В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов

Р-АДИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М.: Физматлит, 1994.—352 с.

Впервые в отечественной литературе излагаются результаты исследований по использованию р-адического анализа в теоретической и математической физике. Дается введение в теорию р-адических чисел и неархимедову геометрию, приводится большое число результатов по интегральному исчислению, теории обобщенных функций и псевдодифференциальных операторов над полем р-адических чисел. Излагаются элементы классической и квантовой механики над полем р-адических чисел, включая спектральную теорию квантового р-адического гармонического осциллятора. Описаны применения р-адического анализа к квантовой теории поля, теории струн, квантовым группам, теории случайных процессов.

Для математиков и физиков-теоретиков—студентов старших курсов, аспирантов, преподавателей и научных работников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В математической физике со времен Ньютона и Лейбница применяются вещественные числа. Если встречается какая-либо практическая задача, обычно для ее решения выписываются соответствующие уравнения, разумеется над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Вопрос, почему нужно использовать именно вещественные числа, даже не задается. Почему так происходит? Дело в том, что физические процессы происходят в пространстве и во времени, а, как хорошо известно, пространственно-временные координаты задаются вещественными числами. В качестве физического пространства еще со времен Евклида рассматривается вещественное трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Как известно, важное дополнение к этой точке зрения было сделано Риманом и Эйнштейном введением римановой геометрии, но в существенном математической моделью для пространства до настоящего времени остается $\mathbb{R}^3$, а для пространства-времени $\mathbb{R}^4$.

Эти представления стали настолько привычными, что $\mathbb{R}^3$ часто воспринимается как реальное физическое пространство. Мы хотели бы подчеркнуть, что *евклидово пространство* $\mathbb{R}^3$ *– это не более чем математическая модель для реального физического пространства*. Для того чтобы убедиться, что евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ является хорошей моделью для физического пространства, следует проверить на опыте соответствующие геометрические аксиомы элементарной школьной геометрии. Для этого необходимо измерять с очень высокой точностью длины отрезков, углы и т.д. Однако в квантовой теории с учетом гравитации имеется следующий результат. Если Δx - погрешность в измерении длины, то, оказывается, имеется неравенство

$$\Delta x \geq l_{\text{pl}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}\,, \tag{1}$$

где $\hbar$ - постоянная Планка, c - скорость света и G - гравитационная постоянная. Величина l_{pl} очень мала, порядка 10^{-33} см, она носит название планковской длины. Мы не будем здесь обсуждать вывод фундаментального неравенства (1), которое имеет долгую историю. Подчеркнем, что в силу (1) *невозможно измерение расстояний меньших планковских*.

Обратимся теперь к аксиомам евклидовой геометрии. В списке аксиом имеется так называемая аксиома Архимеда, которая впервые была выделена и проанализирована Веронезе и Гильбертом. Она заключается в следующем. Рассмотрим прямую линию и выберем на ней два отрезка a и b с началом в одной точке. Аксиома Архимеда гласит, что, прикладывая меньший отрезок a вдоль прямой достаточно большое число раз, мы в конце концов превзойдем больший отрезок b. По существу эта аксиома описывает процедуру измерения. Мы сравниваем два масштаба a и b. Иногда аксиому Архимеда называют аксиомой измеримости. Она означает, что мы должны иметь возможность измерить сколь угодно малые расстояния. Однако, как мы знаем, в силу неравенства (1) в реальном физическом пространстве это невозможно. Таким образом, мы приходим к выводу, что геометрия обычного евклидова и, более общо, риманова пространства неадекватно описывает свойства реального физического пространства на очень малых расстояниях.

Имеется соответствие между геометрическим и аналитическим описанием при помощи числовых координат: условно говоря,

$$\text{геометрия} \longleftrightarrow \text{числовая система}.$$

Как хорошо известно, обычная евклидова геометрия описывается при помощи вещественных чисел. Если мы отказываемся от использования евклидовой геометрии для описания малых расстояний в физическом пространстве, это означает, что вместо вещественных чисел мы должны использовать какую-то другую числовую систему. Какую именно? Что могло бы быть исходной точкой нового подхода?

Обратим внимание на то, что в повседневной жизни и в научных экспериментах мы никогда не имеем дела с бесконечными десятичными дробями, т.е. с иррациональными вещественными числами. Результаты любых практических действий мы можем выражать только в рациональных числах. Конечно, имеется общепринятая уверенность в том, что если мы будем проводить измерения со все большей точностью, то в принципе мы можем получить сколь угодно много знаков после запятой и интерпретировать результат как вещественное число. Однако это идеализация и, как явствует из предыдущего обсуждения, мы должны быть осторожны с такими утверждениями. *Итак, примем в качестве нашей отправной точки поле рациональных чисел* $\mathbb{Q}$. Геометрическому понятию расстояния соответствует аналитическое понятие нормы на $\mathbb{Q}$, т.е. функции $|x|$ со свойствами

1) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $|xy| = |x||y|$,

3) $|x+y| \leq |x|+|y|$

для любых рациональных чисел x, y. Какие нормы существуют на $\mathbb{Q}$? Имеется замечательная теорема Островского, описывающая все нормы. Оказывается, *любая норма на* $\mathbb{Q}$ *эквивалентна либо обычному абсолютному значению, либо* p*-адической норме для некоторого простого числа* p, где p-адическая норма $|x|_p$ определяется следующим образом. Пусть p - простое число. Представим рациональное число x в виде $x = p^{\nu}\,\frac{m}{n}$, где m и n - целые, которые не делятся на p, такое представление однозначно. Тогда

$$|x|_p = 1/p^{\nu}. \tag{2}$$

Несмотря на некоторую, на первый взгляд, искусственность этого определения, подчеркнем, что в силу теоремы Островского других норм на $\mathbb{Q}$ нет. Нетрудно проверить наличие свойств 1) - 3) для $|x|_p$. Фактически вместо неравенства треугольника 3) имеет место более сильное неравенство

3′) $|x+y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$.

Норма, которая удовлетворяет неравенству 3′), называется *неархимедовой*. Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по обычной норме приводит к полю вещественных чисел $\mathbb{R}$. Аналогично, *пополнение поля рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *по* p-*адической норме* $|x|_p$ приводит к полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для любого простого p.

Любое вещественное число может быть записано в виде десятичной дроби, т.е. ряда

$$10^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{10}\right)^n. \tag{3}$$

Аналогично, любое p-адическое число может быть записано в виде ряда

$$x = p^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \tag{4}$$

где a_n - целые, $0 \le a_n \le p-1$. Если $a_0 \ne 0$, то представление (4) однозначно. Заметим, что в отличие от (3), где имеем ряд по степеням малого параметра 1/10, в (4) имеем ряд по степеням простого числа p. Ряд (4), очевидно, сходится по p-адической норме.

Выражение (4) можно считать за определение p-адического числа. Арифметические действия сложения, умножения и т.д. с p-адическими числами вида (4) производятся как со степенными рядами. Любое рациональное, в частности, отрицательное число, может быть представлено в виде ряда (4). Например,

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots$$

Введенные К.Гензелем в конце *XIX* века p-адические числа составляют неотъемлемую часть теории чисел, алгебраической геометрии и других разделов современной математики.

Геометрия неархимедова пространства удивительно непохожа на евклидову геометрию - это вытекает из свойства нормы 3). В частности, все треугольники здесь равнобедренные. Два разных шара в неархимедовой геометрии не могут частично пересекаться, возможно лишь, что либо один из них содержится внутри другого, либо они не имеют общих точек. Это напоминает поведение двух капель ртути. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ имеет естественную иерархическую структуру: каждый диск состоит из конечного числа непересекающихся дисков меньшего радиуса; поле $\mathbb{Q}_p$ гомеоморфно канторовскому множеству на вещественной оси.

Итак, мы приходим к следующей картине. В основе фундаментальной физической теории должны лежать рациональные числа, на очень малых расстояниях важную роль должны играть p-адические числа, а на больших - вещественные. Это приводит к необходимости переработки основ математической и теоретической физики, начиная с классической механики и кончая теорией струн, с использованием теории чисел, p-адического анализа, алгебраической геометрии. Это огромный по объему материал, и в настоящей книге мы не сможем охватить все его аспекты. Цель этой книги - дать введение в те разделы p-адического анализа, которые оказались наиболее близкими к приложениям и описать некоторые из разделов p-адической математической физики.

Неархимедова геометрия и p-адический анализ применяются в физике не только для описания геометрии на малых расстояниях, но и в рамках традиционной теоретической физики для описания сложных систем типа спиновых стекол или фракталов. Мы находимся только в начале p-адической математической физики. Мы надеемся, что p-адические числа найдут применения в таких областях, как теория турбулентности, биология, динамические системы, компьютеры, проблемы передачи информации, криптография и других естественных науках, в которых узучаются системы с хаотическим фрактальным поведением и иерархической структурой.

Книга начинается с изложения p-адического анализа. В основном рассматривается два типа анализа: один - в котором изучаются функции типа $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, и другой - в котором изучаются комплекснозначные функции $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$. Вкратце мы касаемся также свойств функций вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_p$.

Анализ функций из $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$ строится во многом аналогично обычному вещественному анализу. Например, экспонента определяется формулой

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

где $x \in \mathbb{Q}_p$ и ряд сходится по p-адической норме для $|x|_p < 1$ при $p \neq 2$. Производные определяются обычным образом, только с использованием p-адической нормы. Они обладают стандартными свойствами. Выписываются дифференциальные уравнения – обыкновенные и в частных производных, изучаются свойства их решений. Уравнения p-адической классической механики для гармонического осциллятора имеют вид

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X},$$

где гамильтониан H равен

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2}. \tag{5}$$

Здесь время t, координата $X = X(t)$ и импульс $P = P(t)$ являются p-адическими переменными.

Для p-адичнозначных функций отсутствует естественный аналог интеграла Лебега. Напротив, для функций вида $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ имеется теория интегрирования, поскольку на $\mathbb{Q}_p$, как и на любой локально компактной группе, есть мера Хаара. Однако возникают проблемы с дифференцированием таких функций.

Комплекснозначная экспонента (характер) определяется выражением

$$\chi_p(x) = \exp 2\pi i\{x\},$$

где $\{x\}$ – рациональная часть ряда (4). Характер $\chi_p(x)$ и мера Хаара dx используются для построения теории преобразования Фурье комплекснозначных функций $f(x)$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\chi_p(\xi x)\,dx.$$

Комплекснозначную функцию $f(x)$ нельзя дифференцировать в обычном смысле по p-адическому аргументу x. Поэтому при построении теории обобщенных функций роль условия дифференцируемости в пространстве основных функций выполняет условие локальной постоянности $f(x)$. Аналогом оператора дифференцирования является псевдодифференциальный оператор

$$Df(x) = \int |\xi|_p \hat{f}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d\xi = \frac{p^2}{p+1}\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|_p^2}\,dy. \qquad (6)$$

Как сравнить результаты p-адической теории с вещественной? Для этого вспомним, что непосредственно наблюдаются только рациональные числа. Следовательно, нужно исследовать рациональные точки соответствующих решений. Например, для гармонического осциллятора (5) рассмотрим рациональные решения уравнения

$$P^2 + X^2 = 1 \qquad (7)$$

траектории в фазовом пространстве.

Как известно, рациональные решения уравнения (7) даются формулами

$$P = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}; \quad X = \frac{2mn}{m^2+n^2},$$

где m и n - целые. Таким образом, мы имеем бесконечное множество рациональных точек на алгебраической кривой (7), и *вид фазовой траектории p-адического гармонического осциллятора экспериментально неотличим от фазовой траектории вещественного осциллятора*. Разумеется, для других систем ответ будет другим, так как число рациональных точек на алгебраической кривой существенно зависит от вида кривой.

Квантовая механика гармонического осциллятора задается тройкой

$$(L_2(\mathbb{Q}_p),\ W(z),U(t)), \tag{8}$$

где $L_2(\mathbb{Q}_p)$ - гильбертово пространство квадратично суммируемых по мере Хаара комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p$, $W(z)$ - унитарное представление группы Гейзенберга - Вейля в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, т.е. представление канонических коммутационных соотношений, и $U(t)$ - оператор эволюции, в данном случае - сужение унитарного представления метаплектической группы на абелеву подгруппу. В книге проводится изучение спектральных свойств оператора эволюции, т.е. разложение представления $U(t)$ на неприводимые. Как соотносится p-адическая квантовая механика с обычной? Имеет место следующая формула

$$\exp 2\pi i(k^2t-kx) = \prod_p \chi_p(k^2t-kx) \tag{9}$$

для рациональных k, t и x. Таким образом, волновая функция, описывающая эволюцию свободной частицы в общей квантовой механике, так называемая плоская волна, может быть представлена как произведение волновых функций p-адических частиц. Это можно интерпретировать, сказав, что *обычная точечная частица на самом деле состоит из p-адических частиц, подобно тому как элементарные частицы состоят из кварков.*

Формулы типа (9) носят название эйлеровских или адельных произведений. Известным примером такого типа формул является эйлеровское представление для дзета-функции

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Аналогичное представление имеет место для пропагатора в теории поля

$$\frac{1}{k^2} = \prod_p |k^2|_p$$

для рациональных k, а также в p-адической теории струн.

Разработка формализма математической и теоретической физики над полем p-адических чисел представляет значительный интерес даже независимо от возможных приложений, так как способствует более глубокому пониманию формализма стандартной математической физики. Можно высказать следующий принцип. *Фундаментальные физические законы должны допускать формулировку, инвариантную относительно выбора числового поля.* Таким образом, мы включаем в игру не только поля рациональных, вещественных и p-адических чисел, но и произвольные поля.

Имеются различные формулировки квантовой механики и квантовой теории поля, эквивалентные над полем вещественных чисел. Над полем p-адических чисел они перестают быть таковыми.

В выражении для действия в евклидовой формулировке p-адической квантовой механики используется оператор (6):

$$S = \int_{\mathbb{Q}_p} \left[\varphi(x) D^2\varphi(x) + m^2\varphi^2(x)\right] dx, \tag{10}$$

здесь φ - вещественнозначная функция p-адического аргумента. Эквивалентность квантовой механики (8) и квантовой механики, основанной на действии (10), в настоящее время не ясна. Один из вариантов действия для p-адической евклидовой теории поля имеет вид

$$S = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \hat{\varphi}(k) a(k) \hat{\varphi}(-k)\, dk + \int_{\mathbb{Q}_p^n} V(\varphi(x))\, dx,$$

где $a(k)$ - некоторая функция от k и $V(\varphi)$ - потенциал взаимодействия. При наличии действия дальнейшая теория строится по обычным правилам теоретической физики, т.е. изучаются классические уравнения, континуальные интегралы и т.д.

Современная теория струн началась, как известно, с амплитуды Венециано

$$A(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \tag{11}$$

где a и b - параметры, зависящие от импульсов сталкивающихся частиц. Функция x^a - это мультипликативный характер на вещественной оси. Можно интерпретировать (11) как свертку двух характеров. Тогда обобщением амплитуды Венециано будет следующее выражение

$$A(\gamma_a,\gamma_b) = \int_K \gamma_a(x)\gamma_b(1-x)dx, \tag{12}$$

где K - поле, γ_a - характер, dx - мера на K. Для различных K, в частности, для K вида $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$ или $\mathbb{F}_q$ - поля Галуа, получаем формулы, играющие важную роль в теории струн и теории чисел. Амплитуды Венециано являются частным случаем более общей амплитуды Коба - Нильсена, абстрактная форма которой имеет вид

$$A_n = \int \prod_{i<j} \gamma_{a_{ij}}(x_i-x_j)dx_1\ldots dx_n.$$

В качестве K можно выбрать поле p-адических чисел и, таким образом, прийти к теории p-адических дуальных амплитуд и струн. В развитии p-адической математической физики важную роль сыграла адельная формула

$$\prod_{p=2}^{\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^a|1-x|_p^b dx = 1$$

открытая Фройндом и Виттеном.

Возможно другое обобщение формулы (11), использующее p-адическую гамма-функцию. На этом пути возникают интересные связи с суммами Якоби и l-адическими когомологиями кривых Ферма над полями Галуа.

Обнаружилась неожиданная связь p-адического анализа с q-анализом и квантовыми группами, и, таким образом, с некоммутативной геометрией. В q-анализе рассматриваются своеобразные конечноразностные аналоги функций из обычного анализа, q-анализу уделяли внимание еще Эйлер, Гаусс и другие. Сферические функции на квантовых группах являются q-специальными функциями. Мера Хаара на квантовой группе $SU_q(2)$ выражается через q-интеграл

$$\int_0^1 f(x)d_q x = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n. \tag{12}$$

Здесь $0 < q < 1$ и $f(x)$ - вещественная функция. С другой стороны, интеграл по мере Хаара на $\mathbb{Q}_p$ имеет вид

$$\int_{|x|_p \le 1} f(|x|_p)dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{n=0}^{\infty} f(p^{-n})p^{-n}. \tag{13}$$

Видим, что при $q = 1/p$ выражения (12) и (13) совпадают. Имеются и ряд других удивительных соответствий q-деформаций и p-адического анализа.

Приведем в заключение основные направления применений p-адического анализа в математической физике:

геометрия пространства-времени на малых расстояниях;

обобщение формализма теоретической физики на другие числовые поля;

классический и квантовый хаос; изучение сложных систем типа спиновых стекол и фракталов;

адельные формулы, позволяющие разложить некоторые физические системы на более простые составляющие;

стохастические процессы и теория вероятностей;

связи с q-анализом и квантовыми группами.

В заключительной части введения приведем короткий путеводитель для читателя. Мы стремились к тому, чтобы не требовать от читателя предварительных сведений из p-адического анализа. Нет необходимости читать книгу последовательно в порядке расположения параграфов. Взаимозависимость материала, изложенного в различных параграфах, очень простая. *После прочтения первых двух пунктов* (1.1 *и* 1.2), содержащих определения p-адической нормы и p-адических чисел, можно переходить к чтению любого другого параграфа.

* * *

Мы хотели бы выразить благодарность всем нашим друзьям и коллегам за многочисленные полезные обсуждения вопросов, рассмотренных в настоящей книге.

ГЛАВА I

АНАЛИЗ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Поле p-адических чисел

1. p-адическая норма. Через $\mathbb{Z}$ обозначим кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$; через $\mathbb{Z}_+$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{1,2,\ldots\}$.

Пусть $\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел. Абсолютное значение $|x|$ любого $x \in \mathbb{Q}$ удовлетворяет следующим характерным свойствам:

(i) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$, $y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x+y| \leq |x|+|y|$, $y \in \mathbb{Q}$.

Любая функция со свойствами (i) - (iii) называется *нормой*.

Пусть теперь p - простое число, $p = 2,3,5,\ldots,137,\ldots$ В поле $\mathbb{Q}$ введем другую норму $|x|_p$ по правилу

$$|0|_p = 0, \quad |x|_p = p^{-\gamma(x)}, \tag{1.1}$$

где целое число $\gamma(x)$ определяется из представления

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n}, \quad m,\ n,\ \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

и целые числа m и n не делятся на p. Норма $|x|_p$ называется *p-адической нормой*.

Примеры.

$$|6|_3 = |15|_3 = 1/3, \quad |1/4|_2 = |3/4|_2 = 4, \quad |137|_2 = 1.$$

Норма $|x|_p$ обладает характерными свойствами (i) - (iii) нормы даже в более сильной форме, а именно,

1) $|x|_p \geq 0$, причем $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$,

3) $|x+y|_p \leq \max(|x|_p,|y|_p)$.

В случае, когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство

3′) $|x+y|_p = \max(|x|_p, |y|_p)$.

При $p = 2$ мы также имеем

3″) $|x+y|_2 \leq 1/2|x|_p$, если $|x|_2 = |y|_2$.

■ Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойства 3).

Действительно, если x и $y = p^{\gamma'}\frac{m'}{n'}$ представлены в виде (1.2), то в силу (1.1) $|x|_p = p^{-\gamma}$ и $|y|_p = p^{-\gamma'}$. Пусть, для определенности, $\min(\gamma,\gamma') = \gamma$. Тогда

$$x + y = p^{\gamma}\frac{m}{n} + p^{\gamma'}\frac{m'}{n'} = p^{\gamma}\frac{mn'+nm'p^{\gamma'-\gamma}}{nn'}. \tag{1.3}$$

Целое число nn' не делится на p, а целое число $mn'+nm'p^{\gamma'-\gamma}$ может делиться на p. Поэтому $\gamma(x+y) \geq \gamma = \min(\gamma,\gamma')$ и, следовательно,

$$|x+y|_p = p^{-\gamma(x+y)} \leq \max(p^{-\gamma}, p^{-\gamma'}) = \max(|x|_p, |y|_p),$$

т.е. неравенство 3) установлено.

