра.— ДАН СССР, 96, 4, 1971, 764—767.)

6. При $X < p$ имеем

$$V(X) = \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant X} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) = \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant X} \left(\frac{n}{p} \right) + \theta_1,$$

$$N(X) = \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant X} \left(\frac{n}{p} \right) + \theta_2;$$

из леммы 5, VIII следует задача

7. Невычетами среди чисел 1, 2, ..., Y будут те числа, которые делятся на простые, больше n, т. е.

$$N(Y) \leqslant \sum_{n < p \leqslant Y} \frac{Y}{p} = Y \left(\ln \frac{\ln Y}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n} \right) \right).$$

С другой стороны,

$$N(Y) = \frac{1}{2} Y + o(Y),$$

т. е.

$$\frac{1}{2} + o(1) \leqslant \ln \frac{\ln Y}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n} \right)$$

(см. также Виноградов И. М. Основы теории чисел.— М.: Наука, 1981, с. 113).

8. Имеем

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \left(\sum_{m=1}^{Z} \left(\frac{\lambda + m}{p} \right) \right)^{2k} = \sum_{m_1, \ldots, m_{2k}=1}^{Z} \sum_{\lambda=1}^{p} \left(\frac{(\lambda + m_1) \ldots (\lambda + m_{2k})}{p} \right).$$

Все наборы $(m_1, \ldots, m_{2k})$ разбить на два класса A и B; в класс A отнести те из них, у которых имеется по крайней мере $k+1$ различных значений m_j, в класс B — все остальные. Число наборов класса B не превосходит $k!\, Z^k$. Если набор $(m_1, \ldots, m_{2k})$ принадлежит классу A, $(\lambda + m_1) \ldots (\lambda + m_{2k}) = (\lambda + m_1')^{\alpha_1} \ldots$ $\ldots (\lambda + m_r')^{\alpha_r}$, $m_1', \ldots, m_r'$ — попарно различные числа, то одно из α_j равно 1, и к сумме

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \left(\frac{(\lambda + m_1')^{\alpha_1} \ldots (\lambda + m_r')^{\alpha_r}}{p} \right)$$

применима оценка задачи 5.

9. Взять $k = [(2\varepsilon)^{-1}] + 1$, возвести $|W|$ в степень $2k$, применить неравенство Гёльдера и задачу 8. (См. также Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 35, № 3, 1971, 469—484, лемма 4.)

10. Возьмем $Y = [p^{0,25(1-\varepsilon)}]$, $Z = [p^{0,25\varepsilon}]$, тогда (ср. с доказательством теоремы 2,VI)

$$S = (YZ)^{-1} \sum_{m \leqslant X} \sum_{y \leqslant Y} \sum_{z \leqslant Z} \left(\frac{m+yz}{p}\right) + O\left(Xp^{-\varepsilon}\right);$$

$$W \leqslant (YZ)^{-1} \sum_{m \leqslant X} \sum_{y \leqslant Y} \left| \sum_{z \leqslant Z} \left(\frac{my'+z}{p}\right) \right|,$$

где $yy' \equiv 1 \pmod p$. Далее, при любом $k \geqslant 1$

$$W^k \leqslant (YZ)^{-k} (XY)^{k-1} \sum_{m \leqslant X} \sum_{y \leqslant Y} \left| \sum_{z \leqslant Z} \left(\frac{my'+z}{p}\right) \right|^k =$$

$$= X^{k-1} Y^{-1} Z^{-k} \sum_{\lambda=1}^{p-1} \tau'(\lambda) \left| \sum_{z \leqslant Z} \left(\frac{\lambda+z}{p}\right) \right|^k,$$

где $\tau'(\lambda)$ — число решений сравнения

$$my' \equiv \lambda \pmod p, \qquad m \leqslant X, \quad y \leqslant Y.$$

Применим неравенство Коши:

$$W^{2k} \leqslant X^{2k-2} Y^{-2} Z^{-2k} \sum_{\lambda=1}^{p-1} (\tau'(\lambda))^2 \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left| \sum_{z \leqslant Z} \left(\frac{\lambda+z}{p}\right) \right|^{2k}.$$

Первая сумма в последнем неравенстве равняется числу решений сравнения $my_1 \equiv m_1 y \pmod p$, $m, m_1 \leqslant X$, $y, y_1 \leqslant Y$, которое в свою очередь не превосходит

$$\sum_{\lambda \leqslant XY}' \tau^2(\lambda) = O\left(XY \ln^3 p\right).$$

Ко второй сумме применим задачу 8. Выбирая $k = k(\varepsilon)$, получим утверждение (см. также Burgess D. A. The distribution of quadratic residues and non-residues, Mathematica, 4, 1957, 106—112, Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях.— ДАН СССР, 180, № 6, 1968, 1287—1289).

11. Следует из задач 7 и 10.

12. Следует из леммы гл. VII.

13. (*С. Учияма*). Пусть $0 < \varepsilon < 0{,}01$, $Y = \ln^{2+\varepsilon} X$, $k = \dfrac{(2-\varepsilon)\ln X}{2 \ln\ln X}$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$. Рассмотрим сумму W_m,

$$W_m = \sum_{p \leqslant X} \left(\sum_{q \leqslant Y} \left(\frac{q}{p}\right) \right)^{2m},$$

где m — натуральное число, q и p — простые числа. Имеем

$$W_m = \sum_{p \leqslant X} \left| \sum_{n \leqslant Y^m} \tau_m'(n) \left(\frac{n}{p}\right) \right|^2,$$

где $\tau_m'(n)$ — число решений уравнения $q_1 \ldots q_m = n$ в простых числах $q_j \leqslant Y$, $j = 1, \ldots, m$. Пользуясь формулой (5) и задачей

12, приходим к неравенству

$$W_m \leqslant \sum_{p \leqslant X} \sum_{a=1}^{p-1} \left| \sum_{n \leqslant Y^m} \tau'_m(n) e^{2\pi i \frac{an}{p}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\left(Y^m + X^2\right) \sum_{n \leqslant Y^m} \left(\tau'_m(n)\right)^2 \leqslant c m^m Y^m \left(Y^m + X^2\right).$$

Пусть теперь для M значений p, $p \leqslant X$, выполняется равенство

$$\left| \sum_{q \leqslant Y} \left(\frac{q}{p}\right) \right|^{2k} = (\pi(Y))^{2k}.$$

Тогда из предыдущего неравенства следует такое:

$$M(\pi(Y))^{2k} \leqslant c k^k Y^k \left(Y^k + X^2\right); \qquad M \leqslant c_1 \frac{X}{\ln^{1+\delta} X}, \qquad \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, для $\pi(X) + O\left(\dfrac{X}{\ln^{1+\delta} X}\right)$ значений $p \leqslant X$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{q \leqslant Y} \left(\frac{q}{p}\right) \right| < \pi(Y),$$

т. е. среди чисел $q \leqslant Y$ есть квадратичные вычеты и невычеты по модулю p.