Если же $\gamma' > \gamma$, то в (1.3) целое число $mn'+nm'p^{\gamma'-\gamma}$ не делится на p. Поэтому $\gamma(x+y) = \gamma$ и

$$|x+y|_p = p^{-\gamma(x+y)} = p^{-\gamma} = \max(p^{-\gamma},\ p^{-\gamma'}) = \max(|x|_p,\ |y|_p),$$

т.е. равенство 3′) установлено. При $p = 2$ и $|x|_2 = |y|_2 = 2^{\gamma}$ в (1.3) числа m, n, m', n' – нечетные и, значит, число $mn'+nm'$ четное, а число nn' нечетное, так что $\gamma(x+y) \geq \gamma+1$ и, следовательно,

$$|x+y|_2 \leq 2^{-\gamma-1} = \frac{1}{2}|x|_2,$$

т.е. неравенство 3′′) доказано. ■

Заметим, что норма $|x|_p$ может принимать лишь счетное число значений $p^{-\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Норма $|x|_p$ определяет *ультраметрику* на $\mathbb{Q}$ (из-за неравенства 3)). Эта норма *неархимедова*. Действительно, $|nx|_p \leq |x|_p$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Имеет место следующая

Теорема Островского. *Нормы $|x|$ и $|x|_p$, $p = 2,3,\ldots$, исчерпывают все нетривиальные неэквивалентные нормы поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Обозначим $|x|_\infty = |x|$, $x \in \mathbb{Q}$. Справедлива следующая (адельная) формула

$$\prod_{2\le p\le\infty} |x|_p = 1, \ x \in \mathbb{Q}, \ x \ne 0. \qquad (1.4)$$

■ Действительно, разлагая рациональное число x на множители

$$x = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \ \varepsilon = \pm 1,$$

где p_j – различные простые числа и $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, в силу (1.1) и (1.2) получим

$$|x|_{p_j} = p_j^{-\alpha_j}, \ |x|_p = 1, \ p \ne p_j, \ |x|_\infty = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

откуда и следует формула (1.4). ■

2. p-адические числа. Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по p-адической норме образует поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (характеристики 0). Поле $\mathbb{Q}_p$ аналогично полю $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ вещественных чисел, получаемых пополнением $\mathbb{Q}$ по норме $|x| = |x|_\infty$.

Любое p-адическое число $x \ne 0$ однозначно представляется в каноническом виде

$$x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots), \qquad (2.1)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j – целые числа такие, что $0 \le x_j \le p-1$, $x_0 > 0$ $(j = 0,1,\ldots)$.

Отметим, что ряд справа в (2.1) сходится по норме $|x|_p$, поскольку общий член его имеет оценку

$$|p^\gamma x_j p^j|_p \le p^{-\gamma-j}, \ j = 0,1, \ \ldots$$

Представление (2.1) аналогично разложению любого вещественного числа x в бесконечную десятичную дробь

$$x = \pm 10^\gamma (x_0 + x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + \ldots),$$

$$\gamma \in \mathbb{Z}, \ x_j = 0,1,\ldots,9, \ x_0 > 0,$$

й доказывается аналогично.

Представление (2.1) означает, что любое p-адическое число x есть предел по p-адической норме последовательности рациональных чисел

$$\left\{p^\gamma (x_0 + x_1 + \ldots + x_n p^n), \ n \to \infty\right\}.$$

Если $x \in \mathbb{Q}_p$ представлено в виде (2.1), то $|x|_p = p^{-\gamma}$ и выполнены свойства 1) – 3) p-адической нормы.

Представление (2.1) дает рациональные числа тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого номера, числа x_j, $j = 0,1, \ldots$ образуют периодическую последовательность.

Пример.

$$-1 = p-1 + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots$$

С помощью представления (2.1) определяется дробная часть $\{x\}_p$ числа $x \in \mathbb{Q}_p$:

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, \text{ если } \gamma(x) \geq 0 \text{ или } x = 0, \\ p^\gamma (x_0+x_1p+\ldots+x_{|\gamma|-1}p^{|\gamma|-1}), \text{ если } \gamma(x) < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Нетрудно убедиться, что

$$p^\gamma \leq \{x\}_p \leq 1-p^\gamma, \text{ если } \gamma(x) < 0. \tag{2.3}$$

Пример. $\{1/6\} = 2/3$.

Сумма двух p-адических чисел x вида (2.1) и

$$y = p^{\gamma(y)}(y_0+y_1p+y_2p^2+\ldots) \; , \; 0 \leq y_j \leq p-1, \; y_0 > 0,$$

представляется в каноническом виде

$$x+y = p^{\gamma(x+y)}(c_0+c_1p+c_2p^2+\ldots), \; 0 \leq c_j \leq p-1 \; , \; c_0 > 0,$$

причем числа $\gamma(x+y)$ и c_j однозначно определяются из равенства

$$p^{\gamma(x)}(x_0+x_1p+\ldots) + p^{\gamma(y)}(y_0+y_1p+\ldots) = p^{\gamma(x+y)}(c_0+c_1p+\ldots)$$

методом неопределенных коэффициентов по модулю p. Аналогично определяется канонический вид и для произведения xy.

Уравнение $a+x = 0$ однозначно разрешимо в $\mathbb{Q}_p$ при любом $a \in \mathbb{Q}_p$, причем $x = (-1)a = -a$; уравнение $ax = 1$ также однозначно разрешимо в $\mathbb{Q}_p$ при любом $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, причем $x = 1/a$. (Для определения канонической формы числа $1/a$ используется метод неопределенных коэффициентов по модулю p в уравнении $ax = 1$.)

Таким образом, в $\mathbb{Q}_p$ мы можем совершать обычные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Это означает, что $\mathbb{Q}_p$ есть поле.

Поле $\mathbb{Q}_p$ является коммутативно-ассоциативной группой по сложению; $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ является коммутативно-ассоциативной группой по умножению; $\mathbb{Q}_p^*$ называется *мультипликативной груп-*

пой поля $\mathbb{Q}_p$.

p-адические числа x, для которых $|x|_p \le 1$ (т.е. $\gamma(x) \ge 0$ или $\{x\}_p = 0$), называются *целыми* p-адическими числами, и их множество обозначается $\mathbb{Z}_p$. Множество $\mathbb{Z}_p$ - подкольцо кольца $\mathbb{Q}_p$; $\mathbb{Z}_+$ плотно в $\mathbb{Z}_p$. Целые числа $x \in \mathbb{Z}_p$, для которых $|x|_p = 1$, называются *единицами* в $\mathbb{Z}_p$.

Совокупность элементов x из $\mathbb{Z}_p$, для которых $|x|_p < 1$ (т.е. $\gamma(x) \ge 1$ или $|x|_p \le 1/p$) образуют главный идеал кольца $\mathbb{Z}_p$; очевидно, что этот идеал имеет вид $p\mathbb{Z}_p$. Поле вычетов $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ состоит из p элементов. В мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ существует единица $\eta \ne 1$ (при $p \ne 2$; $\eta = 1$ при $p = 2$) порядка p-1 такая, что элементы $0,\eta,\eta^2,\dots, \eta^{p-1} = 1$ образуют полный набор представителей классов вычетов поля $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

Примеры. При $p = 3$ $\eta = -1$. При $p = 5$ $\eta = 2$.

Так как числа $0,1,\dots,p-1$ образуют также полный набор представителей классов вычетов поля $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, то из представления (2.1) вытекает второе каноническое представление любого p-адического числа $x \ne 0$,

$$x = p^{\gamma(x)}(x'_0+x'_1p+x'_2p^2+\dots), \tag{2.4}$$

$$x'_j = 0,1,\eta,\dots,\eta^{p-2},\ x'_0 \ne 0,\ (j = 0,1,\dots).$$

3. Пространство p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. В силу неравенства 3) п. 1 норма в поле $\mathbb{Q}_p$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$|x+y|_p \le \max(|x|_p,|y|_p) \le |x|_p+|y|_p,\ x,y \in \mathbb{Q}_p.$$

Поэтому в $\mathbb{Q}_p$ можно ввести метрику

$$\rho(x,y) = |x-y|_p.$$

При этом $\mathbb{Q}_p$ становится *полным метрическим пространством*. Из представления (2.1) следует *сепарабельность* $\mathbb{Q}_p$.

Обозначим через $B_\gamma(a)$ круг радиуса p^{γ} с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ и через $S_\gamma(a)$ - его границу (окружность)

$$B_\gamma(a) = \left\{x\colon\ |x-a|_p \le p^\gamma\right\},\ S_\gamma = \left\{x\colon\ |x-a|_p = p^\gamma\right\},\ \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $B_\gamma(a)$ - абелева группа по сложению и

$$\left\{x\colon\ |x-a|_p < p^\gamma\right\} = B_{\gamma-1}(a),\ B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma'\le\gamma} S_{\gamma'}(a),$$

$$S_\gamma(a) = B_\gamma(a)\setminus B_{\gamma-1}(a), \; B_\gamma(a) \subset B_{\gamma'}(a), \; \gamma < \gamma';$$

$$\bigcap_\gamma B_\gamma a) = \{a\}, \; \bigcup_\gamma B_\gamma(a) = \bigcup_\gamma S_\gamma(a) = \mathbb{Q}_p. \qquad (3.1)$$

При $a = 0$ обозначим $B_\gamma(0) = B_\gamma$ и $S_\gamma(0) = S_\gamma$.

Лемма 1. *Если $b \in B_\gamma(a)$, то $B_\gamma(b) = B_\gamma(a)$.*

■ Пусть $x \in B_\gamma(b)$. Тогда

$$|x-a|_p = |x-b+b-a|_p \le \max(|x-b|_p, |b-a|_p) \le p^\gamma,$$

т.е. $x \in B_\gamma(a)$, так что $B_\gamma(b) \subset B_\gamma(a)$. Так как $a \in B_\gamma(b)$, то по доказанному $B_\gamma(a) \subset B_\gamma(b)$ и, следовательно, $B_\gamma(a) = B_\gamma(b)$. ■

Следствие 1. *Круг $B_\gamma(a)$ и окружность $S_\gamma(a)$ - открыто-замкнутые множества в $\mathbb{Q}_p$.*

Следствие 2. *Всякая точка круга $B_\gamma(a)$ является его центром.*

Следствие 3. *Любые два круга в $\mathbb{Q}_p$ либо не имеют общих точек, либо один содержится в другом.*

Следствие 4. *Всякое открытое множество в $\mathbb{Q}_p$ есть объединение не более чем счетного числа кругов без общих точек.*

Лемма 2. *Если множество $M \subset \mathbb{Q}_p$ содержит две различные точки a и b, $a \ne b$, то его можно представить в виде объединения непересекающихся открыто-замкнутых (в M) множеств M_1 и M_2 таких, что $a \in M_1$, $b \in M_2$.*

■ Рассмотрим три возможных случая.

1) $a = 0$, $|b|_p = p^\gamma$; в качестве M_1 и M_2 можно взять множества $M_1 = M \cap B_{\gamma-1}$ и $M_2 = M \cap (\mathbb{Q}_p \setminus B_{\gamma-1})$.

2) $|a|_p = p^\gamma$, $|b|_p = p^{\gamma'}$, $\gamma' > \gamma$; тогда $M_1 = M \cap B_\gamma$, $M_2 = M \cap (\mathbb{Q}_p \setminus B_\gamma)$.

3) $|a|_p = p^\gamma = |b|_p$, $a \ne b$; пусть

$$a = p^{-\gamma}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots), \; b = p^{-\gamma}(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots),$$

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \ne b_k, \; |a-b|_p = p^{\gamma-k}.$$

Тогда $M_1 = M \cap B_{\gamma-k-1}(a)$, $M_2 = M \cap (\mathbb{Q}_p \setminus B_{\gamma-k-1}(a))$. ■

Лемма 2 утверждает, что всякое множество пространства $\mathbb{Q}_p$, состоящее из более чем одной точки, несвязно. Другими словами, связная компонента любой точки совпадает с самой этой точкой. Таким образом,

$\mathbb{Q}_p$ – *вполне несвязное пространство.*

Прослеживая доказательство леммы 2 для случая, когда множество M состоит только из двух точек a и b, убеждаемся, что существуют непересекающиеся окрестности этих точек. Это значит, что *пространство* $\mathbb{Q}_p$ *хаусдорфово.*

Лемма 3. *Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{Q}_p$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным в $\mathbb{Q}_p$.*

■ Необходимость условий очевидна. Докажем их достаточность. Так как $\mathbb{Q}_p$ – полное метрическое пространство, то для доказательства компактности ограниченного замкнутого (бесконечного) множества K достаточно доказать его счетную компактность, т.е. что каждое бесконечное множество $M \subset K$ содержит хотя бы одну предельную точку. Пусть $x \in M$, тогда $|x|_p = p^{-\gamma(x)} \le C$ (M ограничено), так что $\gamma(x)$ ограничено снизу. Рассмотрим два случая.

1) $\gamma(x)$ неограничено сверху на M. Тогда найдется последовательность $\{x_k,\ k \to \infty\} \subset M$ такая, что $\gamma(x_k) \to \infty$, $k \to \infty$. Но это значит, что $|x_k| = p^{-\gamma_k} \to 0$, $k \to \infty$, т.е. $x_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathbb{Q}_p$ и $0 \in K$.

2) $\gamma(x)$ ограничена сверху на M. Тогда найдется такое число γ_0, что множество M содержит бесконечно много точек вида $p^{\gamma_0}(x_0+x_1p+x_2p^2+\ldots)$, $0 \le x_j \le p-1$, $x_0 \ne 0$. Так как x_0 принимает $p-1$ значений, то найдется такое число a_0, $1 \le a_0 \le p-1$, что M содержит бесконечно много чисел вида $p^{\gamma_0}(a_0+ x_1p+x_2p^2+\ldots)$ и т.д. В результате получим последовательность a_j, $0 \le a_j \le p-1$, $a_0 \ne 0$, $j = 0,1,\ldots$ Искомая предельная точка есть $p^{\gamma_0}(a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots) \in K$ (K замкнуто). ■

Следствие 1. *Всякие круг $B_\gamma(a)$ и окружность $S_\gamma(a)$ – компакты.*

Следствие 2. *Пространство $\mathbb{Q}_p$ локально компактное.*

Следствие 3. *Всякий компакт можно покрыть конечным числом кругов фиксированного радиуса без общих точек* (*см. следствие* 3 *из леммы* 1).

Следствие 4. *В пространстве $\mathbb{Q}_p$ справедлива лемма Гей-*

не - Бореля: из каждого бесконечного покрытия компакта K можно выбрать конечное покрытие K.

Пример 1. Окружность S_γ можно покрыть $(p-1)p^{\gamma-\gamma'-1}$ кругами $B_{\gamma'}(a)$, $\gamma > \gamma'$, без общих точек с центрами

$$a = p^{-\gamma}(a_0+a_1p+\ldots+a_{\gamma-\gamma'-1}p^{\gamma-\gamma'-1}), \tag{3.2}$$

$$0 \le a_j \le p-1, \ a_0 \ne 0.$$

Это покрытие назовем *каноническим покрытием окружности* S_γ.

■ Любую точку $x = p^{-\gamma}(x_0+x_1p+\ldots) \in S_\gamma$ можно представить единственным образом в виде $x = a+x'$, где a вида (3.2) и $x' \in B_{\gamma'}$. Поэтому

$$S_\gamma = \bigcup_a \left\{a+B_{\gamma'}\right\} = \bigcup_a B_{\gamma'}(a).$$

Осталось заметить, что круги $B_{\gamma'}(a)$ не имеют общих точек, так как в силу (3.2) их центры $\{a\}$ отстоят друг от друга на расстояние $\ge p^{\gamma'+1}$. Число кругов равно $(p-1)p^{\gamma-\gamma'-1}$, см. следствие 3 из леммы 1. ■

Пример 2. Круг B_γ можно покрыть $p^{\gamma-\gamma'}$ кругами $B_{\gamma'}(a)$, $\gamma > \gamma'$, без общих точек с центрами

$$a = p^{-r}(a_0+a_1p+\ldots+a_{r-\gamma'-1}p^{r-\gamma'-1}), \tag{3.3}$$

$$r = \gamma, \gamma-1, \ldots, \gamma'+1, \ 0 \le a_j \le p-1, \ a_0 \ne 0.$$

Это покрытие назовем *каноническим покрытием круга* B_γ.

■ Вытекает из примера 1, если заметить, что

$$B_\gamma = B_{\gamma'} \cup \bigcup_{r=\gamma'+1}^{\gamma} S_r$$

и множества $B_{\gamma'}$ и S_r не имеют общих точек. Количество кругов равно

$$1+(p-1)\sum_{r=\gamma'+1}^{\gamma} p^{r-\gamma'-1} = 1+(p-1)\frac{1-p^{\gamma-\gamma'}}{1-p} = p^{\gamma-\gamma'}. \ ■$$

Размерностью полного метрического пространства X называется наименьшее целое число n такое, что для любого покрытия пространства X существуют вписанное в него подпокрытие кратности $n+1$. (Кратностью покрытия называется наибольшее целое число m такое, что в этом покрытии существует m множеств с непустым пересечением.)

Теорема. *Размерность пространства* $\mathbb{Q}_p$ *равна* 0.

■ Пространство $\mathbb{Q}_p$ – полное метрическое. Из каждого покрытия $\mathbb{Q}_p$ можно выделить подпокрытие $\mathbb{Q}_p$ без общих точек (см. следствие 4 из леммы 1); это означает, что $n = 0$ в определении размерности $\mathbb{Q}_p$, т.е. $\dim \mathbb{Q}_p = 0$.

4. Квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть ε – такое p-адическое число, которое не является квадратом никакого другого p-адического числа, $\varepsilon \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$. Присоединим к полю $\mathbb{Q}_p$ число (символ) $\sqrt{\varepsilon}$; множество элементов вида $z = x+y\sqrt{\varepsilon}$, $x,y \in \mathbb{Q}_p$, называются *квадратичным расширением* поля $\mathbb{Q}_p$; оно обозначается $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$. Элементы $x+y\sqrt{\varepsilon}$ можно складывать и умножать по обычным правилам при дополнительном условии $(\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$.

Очевидно, $x+y\sqrt{\varepsilon} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Поэтому уравнение

$$(x+y\sqrt{\varepsilon})z = 1, \quad x+y\sqrt{\varepsilon} \neq 0,$$

имеет единственное решение в $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$, равное

$$z = \frac{x}{x^2-\varepsilon y^2} - \frac{y}{x^2-\varepsilon y^2}\sqrt{\varepsilon}\ . \tag{4.1}$$

(Заметим, что знаменатель в (4.1) $x^2-\varepsilon y^2 \neq 0$, иначе ε было бы квадратом p-адического числа.)

Таким образом, *квадратичное расширение* $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ *образует поле*. Обозначим через $\mathbb{Q}_p^*(\sqrt{\varepsilon})$ мультипликативную группу поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$.

Выясним теперь, какие p-адические числа не являются квадратами p-адических чисел и какие имеются неизоморфные квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$.

Напомним, что число $a \in \mathbb{Z}$ называется *квадратичным вычетом по модулю* p, если уравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

имеет решение $x \in \mathbb{Z}$; в противном случае a называется *квадратичным невычетом по модулю* p. Для обозначения этих утверждений используется символ Лежандра

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ - квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } a \text{ - квадратичный невычет по модулю } p. \\ 0, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Лемма. *Для того чтобы уравнение*

$$x^2 = a,\ 0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0+a_1p+\ldots), \tag{4.2}$$

$$0 \le a_j \le p-1,\ a_0 \neq 0,$$

имело решение $x \in \mathbb{Q}_p$, *необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) $\gamma(a)$ – *четное число*,

2) $\left(\dfrac{a_0}{p}\right) = 1$, *если* $p \neq 2$; $a_1 = a_2 = 0$, *если* $p = 2$.

■ **Необходимость**. Если уравнение (4.2) имеет решение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0+x_1p+\ldots),\ 0 \le x_j \le p-1,\ x_0 \neq 0,$$

то

$$p^{2\gamma(x)}(x_0+x_1p+\ldots)^2 = p^{\gamma(a)}(a_0+a_1p+\ldots), \tag{4.3}$$

откуда следует, что $\gamma(a) = 2\gamma(x)$ – четное число и $a_0 \equiv x_0^2 \pmod p$, если $p \neq 2$, т.е. $\left(\dfrac{a_0}{p}\right) = 1$.

При $p = 2$ имеем

$$a = 2^{2\gamma(x)}(1+x_12+\ldots)^2 = 2^{2\gamma(x)}\left[1+\left(\frac{x_1+x_1^2}{2}+x_2\right)2^3+\ldots\right] \tag{4.4}$$

и, следовательно, $a_1 = a_2 = 0$.

Достаточность. Пусть a удовлетворяет условиям 1) и 2). Построим решение x уравнения (4.2). Положим

$$\gamma(x) = (1/2)\gamma(a).$$

Пусть $p \neq 2$. Из (4.3) следует, что число x_0 должно удовлетворять условиям

$$x_0^2 \equiv a_0 \pmod p,\ 1 \le x_0 \le p-1.$$

Такие x_0 существуют, так как $1 \le a_0 \le p-1$, $\left(\dfrac{a_0}{p}\right) = 1$. Из (4.3) также следует, что остальные числа x_j должны удовлетворять условиям

$$2x_0x_j \equiv a_j+N_j \pmod p\ ,\ 0 \le x_j \le p-1,\ j = 1,2,\ldots, \tag{4.5}$$

где целые числа N_j зависят лишь от $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$. Поэтому числа x_j последовательно (однозначно) определяются из условий (4.5), поскольку число $2x_0$ не делится на p.

Пусть $p = 2$. Из (4.4.) следует уравнение

$$a_3 \equiv \frac{x_1(1+x_1)}{2} + x_2 \pmod 2,$$

которое всегда разрешимо при $a_3 = 0, 1$ $(x_1, x_2 = 0, 1)$. Из (4.4) также следует, что остальные числа x_j должны удовлетворять условиям

$$x_j \equiv a_{j+1}+N_j \pmod 2, \quad x_j = 0, 1 , \; j = 3, 4, \ldots, \tag{4.6}$$

где целые числа N_j зависят лишь от $x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}$. Поэтому числа x_j последовательно (однозначно) определяются из условий (4.6). ■

Из доказанной леммы вытекают такие следствия.

Пусть η - единица, не являющаяся квадратом никакого p-адического числа, т.е. $\left(\frac{\eta_0}{p}\right) = -1$. Этот факт мы будем записывать так: $\eta \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$. (При $p \neq 2$ в качестве η можно взять единицу, введенную в п. 2.)

Следствие 1. *При $p \neq 2$ числа $\varepsilon_1 = \eta$, $\varepsilon_2 = p$, $\varepsilon_3 = p\eta$ не являются квадратами никаких p-адических чисел.*

Следствие 2. *Всякое p-адическое число x можно представить в одном из четырех видов: $x = \varepsilon_j y_j^2$, где $y_j \in \mathbb{Q}_p$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \eta$, $\varepsilon_2 = p$, $\varepsilon_3 = p\eta$.*

Следствие 3. *Существует только три неизоморфных квадратичных расширения поля $\mathbb{Q}_p$: $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon_j})$, $j = 1,2,3$.*

Следствие 4. *При $p = 2$ числа $\varepsilon_1 = 1+2 = 3$, $\varepsilon_2 = 1+4 = 5$, $\varepsilon_3 = 1+2+4 = 7$, $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_5 = 2(1+2) = 6$, $\varepsilon_6 = 2(1+4) = 10$, $\varepsilon_7 = 2(1+2+4) = 14$ (или, эквивалентно, $\varepsilon_j = 1,\pm2,\pm3,\pm6$) и их взаимные произведения не являются квадратами никаких 2-адических чисел. Всякое 2-адическое число x можно представить в одном из восьми видов: $x = \varepsilon_j y_j^2$, где $y_j \in \mathbb{Q}_2$, $\varepsilon_0 = 1$. Поэтому существует семь неизоморфных квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}_2$: $\mathbb{Q}_2(\sqrt{\varepsilon_j})$, $j = 1,2,\ldots,7$.*

Следствие 5. *Факторгруппа $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Q}_p^{*2}$ состоит из четырех элементов ε_j, $j = 0,1,2,3$, при $p \neq 2$ и из восьми элементов ε_j, $j = 0,1,\ldots,7$, при $p = 2$.*

Отметим также: при $p \equiv 3 \pmod 4$ в качестве числа η можно взять -1, так как

$$\left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1; \qquad (4.7)$$

при $p \equiv 3 \pmod 8$ или $p \equiv 5 \pmod 8$ в качестве η можно взять 2, так как $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, в силу формулы

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = -1.$$

Следствие 6. *Для того чтобы уравнение $x^2 = -1$ имело решение в $\mathbb{Q}_p$, необходимо и достаточно, чтобы $p \equiv 1 \pmod 4$; при этом существует два решения уравнения $x^2 = -1$, которые мы будем обозначать $\pm\tau$.*

Следствие 7. *При $p \equiv 3 \pmod 4$ справедливо равенство*

$$|x^2+y^2|_p = \max(|x|_p^2, |y|_p^2). \qquad (4.8)$$

В частности, если $x^2+y^2 = 0$, то $x = y = 0$.

■ В проверке равенства (4.8) нуждается лишь случай $|x|_p = |y|_p$. Если бы было $|x^2+y^2|_p < |x^2|_p = |y|_p^2$, то сравнение

$$x_0^2 \equiv -y_0^2 \pmod p$$

было бы разрешимо, и, следовательно, -1 было бы квадратичным вычетом по модулю p, что противоречит (4.7). ■

5. Полярные координаты и окружности в поле $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$. Пусть $\varepsilon \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$. Любой элемент z поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ однозначно представим в виде $z = x+\sqrt{\varepsilon}y$, $x,y \in \mathbb{Q}_p$ (см. п. 4). Числа (x,y) называются *декартовыми координатами* элемента z; элемент $\bar{z} = x-\sqrt{\varepsilon}y$ называется *сопряженным* к z; множество элементов $z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$, удовлетворяющих уравнению

$$z\bar{z} \equiv x^2-\varepsilon y^2 = c \;, \; c \neq 0, \qquad (5.1)$$

называется «*окружностью*» в $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ (с центром в 0).

Очевидно, равенство $z\bar{z} = 0$ эквивалентно $z = 0$.

Обозначим через $\mathbb{Q}_{p,\varepsilon}^*$ множество чисел $c \in \mathbb{Q}_p^*$ вида (5.1); $\mathbb{Q}_{p,\varepsilon}^*$ – подгруппа группы $\mathbb{Q}_p^*$. По лемме п. 4 число c из $\mathbb{Q}_{p,\varepsilon}^*$ может быть представлено в виде $c = r^2$ или $c = \kappa r^2$, где $r \in \mathbb{Q}_p^*$ и $\kappa \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$. Но тогда $\kappa = cr^{-2} \in \mathbb{Q}_{p,\varepsilon}^*$ и, значит, $\kappa = \nu\bar{\nu}$, $\nu \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$.

Пара чисел (ρ,σ), где либо $\rho = r$, $\sigma = r^{-1}z$, либо $\rho = \nu r$, $\sigma = \nu^{-1}r^{-1}z$, называется *полярными координатами* точки $z \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{\varepsilon})$, $z = \rho\sigma$, $\sigma\bar{\sigma} = 1$. Ясно, что $(-\rho,-\sigma)$ также полярные координаты точки z.

Особую роль играет единичная «окружность» в $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ $z\bar{z} = 1$, определяемая равенством (5.1) при $c = 1$. Элементы этой «окружности» образуют группу по умножению, которую обозначим C_ε.

Найдем параметрическое представление «окружности» C_ε

$$x^2-\varepsilon y^2 = 1. \tag{5.2}$$

Вводя параметр $t = \dfrac{y}{1+x}$, из уравнения (5.2) получаем

$$x = \frac{1+\varepsilon t^2}{1-\varepsilon t^2},\ y = \frac{2t}{1-\varepsilon t^2},\ t \in \mathbb{Q}_p\ . \tag{5.3}$$

Множество C_ε *- компакт* в $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$.

■ Замкнутость C_ε очевидна, докажем его ограниченность (см. п. 3). При $|\varepsilon t^2|_p > 1$ имеем $|1\pm\varepsilon t^2|_p = |\varepsilon t^2|_p$, и в силу (5.3) $|x|_p = 1$; при $|\varepsilon t^2|_p < 1$ имеем $|1\pm\varepsilon t^2|_p = 1$, и в силу (5.3) $|x|_p = 1$; при $|\varepsilon t^2|_p = 1$ мы докажем, что $|1-\varepsilon t^2|_p = 1$ и в силу (5.3) $|x|_p = |1+\varepsilon t^2|_p \le 1$. Объединяя три случая, из (5.2) получим $|x|_p \le 1$, а также из уравнения (5.2) следует $|y|_p^2 \le |\varepsilon|_p^{-1}$, $(x,y) \in C_\varepsilon$, так что C_ε ограничено.

Осталось доказать, что из условия $|\varepsilon t^2|_p = 1$ следует $|1-\varepsilon t^2|_p = 1$. Пусть $p \ne 2$. В п. 4 установлено, что в качестве ε достаточно взять числа η, p и ηp. Но $\varepsilon = p$ или $\varepsilon = \eta p$ противоречат равенству $|\varepsilon t^2|_p = 1$. Поэтому $\varepsilon = \eta$. Но уравнение $1-\eta_0 t_0 \equiv 0 \pmod p$ неразрешимо, иначе η_0 было бы квадратичным вычетом по модулю p, что противоречит лемме п. 4). Поэтому $|\ -\eta t^2|_p = 1$. При $p = 2$ доказательство аналогично, однако оно сложнее. ■

6. Отображение $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{R}$. Построим взаимно однозначное и непрерывное отображение φ множества p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ в некоторое подмножество $\varphi(\mathbb{Q}_p)$ вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Для $x \in \mathbb{Q}_p$ определим $\varphi(x)$ по формуле

$$\varphi(x) = |x|_p \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^{-2k} , \qquad (6.1)$$

где числа x_k, $0 \le x_k \le p-1$, $x_0 \ne 0$, определяются каноническим разложением (2.1) числа x.

Упорядочим числа множества $\mathbb{Q}_p$ следующим образом: x *предшествует* y, $x < y$, если: либо $|x|_p < |y|_p$, либо при $|x|_p = |y|_p$ существует такое целое число $j \ge 0$, что $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$, $\ldots$, $y_{j-1} = x_{j-1}$, $x_j < y_j$. Ясно, что выполнена аксиома транзитивности: если $y < x$ и $x < z$, то $y < z$. $\mathbb{Q}_p$ – *вполне упорядоченное множество*; при этом $x > 0$, $x \in \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$.

Лемма. $\varphi(x) > \varphi(y)$ *тогда и только тогда, когда* $x > y$.

■ **Достаточность.** Пусть $x > y$ и $|x|_p > |y|_p \ne 0$, т.е. $|x|_p \ge p|y|_p$. Имеем $\varphi(x) \ge |x|_p$ и

$$\varphi(y) = |y|_p \sum_{k=0}^{\infty} y_k p^{-2k} \le (p-1)|y|_p \sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)-\varphi(y) \ge |x|_p - \frac{p^2}{p+1}|y|_p \ge p|y|_p\left(1-\frac{p}{p+1}\right) = \frac{p}{p+1}|y|_p > 0.$$

Пусть теперь $|x|_p = |y|_p$ и $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $\ldots$, $= x_{j-1} = y_{j-1}$, $x_j > y_j$ при некотором $j \ge 0$. Тогда

$$\varphi(x) \ge |x|_p \sum_{k=0}^{j} x_k p^{-2k} ,$$

$$\varphi(y) \le |y|_p \sum_{k=0}^{j} y_k p^{-2k} + |y|_p \frac{p-1}{1-p^{-2}} p^{-2(j+1)} <$$

$$< |x|_p \sum_{k=0}^{j-1} x_k p^{-2k} + |x|_p y_j p^{-2j} + |x|_p p^{-2j} \frac{1}{p+1}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)-\varphi(y) \ge |x|_p p^{-2j}\left(x_j - y_j - \frac{1}{p+1}\right) > 0.$$

Необходимость. Если $\varphi(x) > \varphi(y)$, то по доказанному ситуации: либо $x = y$, либо $x < y$ быть не могут. ■

Из доказанной леммы следует, что отображение φ *взаимно* *однозначно.*

Функция φ непрерывна.

■ Как и при доказательстве леммы установим следующую оценку

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le p|x-y|_p, \quad x,y \in \mathbb{Q}_p ,$$

из которой следует непрерывность отображения $\varphi\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. ■

Обозначим $K = \varphi(\mathbb{Q}_p)$. Структура множества K дается следующей теоремой.

Теорема. *Множество K есть счетный набор непересекающихся совершенных нигде не плотных множеств (типа канторовых) лебеговой меры нуль.*

■ Так как $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}} S_\gamma$ (см. п. 3), то

$$K = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}} K_\gamma, \quad K_\gamma = \varphi(S_\gamma), \quad K_\gamma \cap K_{\gamma'} = \varnothing, \quad \gamma \ne \gamma'. \tag{6.3}$$

Изучим структуру множества K_0 (структура остальных множеств K_γ аналогична). Так как $1 \le \varphi(x) < p$, $x \in S_0$, то $K_0 \subset [1,p)$.

Рассмотрим следующую систему непересекающихся интервалов на $[1,p)$:

$$I_n^\varepsilon = \left(\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j p^{-2j} + \frac{p^{-2n}}{p+1},\ \sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j p^{-2j} + p^{-2n}\right), \quad n = 0,1,2,\dots,$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n), \quad 0 \le \varepsilon_j \le p-1,$$

$$j = 1,2,\dots,n, \quad \varepsilon_0 \ne 0, \quad \varepsilon_n \ne p-1.$$

Обозначим

$$I_n = \bigcup_{\varepsilon} I_n^\varepsilon, \quad I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Мера Лебега множества I равна

$$\mu(I) = \sum_{\varepsilon}\mu\left(I_n^\varepsilon\right) = (p-1)\left(1-\frac{1}{p+1}\right) +$$

$$+ (p-1)^2\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}p^{-2n}\left(1-\frac{1}{p+1}\right) =$$

$$= \frac{p(p-1)}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1}\sum_{n=1}^{\infty} p^{-n} = p-1. \tag{6.4}$$

Используя лемму, можно доказать, что $I \cap K_0 = \varnothing$, т.е.

ни при каких $x \in S_0$ ни одно из неравенств

$$\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j p^{-2j} + \frac{p^{-2n}}{p+1} < \varphi(x) < \sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j p^{-2j} + p^{-2n},\ n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

не имеет места. Кроме того, используя лемму о вложенных отрезках, установим, что $[1,p) = K_0 \cup I$. Отсюда и из (6.4) вытекает, что лебегова мера множества K_0 равна 0. Проведенный процесс построения множества $[1,p)\backslash I = K_0$ с точностью до несущественных деталей совпадает с известным процессом построения канонического канторова совершенного множества на отрезке $[0,1]$ и поэтому доказательства остальных свойств множества K_0 аналогичны доказательствам соответствующих свойств канторова множества. ∎

7. Пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p\times\ldots\times\mathbb{Q}_p$ состоит из точек $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1,2,\ldots,n$, и снабжено нормой

$$|x|_p = \max_{1\le j\le n}|x_j|_p,\ x \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{7.1}$$

Эта норма неархимедова, так как

$$|x+y|_p \le \max(|x|_p,|y|_p),\ x,y \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{7.2}$$

∎ Проверим это:

$$\max_{1\le j\le n}|x_j+y_j|_p \le \max_{1\le j\le n}\max(|x_j|_p,|y_j|_p) =$$

$$= \max(\max_{1\le j\le n}|x_j|_p, \max_{1\le j\le n}|y_j|_p) = \max(|x|_p,|y|_p).$$

Пространство $\mathbb{Q}_p^n$ полное метрическое локально компактное вполне несвязное.

Введем скалярное произведение

$$(x,y) = x_1y_1+x_1y_1+\ldots+x_ny_n,\ x,y \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Справедливо неравенство

$$|(x,y)|_p \le |x|_p|y|_p,\ x,y \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{7.3}$$

Обозначим через $B_\gamma(a)$ шар радиуса p^γ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p^n$ и через $S_\gamma(a)$ - его границу (сферу); $B_\gamma(0) = B_\gamma$ и $S_\gamma(0) = S_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. $B_\gamma(a)$ и $S_\gamma(a)$ - открыто-замкнутые в $\mathbb{Q}_p^n$. Нетрудно проверить: если $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то

$$B_\gamma(a) = B_\gamma(a_1)\times B_\gamma(a_2)\times\ldots\times B_\gamma(a_n).$$

§ 2. Аналитические функции

В этом параграфе рассматриваются аналитические функции в поле p-адических чисел.

1. Степенные ряды. Сначала рассмотрим числовой ряд в поле p-адических чисел

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{Q}_p. \tag{1.1}$$

Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.1)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Сходимость ряда (1.1) к его сумме S (p-адическому числу) определяется как $|S_n - S|_p \to 0$, $n \to \infty$; при этом пишем

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Свойства рядов в поле $\mathbb{Q}_p$ существенно отличаются от свойств рядов в поле вещественных (или комплексных) чисел. Например, существует только абсолютная сходимость рядов. Более того, справедлива следующая

Лемма 1. *Ряд* (1.1) *сходится тогда и только тогда, когда* $|a_k|_p \to 0$, $k \to \infty$.

■ Необходимость условия очевидна:

$$|a_k|_p = |S_k - S_{k-1}|_p \to 0, \quad k \to \infty.$$

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием Коши. Так как $|a_k|_p \to 0$, $k \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N_\varepsilon$, что для всех $k > N$ выполнено неравенство $|a_k|_p < \varepsilon$. Поэтому для любых натуральных $n > N$ и $m > N$

$$|S_m - S_n|_p = \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big|_p \le \max_{n \le k \le m} |a_k|_p < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм фундаментальна и, значит, ряд (1.1) сходится. ■

Из леммы 1 следует, что сумма ряда (1.1) не зависит от порядка суммирования.

Теперь рассмотрим p-адический степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \ f_k \in \mathbf{Q}_p, \tag{1.2}$$

определяющий функцию $f(x)$ со значениями в $\mathbf{Q}_p$ для тех $x \in \mathbf{Q}_p$, для которых он сходится.

Определение. Число $R = R(f)$ называется *радиусом сходимости* ряда (1.2), если он сходится при всех $|x|_p \le R$ и расходится при $|x|_p > R$.

Заметим, что R может принимать значения 0 или p^γ, $\gamma \in \mathbf{Z}$. В последнем случае ряд (1.2) сходится равномерно в (открыто-замкнутом) круге B_γ, поскольку по лемме 1

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k x^k\right|_p \le \max_{m\le k\le n} |f_k|_p R^k \longrightarrow 0, \ m,n \to \infty,$$

и определяет непрерывную функцию $f(x)$ в B_γ.

Для нахождения радиуса сходимости ряда (1.2), как и в вещественном случае, введем число $r = r(f)$ по формуле

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \ |f_k|_p^{1/k} \tag{1.3}$$

или, обозначая $r = p^\sigma$,

$$\sigma = \frac{-1}{\ln p} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k} \ln|f_k|_p. \tag{1.3'}$$

Лемма 2. *Ряд (1.2) сходится при всех $|x|_p < r$ и расходится при $|x|_p > r$.*

■ Пусть $|x|_p < r$. Тогда $|x|_p = (1-2\varepsilon)r$, где $0 < \varepsilon \le$ $\le 1/2$. Из (1.3) следует, что существует $N = N_\varepsilon$ такое, что при всех $k > N$ справедливо неравенство

$$|f_k|_p^{1/k} < \frac{1}{r(1-\varepsilon)}$$

и, таким образом,

$$|f_k x^k|_p = \left(|x|_p|f_k|_p^{1/k}\right)^k < \left(\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^k \longrightarrow 0, \ k \to \infty.$$

По лемме 1 ряд (1.2) сходится в точке x.

Пусть теперь $|x|_p > r$. Тогда $|x|_p = (1+2\varepsilon)r$, где $\varepsilon > 0$. Из (1.3) следует, что существует подпоследовательность $\{n_k, \ k \to \infty\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \left|f_{n_k}\right|_p^{1/n_k} = \frac{1}{r}.$$

Следовательно, начиная с некоторого $N = N_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\left|f_{n_k}\right|_p^{1/n_k} > \frac{1}{r(1+\varepsilon)},\ k > N.$$

Поэтому

$$\left|f_{n_k} x^{n_k}\right|_p = \left(|x|_p \left|f_{n_k}\right|_p^{1/n_k}\right)^{n_k} > \left(\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n_k} \longrightarrow \infty,\ k \to \infty,$$

и ряд (1.2) расходится. ■

Отметим, что r не обязательно является целой степенью числа p, т.е. число σ в (1.3′) не всегда целое (см. примеры в п. 4).