ГЛАВА IX

1. а) Имеем

$$\sum_{Z < n \leqslant N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{Z < n \leqslant N} \frac{1}{n^\sigma} \chi(n) n^{-it} = \sigma \int_Z^N \mathbf{C}(u) u^{-1-\sigma} du + \mathbf{C}(N) N^{-\sigma},$$

где

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{Z < n \leqslant u} \chi(n) n^{-it} = \sum_{l=0}^{k-1} \chi(l) \sum_{(Z-l)k^{-1} < m \leqslant (u-l)k^{-1}} e^{-it \log(mk+l)}.$$

К сумме по m применим следствие леммы 1, I; получим

$$C(u) = \sum_{l=0}^{k-1} \chi(l) \left(\int_z^u x^{-it} dx + O(1) \right) = O(k).$$

Отсюда и из первой формулы при $N \to +\infty$ получим требуемое.

б) Повторить решение задачи 1, IV, заменив $\zeta(s)$ функцией $L(s, \chi)$.

2. Так как χ — примитивный характер по модулю k, то по лемме 3, VIII

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{k} \bar{\chi}(b) e^{2\pi i \frac{bn}{k}}, \qquad |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{k}.$$

Распространяя в нужном месте суммирование на все характеры по модулю k и пользуясь мультипликативностью характера, последовательно получаем

$$\sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{n=M+1}^{M+N} \sum_{m=M+1}^{M+N} a_n \bar{a}_m \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^{k} \bar{\chi}(b) \sum_{\substack{c=1 \\ (c,k)=1}}^{k} \chi(c)\, e^{2\pi i \frac{bn-cm}{k}} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^{k} \sum_{n=M+1}^{M+N} \sum_{m=M+1}^{M+N} a_n \bar{a}_m e^{2\pi i \frac{b(n-m)}{k}} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^{k} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i \frac{bn}{k}} \right|^2.$$

Применяя, далее, задачу 12, VIII, получим требуемое.

3. Применяем преобразование Абеля:

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n)\, n^{-iA} n^{-s_\chi + iA} =$$

$$= (s_\chi - iA) \int_{M+1}^{M+N} \mathrm{C}(u)\, u^{-s_\chi + iA - 1} du + \mathrm{C}(M+N)(M+N)^{-s_\chi + iA},$$

где

$$\mathrm{C}(u) = \sum_{M < n \leqslant u} a_n \chi(n)\, n^{-iA};$$

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n)\, n^{-s_\chi} \right|^2 \leqslant 20 \left(\int_{M+1}^{M+N} |\mathrm{C}(u)|\, u^{-1} du \right)^2 +$$

$$+ 20\, |\mathrm{C}(M+N)|^2 \leqslant 20L \int_{M+1}^{M+N} u^{-1} |\mathrm{C}(u)|^2 du + 20\, |\mathrm{C}(M+N)|^2.$$

Суммируя обе части неравенства по χ и k и пользуясь задачей 2, получим требуемое.

4. Умножим равенство а) задачи 1 на

$$M_X(s, \chi) = \sum_{n \leqslant X} \mu(n)\, \chi(n)\, n^{-s}.$$

Пользуясь свойством функции Мёбиуса, при $s = \rho$ получим

$$0 = 1 + \sum_{X < n \leqslant XY} \frac{a(n)\, \chi(n)}{n^\rho} + \left(\sum_{Y < n \leqslant Z} \frac{\chi(n)}{n^\rho} \right) M_X(\rho, \chi) +$$

$$+ O\left(kZ^{-\sigma} \,|\, M_X(\rho, \chi) \,|\right),$$

где

$$a(n) = \sum_{\substack{d \setminus n \\ nY < d \leqslant \min(X, nX^{-1})}} \mu(d), \quad |a(n)| \leqslant \tau(n).$$

Отсюда утверждение следует тривиально.

5. Пусть $s = \rho$ — нуль $L(s, \chi)$, $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$; возьмем в задаче 4

$$X = B^{\frac{1}{2(3-2\alpha)}}, \quad Y = B^{\frac{3}{2(3-2\alpha)}}, \quad B = Q^2 + QT,$$

$$Z = \begin{cases} B, \text{ если } \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{3}{4}; \\ Y, \text{ если } \frac{3}{4} \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$$

Все рассматриваемые нули всех L-рядов с примитивными характерами χ по модулю $k \leqslant Q$ разделим на четыре класса, относя в первый, второй, третий и четвертый классы нули, для которых выполняется соответственно первое, второе, третье или четвертое неравенство задачи 4 (классы могут пересекаться). Суммируя каждое из неравенств по нулям своего класса, а затем складывая все получившиеся неравенства, приходим к такому соотношению:

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' N(\alpha, T, \chi) \leqslant c_2 \sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{\rho_\chi} (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4).$$

Каждая из сумм справа оценивается подобно сумме задачи 3: нули ρ_χ разбивают на классы, относя в один те, для которых $A \leqslant \operatorname{Im} \rho_\chi < A + 1$, $A = -T, -T+1, \ldots, T-2, T-1$; в одном классе будет $\ll \ln(Q+T)$ нулей, а всех классов $\ll T$; при оценке третьей суммы, еще применяется неравенство Гельдера:

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} \left| \sum_{Y < n \leqslant Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 \right)^{2/3} \times$$

$$\times \left(\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{Y < n \leqslant Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 \right)^{1/3}$$

Все указанные суммы оцениваются одинаково; оценим, например, самую последнюю, т. е. Σ:

$$\Sigma = \sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{Y < n \leqslant Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 =$$

$$= \sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{Y^2 < n \leqslant Z^2} \tau'(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2,$$

где $\tau'(n) \leqslant \tau(n)$, $\rho = \rho_\chi$, $A \leqslant \operatorname{Im} \rho_\chi < A + 1$. Для этого рассмотрим такую сумму W,

$$W = \sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod k}{}' \left| \sum_{N < n \leqslant N_1 \leqslant 2N} \tau'(n) n^{-\alpha} \chi(n) n^{\alpha - \rho} \right|^2;$$

эта сумма соответствует сумме задачи 3, с)

$$a_n = \tau'(n) n^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$W \leqslant c\left(Q^2+N\right) \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-2\alpha}\tau^2(n) \leqslant c_1\left(Q^2+N\right) N^{-2\alpha+1} \ln^3(Q+T).$$

Тем самым

$$\sum \leqslant c_2\left(Q^2 Y^{2(1-2\alpha)} + Z^{4(1-\alpha)}\right) \ln^5(Q+T).$$

После несложных вычислений получим утверждение задачи.

6. а) Из § 1

$$\psi(x;\, k,\, l) - \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \psi(x,\, \chi)\, \overline{\chi}(l) + O\left(\ln^2 x\right);$$

$$\psi(x,\, \chi) = \psi(x,\, \chi_1) + O(\ln^2 x),$$

где χ_1 — примитивный характер по модулю k_1, $k_1 \backslash k$, порожденный характером χ. Отсюда

$$\sigma = \sum_{k\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left|\psi(X;\, k,\, l) - \frac{X}{\varphi(k)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi\neq\chi_0} |\psi(X,\, \chi)| + O\left(\sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \; \sum_{k_1 r\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k_1 r)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} (|\psi(X,\, \chi_1)| +$$

$$+ O(\ln^2 X)) + O\left(\sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}\right);$$

так как

$$\varphi(k_1 r) \geqslant \varphi(k_1)\varphi(r), \quad \varphi(r) > cr(\ln\ln X)^{-1},$$

то

$$\sigma \ll \left(\ln^2 X\right) \sum_{k_1\leqslant\sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k_1)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} |\psi(X,\, \chi_1)| + \sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}.$$