Соотношения между числами $R(f)$ и $r(f)$ даются следующей леммой, вытекающей из лемм 1 и 2.

Лемма 3. *$R(f) \le r(f)$, причем если $p^\gamma < r(f) < p^{\gamma+1}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, то $R(f) = p^\gamma$; если же $r(f) = p^\gamma$, то либо $R(f) = p^\gamma$, либо $R(f) = p^{\gamma-1}$.*

Отметим еще, что в случае $r(f) = p^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, сходимость ряда (1.2) на окружности $|x|_p = p^\gamma$, как и в вещественном случае, требует особого исследования.

2. Аналитические функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется аналитической в круге B_γ, если она представляется в этом круге сходящимся степенным рядом* (1.2). (*Очевидно, всегда можно считать $R(f) = p^\gamma$, см. п.* 1.)

Аналитические функции в круге обладают рядом обычных свойств: например, они образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения. Однако имеются и отличия: например, суперпозиция аналитических функций может оказаться не аналитической функцией.

Рассмотрим ряды при $n = 0,1,\ldots$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) f_k x^{k-n}, \tag{2.1′}$$

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)} f_n x^{k+n}, \tag{2.1″}$$

полученные из ряда (2.1) почленным дифференцированием и интегрированием соответственно, $f(x) = f^{(0)}(x)$. Эти функции называются *производной* и *первообразной* порядка n соответственно.

Ясно, что для радиусов сходимости рядов (2.1) справедливы неравенства

$$R(f^{(-n)}) \le R(f) \le R(f^{(n)}),\ n = 1,2,\dots \tag{2.2}$$

Для получения более точной информации о радиусах сходимости рядов (2.1) докажем

$$|k|_p \ge \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z}_+,\quad \lim_{k\to\infty,\ k\in\mathbb{Z}_+} |k|_p^{1/k} = 1. \tag{2.3}$$

■ Действительно, пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $|k|_p = p^{-m}$, так что $k = p^m k_0$, где $m \ge 0$ – целое и $k_0 \in [1,p-1]$ – целое. Тогда

$$m = \frac{\ln k - \ln k_0}{\ln p} \ge \frac{\ln k}{\ln p}$$

и, таким образом, $|k|_p = p^{-m} \ge p^{-\frac{\ln k}{\ln p}} = \dfrac{1}{k}$ и

$$\lim_{k\to\infty,\ k\in\mathbb{Z}_+} |k|_p^{1/k} = \lim_{k\to\infty,\ k\in\mathbb{Z}_+} p^{-\frac{m}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty,\ k\in\mathbb{Z}_+} p^{-\frac{\ln k - \ln k_0}{k \ln p}} = 1. \ ■$$

Применяя формулу (1.3) к рядам (2.1) и пользуясь соотношением (2.3), получаем

$$r(f^{(n)}) = r(f) = r(f^{(-n)}),\ n = 1,2,\dots \tag{2.4}$$

Отсюда и из леммы 3 п. 1 следует: если $p^\gamma < r(f) < p^{\gamma+1}$, то $R(f) = p^\gamma$ и

$$R(f^{(n)}) = R(f) = R(f^{(-n)}),\ n = 1,2,\dots\ ; \tag{2.5}$$

если же $r(f) = p^\gamma$, то, учитывая неравенства (2.2), получаем:

1) $R(f) = p^\gamma$, и тогда либо справедливы равенства (2.5), либо, начиная с некоторого $n_0 \ge 1$,

$$R(f^{(n)}) = R(f) = pR(f^{(-n)}),\ n \geq n_0; \qquad (2.5')$$

2) $R(f) = p^{\gamma-1}$, и тогда либо справедливы равенства (2.5), либо, начиная с некоторого $n_0 \geq 1$,

$$\frac{1}{p}R(f^{(n)}) = R(f) = R(f^{(-n)}),\ n \geq n_0. \qquad (2.5'')$$

Формулы (2.5) можно интерпретировать следующим образом: аналитическую функцию в круге можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, причем при дифференцировании радиус сходимости может увеличиться в p раз, в то время как при интегрировании этот радиус может уменьшиться в p раз.

Как мы видим, ситуация несколько отличается от случая поля вещественных чисел.

3. Алгебра аналитических функций. Обозначим через A множество функций, аналитических в единичном круге B_0. Такие функции, и только они, задаются рядами (1.2), для которых выполняется условие (см. п. 1) $|f_k|_p \to 0$, $k \to \infty$.

Множество A – линейное над полем $\mathbb{Q}_p$. На множестве A введем норму по формуле

$$\|f\| = \max_{0 \leq k < \infty} |f_k|_p,\ f \in A. \qquad (3.1)$$

Проверим, что функционал (3.1) действительно является нормой, причем неархимедовой.

■ Пусть $\|f\| = 0$, $f \in A$, т.е. $\max\limits_{0 \leq k < \infty} |f_k|_p = 0$, откуда $f_k = 0$, $k = 0,1,\ldots$, и, значит, $f = 0$. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, $\alpha \neq 0$. Тогда

$$\|\alpha f\| = \max_k |\alpha f_k|_p = |\alpha|_p \max_k |f_k|_p = |\alpha|_p \|f\|.$$

Наконец, если $f, g \in A$, то

$$\|f+g\| = \max_k |f_k+g_k|_p \leq$$

$$\leq \max_k \max \left[|f_k|_p, |g_k|_p\right] \leq \max\left[\|f\|, \|g\|\right]. \ ■$$

Теорема. *Пространство A является банаховой алгеброй.*

■ Докажем полноту пространства A. Пусть последовательность $\{f^n,\ n \to \infty\}$, $f^n \in A$, фундаментальна. Так как

$$\|f^n - f^m\| = \max_{0 \le k < \infty} |f^n_k - f^m_k|_p,$$

то последовательности $\{f^n_k,\ n \to \infty\}$ фундаментальны при каждом $k = 0,1,\ldots$ и, следовательно, сходятся к некоторым f_k при $n \to \infty$ равномерно по k (см. п. 3 §1) и, таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f^n_k = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f^n_k = 0.$$

Поэтому функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

принадлежит A и

$$\lim_{n\to\infty} \|f^n - f\| = \lim_{n\to\infty} \max_{0 \le k < \infty} |f^n_k - f_k|_p = 0,$$

что и доказывает полноту пространства A.

Пусть $f, g \in A$ и $h = fg$. Тогда $h \in A$ (см. п. 2) и

$$h_k = \sum_{j=0}^{k} f_j g_{k-j}.$$

Следовательно,

$$\|h\| = \max_k |h_k|_p = \max_k \left| \sum_{j=0}^{k} f_j g_{k-j} \right|_p \le$$

$$\le \max_k \max_{0 \le j \le k} |f_j|_p |g_{k-j}|_p \le \max_j |f_j|_p \max_k |g_k|_p = \|f\| \|g\|. \ ■$$

Замечание. Алгебра A называется *алгеброй ограниченных степенных рядов* и является частным случаем алгебр Тейта.

4. Функции e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$. Эти функции как и в вещественном случае задаются рядами

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{4.1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \tag{4.2}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \tag{4.3}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{4.4}$$

Чтобы изучить сходимость этих рядов, нам потребуется оценка $|n!|_p$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть n - натуральное число, $n \le p^{s+1}-1$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда его можно однозначно представить в виде суммы

$$n = n_0+n_1p+\ldots+n_sp^s, \quad 0 \le n_j \le p-1, \quad j = 0,1,\ldots,s. \tag{4.5}$$

Обозначим

$$s_n = \sum_{j=0}^{s} n_j. \tag{4.6}$$

Отметим, что

$$\lim_{n\to\infty,\, n\in\mathbb{Z}_+} \frac{s_n}{n} = 0. \tag{4.7}$$

Теперь докажем равенство

$$|n!|_p = p^{-\frac{n-s_n}{p-1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.8}$$

■ Степень $M(n)$, в которой число p входит сомножителем в $n!$, равна

$$M(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^s}\right];$$

здесь $[a]$ - целая часть числа a.

Используя представление (4.5) и обозначение (4.6), получаем

$$M(n) = \frac{n-n_0}{p} + \frac{n-n_0-n_1 p}{p^2} + \ldots + \frac{n-n_0-n_1 p-\ldots-n_s p^s}{p^{s+1}} =$$

$$= n\,\frac{1-p^{-s-1}}{p-1} - n_0\frac{1-p^{-s-1}}{p-1} - n_1\frac{1-p^{-s}}{p-1} - \ldots - n_s\frac{1-p^{-1}}{p-1} =$$

$$= \frac{n-s_n}{p-1} - \frac{n}{p-1}\,p^{-s-1} + (n_0+n_1 p+\ldots+n_s p^s)\frac{p^{-s-1}}{p-1} = \frac{n-s_n}{p-1},$$

откуда и следует равенство (4.8). ■

Функция e^x определяется рядом (4.1), $(e^x)' = e^x$.

Учитывая равенства (4.7) и (4.8) для радиуса $r(e^x)$ (см. п. 2), получаем

$$r(e^x) = \overline{\lim_{k\to\infty}}|k!|_p^{1/k} = \lim_{k\to\infty} p^{-\frac{k-s_k}{k(p-1)}} = p^{-\frac{1}{p-1}} \tag{4.9}$$

При $p \neq 2$ из (4.9) имеем

$$\frac{1}{p} < r(e^x) < 1.$$

Поэтому

$$R(e^x) = R((e^x)^{(n)}) = R((e^x)^{(-n)}) = \frac{1}{p},\ p \neq 2. \tag{4.10}$$

При $p = 2$ из (4.9) имеем $r(e^x) = 2^{-1}$. Исследуем сходимость ряда (4.1) на окружности $|x|_2 = 2^{-1}$. Пусть $x = 2$ и $k = 2^n$. Тогда $s_k = 1$ и в силу (4.8)

$$\left|\frac{2^k}{k!}\right|_2 = 2^{-k}2^{k-1} = 2^{-1}.$$

Поэтому на окружности $|x|_2 = 2^{-1}$ ряд (4.1) расходится. Следовательно, по лемме 3 п. 2 $R(e^x) = 2^{-2}$, откуда выводим

$$R(e^x) = R((e^x)^{(n)}) = R((e^x)^{(-n)}) = 2^{-2}, \; p = 2. \qquad (4.11)$$

Итак, при любом p ряд (4.1) для e^x можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз в том же круге сходимости.

Обозначим через G_p круг сходимости ряда (4.1) - аддитивную группу $|x|_p \le 1/p$ при $p \ne 2$ и $|x|_2 \le 2^{-2}$ при $p = 2$.

С помощью ряда (4.1) проверяется соотношение

$$e^x e^y = e^{x+y}, \; x,y \in G_p. \qquad (4.12)$$

Докажем равенства

$$|e^x-1|_p = |x|_p, \; |e^x|_p = 1, \; x \in G_p. \qquad (4.13)$$

■ Второе равенство следует из первого. Для его доказательства предварительно установим неравенства

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right|_p \le |x|_p \, p^{(1-k)\frac{p-2}{p-1}}, \; p \ne 2, \qquad (4.14')$$

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right|_2 \le |x|_2 2^{1-k}, \; p = 2, \qquad (4.14'')$$

при $x \in G_p$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Неравенства (4.14) вытекают из равенства (4.8). Пусть $p \ne 2$. Тогда

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right|_p = |x|_p \frac{|x^{k-1}|_p}{|k!|_p} \le |x|_p p^{1-k} \, p^{\frac{k-s_k}{p-1}} \le |x|_p p^{(1-k)\frac{p-2}{p-1}},$$

поскольку в силу (4.6) $s_k \ge 1$. Аналогично при $p = 2$. ■

Пользуясь неравенствами (4.14), имеем (4.13):

$$|e^x-1|_p = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right|_p = |x|_p \max_{k\in\mathbb{Z}_+} \left|\frac{x^{k-1}}{k!}\right|_p = |x|_p,$$

поскольку

$$\left|\frac{x^{k-1}}{k!}\right|_p < 1,\ k = 2,3,\dots,\ x \in G_p. \ \blacksquare$$

Функция $\ln(1+x)$ задается рядом (4.2). Его радиус r в силу (2.3) равен

$$r(\ln(1+x)) = \lim_{k\to\infty,\, k\in\mathbb{Z}_+} |k|_p^{1/k} = 1.$$

Однако в точке $x = 1$ ряд (4.2) расходится, так как $|k^{-1}|_p \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ Поэтому

$$R(\ln(1+x)) = \frac{1}{p}. \tag{4.15}$$

Функция $\ln(1+x)$ обладает свойством

$$\ln[(1+x)(1+y)] = \ln(1+x) + \ln(1+y), \tag{4.16}$$

$$|x|_p \leq \frac{1}{p},\ |y|_p \leq \frac{1}{p}\ ,$$

которое проверяется с помощью ряда (4.2).

Докажем равенство

$$|\ln(1+x)|_p = |x|_p,\ x \in G_p. \tag{4.17}$$

$\blacksquare$ Учитывая неравенство (2.3) $|1/k|_p \leq k$, имеем (4.17):

$$|\ln(1+x)|_p = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right|_p =$$

$$= |x|_p \max_{k\in\mathbb{Z}_+} |x|_p^{k-1}|k^{-1}|_p = |x|_p,$$

поскольку

$$|x|_p^{k-1}|k^{-1}|_p \leq \begin{cases} p^{1-k}k, & p\neq 2, \\ 2^{2-2k}k, & p=2, \end{cases} < 1,\ k = 2,3,\dots,\ x \in G_p. \ \blacksquare$$

Обозначим через J_p мультипликативную группу

$$J_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p:\ 1-x \in G_p\right\}.$$

Заметим, что мультипликативность множества J_p следует из тождества

$$1-xy = 1-x+1-y+(1-x)(1-y).$$

Из соотношений (4.13), (4.17), (4.12) и (4.16) вытекает, что *функция e^x осуществляет изоморфизм аддитивной группы G_p на мультипликативную группу J_p. Обратный изоморфизм осуществляется функцией* $\ln x = \ln(1+x-1)$, *и справедливы равенства*

$$\ln e^x = x, \ x \in G_p, \ e^{\ln x} = x, \ x \in J_p, \tag{4.18}$$

проверяемые непосредственно с помощью рядов (4.1) и (4.2).

Функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются рядами (4.3) и (4.4). Эти ряды, как и в случае функции e^x, сходятся в G_p, и справедливы соотношения

$$|\sin x|_p = |x|_p, \ |\cos x|_p = 1, \ x \in G_p. \tag{4.19}$$

Справедливы стандартные тригонометрические формулы, устанавливаемые с помощью рядов (4.3) и (4.4), в частности

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \ e^{\tau x} = \cos x + \tau \sin x, \ x \in \mathbb{Q}_p, \tag{4.20}$$

где $\tau^2 = -1$, $\tau \in \mathbb{Q}_p$, $p \equiv 1 \pmod 4$ (см. п. 4 § 1).

Функции

$$e^x, \ \cos x, \ \frac{\sin x}{x}, \ \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{4.21}$$

являются квадратами p-адических функций в G_p (при $p = 2$ функции e^x и $\frac{\ln(1+x)}{x}$ являются квадратами в $\mathbb{Q}_p$ лишь при $|x|_2 \le 2^{-3}$).

■ Эти утверждения вытекают из критерия п. 4 § 1 и из тех фактов, что нормы функций (4.21) равны 1 (см. формулы (4.13), (4.17) и (4.19)), и справедливо следующее каноническое разложение (см. (2.1) п. 2 §1) этих функций:

$$1 + c_1(x)p + \ldots, \ p \ne 2, \ 1 + c_3(x)2^3, \ p = 2. \tag{4.22}$$

Пусть $p \ne 2$. Для e^x представление (4.22) следует из (4.13),

$$|e^x - 1|_p = |x|_p \le \frac{1}{p},$$

и из аналогичных оценок для остальных функций (4.21) (нужно использовать оценки (4.14′) и неравенство (2.3)).

При $p = 2$ ситуация сложнее. Пользуясь оценками (4.14″) имеем при $|x|_2 \le 2^{-2}$

$$|\cos x - 1|_2 \le \max_{k\in\mathbb{Z}_+}\left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|_2 \le |x|_2 \max_{k\in\mathbb{Z}_+} 2^{1-2k} = 2^{-3},$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|_2 \le \max_{k\in\mathbb{Z}_+}\left|\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right|_2 \le$$

$$\le |x|_p \max_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{2^{1-2k}}{|2k+1|_2} \le \max_{k\in\mathbb{Z}_+} 2^{-1-2k} = 2^{-3}.$$

Аналогичные оценки для функций $e^x = \left(e^{x/2}\right)^2$ и $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ справедливы лишь при $|x|_2 \le 2^{-3}$. Представление (4.22) доказано. ■

Наконец отметим, что функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ отображают взаимно однозначно G_p на G_p. Обратными функциями являются

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,x^{2k+1},\quad x \in G_p, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1},\quad x \in G_p, \tag{4.23}$$

причем

$$|\arcsin x|_p = |\operatorname{arctg}' x|_p = |x|_p.$$

5. Теорема об обратной функции. *Пусть $f(x)$ – аналитическая функция в круге $B_r(a)$ и $f'(a) \ne 0$, $|f'(a)|_p = p^n$. Тогда найдется такой круг $B_\rho(a)$, $\rho \le r$, что f отображает его на круг $B_{\rho+n}(b)$, $b = f(a)$, взаимно однозначно, обратная функция $g(y)$ аналитична в круге $B_{\rho+n}(b)$ и справедливо равенство*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{5.1}$$

■ Применяя классическую теорему об обратной функции, заключаем, что существует круг $B_\rho(a)$ достаточно малого радиуса p^ρ, $\rho \le r$, который функция f взаимно однозначно отображает на некоторую окрестность $U(b)$ точки b, обратная функция $g(y)$ аналитична в $U(b)$ и имеет место равенство

(5.1). Осталось доказать, что $U(b) = B_{\rho+n}(b)$ при достаточно малом p^{ρ}.

Поскольку $f(x)$ – аналитическая функция в круге $B_r(a)$, то она представляется в виде ряда (см. п. 2)

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)^2\sum_{k=2}^{\infty} a_k(x-a)^{k-2}, \qquad (5.2)$$

причем

$$|a_k|_p p^{rk} \to 0, \; k \to \infty.$$

Обозначим

$$\max_{k=2,3,\dots} |a_k|_p p^{r(k-2)} = p^s, \; s \in \mathbb{Z}.$$

Тогда, выбирая $\rho < n-s$ $(\rho \le r)$, из (5.2) будем иметь

$$|f(x)-b|_p =$$

$$= \left|f'(a) + (x-a)\sum_{k=2}^{\infty} a_k(x-a)^{k-2}\right|_p |x-a|_p = |f'(a)|_p|x-a|_p,$$

т.е.

$$|f(x)-b|_p = |f'(a)|_p|x-a|_p, \; x \in B_\rho(a). \qquad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что

$$f\left(B_\rho(a)\right) = U(b) \subset B_{\rho+n}(b) \qquad (5.4)$$

и найдется такая точка $x' \in S_\rho(a)$, что

$$|f(x')-b|_p = |f'(a)|_p|x'-a|_p = p^{n+\rho}.$$

Следовательно, $f(x') = y' \in S_{\rho+n}(b) \cap U(b)$. Поэтому ряд для обратной функции

$$g(y) = a+g'(b)(y-b) + \dots$$

сходится в точке $y' \in S_{\rho+n}(b)$ и, значит, в круге $B_{\rho+n}(b)$. Уменьшая, если нужно, радиус $p^{\rho+n}$, добьемся того, чтобы функция $g(y)$ также удовлетворяла равенству типа (5.3)

$$|g(y)-a|_p = |g'(b)|_p|y-b|_p = \frac{1}{|f'(a)|_p}|y-b|_p, \; y \in B_{\rho+n}.$$

Отсюда следует, что

$$g(B_{\rho+n}(b)) \subset B_\rho(a) = g(U(b)).$$

§ 3. Аддитивные и мультипликативные характеры

Поле $\mathbb{Q}_p$ является аддитивной группой. Обозначим $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p\setminus\{0\}$ его мультипликативную группу.