Если $k_1 \leqslant (\ln X)^N$, $N > 0$ — любое фиксированное число, то нужная оценка следует из теоремы 6. Пусть $(\ln X)^N < k_1 \leqslant \leqslant \sqrt{X}(\ln X)^{-B}$. Рассмотрим $\sigma(K)$,

$$\sigma(K) = \sum_{K<k_1\leqslant 2K} \frac{1}{\varphi(k_1)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} |\psi(X,\, \chi_1)|;$$

по теореме 1 при $T = K(\ln X)^{A+10}$

$$|\psi(X,\, \chi_1)| \ll \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T} \frac{|X^\rho|}{|\rho|} + \frac{X}{K(\ln X)^{A+8}}.$$

Теперь оценим такую сумму:

$$\sigma_1 = \sum_{K<k_1\leqslant 2K} \; \sum_{\chi_1 \bmod k_1} \; \sum_{T_1<\mathrm{Im}\,\rho\leqslant 2T_1} X^\sigma,$$

где $\rho = \sigma + it$. Имеем

$$X^{\sigma} = X^{1/2} + (\ln X) \int\limits_{0,5}^{\sigma} X^{\alpha} d\alpha,$$

$$\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leqslant 2T} X^{\sigma} = X^{1/2} N\left(\frac{1}{2}, 2T_1, \chi\right) + (\ln X) \int\limits_{0,5}^{1} X^{\alpha} N(\alpha, 2T_1, \chi)\, d\alpha.$$

Отсюда

$$\sigma_1 \ll (\ln X) \max_{\alpha} X^{\alpha} \sum_{K < k_1 \leqslant 2K} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} N(\alpha, 2T_1, \chi_1).$$

Подставляя в последнюю оценку результат задачи 5, а затем собирая вместе все предыдущие оценки, получим требуемое с $B = A + 2$.

б) Повторить рассуждения а) и в нужном месте воспользоваться следствиями 2 и 3 к теореме 4 и следствием 3 к теореме 6.

(К задачам 2—6 см. также [6], [8], [11], Виноградов А. И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 29, № 4, 1965, 903—934; Bombieri E. On the large sieve, Mathematica, 12, 1965, 201—225.)

7. Пользуясь рассуждениями леммы 3, VIII, доказать, что

$$\mathrm{ind}\,(1 + p^s u) = (p-1) p^{s-1} \gamma, \text{ где } (\gamma, p) = 1.$$

Рассмотреть, далее, функцию f,

$$f(1 + p^s z) = p^s z - \frac{1}{2}(p^s z)^2 + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m} (p^s z)^m,$$

и доказать, что

$$f(1 + p^s z_1) + f(1 + p^s z_2) \equiv f((1 + p^s z_1)(1 + p^s z_2)) \pmod{p^n}.$$

Отсюда и из предыдущего вывести соотношение

$$\mathrm{ind}\,(1 + p^s u) \equiv (p-1) a f(1 + p^s u) \pmod{(p-1)p^{n-1}},$$

где $(a, p) = 1$. (См. также Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 19, 1955, 11—16.)

8. Оценивать так же, как оценивалась дзетовая сумма (теорема 2, VI): взять $s = [0{,}5nr^{-1}]$, $a = [N^{0{,}25}]$, получить неравенство

$$|S| \leqslant a^{-2} N |W| + 2a^2,$$

где

$$W = \sum_{x=1}^{a} \sum_{y=1}^{a} \chi(1 + u p^s xy), \qquad (u, p) = 1.$$

Пользуясь задачей 7, последнюю сумму заменить тригонометрической и дословно повторить доказательство теоремы 2, VI; в соответствующем месте нетривиально оценивать суммы минимумов с индексом m из интервала $0{,}5r < m < 1{,}5r$. (См. также Роз и н С. М. О нулях L-рядов Дирихле.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 23, 1959, 503–508; Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения.— Изв. АН СССР, сер. Матем. 28, № 1, 1964, 237—248; Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа.— Вестник Московского Университета, № 2, 1973, 46—52.)

9. Пусть $\chi \neq \chi_0$; при любом целом $X \geqslant 1$, $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, применяя преобразование Абеля, найдем

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leqslant X} \chi(n) n^{-s} + s \int_X^\infty \mathbf{C}(u) u^{-s-1} du,$$

где

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{n \leqslant u} \chi(n) = O(k);$$

тем самым

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leqslant k} \chi(n) n^{-s} + O((|t|+1) k^{1-\sigma}).$$

Разбивая сумму по n на две, $n \leqslant N$ и $n > N$, применяя в первом случае тривиальную оценку, а во втором — оценку задачи 8, при $N = \exp(\log k)^{2/3}$,

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{(\log k)^{2/3}},$$

найдем

$$L(s, \chi) = O((|t|+1)(\log k)^{2/3}).$$

Далее, при

$$|t| \leqslant \exp((\log \log k)^2)$$

повторить рассуждения теоремы 2, VI с такими параметрами:

$$\sigma_0 = 1 + \frac{4d}{(\log k)^{2/3} (\log \log k)^2}, \quad \sigma = 1 - \frac{d}{(\log k)^{2/3} (\log \log k)^2},$$

$$M = (|t|+1) \frac{\log^2 k}{d}, \quad r = \frac{c_1}{(\log k)^{2/3}}.$$

10. Из задачи 5 при $k = p^n$, $\frac{1}{2} x^\delta < k < x^\delta$, $T = \exp(\ln \ln x)^2$ имеем

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\alpha, T, \chi) \ll T k^{8(1-\alpha)} \ln^{10} x;$$

следовательно,

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} + O(R) + O\left(\frac{x}{T} \ln^3 x\right),$$

где

$$R = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{|\operatorname{Im} \rho_\chi| \leqslant T} \frac{x^{\sigma_\chi}}{|\rho_\chi|}.$$

Пользуясь задачей 9 (см. также доказательство теоремы 2, VII), получаем $(\gamma = 1 - c_1(\ln x)^{-2/3}(\ln\ln x)^{-2})$

$$\sum_{|\operatorname{Im}\rho_\chi|\leqslant T_1} x^{\sigma_\chi} \ll x^{1/2}N\left(\frac{1}{2}, T_1, \chi\right) + (\ln x)\int_{0,5}^{\gamma} x^{\alpha}N(\alpha, T_1, \chi)\,d\alpha,$$

$$\sum_{\chi \bmod k}\ \sum_{|\operatorname{Im}\rho_\chi|\leqslant T_1} x^{\sigma_\chi} \ll x^{1/2}T_1k^4\ln^{10}x + (\ln x)^{11}xT_1\int_{0,5}^{\gamma}\left(\frac{k^8}{x}\right)^{1-\alpha}d\alpha =$$

$$= O\left(T_1 x\exp\left(-\ln^{0,25}x\right)\right).$$

Разбивая сумму в R по ρ_χ на $\ll \ln T$ сумм и применяя последнюю оценку, получим требуемое. (См. также Барбан М. Б., Линник Ю. В., Чудаков Н. Г. On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference, Acta arithm, 9, № 4, 1964, 375—390.)