1. Аддитивные характеры поля $\mathbb{Q}_p$. *Аддитивным характером* поля $\mathbb{Q}_p$ называется характер аддитивной группы $\mathbb{Q}_p$, т.е. непрерывная (комплекснозначная) функция $\chi(x)$, заданная на $\mathbb{Q}_p$ и удовлетворяющая условиям

$$|\chi(x)| = 1, \ \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \ x,y \in \mathbb{Q}_p. \tag{1.1}$$

Аналогично определяется и (аддитивный) характер поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ и группы B_γ, $\gamma \in \mathbb{Z}$; B_γ – подгруппа группы $\mathbb{Q}_p$.

Очевидно, всякий аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ является характером и любой группы B_γ.

Функция

$$\chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}_p) \tag{1.2}$$

при каждом фиксированном $\xi \in \mathbb{Q}_p$ есть аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ и группы B_γ. Это следует из соотношения для дробных частей (см. п. 2 § 1)

$$\{x+y\}_p = \{x\}_p+\{y\}_p-N, \quad N = 0,\ 1.$$

Наша задача – доказать, что формула (1.2) дает общее представление аддитивных характеров поля $\mathbb{Q}_p$ и группы B_γ.

Пусть χ – произвольный аддитивный характер. Из (1.1) имеем

$$\chi(0) = 1, \ \chi(-x) = \overline{\chi(x)} =$$

$$= \chi^{-1}(x), \ \chi(nx) = [[\chi(x)]^n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Изучим сначала характеры группы B_γ. Пусть $\chi \not\equiv 1$ – такой характер.

Докажем, что *существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что*

$$\chi(x) \equiv 1, \ x \in B_k. \tag{1.4}$$

■ Так как $\chi(0) = 1$, $|\chi(x)| = 1$ и $\chi(x)$ – непрерывная функция на B_γ, то можно выбрать так ветвь функции $\ln \chi(x) = i\arg \chi(x)$, чтобы она была непрерывной в 0 и $\arg \chi(0) = 0$.

В частности, существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $|\arg \chi(x)| < 1$ при всех $x \in B_k$. Учитывая, что $nx \in B_k$ при любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in B_k$, заключаем из (1.3)

$$|n \arg \chi(x)| = |\arg \chi(nx)| < 1,$$

откуда выводим $|\arg \chi(x)| < 1/n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Это значит, что $\arg\chi(x) = 0$ и $\chi(x) \equiv 1$, $x \in B_k$. ∎

Считаем, что в (1.4) круг B_k – максимальный со свойством $\chi(x) \equiv 1$; так что, если $\chi(x) \not\equiv 1$ в B_γ, то $k < \gamma$.

Докажем для любого целого числа r, $k < r \le \gamma$, равенство:

$$\chi(p^{-r}) = \exp(2\pi i m p^{-r+k}), \ \exists m = 1,2,\dots,p^{\gamma-k}-1, \tag{1.5}$$

где m не зависит от r.

∎ Для $r = \gamma$ (1.5) следует из (1.4) и (1.3)

$$1 = \chi(p^{-k}) = \chi(p^{-\gamma+\gamma-k}) = \left[\chi(p^{-\gamma})\right]^{p^{\gamma-k}}.$$

Для $k < r < \gamma$ оно следует из

$$\chi(p^{-r}) = \chi(p^{-\gamma+\gamma-r}) = \left[\chi(p^{-\gamma})\right]^{p^{\gamma-r}} =$$

$$= \left[\exp(2\pi i m p^{k-\gamma})\right]^{p^{\gamma-r}} = \exp(2\pi i m p^{k-r}). \ ∎$$

Представим число m в (1.5) в виде

$$m = m_0+m_1p+\dots+m_{\gamma-k-1}p^{\gamma-k-1}, \ m_j=0,1,\dots,p-1,$$

и обозначим $\xi = p^k m$, $|\xi|_p = p^{-k}|m|_p \ge p^{-k}p^{-\gamma+k-1} \ge p^{-\gamma+1}$ и $|\xi|_p \le p^{-k}$. Тогда представление (1.5) принимает вид при $k < r \le \gamma$

$$\chi(p^{-r}) = \chi_p(p^{-r}\xi), \ \exists \xi \in \mathbb{Q}_p, \ |\xi|_p > p^{-\gamma}. \tag{1.6}$$

Пусть теперь $x \in B_\gamma \backslash B_k$. Такое x представимо в виде

$$x = p^{-r}x_0+p^{-r+1}x_1+\dots+p^{-k-1}x_{r-k-1}+x', \ \exists x' \in B_k,$$

при некотором r, $k < r \le \gamma$. Отсюда, пользуясь (1.6) и (1.4), получаем представление:

$$\chi(x) = \chi_p(\xi x), \ \exists \xi \in \mathbb{Q}_p, \ |\xi|_p > p^{-\gamma}. \tag{1.7}$$

■ $$\chi(x) = \left[\chi(p^{-r})\right]^{x_0}\left[\chi(p^{-r+1})\right]^{x_1}\dots\left[\chi(p^{-k+1})\right]^{x_{r-k-1}}\chi(x') =$$

$$= \left[\chi_p(p^{-r}\xi)\right]^{x_0}\left[\chi_p(p^{-r+1}\xi)\right]^{x_1}\dots\left[\chi_p(p^{-k+1}\xi)\right]^{x_{r-k-1}}\chi_p(x'\xi) =$$

$$= \chi_p(p^{-r}x_0\xi)\chi_p(p^{-r+1}x_1\xi)\dots(\chi_p(p^{-k+1}x_{r-k-1}\xi)\chi_p(\xi x') =$$

$$= \chi_p((p^{-r}x_0+p^{-r+1}x_1+\dots+p^{-k+1}x_{r-k-1}+x')\xi) = \chi_p(x\xi).$$ ■

Таким образом, доказано, что любой характер группы B_γ имеет вид (1.2) при $\xi = 0$ или $|\xi|_p \ge p^{-\gamma+1}$.

Пусть теперь $\chi(\xi) \not\equiv 1$ – аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$. Тогда по доказанному в круге B_γ, $\gamma\ge 1$, он представляется в виде

$$\chi(x) = \chi_p(\xi^{(0)}x), \ \xi^{(0)} \in \mathbb{Q}_p, \ |\xi^{(0)}|_p > p^{-\gamma}. \tag{1.8}$$

Докажем, что в круге $B_{\gamma+1}$ χ представляется в виде

$$\chi(x) = \chi_p(\xi^{(1)}x), \ \xi^{(1)} = \xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma, \tag{1.9}$$

$$\exists \xi_\gamma = 0,1,\dots,p-1.$$

■ Замечая, что $B_{\gamma+1} = B_\gamma \cup S_{\gamma+1}$, $B_\gamma \cap S_{\gamma+1} = \varnothing$, докажем сначала представление (1.9) на сфере $S_{\gamma+1}$. Любой элемент $x \in S_{\gamma+1}$ можно представить в виде

$$x = p^{-\gamma-1}x_0+x', \ \exists x_0 = 1,2,\dots,p-1, \ x' \in B_\gamma.$$

Тогда при некотором $\xi_\gamma = 0,1,\ldots,p-1$ будем иметь (1.9):

$$\chi(x) = \left[\chi(p^{-\gamma-1})\right]^{x_0}\chi_p(\xi^{(0)}x') = \left[\chi(p^{-\gamma})\right]^{x_0/p}\chi_p(\xi^{(0)}x') =$$

$$= \left[\chi_p(\xi^{(0)}p^{-\gamma})\right]^{x_0/p}\chi_p(\xi^{(0)}x') =$$

$$= \chi_p(\xi^{(0)}p^{-\gamma-1}x_0)\exp\left(2\pi i\frac{\xi_\gamma x_0}{p}\right)\chi_p(\xi^{(0)}x') =$$

$$= \chi_p(x_0p^{-\gamma-1}(\xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma))\chi_p(x'(\xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma)) =$$

$$= \chi_p\left((\xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma)(x_0p^{-\gamma-1}+x')\right) = \chi_p(\xi^{(1)}x).$$

В силу (1.8) формула (1.9) справедлива и в B_γ. ∎

Продолжая этот процесс в круге $B_{\gamma+2}$, получим

$$\chi(x) = \chi_p(\xi^{(2)}x),$$

$$\xi^{(2)} = \xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma+\xi_{\gamma+1}p^{\gamma+1},\quad \exists\xi_{\gamma+1} = 0,1,\ldots,p-1,$$

и т.д. В результате в $\mathbb{Q}_p$ получим представление

$$\chi(x) = \chi_p(\xi x),\quad \xi = \xi^{(0)}+\xi_\gamma p^\gamma+\xi_{\gamma+1}p^{\gamma+1}+\ldots \in \mathbb{Q}_p.$$

Таким образом, *любой аддитивный характер поля* $\mathbb{Q}_p$ *представляется в виде* (1.2) *с некоторым* $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Итак, мы установили, что отображение $\xi \mapsto \chi_p(\xi x)$ есть гомеоморфизм аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$ на группу аддитивных характеров. Это отображение взаимно однозначно. (Так как из равенства $\chi_p(\xi_1 x) = \chi_p(\xi_2 x)$ при всех $x \in \mathbb{Q}_p$ следует $\xi_1 = \xi_2$.) Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема. *Группа аддитивных характеров поля* $\mathbb{Q}_p$ *изоморфна его аддитивной группе* $\mathbb{Q}_p$, *и соответствие* $\xi \mapsto \chi_p(\xi x)$ *задает этот изоморфизм.*

Обозначим

$$\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi ix),\quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Тогда *справедлива следующая (адельная) формула*

$$\prod_{p=2}^{p=\infty} \chi_p(x) = 1, \ x \in \mathbb{Q}. \qquad (1.11)$$

■ Пусть x – произвольное положительное рациональное число:

$$x = N\, p_1^{-\alpha_1} p_2^{-\alpha_2} \dots p_n^{-\alpha_n},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, p_j – простые числа и N – целое число, не делящееся ни на одно из чисел p_j, $j = 1,2,\dots,n$. Из теории сравнений первой степени следует, что число x представимо в виде

$$x = \frac{N_1}{p^{\alpha_1}} + \frac{N_2}{p^{\alpha_2}} + \dots + \frac{N_n}{p^{\alpha_n}} + M \qquad (1.12)$$

при некоторых $N_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le N_j < p_j^{\alpha_j} - 1$ и $M \in \mathbb{Z}$. Из (1.12) получаем, что

$$\{x\}_{p_j} = \frac{N_j}{p_j^{\alpha_j}}, \ \{x\}_p = 0, \ p \ne p_j, \ j = 1,2,\dots,n,$$

откуда и следует равенство (1.11):

$$\prod_{p=2}^{\infty} \chi_p(x) = \prod_{j=1}^{n} \chi_{p_j}(x) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(2\pi i \{x\}_{p_j}\right) =$$

$$= \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} \{x\}_{p_j}\right) = \exp(2\pi i x). \ ■$$

Наконец, отметим, что любой аддитивный характер χ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ (см.п. 4 § 1) имеет вид:

$$\chi(x+\sqrt{\varepsilon}y) = \chi_p(\xi_1 x)\chi_p(\xi_2 y), \ \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{Q}_p. \qquad (1.13)$$

2. Мультипликативные характеры поля $\mathbb{Q}_p$. *Мультипликативным характером* поля $\mathbb{Q}_p$ называется характер мультипликативной группы $\mathbb{Q}_p^*$, т.е. непрерывная (комплекснозначная) функция $\pi(x)$, заданная на $\mathbb{Q}_p^*$ и удовлетворяющая условию

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \ x,y \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Аналогично определяется и (мультипликативный) характер поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ и подгруппы S_0 группы $\mathbb{Q}_p^*$, а также «окружности» $C_\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon}) : z\bar{z} = 1\right\}$ – подгруппы мультипликативной группы поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$.

Любой мультипликативный характер π поля $\mathbb{Q}_p$ имеет вид

$$\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1}\pi_0(|x|_p x), \quad |\pi_0(x')|_p = 1, \ \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

где π_0 – характер группы S_0; обратно, всякий характер π_0 группы S_0 продолжается до мультипликативного характера поля $\mathbb{Q}_p$ по формуле (2.1).

■ Пусть π – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$. Любой элемент $x \in \mathbb{Q}_p^*$ представляется в виде (см. п. 2 § 1)

$$x = |x|_p^{-1}x', \quad x' = |x|_p x \in S_0,$$

и поэтому справедливо представление (2.1)

$$\pi(x) = \pi(|x|_p^{-1})\pi(x') = \pi(p^N)\pi_0(x') =$$

$$= \left[\pi(p)\right]^N\pi_0(x') = p^{(1-\alpha)N}\pi_0(x'),$$

где обозначено $|x|_p = p^{-N}$, $\pi(p) = p^{1-\alpha}$. ■

Заметим, что множество характеров компактной группы S_0 дискретно.

Из (2.1) следует, что $\pi_0(1) = 1$.

Пусть $\pi_0(x) \not\equiv 1$ – мультипликативный характер группы S_0. Тогда найдется такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\pi_0(x) \equiv 1, \ x \in B_{-k}(1) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x-1|_p \le p^{-k}\right\}. \tag{2.2}$$

■ Аналогично доказательству соответствующего утверждения (1.4) для аддитивного характера группы B_γ (см. п. 1 § 4) и следует из условий: $\pi_0(1) = 1$, $|\pi_0(x)| = 1$ и $\pi_0(x)$ – непрерывная функция на S_0. ■

Наименьшее $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, для которого выполнено равенство (2.2), называется *рангом* характера $\pi_0(x)$.

Существует только один характер ранга 0: $\pi_0(x) \equiv 1$, так как $S_0 \subset B_0(1)$.

Пусть ранг k характера $\pi_0(x)$ положителен. Представляя число $x \in S_0$ в виде (см. п. 2 § 1)

$$x = x_0+x_1p+\ldots = (x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1})(1+Np^k)$$

при некотором $N \in B_0$ и поэтому $1+Np^k \in B_{-k}(1)$, имеем

$$\pi_0(x) = \pi_0\left[(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1})(1+Np^k)\right] =$$
$$= \pi_0(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1}).$$

Поэтому $\pi_0(x)$ *зависит лишь от* $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}$.

Докажем, что *если* $k \geq 2$, *то*

$$\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1}) = 0. \tag{2.3}$$

■ Найдется такое число $N = 0,1,\ldots,p-1$, что

$$\rho = \pi_0(1+Np^{k-1}) \neq 1.$$

(Иначе ранг характера $\pi_0(x)$ был бы меньше k.) Поэтому

$$\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0(1+Np^{k-1})\pi_0(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1}) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0\left[(x_0+x_1p+\ldots+x_{k-1}p^{k-1})(1+Np^{k-1})\right] =$$
$$= \sum_{x_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0\left[x_0+x_1p+\ldots+(x_{k-1}+x_0N)p^{k-1}\right] =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sum_{x'_{k-1}=0}^{p-1} \pi_0(x_0+x_1p+\ldots+x'_{k-1}p^{k-1}),$$

откуда и следует равенство (2.3). ■

Примеры мультипликативных характеров.

1) $\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1}$, $\pi_0(x') = 1$.

$$2)\ \pi(x) = \operatorname{sign}_\varepsilon x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}, \\ -1, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}, \end{cases} \quad p\neq 2. \tag{2.4}$$

где ε - p-адическое число, не являющееся квадратом, и $\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}$ - подгруппа группы $\mathbb{Q}^*_p$, состоящая из элементов $x \in \mathbb{Q}^*_p$, представимых в виде (см. п. 5 § 1)

$$x = a^2-\varepsilon b^2,\ (a,b) \neq 0,\ a,b \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.5}$$

Чтобы убедиться, что функция (2.4) действительно определяет мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$, достаточно показать, что

$$\operatorname{rang} \mathbb{Q}^*_p/\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon} = 2,\ \operatorname{rang} \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}/\mathbb{Q}^{*2}_p = 2. \tag{2.6}$$

■ Пусть $p \neq 2$. В п. 4 § 1 было доказано, что ранг группы $\mathbb{Q}^*_p/\mathbb{Q}^{*^2}_p$ равен 4. Поэтому для доказательства (2.6) в силу $\mathbb{Q}^{*2}_p \subset \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon} \subset \mathbb{Q}^*_p$ достаточно установить, что

$$\mathbb{Q}^{*^2}_p \neq \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon} \neq \mathbb{Q}^*_p. \tag{2.7}$$

Нужно рассмотреть три случая: $\varepsilon = \eta,\ \eta p,\ p$, где η - единица, $\eta \notin \mathbb{Q}^{*2}_p$ (см. п. 4 § 1).

Докажем, что

$$p\eta \notin \mathbb{Q}^*_{p,\eta},\ \eta \notin \mathbb{Q}^*_{p,p\eta},\ \eta \notin \mathbb{Q}^*_{p,p}. \tag{2.8}$$

Это будет означать, что $\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon} \neq \mathbb{Q}^*_p$.

■ Пусть, напротив, $p\eta \in \mathbb{Q}^*_{p,\eta}$, т.е. $p\eta = a^2-\eta b^2$ при некоторых $a,b \in \mathbb{Q}_p$, $b \neq 0$. Но последнее равенство невозможно ни при каких $a,b \neq 0$. Действительно, переписывая его в виде

$$p\eta\left(1+\frac{b^2}{p}\right) = a^2,$$

убедимся, что: 1) при $|b^2/p|_p < 1$ число $1+b^2/p$ есть квадрат p-адического числа (см. п. 4 § 1), и тогда $p\eta$ было бы квадратом; 2) при $|b^2/p|_p > 1$ число $1+p/b^2$ было бы квадратом и тогда η было бы квадратом; 3) $|b^2/p|_p = 1$ невозможно. Аналогично доказываются и остальные утверждения (2.8).

Теперь докажем, что $\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon} \neq \mathbb{Q}^{*2}_p$. Пусть $\varepsilon = \eta$, тогда $\eta \in \mathbb{Q}^*_{p,\eta}$. Пусть $\varepsilon = p, p\eta$. Тогда $-\varepsilon \in \mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}$, так как уравнение (2.5) $\varepsilon(-1+b^2) = a^2$ разрешимо при $b = 1$ и $a = 0$. ∎

Замечание. Для $p = 2$ (2.6) принимает вид

$$\operatorname{rang} \mathbb{Q}^*_2/\mathbb{Q}^*_{2,\varepsilon} = 2, \ \operatorname{rang} \mathbb{Q}^*_{2,\varepsilon}/\mathbb{Q}^{*2}_2 = 4.$$

3. Мультипликативные характеры поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$. Согласно п. 5 § 1 каждый элемент z поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ представляется в виде $z = r\sigma$ либо в виде $z = \nu r\sigma$, где $r \in \mathbb{Q}_p$ и $\nu\bar{\nu} \notin \mathbb{Q}^{*2}_p$, $\nu \in \mathbb{Q}^*_p(\sqrt{\varepsilon})$ и $\sigma\bar{\sigma} = 1$ (т.е. $\sigma \in C_\varepsilon$).

Пусть $\pi(z)$ – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$. Обозначим через π_1 и π_2 его сужения соответственно на поле $\mathbb{Q}_p$ и на «окружность» C_ε. Тогда имеем

$$\pi(r\sigma) = \pi_1(r)\pi_2(\sigma), \ \pi(\nu r\sigma) = \pi_1(\nu)\pi_2(r\sigma). \tag{3.1}$$

Из равенства $\rho\sigma = (-\rho)(-\sigma)$ получаем условие

$$\pi_1(-1)\pi_2(-1) = 1. \tag{3.2}$$

Далее, поскольку

$$\nu^2 = \nu\bar{\nu}\nu/\bar{\nu}, \ \nu\bar{\nu} \in \mathbb{Q}^*_p, \ \nu/\bar{\nu} \in C_\varepsilon,$$

имеем равенство

$$\pi^2(\nu) = \pi_1(\nu\bar{\nu})\pi_2(\nu/\bar{\nu}). \tag{3.3}$$

Обратно, пусть π_1 и π_2 – произвольные мультипликативные характеры соответственно поля $\mathbb{Q}_p$ и «окружности» C_ε, связанные соотношением (3.2). Определим функцию $\pi(z)$ на мультипликативной группе $\mathbb{Q}^*_p(\sqrt{\varepsilon})$ по формулам (3.1) и (3.3) для некоторого $\nu \in \mathbb{Q}^*_p(\sqrt{\varepsilon})$, $\nu\bar{\nu} \notin \mathbb{Q}^{*2}_p$. *Построенная функция $\pi(z)$ будет мультипликативным характером поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$.*

Замечание. Множество мультипликативных характеров π_2 компактной группы C_ε дискретно.