ГЛАВА X

1. Не ограничивая общности, можно считать $(n, m) = 1$. Повторяя доказательство теоремы И. М. Виноградова о трех простых числах, получим для числа решений I задачи формулу

$$I = \frac{I_0(N)}{\ln^3 N}\sigma + O\left(\frac{N^2}{\ln^{3,4}N}\right),$$

где $I_0(N)$ — число решений в натуральных числах x, y, z уравнения

$$nx + my + kz = N,$$

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty}\gamma(q), \quad \gamma(q) = \frac{\varkappa_n(q)\,\varkappa_m(q)\,\varkappa_k(q)\,\overline{\varkappa_N(q)}}{\varphi^3(q)},$$

$$\varkappa_r(q) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i\frac{ar}{q}}.$$

Так как $\varkappa_r(q)$ — мультипликативная функция, то

$$\sigma = \prod_p\left(1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \ldots\right);$$

кроме того, из-за условия $(n, m) = 1$ получаем, что

$$\gamma(p^s) = 0 \text{ при } s \geqslant 2.$$

Поэтому

$$\sigma = \prod_{p\setminus nmkN}(1 + \gamma(p))\prod_{p\times nmkN}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

2. Пусть a_n — четные числа, $\frac{1}{2}X < a_n \leqslant X$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим уравнение $p_1 + p_2 = a_n$, p_1, p_2 — простые числа. Как

при доказательстве теоремы 1, возьмем $L = \ln X$, $\tau = XL^{-A}$, $\varkappa\tau = 1$, $Q = L^B$, определим множества E_1, E_2 и интегралы I_1, I_2. Получим

$$I = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} S^2(\alpha)\, T(\alpha)\, d\alpha = I_1 + I_2,$$

где I — число решений рассматриваемого уравнения,

$$S(\alpha) = \sum_{p \leqslant X} e^{2\pi i\alpha p}, \quad T(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i\alpha a_n}.$$

По теореме 2

$$I_2 \leqslant \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|\,|T(\alpha)|\, d\alpha \ll$$

$$\ll X\left(L^{-0,5B} + L^{-0,5A}\right) L^3 \sqrt{\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha} =$$

$$= O\left(X^{1,5} N^{0,5}\left(L^{-0,5B} + L^{-0,5A}\right) L^3\right).$$

Далее,

$$I_1 = \sum_{n=1}^{N} J(n),$$

$$J(n) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{(a,q)=1} \int_{-(q\tau)^{-1}}^{(q\tau)^{-1}} S^2\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)a_n} dz.$$

Пользуясь формулой § 2

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m \leqslant X} \frac{e^{2\pi i z m}}{\log m} + O\left(Xe^{-c\sqrt{L}}\right)$$

и проводя такие же рассуждения, получим

$$I_1 = \sum_{n=1}^{N} I(a_n)\,\sigma(a_n) + O\left(XNL^{-B}\right) + O\left(X^{1,5} N^{0,5} L^{-A+B}\right),$$

где

$$I(a_n) = \sum_{n+m=a_n} \frac{1}{\log n \log m},$$

$$\sigma(a_n) = \prod_{p \nmid a_n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid a_n}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right).$$

Отсюда при $A = 2D + 12$, $B = D + 10$, следует требуемое. (См. также Чудаков Н. Г. О проблеме Гольдбаха.— ДАН СССР, 17, № 7, 1937, 331—334.)

3. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение a на простые сомножители, $m < k$, m — четное, тогда

$$\sum_{\substack{d \setminus a \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d) = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \dots + (-1)^m \binom{k}{m} =$$

$$= (-1)^m \left(\binom{k}{m+1} - \binom{k}{m+2} + \dots \right) \geqslant 0;$$

поэтому

$$S' = \sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu) \sum_{d \setminus (z_\nu, P)} \mu(d) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu) \sum_{\substack{d \setminus (z_\nu, P) \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d) = \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d) S_d.$$

4. а) В задаче 3 возьмем $m = 10[\ln \ln x]$, $x \geqslant x_0$,

$$P = \prod_{\substack{p \leqslant b \\ (p,k)=1}} p; \quad \Omega(P) = n.$$

Находим (пользуемся задачей 9, V)

$$T \leqslant \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d) \left(\frac{x}{kd} + \theta_d \right) \leqslant T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \frac{x}{k} \sum_{d \setminus P} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{x}{k} \frac{\prod\limits_{p \leqslant b} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \setminus k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ll \frac{x \ln \ln x}{\varphi(k) \ln x};$$

$$T_2 = \frac{x}{k} \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) > m}} \frac{1}{d} = \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^{n} \sum_{\Omega(d)=r} \frac{1}{d} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^{n} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^r \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^{n} \left(\frac{\ln \ln b + c_1}{r} e \right)^r \leqslant \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^r \ll \frac{x}{\varphi(k) \ln x};$$

$$T_3 = \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) \leqslant m}} 1 = \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r} \leqslant n^m \leqslant e^{m \ln b} \leqslant x^{1/100} \leqslant \frac{x}{\varphi(k) \ln x}.$$

б) Повторить а) с $\ln b = \ln x (c_1 \ln \ln x)^{-1}$, $m = 2[c_2 \ln \ln x]$, где подобрать c_1 и c_2 (в зависимости от α) нужным образом. (См. также [11], с. 53.)

5. Пользуясь определением $\tau(n)$, имеем равенство

$$\sum_{p\leqslant x} \tau(p-1) = 2 \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \pi(x; k, 1) + O\left(\sum_{\substack{p-1=nm\leqslant x\\ n\leqslant\sqrt{x}, m\leqslant\sqrt{x}}} 1\right).$$

Сумму по k разбить на две: при $k \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ применить задачи 6, IX и 8, V, при $\sqrt{x}(\ln x)^{-B} < k \leqslant \sqrt{x}$ воспользоваться предыдущей задачей. Сумму σ под знаком O при $n \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ оценить так:

$$\sigma \leqslant \sum_{r\leqslant x(\ln x)^{-B}} \tau'(r), \text{ где } \tau'(r) \leqslant \tau(r);$$

$$\sigma^2 \leqslant x(\ln x)^{-B} \sum_{r\leqslant x(\ln x)^{-B}} \tau^2(r) \ll x^2 (\ln x)^{-2B+3}.$$

(См. также [11], с. 477.)

6. а) Можно взять, например, любое $\gamma > 1$. Рассмотрим сумму V,

$$V = \sum_{n<p^\gamma} \Lambda(n) \left(\frac{n+k}{p}\right),$$

и применим к ней задачу 8, III с $N = p^\gamma$, $u = \sqrt{N}$; получим

$$V = V_1 - V_2 + O(\sqrt{N} \ln N),$$

где

$$V_1 = \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \sum_{l\leqslant Nd^{-1}} (\log l) \left(\frac{ld+k}{p}\right),$$

$$V_2 = \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \sum_{n\leqslant u} \Lambda(n) \sum_{r\leqslant N(dn)^{-1}} \left(\frac{ndr+k}{p}\right) =$$

$$= \sum_{rn\leqslant u} \Lambda(n) \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \left(\frac{rnd+k}{p}\right) +$$

$$+ \sum_{u<rn\leqslant N} \Lambda(n) \sum_{d\leqslant N(rn)^{-1}} \mu(d) \left(\frac{rnd+k}{p}\right).$$

Разобьем еще последнюю сумму на две, суммируя по r, $r \leqslant u$ и $u < r \leqslant N$. К каждой из четырех образовавшихся сумм применить задачу 9, VIII. Переход к σ осуществляется с помощью преобразования Абеля. б) Следует из а). (См. также Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 34, № 2, 1970, 299—321.)