§ 4. Интегрирование

В этом параграфе будет развита теория интегрирования комплекснозначных функций p-адических аргументов и даны примеры вычисления конкретных интегралов.

1. Инвариантная мера в поле $\mathbb{Q}_p$. Поскольку поле $\mathbb{Q}_p$ образует локально компактную коммутативную группу по сложению, то в $\mathbb{Q}_p$ существует мера Хаара - положительная мера dx, инвариантная относительно сдвигов, $d(x+a) = dx$. Условимся меру dx нормировать так, чтобы

$$\int_{|x|_p\le 1} dx = 1. \tag{1.1}$$

При таком соглашении мера dx единственна.

Для любого компакта $K \subset \mathbb{Q}_p$ мера dx определяет положительный линейный непрерывный функционал на $C(K)$ по формуле

$$\int_K f(x)dx, \quad f \in C(K).$$

Здесь $C(K)$ - пространство непрерывных функций на K с нормой

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|.$$

Пусть A обозначает измеримое множество в $\mathbb{Q}_p$ (не обязательно ограниченное, например, $A = \mathbb{Q}_p$). Множество измеримых функций, заданых на A, для которых

$$\int_A |f(x)|^\rho dx < \infty \quad (\rho\ge 1),$$

обозначим через $L^\rho(A)$; $L^\rho = L^\rho(\mathbb{Q}_p)$. В $L^\rho(A)$ введем норму

$$\|f\|_\rho = \left[\int_A |f(x)|^\rho dx\right]^{1/\rho}, \quad f \in L^\rho(A).$$

Пространство $L^\rho(A)$ можно рассматривать как подпространство $L^\rho = L^\rho(\mathbb{Q}_p)$, состоящее из тех и только тех функций из L^ρ, которые обращаются в нуль почти везде вне A.

Пусть O - открытое множество в $\mathbb{Q}_p$. Отметим, что множество функций $\varphi \in C(O)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, где K пробегает произвольные компакты, содержащиеся в O, плотно в $L^\rho(O)$. (Здесь и впредь supp φ обозначает носитель функции φ.)

Обозначим через $L^{\rho}_{loc}(O)$, $L^{\rho}_{loc} = L^{\rho}_{loc}(\mathbb{Q}_p)$, множество функций $f(x)$, заданных на O, и таких, что $f \in L^{\rho}(K)$ для любого компакта $K \subset O$.

Ясно, что $L^{\rho}(O) \subset L^{\rho}_{loc}(O)$. Если O - открытый компакт, то $L^{\rho}(O) = L^{\rho}_{loc}(O)$.

Функцию $f \in L^{1}_{loc}$ назовем *интегрируемой* (в несобственном смысле) на $\mathbb{Q}_p$, если существует

$$\lim_{N\to\infty} \int_{B_N} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Этот предел называется *интегралом* (несобственным) функции f по $\mathbb{Q}_p$ и обозначается $\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\,dx$, так что

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\,dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Аналогично введем и несобственный интеграл относительно точки $a \in \mathbb{Q}_p$: если $f \in L^{1}_{loc}(\mathbb{Q}_p \setminus \{a\})$, то

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\,dx = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to-\infty}} \sum_{\gamma=M}^{N} \int_{S_\gamma(a)} f(x)\,dx.$$

2. Замена переменных в интегралах. Сначала докажем формулу

$$d(xa) = |a|_p\,dx, \quad a \in \mathbb{Q}_p^{*}. \tag{2.1}$$

■ При любом $a \in \mathbb{Q}_p^{*}$ мера $d(xa)$ инвариантна относительно сдвигов, а потому она отличается от меры dx на множитель $C(a) > 0$, $d(xa) = C(a)\,dx$. Отсюда следует, что $C(a)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию $C(ab) = C(a)C(b)$, т.е. C есть мультипликативный характер группы $\mathbb{Q}_p^{*}$ и поэтому имеет вид (2.1) п. 2 § 3:

$$C(a) = |a|_p^{\alpha-1}\pi_0(a'), \quad |\pi_0(a')| = 1, \; a' \in S_0, \; \alpha \in \mathbb{C}.$$

Но $C(a) > 0$, и поэтому $\pi_0(x') = 1$. Следовательно, $C(a) =$

$= |a|_p^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Найдем α. Так как B_0 есть объединение взаимно не пересекающихся множеств pB_0+k, $k = 0,1,\dots,p-1$ (см. п. 3 § 1), меры которых равны, то $\operatorname{mes}(B_0) = p\cdot\operatorname{mes}(pB_0)$ и, значит, $d(xp) = 1/p\,dx$, т.е. $C(p) = 1/p = |p|_p$. Таким образом, $\alpha = 2$, $C(a) = |a|_p$, и справедливо (2.1). ■

Применяя формулу (2.1) к интегралу, получим

$$\int_K f(x)\,dx = |a|_p \int_{\frac{K-b}{a}} f(ay+b)\,dy\ , \quad a \neq 0. \tag{2.2}$$

Покажем, как использовать эту формулу для вычисления простейших интегралов.

Пример 1.

$$\int_{B_\gamma} dx = p^\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Вытекает из формул (2.1) и (2.2):

$$\int_{|x|_p \le p^\gamma} dx = \int_{|y|_p \le 1} d(p^{-\gamma}y) = |p^{-\gamma}|_p \int_{|y|_p \le 1} dy = p^\gamma .$$

Пример 2.

$$\int_{S_\gamma} dx = p^\gamma(1-\tfrac{1}{p}),\ \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Вытекает из (2.3):

$$\int_{S_\gamma} dx = \int_{B_\gamma} dx - \int_{B_{\gamma-1}} dx.$$

Таким образом, «площадь» окружности в $\mathbb{Q}_p$ положительна!

Пример 3.

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\,dx = (1-\tfrac{1}{p}) \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(p^\gamma)\,p^\gamma .$$

Вытекает из (1.3) и (2.4). В частности:

Пример 4.

$$\int\limits_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} dx = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}, \; Re\ \alpha > 0. \tag{2.5}$$

Пример 5.

$$\int\limits_{B_0} \ln|x|_p dx = -\frac{\ln p}{p-1}. \tag{2.6}$$

■ $$\int\limits_{B_0} \ln|x|_p dx = -(1-\frac{1}{p})\ln p\sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma p^{-\gamma} = -\frac{\ln p}{p-1}.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma p^{-\gamma} = \frac{1}{p(1-p^{-1})^2}. \; ■ \tag{2.7}$$

Замечание. Инвариантная мера d^*x мультипликативной группы $\mathbb{Q}_p^*$ поля $\mathbb{Q}_p$ имеет вид

$$d^*x = |x|_p^{-1} dx.$$

■ Вытекает из (2.1)

$$d^*(ax) = |ax|_p^{-1} d(ax) = |x|_p^{-1} dx = d^*x, \; a \in \mathbb{Q}_p^*. \; ■$$

Общая замена переменных в интеграле. *Пусть $\sigma(y)$ – аналитическая функция, гомеоморфно отображающая открытый компакт $K_1 \subset \mathbb{Q}_p$ на (открытый) компакт $K \subset \mathbb{Q}_p$, причем $\sigma'(y) \neq 0$, $y \in K_1$. Тогда для любой $f \in C(K)$ справедлива формула*

$$\int\limits_K f(x) dx = \int\limits_{K_1} |\sigma'(y)|_p f(\sigma(y)) dy \tag{2.8}$$

■ Так как интеграл есть линейный непрерывный функционал на $C(K)$ (см. п. 1), то формулу (2.8) достаточно доказать для локально постоянных функций, множество которых плотно в $C(K)$ (см п. 2 § 6). Значит, равенство (2.8) достаточно доказать для $f(x) \equiv 1$, т.е.

$$\int_K dx = \int_{K_1} |\sigma'(y)|_p dy. \tag{2.9}$$

Покроем компакт K_1 конечным числом кругов $B_\rho(y_k)$ без общих точек (см. п. 3 § 1) достаточно малого радиуса p^ρ так, чтобы

$$|\sigma'(y)|_p = |\sigma'(y_k)|_p = p^{r_k}$$

в $B_\rho(y_k)$ и при обратном отображении круг $B_\rho(y_k)$ переходил на круг $B_{\rho+r_k}(x_k)$, $x_k = \sigma(y_k)$ (по теореме об обратной функции п. 5 § 2). Отсюда, пользуясь формулой (2.3), получим равенство (2.9)

$$\int_K dx = \sum_k \int_{B_{\rho+r_k}(x_k)} dx = \sum_k p^{\rho+r_k} = \sum_k \int_{B_\rho(y_k)} p^{r_k} dy =$$

$$= \sum_k \int_{B_\rho(y_k)} |\sigma'(y_k)|_p dy =$$

$$= \sum_k \int_{B_\rho(y_k)} |\sigma'(y)|_p dy = \int_{K_1} |\sigma'(y)|_p dy. \blacksquare$$

Примеры. Если f интегрируема на $\mathbb{Q}_p$, то (см. (1.4))

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{1}{|y|_p^2} f\left(\frac{1}{y}\right) dy. \tag{2.10}$$

Справедливы также формулы (см. п. 4 § 2)

$$\int_{G_p} f(x)dx = \int_{G_p} f(\sin y)dy = \int_{G_p} f(\operatorname{tg} y)dy. \tag{2.11}$$

$$\int_{G_p} f(x)dx = \int_{J_p} f(\ln y)dy, \quad \int_{J_p} f(x)dx = \int_{G_p} f(e^y)dy. \tag{2.12}$$

3. Примеры вычисления интегралов. В дополнение к п. 2 § 4 приведем ряд примеров вычисления интегралов.

Пример 6. $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \begin{cases} p^\gamma, & |\xi|_p \le p^{-\gamma}, \\ 0, & |\xi|_p \ge p^{-\gamma+1}. \end{cases} \tag{3.1}$$

■ При $|\xi|_p \le p^{-\gamma}$ $|\xi x|_p \le 1$ и поэтому $\chi_p(\xi x) = 1$ и, следовательно, в силу (2.3)

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \int_{B_\gamma} dx = p^\gamma.$$

Если же $|\xi|_p \ge p^{-\gamma+1}$, то при $|x'|_p = p^\gamma$ $|\xi x'|_p = |\xi|_p|x'|_p \ge p$, так что $\chi_p(\xi x') \ne 1$. Поэтому, совершая замену переменной $x = y-x'$, получим, что искомый интеграл равен нулю:

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \int_{B_\gamma(x')} \chi_p(\xi(y-x'))dy = \chi_p(-\xi x')\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi y)dy.$$

Здесь мы воспользовались тем свойством, что $B_\gamma(x') = B_\gamma$, если $|x'|_p \le p^\gamma$ (см. п. 3 § 1). ■

Пример 7. $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \begin{cases} p^\gamma(1-\frac{1}{p}), & |\xi|_p \le p^{-\gamma}, \\ -p^{\gamma-1}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \\ 0, & |\xi|_p \ge p^{-\gamma+2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

■ Вытекает из (3.1), так как

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)dx - \int_{B_{\gamma-1}} \chi_p(\xi x)dx. \text{ ■}$$

Пример 8. Если $\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}|f(p^{-\gamma})| < \infty$, то

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx = \left(1-\frac{1}{p}\right)|\xi|_p^{-1}\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} f(p^{-\gamma}|\xi|_p^{-1}) -$$

$$- |\xi|_p^{-1} f(p|\xi|_p^{-1}), \quad \xi\neq 0. \qquad (3.3)$$

■ Вытекает из формул (1.3) и (3.2). Обозначая $|\xi|_p = p^N$, имеем

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(p^{\gamma})\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)\,dx =$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=-\infty}^{-N} f(p^{\gamma})p^{\gamma} - f(p^{-N+1})p^{-N} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty} f(p^{-\gamma-N})p^{-\gamma-N} - f(p^{-N+1})p^{-N}. \ ■$$

Пример 9.

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \chi_p(\xi x)\,dx = 0, \quad \xi \neq 0. \qquad (3.4)$$

Вытекает из (3.3) при $f \equiv 1$.

Пример 10.

$$\int_{\mathbf{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,dx = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}|\xi|_p^{-\alpha}, \quad \mathrm{Re}\ \alpha > 0. \qquad (3.5)$$

■ Вытекает из (3.3) при $f = |x|_p^{\alpha-1}$:

$$\int_{\mathbf{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,dx = \left(1-\frac{1}{p}\right)|\xi|_p^{-1}\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma-(\alpha-1)\gamma}|\xi|_p^{-(\alpha-1)} -$$

$$- |\xi|_p^{-1} p^{\alpha-1} |\xi|_p^{-\alpha+1} = \left[(1-\frac{1}{p})\frac{1}{1-p^{-\alpha}} - p^{\alpha-1}\right] |\xi|_p^{-\alpha}. \blacksquare$$

Пример 11.

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \ln|x|_p \chi_p(\xi x) dx = - \frac{p \ln p}{p-1} |\xi|_p^{-1}, \quad \xi \neq 0. \tag{3.6}$$

■ Вытекает из (3.3) при $f = \ln|x|_p$:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \ln|x|_p \chi_p(\xi x) dx = (1-\frac{1}{p}) |\xi|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}(-\gamma \ln p - \ln|\xi|_p) -$$

$$- |\xi|_p^{-1} \ln p + |\xi|_p^{-1} \ln|\xi|_p = -|\xi|_p^{-1} \ln p \left[1+(1-\frac{1}{p}) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}\gamma\right] =$$

$$= -|\xi|_p^{-1} \ln p \left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

Здесь мы воспользовались равенством (2.7). ■

Пример 12.

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2+m^2} dx = (1-\frac{1}{p}) \frac{|\xi|_p}{p^2+m^2|\xi|_p^2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \frac{p^2-p^{-2\gamma}}{p^{-2\gamma}+m^2|\xi|_p^2}. \tag{3.7}$$

■ Вытекает из (3.3) при $f = 1/(|x|_p^2+m^2)$:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2+m^2} dx = (1-\frac{1}{p}) |\xi|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{p^{-\gamma}}{p^{-2\gamma}|\xi|_p^{-2}+m^2} - \frac{|\xi|_p^{-1}}{p^2|\xi|_p^{-2}+m^2} =$$

$$= (1-\frac{1}{p}) |\xi|_p \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \left(\frac{1}{p^{-2\gamma}+m^2|\xi|_p^2} - \frac{1}{p^2+m^2|\xi|_p^2} \right). \blacksquare$$

Из формулы (3.7) вытекает асимптотика

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2+m^2} dx \sim \frac{p^4+p^3}{p^2+p+1} \frac{1}{m^4|\xi|_p^3}, \quad |\xi|_p \to \infty. \tag{3.8}$$

$$\blacksquare\quad \lim_{|\xi|_p\to\infty} |\xi|_p^3 \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2+m^2}\, dx =$$

$$= (1-\frac{1}{p})\frac{1}{m^4} \lim_{|\xi|_p\to\infty} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}(p^2-p^{-2\gamma})\left(1 - \frac{p^{-2\gamma}}{p^{-2\gamma}+m^2|\xi|_p^2}\right) =$$

$$= (1-\frac{1}{p})\frac{1}{m^4}\sum_{\gamma=0}^{\infty}(p^{2-\gamma}-p^{-3\gamma}) = (1 - \frac{1}{p})\frac{1}{m^4}\left(\frac{p^2}{1-p^{-1}} - \frac{1}{1-p^{-3}}\right). \blacksquare$$

Заметим, что в вещественном случае аналогичный интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{x^2+m^2}dx = \frac{\pi}{m}e^{-2\pi m|\xi|} \tag{3.9}$$

и, следовательно, экспоненциально убывает при $|\xi|\to\infty$.

Пример 13.

$$\int_{S_\gamma, x_0=k} dx = p^{\gamma-1},\ \gamma \in \mathbb{Z},\ k = 1,2,\ldots,p-1. \tag{3.10}$$

■ В силу инвариантности меры dx относительно сдвигов, из формулы (2.4) имеем :

$$\int_{S_\gamma} dx = p^\gamma(1-\frac{1}{p}) = \sum_{k=1}^{p-1} \int_{S_\gamma, x_0=k} dx = (p-1) \int_{S_\gamma, x_0=k} dx,$$

откуда и следует формула (3.10). ■

Пример 14.

$$\int_{S_\gamma, x_0\neq k} dx = p^\gamma(1-\frac{2}{p}),\ \gamma \in \mathbb{Z},\ k = 1,2,\ldots,p-1. \tag{3.11}$$

■ Вытекает из формул (2.1) и (3.10):

$$\int_{S_\gamma, x_0\neq k} dx = \int_{S_\gamma} dx - \int_{S_\gamma, x_0=k} dx = p^\gamma(1 - \frac{1}{p}) - p^{\gamma-1}. \blacksquare$$

Пример 15.

$$\int\limits_{S_\gamma,\, x_l=k} dx = p^{\gamma-l}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{3.12}$$

$$\gamma \in \mathbb{Z},\ k = 0,1,2,\ldots,p-1,\ l = 1,2,\ldots$$

Пример 16.

$$\int\limits_{S_\gamma,\ x_0=k_0,\ x_1=k_1,\ \ldots,\ x_l=k_l} dx = p^{\gamma-l-1}, \tag{3.13}$$

$$\gamma\in\mathbb{Z},\ 0\le k_j\le p-1,\ k_0\ne 0,\ l=0,1,\ldots$$

Пример 17.

$$\int\limits_{\substack{S_\gamma,\ x_0=k_0,\ x_1=k_1,\ \ldots,\\ x_l=k_l,\ x_{l+1}\ne k_{l+1}}} dx = p^{\gamma-l-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{3.14}$$

$$\gamma\in\mathbb{Z},\ 0\le k_j\le p-1,\ k_0\ne 0,\ l=0,1,\ldots$$

Пример 18.

$$\int\limits_{|x|_p=1} |1-x|_p^{\alpha-1}dx = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})},\ \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{3.15}$$

■ Пользуясь формулами (3.11) и (3.14), получим (3.15):

$$\int\limits_{S_0} |1-x|_p^{\alpha-1}dx = \int\limits_{S_0,x_0\ne 1} |1-x|_p^{\alpha-1}dx +$$

$$+ \int\limits_{S_0,x_0=1,x_1\ne 0} |1-x|_p^{\alpha-1}dx + \int\limits_{S_0,x_0=1,x_1=0,x_2\ne 0} |1-x|_p^{\alpha-1}dx +$$

$$+ \ldots = \int\limits_{S_0, x_0 \neq 1} dx + p^{1-\alpha} \int\limits_{S_0, x_0 = 1, x_1 \neq 0} dx +$$

$$+ p^{2(1-\alpha)} \int\limits_{S_0, x_0=1, x_1=0, x_2 \neq 0} dx + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^{\alpha}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^{2\alpha}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \ldots = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{1-p^{-\alpha}} - \frac{1}{p}. \blacksquare$$

Пример 19.

$$\int\limits_{|x|_p=1} \ln|1-x|_p dx = -\frac{\ln p}{p-1}. \qquad (3.16)$$

■ Действуя, как в примере 18, получим

$$\int\limits_{S_0} \ln|1-x|_p dx = \ln 1 \int\limits_{S_0, x_0 \neq 1} dx + \ln \frac{1}{p} \int\limits_{S_0, x_0=1, x_1 \neq 0} dx +$$

$$+ \ln \frac{1}{p^2} \int\limits_{S_0, x_0=1, x_1=0, x_2 \neq 0} dx + \ldots =$$

$$= \ln \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \ldots\right) = \ln \frac{1}{p} \frac{1}{p(1-p^{-1})}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (2.7). ■

4. Интегрирование в $\mathbb{Q}_p^n$. Инвариантная мера dx на $\mathbb{Q}_p$ стандартным образом распространяется до инвариантной меры на $\mathbb{Q}_p^n$ (см. п. 7 § 1): $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, и все сказанное в п. 1 для $\mathbb{Q}_p$ переносится на $\mathbb{Q}_p^n$. Сведение многомерного интегрирования к одномерному обеспечивается следующей теоремой.

Теорема Фубини (о перемене порядка интегрирования). *Пусть функция $f(x,y)$ переменных $x \in \mathbb{Q}_p^n$ и $y \in \mathbb{Q}_p^m$ такова, что повторный интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p^n}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^m} |f(x,y)| dy\right] dx$$

существует. Тогда функция f интегрируема на $\mathbb{Q}_p^{n+m}$, сущест-

вуют все повторные интегралы от нее и они равны:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p^n}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^m} f(x,y)dy\right]dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^{n+m}} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^m}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^n} f(x,y)dx\right]dy \qquad (4.1)$$

Обратно, если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{Q}_p^{n+m}$, то все интегралы в (4.1) *существуют и справедливы равенства* (4.1).

Справедлива **формула замены переменных**: *пусть $x = x(y)$ (т.е. $x_i = x_i(y_1,y_2,\dots,y_n)$, $i = 1,2,\dots,n$) – гомеоморфное отображение открытого компакта $K_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$ на (открытый) компакт $K \subset \mathbb{Q}_p^n$, причем функции $x_i(y)$ – аналитические в K_1 и*

$$\det \frac{\partial x(y)}{\partial y} = \det\left\|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right\| \neq 0, \ y \in K_1.$$

Тогда для любой $f \in L^1(K)$ справедливо равенство

$$\int\limits_K f(x)dx = \int\limits_{K_1} \left|\det \frac{\partial x(y)}{\partial y}\right|_p f(x(y))dy. \qquad (4.2)$$

∎ Доказательство формулы (4.2) проводится по индукции по n как и в вещественном случае с использованием одномерной формулы (2.8). ∎

Отметим еще аналог **теоремы Лебега** о предельном переходе под знаком интеграла: *если последовательность $\{f_k, k\to\infty\}$ функций $f_k \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ сходится почти всюду в $\mathbb{Q}_p^n$ (относительно меры dx) к функции $f(x)$, и существует $\psi \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ такая, что почти всюду в $\mathbb{Q}_p^n$*

$$|f_k(x)| \le \psi(x), \ k = 1,2,\dots, \ \psi \in L^1(\mathbb{Q}_p^n),$$

то справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Q}_p^n} f_k(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^n} f(x)dx. \qquad (4.3)$$

Пример 20. Функция

$$\left(|x_1|_p^2 + |x_2|_p^2 + \ldots + |x_n|_p^2\right)^{-\alpha}$$

локально интегрируема в $\mathbb{Q}_p^n$, если $2\alpha < n$.

■ Пользуясь формулой (2.4), имеем

$$I = \int_{B_0}\int_{B_0}\ldots\int_{B_0}\left(|x_1|_p^2 + |x_2|_p^2 + \ldots + |x_n|_p^2\right)^{-\alpha} dx_1 dx_2' \ldots dx_n =$$

$$= (1-\tfrac{1}{p})^n \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n=-\infty}^{0} p^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n}\Big(p^{2\gamma_1} +$$

$$+ p^{2\gamma_2}+\ldots+p^{2\gamma_n}\Big)^{-\alpha} = (1-\tfrac{1}{p})^n \sum_{N=0}^{\infty} p^{-N} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=0}^{N}\Big(p^{-2\nu_1} +$$

$$+ p^{-2\nu_2}+\ldots+p^{-2\nu_{n-1}} + p^{-2N+2\nu_1+\ldots 2\nu_{n-1}}\Big)^{-\alpha}.$$

Отметим равенство

$$\min_{\substack{0\le\alpha_j\le 1\\ j=1,2,\ldots,n-1}}\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{p^{-2N}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right) =$$

$$= \min_{0\le\alpha\le 1}\left[(n-1)\alpha + \frac{p^{-2N}}{\alpha^{n-1}}\right] = np^{-\frac{2N}{n}}.$$

Продолжая наши оценки, получим

$$I \le (1 - \tfrac{1}{p})^n \sum_{N=0}^{\infty} p^{-N} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{n-1}=0}^{N} n^{-\alpha}\left(p^{-\frac{2N}{n}}\right)^{\alpha} \le$$

$$\le n^{-\alpha}\sum_{N=0}^{\infty} p^{-N\left(1-\frac{2\alpha}{n}\right)} N^{n-1} < \infty. \quad ■$$

Пример 21. $p \equiv 3 \pmod 4$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^2} f((x,x))\chi_p((\xi,x))dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{|(\xi,\xi)|_p}\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-2\gamma}f\left(\frac{p^{-2\gamma}}{|(\xi,\xi)|_p}\right) - f\left(\frac{p^2}{|(\xi,\xi)|_p}\right)\right] \quad (4.4)$$

при условии

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-2\gamma}|f(p^{-2\gamma})| < \infty.$$

■ Обозначим искомый интеграл через $J(\xi)$. В силу его симметрии по $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, формулу (4.4) достаточно доказать при $|\xi_1|_p \le |\xi_2|_p$. Обозначим $|\xi_1|_p = p^{-M}$, $|\xi_2|_p = p^{-N}$, $N \le M$. Пользуясь равенством

$$|(x,x)|_p = |x_1^2+x_2^2|_p = \max(|x_1|_p^2, |x_2|_p^2)$$

(см. п. 4 § 1) и формулами (3.1), (3.2) и (3.3), получим

$$J(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\left[\int\limits_{|x_2|_p\le|x_1|_p} f\left(|x_1|_p^2\right)\chi_p(\xi_2x_2)\,dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|x_2|_p>|x_1|_p} f\left(|x_2|_p^2\right)\chi_p(\xi_2x_2)\,dx_2\right]\chi_p(\xi_1x_1)\,dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\left(|x_1|_p^2\right)|x_1|_p\chi_p(\xi_1x_1)\Omega\left(|\xi_2x_1|_p\right)dx_1 +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\left(|x_2|_p^2\right)\chi_p(\xi_2x_2)\int\limits_{|x_1|_p\le\frac{1}{p}|x_2|_p}\chi_p(\xi_1x_1)\,dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{|x_1|_p\le|\xi_2|_p^{-1}} f\left(|x_1|_p^2\right)|x_1|_p\,dx_1 +$$

$$+ \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\left(|x_2|_p^2\right)|x_2|_p\chi_p(\xi_2x_2)\Omega\left(\frac{1}{p}|\xi_1x_2|_p\right)dx_2 =$$

$$= \int\limits_{|x_1|_p \le |\xi_2|_p^{-1}} f\left(|x_1|_p^2\right) |x_1|_p dx_1 +$$

$$+ \frac{1}{p} \int\limits_{|x_2|_p \le |\xi_2|_p^{-1}} f\left(|x_2|_p^2\right) |x_2|_p dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{p|\xi_2|_p^{-1} \le |x_2|_p \le p|\xi_1|_p^{-1}} f\left(|x_2|_p^2\right) |x_2|_p \chi_p(\xi_2 x_2) dx_2 =$$

$$= (1+\frac{1}{p}) \sum_{\gamma=-\infty}^{N} p^{2\gamma} f(p^{2\gamma}) (1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p} \sum_{\gamma=N+1}^{M+1} p^{\gamma} f(p^{2\gamma}) \int\limits_{S_\gamma} \chi_p(\xi_2 x_2) dx_2 =$$

$$= \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma+2N} f(p^{-2\gamma+2N}) - \frac{1}{p} p^{2N+1} f(p^{2N+2}) =$$

$$= |\xi_2|_p^{-2} \left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f(p^{-2\gamma} |\xi_2|_p^{-2}) - f(p^2 |\xi_2|_p^{-2})\right],$$

откуда и следует формула (4.4), если заметить, что

$$|\xi_2|_p^2 = |\xi_1^2+\xi_2^2|_p = |(\xi,\xi)|_p \text{ при } |\xi_1|_p \le |\xi_2|_p. \blacksquare$$

В частности, для пропагатора

$$G = (|(x,x)|_p + m^2)^{-1} \tag{4.5}$$

(ср. (3.7)) формула (4.4) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p((\xi,x))}{|(x,x)|_p + m^2} dx =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} \left(\frac{1}{p^{-2\gamma} + m^2 |(\xi,\xi)|_p} - \frac{1}{p^2 + m^2 |(\xi,\xi)|_p} \right). \tag{4.6}$$

Отсюда, как и в случае пропагатора (3.7), заключаем, что правая часть равенства (4.6) положительна и имеет при $|(\xi,\xi)|_p \to \infty$ асимптотику

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\chi_p((\xi,x))}{|(x,x)|_p+m^2}\,dx \sim \frac{p^4}{p^2+1}m^{-4}|(\xi,\xi)|_p^{-2}. \tag{4.7}$$

Пример 22. $p \equiv 1 \pmod 4$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^2} f((x,x))\chi_p((\xi,x))\,dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{|(\xi,\xi)|_p}\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\right)p^{-\gamma}f\left(\frac{p^{-\gamma}}{|(\xi,\xi)|_p}\right) -\right.$$

$$\left. - 2\left(1-\frac{1}{p}\right)f\left(\frac{p}{|(\xi,\xi)|_p}\right) + f\left(\frac{p^2}{|(\xi,\xi)|_p}\right)\right] \tag{4.8}$$

при условии

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}\gamma p^{-\gamma}|f(p^{-\gamma})| < \infty.$$

■ Существует решение $\tau \in \mathbb{Q}_p$ уравнения $\tau^2 = -1$ (см. п. 4 § 1). Замена переменных

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1-\tau x_2),\ x_1 = y_1+y_2, \qquad \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = -2\tau$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(x_1+\tau x_2),\ x_2 = \tau(y_1-y_2),$$

дает

$$|(x,x)|_p = |x_1^2+x_2^2|_p = |2(1-\tau)y_1y_2|_p,$$

$$(\xi,x) = \xi_1x_1+\xi_2x_2 = \xi_1(y_1+y_2)+\xi_2\tau(y_1-y_2) =$$

$$= \zeta_1y_1+\zeta_2y_2 = (\zeta,y),$$

где обозначено

$$\zeta_1=\xi_1+\tau\xi_2,\ \zeta_2 = \xi_1-\tau\xi_2\ (\zeta_1\zeta_2 = \xi_1^2+\xi_2^2 = (\xi,\xi)).$$

Поэтому искомый интеграл $J(\xi)$ принимает вид

$$J(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\Big(|y_1|_p, |y_2|_p\Big)\chi_p((\zeta, y))\,dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\Big(|y_1|_p, |y_2|_p\Big)\chi_p(\zeta_2, y_2)\,dy_2\right]\chi_p(\zeta_1, y_1)\,dy_1. \qquad (4.9)$$

Применяя к повторному интегралу в (4.9) формулу (3.3) дважды, получим формулу (4.8):

$$J(\xi) =$$

$$= (1-\tfrac{1}{p})\sum_{\gamma'=0}^{\infty} p^{-\gamma'}\left[(1-\tfrac{1}{p})\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} f\Big(p^{-\gamma-\gamma'}|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1}\Big)|\zeta_2|_p^{-1} -\right.$$

$$\left.- f\Big(p^{-\gamma'+1}|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1}\Big)|\zeta_2|_p^{-1}\right]|\zeta_1|_p^{-1} -$$

$$- (1-\tfrac{1}{p})\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} f\Big(p^{-\gamma+1}|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1}\Big)|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1} +$$

$$+ f\Big(p^2|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1}\Big)|\zeta_1|_p^{-1}|\zeta_2|_p^{-1} =$$

$$= |\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\left[\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2\sum_{\gamma=0}^{\infty}(\gamma+1)p^{-\gamma} f\Big(p^{-\gamma}|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big) -\right.$$

$$\left.- 2\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} f\Big(p^{1-\gamma}|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big) + f\Big(p^2|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big)\right] =$$

$$= |\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\left[\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\sum_{\gamma=0}^{\infty}\Big(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\Big)p^{-\gamma} f\Big(p^{-\gamma}|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big) -\right.$$

$$\left.- 2(1-\tfrac{1}{p}) f\Big(p|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big) + f\Big(p^2|\zeta_1\zeta_2|_p^{-1}\Big)\right]. \ \blacksquare$$

§ 5. Гауссовы интегралы

Интегралы вида

$$\int \chi_p(ax^2+bx)\,dx$$

называются гауссовыми. Здесь мы рассмотрим те случаи, когда множеством интегрирования является окружность S_γ, круг B_γ и все пространство $\mathbb{Q}_p$. В частности, будет получена важная формула

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(ax^2+bx)\,dx = \lambda_p(a)\,|a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right), \quad a \neq 0.$$

Вычисление гауссовых интегралов при $p \neq 2$ основывается на суммах Гаусса

$$\sum_{k=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i\frac{mk^2}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ i\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \tag{$*$}$$

где m – целое число, не делящееся на p, $\left(\frac{m}{p}\right)$ – символ Лежандра (см. п. 4 § 1).

Здесь мы использовали важную для дальнейшего теоретико-числовую функцию $\lambda_p(a)\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}$:

$$\lambda_p(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma(a) \text{ четное}, \\ \left(\frac{a_0}{p}\right), & \text{если } \gamma(a) \text{ нечетное}, \ p \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\frac{a_0}{p}\right)i, & \text{если } \gamma(a) \text{ нечетное}, \ p \equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(-1)^{a_1} i\right], & \text{если } \gamma(a) \text{ четное}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\, i^{a_1}(-1)^{a_2}, & \text{если } \gamma(a) \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Отметим простейшие легко проверяемые свойства функции $\lambda_p(a)$:

$$|\lambda_p(a)|_p = 1, \ \lambda_p(a)\lambda_p(-a) = 1, \ a \neq 0,$$

$$\lambda_p(ac^2) = \lambda_p(a), \ a,c \neq 0.$$

Дальнейшие свойства функции $\lambda_p(a)$ будут приведены в п. 4.

В терминах функции $\lambda_p(a)$ сумма Гаусса $(*)$ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{mk^2}{p}\right) = \lambda_p(m)\sqrt{p}, \ p \neq 2. \qquad (*)$$

1. Гауссовы интегралы по окружностям S_γ.

Пример 1. $p \neq 2$, $|\varepsilon|_p = 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\varepsilon(x-y)^2)dy = \begin{cases} p^\gamma(1-\frac{1}{p})\chi_p(\varepsilon x^2), |x|_p \leq p^{-\gamma}, & \gamma \leq 0, \\ -p^{\gamma-1}\chi_p(\varepsilon x^2), \quad |x|_p = p^{-\gamma+1}, & \gamma \leq 0, \\ 0, \quad |x|_p \geq p^{-\gamma+2}, & \gamma \leq 0, \\ 1, \quad |x|_p = p^\gamma, & \gamma \geq 1, \\ 0, \quad |x|_p \neq p^\gamma, & \gamma \geq 1. \end{cases} \qquad (1.1)$$

■ При $\gamma \leq 0$ и $|x|_p \leq p^{-\gamma}$, $y \in S_\gamma$ имеем

$$|\varepsilon(y^2-2xy)|_p = |\varepsilon|_p|(y^2-2xy)|_p \leq$$

$$\leq \max\left(|y|_p^2, |2xy|_p\right) \leq \max\left(p^{2\gamma}, p^\gamma p^{-\gamma}\right) = 1,$$

и поэтому

$$\chi_p(\varepsilon(x-y)^2) = \chi_p(\varepsilon(y^2-2xy)+\varepsilon x^2) =$$

$$= \chi_p(\varepsilon(y^2-2xy))\chi_p(\varepsilon x^2) = \chi_p(\varepsilon x^2).$$

Искомый интеграл в силу (2.4) п. 4 § 2 равен

$$\chi_p(\varepsilon x^2)\int\limits_{S_\gamma} dx = p^\gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)\chi_p(\varepsilon x^2).$$

При $\gamma \le 0$ и $|x|_p = p^{-\gamma+1}$, $y \in S_\gamma$ имеем $|\varepsilon y^2|_p = p^{2\gamma} \le 1$ и

$$\chi_p(\varepsilon(x-y)^2) = \chi_p(\varepsilon x^2+\varepsilon y^2-2\varepsilon xy) = \chi_p(\varepsilon x^2)\chi_p(-2\varepsilon xy).$$

Искомый интеграл в силу (3.2) п. 3 § 4 равен

$$\chi_p(\varepsilon x^2)\int\limits_{S_\gamma} \chi_p(-2\varepsilon xy)\,dy = -p^{\gamma-1}\chi_p(\varepsilon x^2).$$

При $\gamma \le 0$ и $|x|_p = p^N$, $N \ge -\gamma+2$, $y \in S_\gamma$ имеем

$$\left\{\varepsilon(x-y)^2\right\}_p = \Big\{p^{-2N}(\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots)(x_0+x_1 p+\ldots$$

$$\ldots+(x_{N-\gamma}-y_0)p^{N-\gamma}+\ldots+(x_{2N-1}-y_{N+\gamma-1})p^{2N-1}+\ldots)^2\Big\}_p =$$

$$= L(y_0,y_1,\ldots,y_{N+\gamma-2}) - \frac{2}{p}\varepsilon_0 x_0 y_{N+\gamma-1},$$

где L не зависит от $y_{N+\gamma-1}$. Тогда, принимая во внимание формулу (3.13) п. 3 § 4 при $l = N+\gamma-1$, для искомого интеграла получим выражение

$$p^{-N}\sum_{y_0=1}^{p-1}\sum_{y_1=0}^{p-1}\ldots$$

$$\ldots\sum_{y_{N+\gamma-2}=0}^{p-1}\exp(2\pi iL)\sum_{y_{N+\gamma-1}=0}^{p-1}\exp\left(\frac{4\pi i}{p}\varepsilon_0 x_0 y_{N+\gamma-1}\right) = 0.$$

Действуя аналогично, убедимся, что в случаях $\gamma \ge 1$, $|x|_p \ne$

$\neq p^\gamma$ искомый интеграл равен 0, а в случае $\gamma \geq 1$ $|x|_p = p^\gamma$ он равен

$$\int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0} \chi_p(\varepsilon(x-y)^2)\,dy = \int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0, y_1=x_1} \chi_p(\varepsilon(x-y)^2)\,dy = \dots$$

$$\dots = \int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0, \dots, y_{\gamma-1}=x_{\gamma-1}} \chi_p(\varepsilon(x-y)^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0, \dots, y_{\gamma-1}=x_{\gamma-1}} dy = p^{\gamma-(\gamma-1)-1} = 1,$$

в силу формулы (3.13) п. 3 § 4 при $l = \gamma-1$. ■

Пример 2. $p \neq 2$, $|\varepsilon|_p = 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int\limits_{S_\gamma} \chi_p(\varepsilon p(x-y)^2)\,dy =$$

$$= \begin{cases} p^\gamma(1 - \frac{1}{p})\chi_p(\varepsilon p x^2), & |x|_p \leq p^{-\gamma+1},\ \gamma \leq 0, \\ -p^{\gamma-1}\chi_p(\varepsilon p x^2), & |x|_p = p^{-\gamma+2},\ \gamma \leq 0, \\ 0, & |x|_p \geq p^{-\gamma+3},\ \gamma \leq 0, \\ \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p} - \chi_p(\varepsilon p x^2), & |x|_p \leq p, \quad \gamma = 1, \\ 0, & |x|_p \geq p^2, \quad \gamma = 1, \\ \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p}, & |x|_p = p^\gamma, \quad \gamma \geq 2; \\ 0, & |x|_p \neq p^\gamma, \quad \gamma \geq 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

■ Аналогично примеру 1. Некоторые отличия имеют следующие случаи.