7. а) и б) следуют, как а) и б) предыдущей задачи.

1. При любом y, $1 \leqslant y \leqslant p-1$, умножая обе части сравнения на y^m, $m = n_1 \dots n_k$, убеждаемся, что оно эквивалентно такому:

$$x_1^{n_1} + \dots + x_k^{n_k} \equiv \lambda y^m \pmod p,$$

т. е.

$$T = \frac{1}{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \sum_{x_1=0}^{p-1} \dots \sum_{x_k=0}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a\left(x_1^{n_1} + \dots + x_k^{n_k} - \lambda y^m\right)}{p}} =$$

$$= p^{k-1} + O\left(p^{0,5(k-1)}\right).$$

2. Рассмотреть сравнение

$$x_1^n + \dots + x_t^n \equiv N_1 \pmod Q, \qquad 1 \leqslant x_1, \dots, x_t \leqslant P.$$

Пусть $W(N_1)$ — число его решений,

$$W(N_1) = Q^{-1} \sum_{a=1}^{Q} S^t(a)\, e^{-2\pi i \frac{aN_1}{Q}} = W_0(N_1) + W_1(N_1);$$

в $W_0(N_1)$ входят слагаемые по a вида

$$a = p^{\alpha - \nu} a_1, \text{ где } (a_1, p) = 1,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \alpha/m,$$

в $W_1(N_1)$ — все остальные. Доказать, что при любом t из промежутка $3 \leqslant t \leqslant n-1$ и любом N_1

$$W_0(N_1) \gg P^t Q^{-1}$$

(пользоваться при этом результатами леммы 1).

Далее, рассмотреть сравнение

$$x_1^n + \dots + x_t^n + u_1 + u_2 + u_0 v^n \equiv N \pmod Q,$$
$$1 \leqslant x_1, \dots, \quad x_t \leqslant P,$$

u_1, u_2 имеют вид u,

$$u = \xi_1^n + \left(p^{2r}\xi_2\right)^n + \dots + \left(p^{2rm_1}\xi_{m_1+1}\right)^n,$$

где $m_1 = [m]$, r — целое число, определяемое условиями $2rn \leqslant \frac{\alpha}{m} < 2(r+1)n$, ξ_ν пробегают целые положительные числа, не кратные p, меньшие $Pp^{-2r(\nu-1)}$ и такие, что ξ_ν^n попарно не сравнимы по модулю p^{2rn}, $\nu = 1, 2, \dots, m_1+1$; числа u_0 имеют вид

$$u_0 = (\zeta_1)^n + \left(p^r\zeta_2\right)^n + \dots + \left(p^{rm_1}\zeta_{m_1+1}\right)^n,$$

где ζ_ν пробегают целые положительные числа, не кратные p, меньшие $\sqrt{P}p^{-r(\nu-1)}$ и такие, что ζ_ν^n попарно не сравнимы по модулю p^{rn}; v принимают значения целых чисел, меньшие $\sqrt{P}$ и не кратные p.

Пусть U, U_0, V — количество чисел u_1, u_0, v и $W(N)$ — число решений нашего сравнения; имеем

$$W(N) = W_0(N) + W_1(N),$$

где

$$W_0(N) \gg P^t Q^{-1} U^2 U_0 V.$$

Далее,

$$W_1(N) \ll P^t \max_{a \in W_1} \left| \sum_{u_0} \sum_v e^{2\pi i \frac{a u_0 v^n}{Q}} \right| Q^{-1} \sum_{a=0}^{Q-1} \left| \sum_u e^{2\pi i \frac{au}{Q}} \right|^2.$$

Первую двойную сумму оценить, пользуясь определением W_1 и неравенством Коши:

$$\left| \sum_{u_0} \sum_v e^{2\pi i \frac{a u_0 v^n}{Q}} \right|^2 \leqslant U_0 \sum_{y=0}^{q-1} \eta(y) \left| \sum_v e^{2\pi i \frac{a_1 y v^n}{q}} \right|^2,$$

где $(a_1, q) = 1$, $\eta(y)$ — число решений сравнения $u_0 \equiv y \pmod q$. Вторая двойная сумма равняется числу решений сравнения $u_1 \equiv u_2 \pmod Q$. После вычислений получим требуемое. (См. также Карацуба А. А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа.— Вестник Московского Университета, сер. 1, № 4, 1962, 28—38.)

3. Прежде всего

$$T \leqslant P^n T_1,$$

где T_1 — число решений такой системы сравнений (при некотором фиксированном наборе чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$):

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n \equiv \lambda_1 \pmod p, \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \equiv \lambda_2 \pmod{p^2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots + x_n^n \equiv \lambda_n \pmod{p^n}, \end{cases}$$

$$1 \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant p^r; \ \ x_i \not\equiv x_j \pmod p, \ \ i \neq j.$$

Представить x_t, $t = 1, 2, \ldots, n$ в виде

$$x_t = x_{1,t} + p x_{2,t} + \ldots + p^{r-1} x_{r,t}.$$

Чтобы $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяли системе, необходимо, чтобы переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$ удовлетворяли системе сравнений

$$x_{1,1}^\nu + \ldots + x_{1,n}^\nu \equiv \lambda_\nu \pmod p, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

а переменные $x_{1,s}, \ldots, x_{1,n}$, $s = 2, \ldots, r$,— своей системе линейных сравнений (при фиксированных $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$)

$$x_{1,s}\left(\nu x_{1,1}^{\nu-1}\right) + \ldots + x_{n,s}\left(\nu x_{1,n}^{\nu-1}\right) \equiv \lambda_{\nu,s} \pmod p, \ \ \nu = s, \ldots, r,$$

где $\lambda_{s,s}, \ldots, \lambda_{r,s}$ — некоторые целые числа.

Число решений первой системы не превосходит $n!$, так как из элементарной теории симметрических функций следует, что при $p > n$ и фиксированных λ_ν все решения этой системы есть перестановки некоторого единственного решения. Матрица коэффициентов каждой из линейных систем сравнений имеет в силу попарной несравнимости переменных x_i по модулю p максимальный ранг, и поэтому число ее решений не превышает величины p^s. Для T' и T получаются оценки

$$T' \leqslant n!p\cdot p^2 \ldots p^{r-1} = n!p^{\frac{r(r-1)}{2}}; \quad T \leqslant n!p^{\frac{r(r-1)}{2}} p^n.$$

4. При $x < 16$ утверждение проверяется непосредственно; пусть $x \geqslant 16$. Имеем

$$\ln (k!) = \sum_{t \leqslant k} \ln t = \sum_{t \leqslant k} \sum_{d|t} \Lambda (d) = \sum_{u \leqslant k} \psi \left(\frac{k}{u}\right);$$

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2};$$

$$A = \ln \binom{2m}{m} = \psi (2m) - \psi \left(\frac{2m}{2}\right) + \psi \left(\frac{2m}{3}\right) - \ldots + \psi \left(\frac{2m}{2m-1}\right).$$

Отсюда

$$\psi (2m) - \psi (m) \leqslant A \leqslant \psi (2m) - \psi (m) + \psi \left(\frac{2}{3} m\right).$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{4m}} \leqslant \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m+1}},$$

методом математической индукции доказать неравенство

$$\psi (x) < x \ln 4.$$

Далее, доказать, что

$$\sum_{m<p\leqslant 2m} \ln p \geqslant \frac{m}{3} \ln 4 - \ln \sqrt{4m} - \sqrt{2m} \ln 4;$$

$$\sum_{m<p\leqslant 2m} 1 \geqslant \frac{m \ln 4}{3 \ln 2m} - 1 - \frac{\sqrt{2m}}{\ln 2m} \ln 4 \geqslant \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Из последнего неравенства получить утверждение задачи.

5. Оценим число наборов $(x_1, \ldots, x_k)$. Пусть p_s — одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$. Для каждого набора $(x_1, \ldots, x_k)$ рассмотрим набор $\left(x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}\right)$, состоящий из остатков от деления на p_s чисел $x_1, \ldots, x_k$:

$$x_i \equiv x_i^{(s)} \pmod{p_s}, \quad 0 \leqslant x_i^{(s)} < p_s, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Количество всех получившихся таким образом наборов не превосходит (при заданном p_s) числа

$$\binom{p_s}{n-1} (n-1)^k.$$

Тем самым для каждого $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ получаем систему сравнений

$$\bar{x} \equiv \bar{x}^{(s)} \pmod{p_s}, \quad \bar{x}^{(s)} = \left(x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}\right), \qquad s = 1, \ldots, n.$$

Эту систему сравнений можно заменить одним сравнением вида

$$\bar{x} \equiv \bar{M} \pmod{p_1 \ldots p_n},$$

где $\bar{M} = (M_1, \ldots, M_k)$ — фиксированный набор чисел, причем $0 \leqslant M_i < p_1 \ldots p_n$, $i = 1, \ldots, k$. Так как каждая координата $\bar{x}$ не превосходит $P < p_1 \ldots p_n$, то последнее сравнение эквивалентно уравнению $\bar{x} = \bar{M}$, т. е. число наборов $(x_1, \ldots, x_k) = \bar{x}$ не превосходит

$$\binom{p_1}{n-1}(n-1)^k \ldots \binom{p_n}{n-1}(n-1)^k.$$

Число наборов $(y_1, \ldots, y_k)$, удовлетворяющих системе уравнений задачи, не превосходит $n! P^{k-n}$.

Отсюда следует, что

$$J_2 \leqslant (n-1)^{kn}\binom{p_1}{n-1} \ldots \binom{p_n}{n-1} n! P^{k-n} \leqslant n^{2kn} P^{k-1}.$$

6. При $P \leqslant (4n^2)^n$ неравенство задачи тривиально. Пусть $P > (4n^2)^n$; по задаче 4 на отрезке $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ лежит n различных простых чисел, пусть это будут $p_1, \ldots, p_n$. Полагая $f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, будем иметь

$$J = J(P; n, k) =$$
$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x_1 \leqslant P} \ldots \sum_{x_k \leqslant P} e^{2\pi i (f(x_1) + \ldots + f(x_k))} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Все наборы $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ разобьем на два класса A и B: набор $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ отнесем к классу A, если среди чисел $p_1, \ldots, p_n$ существует такое p_s, что среди чисел $x_1, \ldots, x_k$ найдется по крайней мере n попарно не сравнимых по модулю p_s чисел; все остальные наборы отнесем к классу B. Получим

$$J = \int_\Omega \left| \sum_{\bar{x} \in A} + \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\Omega \leqslant 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int_\Omega \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\Omega, \quad J_2 = \int_\Omega \left| \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\Omega.$$

Интеграл J_2 оценен в задаче 5. Оценим J_1. Величина J_1 — это число решений системы уравнений задачи 5 при условии, что

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A, \quad \bar{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in A.$$

Все наборы $\bar{x} \in A$ разобьем на n совокупностей $A_1, \ldots, A_n$, относя в одну совокупность те из них, которые отвечают своему $p_s = p$,

$s = 1, \ldots, n$. Получаем

$$J_1 = \int_\Omega \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{\bar{x} \equiv A_s} \right|^2 d\Omega \leqslant n \sum_{s=1}^{n} J_{1,s},$$

где

$$J_{1,s} = \int_\Omega \left| \sum_{\bar{x} \equiv A_s} \right|^2 d\Omega.$$

Далее,

$$J_{1,s} \leqslant \binom{k}{n}^2 \int_\Omega \left| \sum_{x_1, \ldots, x_n}{}' \right|^2 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i f(x)} \right|^{2k-2n} d\Omega,$$

где штрих в первой сумме означает суммирование по наборам $x_1, \ldots, x_n$, которые попарно не сравнимы между собой по модулю $p_s = p$. Разбивая сплошное суммирование во второй сумме на p прогрессий с разностью p и применяя неравенство Гёльдера, последовательно получаем

$$J_{1,s} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n-1} \sum_{y=1}^{p} \int_\Omega \left| \sum_{x_1, \ldots, x_n}{}' \right|^2 \left| \sum_{0 \leqslant z \leqslant Pp^{-1}} e^{2\pi i f(y+pz)} \right|^{2k-2n} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n} \int_\Omega \left| \sum_{x_1, \ldots, x_n}{}'' \right|^2 \left| \sum_{0 \leqslant z \leqslant Pp^{-1}} e^{2\pi i f(pz)} \right|^{2k-2n} d\Omega,$$

где символ Σ'' означает суммирование по всем наборам чисел $x_1, \ldots, x_n$, которые изменяются в пределах от $-y_0$ до $P - y_0$ и попарно не сравнимы по модулю p. Последний интеграл не превосходит величины

$$J(P_1;\, n,\, k-n)\, T,$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$, T — число решений системы сравнений задачи 3. Отсюда уже легко следует неравенство задачи.

7. Провести доказательство индукцией по параметру τ, пользуясь неравенством задачи 6. (К задачам 3—7 см. также Карацуба А. А. О системах сравнений.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 29, № 4, 1965, 935—944; Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 30, № 1, 1966, 183—206; [12], с. 12—29.)

8. Рассмотрим многочлен $F(x)$,

$$F(x) = \frac{x}{1!} - 2\,\frac{x(x-1)}{2!} + \ldots \pm 2^{n-1}\,\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} \equiv$$

$$\equiv 2^{-1}\left(1 + (1-2)^{x+1}\right) \pmod{2^n}.$$

Из определения $F(x)$ следует, что

$$F(x) \equiv 0 \pmod{2^n}, \quad \text{если} \quad x \equiv 0 \pmod 2;$$

$$F(x) \equiv 1 \pmod{2^n}, \quad \text{если} \quad x \equiv 1 \pmod 2.$$

Так как максимальная степень 2, на которую делится $n!$ равна $n-1$, то все знаменатели коэффициентов многочлена $F(x)$ —

нечетные; следовательно, существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами $a_n, \ldots, a_2, a_1 = 1$ и такой, что при всех x

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{2^n}.$$

9. Умножая первое, второе, ..., последнее сравнение на a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$ и складывая, получим

$$f(x_1) + \ldots + f(x_k) \equiv a_n N_n + \ldots + a_1 N_1 \equiv l \pmod{2^n}, \quad 0 \leqslant l < 2^n.$$

В силу свойства $f(x)$ следует, что

$$l \equiv k_1 \pmod{2^n},$$

где k_1 есть число нечетных неизвестных среди $x_1, \ldots, x_k$. Отсюда $k \geqslant k_1 \geqslant l$.

(К задачам 8—9 см. также Архипов Г. И. О значении особого ряда в проблеме Гильберта — Камке.— ДАН СССР, 259, № 2, 1981, 265—267.)

10. Если x — нечетное число, то при $n = 2^k$ выполняется сравнение

$$x^n \equiv 1 \pmod{4n}.$$

Отсюда следует утверждение задачи.

11. Не ограничивая общности, можно считать все $x_1, \ldots, x_k$ нечетными числами. Представляя каждое x_j, $j = 1, \ldots, k$, в виде $x_j \equiv \pm 5^{\alpha_j} \pmod{2^n}$, определим многочлен $f(t)$ равенством $f(t) = t^{\alpha_1} + \ldots + t^{\alpha_k}$. Докажем, что

$$k = f(1) \equiv 0 \pmod{2^u}.$$

Из определения $f(t)$ следует, что

$$f\left(5^{2^{j_\nu}}\right) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^{2^{j_\nu}}\right), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Представим $f(t)$ в виде

$$f(t) = a_0 + a_1\left(t - 5^{2^{j_m}}\right) + a_2\left(t - 5^{2^{j_m}}\right)\left(t - 5^{2^{j_{m-1}}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-1}\left(t - 5^{2^{j_m}}\right)\left(t - 5^{2^{j_{m-1}}}\right)\ldots\left(t - 5^{2^{j_2}}\right) +$$
$$+ g(t)\left(t - 5^{2^{j_m}}\right)\left(t - 5^{2^{j_{m-1}}}\right)\ldots\left(t - 5^{2^{j_2}}\right)\left(t - 5^{2^{j_1}}\right),$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ — целые числа $\left(a_0 = f\left(5^{2^{j_m}}\right)\right.$, a_1 равняется частному от деления $f\left(5^{2^{j_{m-1}}}\right) - a_0$ на $5^{2^{j_{m-1}}} - 5^{2^{j_m}}$, и т. д. $\Big)$, $g(t)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Далее,

$$\varphi(t) = a_0 + a_1\left(t - 5^{2^{j_m}}\right) + a_2\left(t - 5^{2^{j_m}}\right)\left(t - 5^{2^{j_{m-1}}}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{m-1}\left(t - 5^{2^{j_m}}\right)\left(t - 5^{2^{j_{m-1}}}\right)\ldots\left(t - 5^{2^{j_2}}\right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{m} c_s \frac{(t - t_1)\ldots(t - t_{s-1})(t - t_{s+1})\ldots(t - t_m)}{(t_s - t_1)\ldots(t_s - t_{s-1})(t_s - t_{s+1})\ldots(t_s - t_m)},$$

где $t_s = 5^{2^{j_s}}$, $c_s = \varphi(t_s) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^{2^{j_s}}\right)$, $s = 1, 2, \ldots, m$. **Если** через $\delta(v)$ обозначить наибольшую степень 2, делящую v, то $\delta(5^a - 1) = \delta(a) + 2$, $\delta(a!) = \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{a}{2^2}\right] + \ldots$ и, следовательно,

$$\delta\left(c_s \frac{(1-t_1)\ldots(1-t_{s-1})(1-t_{s+1})\ldots(1-t_m)}{(t_s-t_1)\ldots(t_s-t_{s-1})(t_s-t_{s+1})\ldots(t_s-t_m)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2j_s - \delta(j_1 - j_s) - \ldots - \delta(j_{s-1} - j_s) -$$

$$- \delta(j_{s+1} - j_s) - \ldots - \delta(j_m - j_s) \geqslant$$

$$\geqslant 2j_s + j_1 - j_m - \log_2(j_s - j_{s-1})(j_{s+1} - j_s) \geqslant \frac{n}{32}.$$

Кроме того,

$$\delta\left(g(1)\left(1 - 5^{2^{j_m}}\right)\left(1 - 5^{2^{j_{m-1}}}\right)\ldots\left(1 - 5^{2^{j_1}}\right)\right) \geqslant 3m \geqslant n/32.$$

12. Форму, тривиально представляющую нуль по модулю 2, назовем *особой*. Доказать, что если F — особая форма, то при любом $m \geqslant 1$ найдется N такое, что из сравнения

$$F = F(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^N)$$

следует

$$x_1 \equiv \ldots \equiv x_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^m).$$

Пусть теперь при натуральном k величина $\varkappa(k)$ равняется наименьшей из степеней n таких, что существует особая форма F степени n от k переменных. Из задачи 10 следует неравенство

$$\varkappa(k) \leqslant \frac{1}{4}(k+1).$$

Далее, доказать, что $\varkappa(k) \leqslant \varkappa(k+1)$.

Пусть теперь $n = 4t$, t — натуральное число, $F(y_0, y_1, \ldots, y_{t-1})$ — особая форма степени $\varkappa(t)$,

$$G(x_1, \ldots, x_k) = F(y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}),$$

где

$$y_j = s_{2j} \cdot s_{n-2j}, \quad j = 0, 1, \ldots, t-1,$$

$$s_\nu = x_1^\nu + \ldots + x_k^\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n; \quad s_0 = 1.$$

Степень формы G равна $n\varkappa(t)$. Так как форма F — особая, то при некотором N из сравнения

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^N)$$

следует, что

$$y_0 \equiv y_1 \equiv \ldots \equiv y_{t-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^{2n}),$$

т. е. найдутся числа $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t = 2t$ с условием

$$s_{2j_1} \equiv \ldots \equiv s_{2j_t} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^n\right).$$

Из задачи 11 следует, что $\varkappa(k) \leqslant n\varkappa(t)$, если только $k < 2^u$, $u = n/32$.

Отсюда по индукции доказать неравенство

$$\varkappa(k) < c(\log_2 k)(\log_2\log_2 k)\ldots(\underbrace{\log_2\ldots\log_2}_{r+1} k)(\underbrace{\log_2\ldots\log_2^3}_{r+2} k),$$

из которого следует утверждение задачи.

13. Решается так же, как решались задачи 11—12.

(К задачам 11—13 см. также А р х и п о в Г. И., К а р а ц у б а А. А. О локальном представлении нуля формой.— Изв. АН СССР, сер. Матем., **45**, № 5, 1981, 948—961. А р х и п о в Г. И., К а р а ц у б а А. А. Об одной задаче теории сравнений.— УМН, 37, вып 5, 1982, 161—162.)

14. Повторить доказательство теоремы 2, XI. (См. также [1], 44—72; К а р а ц у б а А. А. Среднее значение модуля тригонометрической суммы.— Изв. АН СССР, сер. Матем., **37**, № 6, 1973, 1203—1227).

15. а) Повторить решение задачи 2, X. Интеграл I_2 оценить, пользуясь задачей 14. Главный член будет иметь вид

$$\sum_{x<P} I(N-x^n)\,\sigma(N-x^n), \qquad P=\sqrt[n]{N},$$

где

$$I(N-x^n)=\sum_{m+m_1=N-x^n}\frac{1}{\log m\log m_1},$$

$$\sigma(N-x^n)=\prod_{p\nmid N-x^n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\mid N-x^n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

(См. также E s t e r m a n n T. Proof that every large integer is the sum of two primes and a square. Proc. London math. Soc., **11**, 1937, 501—516.)

б) Повторить решение а), пользуясь результатами § 1, XI.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ < 4070 И ИХ НАИМЕНЬШИХ ПЕРВООБРАЗНЫХ КОРНЕЙ

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
2	1	127	3	283	3	467	2	661	2	877	2	1087	3
3	2	131	2	293	2	479	13	673	5	881	3	1091	2
5	2	137	3	307	5	487	3	677	2	883	2	1093	5
7	3	139	2	311	17	491	2	683	5	887	5	1097	3
11	2	149	2	313	10	499	7	691	3	907	2	1103	5
13	2	151	6	317	2	503	5	701	2	911	17	1109	2
17	3	157	5	331	3	509	2	709	2	919	7	1117	2
19	2	163	2	337	10	521	3	719	11	929	3	1123	2
23	5	167	5	347	2	523	2	727	5	937	5	1129	11
29	2	173	2	349	2	541	2	733	6	941	2	1151	17
31	3	179	2	353	3	547	2	739	3	947	2	1153	5
37	2	181	2	359	7	557	2	743	5	953	3	1163	5
41	6	191	19	367	6	563	2	751	3	967	5	1171	2
43	3	193	5	373	2	569	3	757	2	971	6	1181	7
47	5	197	2	379	2	571	3	761	6	977	3	1187	2
53	2	199	3	383	5	577	5	769	11	983	5	1193	3
59	2	211	2	389	2	587	2	773	2	991	6	1201	11
61	2	223	3	397	5	593	3	787	2	997	7	1213	2
67	2	227	2	401	3	599	7	797	2	1009	11	1217	3
71	7	229	6	409	21	601	7	809	3	1013	3	1223	5
73	5	233	3	419	2	607	3	811	3	1019	2	1229	2
79	3	239	7	421	2	613	2	821	2	1021	10	1231	3
83	2	241	7	431	7	617	3	823	3	1031	14	1237	2
89	3	251	6	433	5	619	2	827	2	1033	5	1249	7
97	5	257	3	439	15	631	3	829	2	1039	3	1259	2
101	2	263	5	443	2	641	3	839	11	1049	3	1277	2
103	5	269	2	449	3	643	11	853	2	1051	7	1279	3
107	2	271	6	457	13	647	5	857	3	1061	2	1283	2
109	6	277	5	461	2	653	2	859	2	1063	3	1289	6
113	3	281	3	463	3	659	2	863	5	1069	6	1291	2

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
1297	10	1559	19	1823	5	2089	7	2371	2	2663	5	2909	2
1301	2	1567	3	1831	3	2099	2	2377	5	2671	7	2917	5
1303	6	1571	2	1847	5	2111	7	2381	3	2677	2	2927	5
1307	2	1579	3	1861	2	2113	5	2383	5	2683	2	2939	2
1319	13	1583	5	1867	2	2129	3	2389	2	2687	5	2953	13
1321	13	1597	11	1871	14	2131	2	2393	3	2689	19	2957	2
1327	3	1601	3	1873	10	2137	10	2399	11	2693	2	2963	2
1361	3	1607	5	1877	2	2141	2	2411	6	2699	2	2969	3
1367	5	1609	7	1879	6	2143	3	2417	3	2707	2	2971	10
1373	2	1613	3	1889	3	2153	3	2423	5	2711	7	2999	17
1381	2	1619	2	1901	2	2161	23	2437	2	2713	5	3001	14
1399	13	1621	2	1907	2	2179	7	2441	6	2719	3	3011	2
1409	3	1627	3	1913	3	2203	5	2447	5	2729	3	3019	2
1423	3	1637	2	1931	2	2207	5	2459	2	2731	3	3023	5
1427	2	1657	11	1933	5	2213	2	2467	2	2741	2	3037	2
1429	6	1663	3	1949	2	2221	2	2473	5	2749	6	3041	3
1433	3	1667	2	1951	3	2237	2	2477	2	2753	3	3049	11
1439	7	1669	2	1973	2	2239	3	2503	3	2767	3	3061	6
1447	3	1693	2	1979	2	2243	2	2521	17	2777	3	3067	2
1451	2	1697	3	1987	2	2251	7	2531	2	2789	2	3079	6
1453	2	1699	3	1993	5	2267	2	2539	2	2791	6	3083	2
1459	5	1709	3	1997	2	2269	2	2543	5	2797	2	3089	3
1471	6	1721	3	1999	3	2273	3	2549	2	2801	3	3109	6
1481	3	1723	3	2003	5	2281	7	2551	6	2803	2	3119	7
1483	2	1733	2	2011	3	2287	19	2557	2	2819	2	3121	7
1487	5	1741	2	2017	5	2293	2	2579	2	2833	5	3137	3
1489	14	1747	2	2027	2	2297	5	2591	7	2837	2	3163	3
1493	2	1753	7	2029	2	2309	2	2593	7	2843	2	3167	5
1499	2	1759	6	2039	7	2311	3	2609	3	2851	2	3169	7
1511	11	1777	5	2053	2	2333	2	2617	5	2857	11	3181	7
1523	2	1783	10	2063	5	2339	2	2621	2	2861	2	3187	2
1531	2	1787	2	2069	2	2341	7	2633	3	2879	7	3191	11
1543	5	1789	6	2081	3	2347	3	2647	3	2887	5	3203	2
1549	2	1801	11	2083	2	2351	13	2657	3	2897	3	3209	3
1553	3	1811	6	2087	5	2357	2	2659	2	2903	5	3217	5

Продолжение

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
3221	10	3343	5	3467	2	3581	2	3697	5	3823	3	3931	2
3229	6	3347	2	3469	2	3583	3	3701	2	3833	3	3943	3
3251	6	3359	11	3491	2	3593	3	3709	2	3847	5	3947	2
3253	2	3361	22	3499	2	3607	5	3719	7	3851	2	3967	6
3257	3	3371	2	3511	7	3613	2	3727	3	3853	2	3989	2
3259	3	3373	5	3517	2	3617	3	3733	2	3863	5	4001	3
3271	3	3389	3	3527	5	3623	5	3739	7	3877	2	4003	2
3299	2	3391	3	3529	17	3631	15	3761	3	3881	13	4007	5
3301	6	3407	5	3533	2	3637	2	3767	5	3889	11	4013	2
3307	2	3413	2	3539	2	3643	2	3769	7	3907	2	4019	2
3313	10	3433	5	3541	7	3659	2	3779	2	3911	13	4021	2
3319	6	3449	3	3547	2	3671	13	3793	5	3917	2	4027	3
3323	2	3457	7	3557	2	3673	5	3797	2	3919	3	4049	3
3329	3	3461	2	3559	3	3677	2	3803	2	3923	2	4051	6
3331	3	3463	3	3571	2	3691	2	3821	3	3929	3	4057	5

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел.— М.: Наука, 1980.
2. Виноградов И. М. Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.— М.: Наука, 1976.
4. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана.— М.: ИЛ, 1953.
5. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел.— М.: Мир, 1964.
6. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел.— М.: Наука, 1971.
7. Чандрасекхаран К. Арифметические функции.— М.: Наука, 1975.
8. Монтгомери Х. Мультипликативная теория чисел.— М.: Мир, 1974.
9. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле.— М.: Гостехиздат, 1947.
10. Ингам А. Е. Распределение простых чисел.— М.: ОНТИ, 1936.
11. Прахар К. Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.
12. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы.— Труды МИАН, 151, М.: Наука, 1980.