При $\gamma = 1$, $|x|_p \leq 1$, $y \in S_1$ имеем

$$|\varepsilon p(x^2-2xy)|_p = |\varepsilon|_p |p|_p |(x^2-2xy)|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{p} \max\left(|x|_p^2, |2xy|_p\right) \leq \frac{1}{p} \max(1, p) = 1.$$

Поэтому

$$\chi_p(\varepsilon p(x-y)^2) = \chi_p(\varepsilon p y^2)\chi_p(\varepsilon p(x^2-2xy) = \chi_p(\varepsilon p y).$$

Но

$$\left\{\varepsilon p y^2\right\}_p = \left\{\frac{1}{p}(\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots)(y_0+y_1 p+\ldots)^2\right\}_p = \frac{\varepsilon_0 y_0^2}{p},\ y \in S_1,$$

и в силу (3.10) п. 3 § 4 и (*) искомый интеграл равен

$$\int_{S_1} \exp\left(2\pi i\frac{\varepsilon_0 y_0^2}{p}\right) dy = \sum_{y_0=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i\frac{\varepsilon_0 y_0^2}{p}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i\frac{\varepsilon_0 k^2}{p}\right) - 1 = \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p} - 1.$$

При $\gamma = 1$ и $|x|_p = p$, $y \in S_1$ имеем

$$\left\{\varepsilon p(x-y)^2\right\}_p = \left\{\frac{1}{p}(\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots)\left[x_0-y_0+(x_1-y_1)p+\ldots\right]^2\right\}_p =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{p}\ (x_0-y_0)^2,$$

и, значит, исходный интеграл равен

$$\int_{S_1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\varepsilon_0(x_0-y_0)^2\right) dy = \sum_{y_0=1}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\varepsilon_0(x_0-y_0)^2\right) =$$

$$= \sum_{y_0=0}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\varepsilon_0(x_0-y_0)^2\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\varepsilon_0 x_0^2\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i\frac{\varepsilon_0 k^2}{p}\right) - \exp 2\pi i\left\{\varepsilon p x^2\right\}_p = \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p} - \chi_p(\varepsilon p x^2).$$

При $\gamma \geq 2$ и $|x|_p = p^\gamma$, $y \in S_1$ имеем

$$\left\{\varepsilon p(x-y)^2\right\}_p = \Big\{p^{-2\gamma+1}(\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots)\Big[x_0-y_0+(x_1-y_1)p+\ldots$$

$$+(x_{2\gamma-2}-y_{2\gamma-2})p^{2\gamma-2}+\ldots\Big]^2\Big\}_p =$$

$$= L(y_0, y_1, \ldots, y_{2\gamma-3}) - \frac{2\varepsilon_0}{p}(x_0-y_0)y_{2\gamma-2}.$$

Как и в примере 1, интеграл по той части S_γ, где $x_0 \neq y_0$, равен 0. Поэтому исходный интеграл равен интегралу по той части S_γ, где $x_0 = y_0$, и т.д.

$$\int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0} \chi_p(\varepsilon p(x-y)^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0, y_1=x_1} \chi_p(\varepsilon p(x-y)^2)\,dy = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_{S_\gamma, y_0=x_0, \ldots, y_{\gamma-2}=x_{\gamma-2}} \chi_p(\varepsilon p(x-y)^2)\,dy =$$

$$= \sum_{y_{\gamma-1}=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i\frac{\varepsilon_0}{p}(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i\frac{\varepsilon_0}{p}k^2\right] = \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p}.$$

Здесь мы опять воспользовались формулами (3.13) п. 3 § 4 при $l = \gamma-1$ и $(*)$. ∎

Пример 3. $p = 2$, $|\varepsilon|_2 = 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_2(\varepsilon(x-y)^2)\,dy = \begin{cases} 2^{\gamma-1}\chi_2(\varepsilon x^2), & |x|_2 \le 2^{-\gamma+1}, \quad \gamma \le 0, \\ -2^{\gamma-1}\chi_2(\varepsilon x^2), & |x|_2 = 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma \le 0, \\ 0, & |x|_2 \ge 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma \le 0, \\ (-1)^{\varepsilon_1} i, & |x|_2 \le 1, \quad \gamma = 1, \\ 1, & |x|_2 = 2, \quad \gamma = 1, \\ 0, & |x|_2 \ge 4, \quad \gamma = 1, \\ \sqrt{2}\lambda_2(\varepsilon), & |x|_2 = 2^\gamma, \quad \gamma \ge 2, \\ 0, & |x|_2 \ne 2^\gamma, \quad \gamma \ge 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

■ Аналогично примерам 1 и 2. Особые случаи следующие.

При $\gamma = 1$, $|x|_2 \le 1$, $y \in S_1$ имеем

$$|\varepsilon(x^2-2xy)|_2 \le \max\left(|x|_2^2, |2xy|_2\right) \le \max\left(1, \frac{1}{2}|y|_2\right) = 1,$$

и поэтому $\chi_2(\varepsilon(x^2-2xy)) = 1$ и

$$\left\{\varepsilon y^2\right\}_2 = \left\{\frac{1}{4}(1+\varepsilon_1 2+\ldots)(1+y_1 2+\ldots)^2\right\}_2 = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Искомый интеграл равен

$$\int_{S_1} \chi_2(\varepsilon y^2)\,dy = \int_{S_1} \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right] dy =$$

$$= \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right] = i(-1)^{\varepsilon_1}.$$

При $\gamma = 1$, $|x|_2 = 2$, $y \in S_1$ имеем

$$|\varepsilon(x-y)^2|_2 = |(x-y)^2|_2 = \left|\frac{1}{4}\left[(x_1-y_1)2+(x_2-y_2)4+\ldots\right]^2\right|_2 \le 1,$$

$\chi_2(\varepsilon(x-y)^2) = 1$, и искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_1} dy = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

При $\gamma \geq 2$, $|x|_2 = 2^\gamma$, $y \in S_1$ имеем

$$\left\{\varepsilon(x-y)^2\right\}_2 = \left\{2^{-2\gamma}(1+\varepsilon_1 2+\ldots)\left[(x_1-y_1)2+(x_2-y_2)4+\ldots\right]^2\right\}_2 =$$

$$= L(y_0, y_1, \ldots, y_{2\gamma-4}) - \frac{1}{2}(x_1-y_1)y_{2\gamma-3},$$

и искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1} \chi_2(\varepsilon(x-y)^2)dy = \int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1, y_2=x_2} \chi_2(\varepsilon(x-y)^2)dy = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1, \ldots, y_{\gamma-2}=x_{\gamma-2}} \chi_2(\varepsilon(x-y)^2)dy.$$

Для последнего интеграла имеем

$$\left\{\varepsilon(x-y)^2\right\}_2 = \left\{\frac{1}{4}(1+\varepsilon_1 2+\ldots)\left[(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})+(x_\gamma-y_\gamma)2+\ldots\right]^2\right\}_2 =$$

$$= (x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1, \ldots, y_{\gamma-2}=x_{\gamma-2}} \exp\left[2\pi i(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right]dy =$$

$$= \sum_{y_{\gamma-1}=0}^{1} \exp\left[2\pi i(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \exp\left[2\pi i k^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right] = 1 + \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right] =$$

$$= 1 + i(-1)^{\varepsilon_1} = \sqrt{2}\lambda_2(\varepsilon).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.13) п. 3 § 4 при $l = \gamma - 2$. ■

Пример 4. $p = 2$, $|\varepsilon|_2 = 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_2(2\varepsilon(x-y)^2)\,dy = \begin{cases} 2^{\gamma-1}\chi_2(2\varepsilon x^2), & |x|_2 \le 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma \le 0, \\ -2^{\gamma-1}\chi_2(2\varepsilon x^2), & |x|_2 = 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma \le 0, \\ 0, & |x|_2 \ge 2^{-\gamma+4}, \quad \gamma \le 0, \\ -1, & |x|_2 \le 1, \quad \gamma = 1, \\ 1, & |x|_2 = 2, \quad \gamma = 1, \\ \lambda_2(2\varepsilon), & |x|_2 = 4, \quad \gamma = 1, \\ 0, & |x|_2 \ge 8, \quad \gamma = 1, \\ 2\lambda_2(2\varepsilon), & |x|_2 \le 2, \quad \gamma = 2, \\ 0, & |x|_2 \ge 4, \quad \gamma = 2, \\ 2\lambda_2(2\varepsilon), & |x|_2 = 2^\gamma, \quad \gamma \ge 3, \\ 0, & |x|_2 \ne 2^\gamma, \quad \gamma \ge 3. \end{cases} \tag{1.4}$$

■ Аналогично примерам 1 – 3. Особые случаи следующие. При $\gamma = 1$ и $|x|_2 = 4$, $y \in S_1$

$$\left\{2\varepsilon(x-y)^2\right\}_2 = \left\{\frac{1}{8}(1+\varepsilon_1 2+\varepsilon_2 4\ldots)\left[1+(x_1-1)2+(x_2-y_1)4+\ldots\right]^2\right\}_2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{(x_1-1)^2}{2} + \frac{x_1-1}{2}\right\}_2 = \frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2},$$

и искомый интеграл равен

$$\int_{S_\gamma} \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right]dy = \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, i^{\varepsilon_1}(-1)^{\varepsilon_2} = \lambda_2(2\varepsilon).$$

При $\gamma = 2$ и $|x|_2 = 2^N$, $N \le 1$, $y \in S_2$ имеем

$$\left\{2\varepsilon(x-y)^2\right\}_2 = \left\{\frac{1}{8}(1+\varepsilon_1 2+\varepsilon_2 4\ldots)\left[-1-y_1 2-\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-y_{2-N})2^{2-N}+\ldots\right]^2\right\}_2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_1}{2}\right\}_2 = \frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2},$$

и искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_2} \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right]dy =$$

$$= 2\exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right] = 2\lambda_2(2\varepsilon).$$

При $\gamma \ge 3$ и $|x|_2 = 2^\gamma$, $\gamma \in S_\gamma$ имеем

$$\left\{2^{-2\gamma+3}\varepsilon\left[(x_1-y_1)+(x_2-y_2)2+\ldots+(x_{\gamma-3}+y_{\gamma-3})2^{\gamma-4}+\ \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\ +(x_{2\gamma-4}-y_{2\gamma-4})2^{2\gamma-5}+\ldots\right]^2\right\}_2 =$$

$$= L(y_0, y_1, \ldots, y_{2\gamma-5}) - \frac{1}{2}(x_1-y_1)y_{2\gamma-4},$$

и искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1} \chi_2(2\varepsilon(x-y)^2)dy = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1, \ldots, y_{\gamma-3}=x_{\gamma-3}} \chi_2(2\varepsilon(x-y)^2)dy.$$

В последнем интеграле имеем

$$\left\{2\varepsilon(x-y)^2\right\}_2 = \left\{\frac{1}{8}(1+\varepsilon_1 2+\varepsilon_2 4+\ldots)\left[x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})2+\ldots\right]^2\right\}_2 = \frac{1}{8}\left[(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2+\right.$$

$$\left.+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})\right] + (x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2\left(\frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right).$$

Поэтому искомый интеграл равен

$$\int\limits_{S_\gamma, y_1=x_1, \dots, y_{\gamma-3}=x_{\gamma-3}} \exp\left\{\frac{\pi i}{4}\Big[(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2+\right.$$

$$\left.+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})+(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2\Big]\right\}dy =$$

$$= \sum_{y_{\gamma-2}=0}^{1} \sum_{y_{\gamma-1}=0}^{1} \exp\left\{\frac{\pi i}{4}\Big[(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})^2+\right.$$

$$\left.+4(x_{\gamma-1}-y_{\gamma-1})(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})+(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x_{\gamma-2}-y_{\gamma-2})^2\Big]\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \exp\left\{\frac{\pi i}{4}\Big[k^2 + 4j^2 + 4kj + (2\varepsilon_1+\varepsilon_2)k^2\Big]\right\} =$$

$$= 1 + e^{\pi i} + 2\exp\left[\frac{\pi i}{4}(1+2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right] =$$

$$= 2\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1)^{\varepsilon_1} i^{\varepsilon_2} = 2\lambda_2(2\varepsilon). \ \blacksquare$$

Пример 5. $p \neq 2$, $|a|_p \geq p^{2-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int\limits_{S_\gamma} \chi_p(ax^2+bx)dx = \begin{cases} \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right), & \left|\dfrac{b}{a}\right|_p = p^\gamma, \\ 0, & \left|\dfrac{b}{a}\right|_p \neq p^\gamma. \end{cases} \qquad (1.5)$$

$\blacksquare$ Пусть $a = \sigma p^{-2N}$, где $\sigma = \varepsilon$ или $\sigma = \varepsilon p$, $|\varepsilon|_p = 1$ (см. п. 4 § 1). По условию $|a|_p \geq p^{2-2\gamma}$ и при $\sigma = \varepsilon$ $N \geq 1-\gamma$, а при $\sigma = \varepsilon p$ $N \geq 2-\gamma$. Совершая в интеграле замену переменной интегрирования $p^{-N}x = y$, $dx = p^{-N}dy$, получим

$$\int\limits_{S_\gamma} \chi_p(p^{-2N}\sigma x^2+bx)dx = p^{-N}\int\limits_{S_{N+\gamma}} \chi_p(\sigma y^2+bp^N y)dy =$$

$$= p^{-N}\chi_p\left(-\frac{b^2p^{2N}}{4\sigma}\right)\int\limits_{S_{N+\gamma}} \chi_p\left[\sigma\left(y + \frac{bp^N}{2\sigma}\right)^2\right]dy.$$

Пользуясь формулами (1.1) при $\sigma = \varepsilon$ и $N+\gamma \geq 1$ и (1.2) при

$\sigma = \varepsilon p$ и $N+\gamma \geq 2$, получим для искомого интеграла выражения

$$p^{-N}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\begin{cases} 1, & \text{если } \left|\dfrac{bp^N}{2\sigma}\right|_p = p^{N+\gamma},\ \sigma=\varepsilon, \\ \lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p}, & \text{если } \left|\dfrac{bp^N}{2\sigma}\right|_p = p^{N+\gamma},\ \sigma=\varepsilon p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Объдиняя эти случаи и учитывая, что $1 = \lambda_p(\varepsilon)$, $p^N = |a|_p^{1/2}$ при $\sigma = \varepsilon$, $\lambda_p(\varepsilon p) = \lambda_p(a)$, $p^{N-1/2} = |a|_p^{1/2}$ при $\sigma = \varepsilon p$, а также $p^N|p^N/2\sigma|_p^{-1} = |a|_p$, получаем формулы (1.5). ■

Пример 6. $p = 2$, $|a|_2 \geq 2^{4-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_2(ax^2+bx)\,dx = \begin{cases} \sqrt{2}\lambda_2(a)\,|a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right), & \left|\dfrac{b}{2a}\right|_2 = 2^\gamma, \\ 0, & \left|\dfrac{b}{2a}\right|_2 \neq 2^\gamma. \end{cases} \qquad (1.6)$$

■ Как и в примере 5 с использованием формул (1.3) и (1.4). ■

Формулы (1.5) и (1.6) допускают объединение.

Пример 7. $|4a|_p \geq p^{2-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(ax^2+bx)\,dx = \begin{cases} \lambda_p(a)\,|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right), & \left|\dfrac{b}{2a}\right|_p = p^\gamma, \\ 0, & \left|\dfrac{b}{2a}\right|_p \neq p^\gamma \end{cases} \qquad (1.7)$$

Пример 8. $p \neq 2$, $|a|_p = p^{1-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(ax^2+bx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} |a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{p}}\right], & |b|_p \leq p^{-\gamma+1}, \\ 0, & |b|_p \geq p^{-\gamma+2}. \end{cases} \qquad (1.8)$$

■ Так как $a = p^{2\gamma-1}\varepsilon$, $|\varepsilon|_p = 1$, то после подстановки

$p^{\gamma-1}x = y$ искомый интеграл принимает вид

$$p^{\gamma-1}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\int_{S_1}\chi_p\left[\varepsilon p\left(y+\frac{bp^{-\gamma+1}}{2\varepsilon p}\right)^2\right]dy.$$

При $|b|_p \le p^{-\gamma+1}$, поскольку $\left|\frac{bp^{-\gamma+1}}{2\varepsilon p}\right|_p \le p$, воспользуемся формулой (1.2) при $\gamma = 1$ и $|x|_p \le p$:

$$p^{\gamma-1}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\left[\lambda_p(\varepsilon p)\sqrt{p} - \chi_p\left(\varepsilon p\,\frac{b^2p^{-2\gamma+2}}{4\varepsilon^2p^2}\right)\right] =$$

$$= |a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right];$$

при $|b|_p \ge p^{-\gamma+2}$ имеем $\left|\frac{bp^{-\gamma+1}}{2\varepsilon p}\right|_p \ge p^2$, и формула (1.2) при $\gamma = 1$ и $|x|_p \ge p^2$ дает 0. ∎

2. Гауссовы интегралы по кругам B_γ.

Пример 9. $p \ne 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_\gamma}\chi_p(ax^2+bx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} p^\gamma\Omega(p^\gamma|b|_p), & |a|_p p^{2\gamma}\le 1, \\ \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\Omega\left(p^{-\gamma}\left|\frac{b}{a}\right|_p\right), & |a|_p p^{2\gamma}>1. \end{cases} \tag{2.1}$$

∎ При $|a|_p p^{2\gamma} \le 1$ имеем $|ax^2|_p = |a|_p|x^2|_p \le 1$ и, значит, $\chi_p(ax^2) = 1$, и формула (2.1) следует из формулы (3.1) п. 3 § 4

$$\int_{B_\gamma}\chi_p(bx)\,dx = p^\gamma\Omega(p^\gamma|b|_p).$$

Пусть теперь $|a|_p p^{2\gamma} > 1$, $|a|_p = p^{2N-2\gamma}$, $N = 1,2,\ldots$,

$a = \varepsilon p^{2\gamma-2N}$, $|\varepsilon|_p = 1$. Совершая замену переменной интегрирования $x = p^{N-\gamma}y$, $dx = p^{\gamma-N}dy$, $|y|_p = p^{N-\gamma}|x|_p \le p^N$, получим для искомого интеграла

$$p^{\gamma-N}\int_{B_\gamma} \chi_p(\varepsilon y^2+p^{N-\gamma}by)\,dy =$$

$$= \left[\int_{B_0} \chi_p(p^{N-\gamma}by)\,dy + \sum_{1\le\gamma'\le N}\int_{S_{\gamma'}} \chi_p(\varepsilon y^2+p^{N-\gamma}by)\,dy\right]p^{\gamma-N}. \quad (2.2)$$

При $|b/a|_p > p^\gamma$, т.е. $|b|_p > |a|_p p^\gamma = p^{2N-\gamma}$, имеем $|p^{N-\gamma}b|_p = p^{\gamma-N}|b|_p > p^N$. Принимая во внимание, что в (2.2) $|\varepsilon|_p p^{2\gamma'} \ge p^2$, $\gamma' = 1,2,\dots,N$, замечаем, в силу формул (3.1) п. 3 § 4 и (1.7), что все интегралы в (2.2) равны 0, и формула (2.1) доказана.

При $|b/a|_p \le p^\gamma$, т.е. $|p^{N-\gamma}b|_p \le p^N$, для интеграла, стоящего слева в (2.2), получим выражение (2.1):

$$p^{\gamma-N}\chi_p\left(-\frac{p^{2N-2\gamma}b^2}{4\varepsilon}\right)\int_{B_N}\chi_p\left[\varepsilon\left(y+\frac{p^{N-\gamma}b}{\varepsilon}\right)^2\right]dy =$$

$$= |a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\int_{B_N}\chi_p(\varepsilon y^2)\,dy = |a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\int_{B_0}dx +$$

$$+ \sum_{1\le\gamma'\le N}\int_{S_\gamma}\chi_p(\varepsilon y^2)\,dy = \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right),$$

поскольку интегралы, стоящие под знаком суммы равны 0, в силу формулы (1.7).

Случай $|a|_p p^{2\gamma} > 1$, $|a|_p = p^{2N-1-2\gamma}$, $N = 1,2,\dots$, $a = \varepsilon p p^{2\gamma-2N}$, $|\varepsilon|_p = 1$ рассматривается аналогично. При этом используется также и формула (1.8). ■

Пример 10. $p = 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_\gamma} \chi_2(ax^2+bx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2^\gamma \Omega(2^\gamma |b|_2), & |a|_2 2^{2\gamma} \le 1, \\ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)\delta(|b|_2 - 2^{1-\gamma}), & |a|_2 2^{2\gamma} = 2, \\ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)\Omega(2^\gamma |b|_2), & |a|_2 2^{2\gamma} = 4, \\ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)\Omega\left(2^{-\gamma}\left|\dfrac{b}{2a}\right|_2\right), & |a|_2 2^{2\gamma} \ge 8, \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\delta\left(|b|_p - p^\gamma\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} |b|_p = p \ , \\ 0, & \text{если} |b|_p \ne p^\gamma . \end{cases}$$

■ Рассматривается как и в примере 9. Отдельно рассматриваются случаи $|a|_2 2^{2\gamma} = 2$ и $|a|_2 2^{2\gamma} = 4$. ■

Формулы (2.1) и (2.3) допускают объединение.

Пример 11. $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(ax^2+bx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} p^\gamma \Omega(p^\gamma |b|_p), & |a|_p p^{2\gamma} \le 1, \\ \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)\Omega\left(p^{-\gamma}\left|\dfrac{b}{2a}\right|_p\right), & |4a|_p p^{2\gamma} > 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

3. Гауссовы интегралы по $\mathbb{Q}_p$.

Пример 12. $a \ne 0$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(ax^2+bx)\,dx = \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{b^2}{4a}\right). \tag{3.1}$$

■ Вытекает из формулы (2.3) при $\gamma \to \infty$. ■

Отметим, что формула, аналогичная (3.1), справедлива и в вещественном случае $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_\infty} \chi_\infty(ax^2+bx)\,dx = \lambda_\infty(a)\,|2a|_\infty^{-1/2}\chi_\infty\left(-\frac{b^2}{4a}\right), \quad a \neq 0, \tag{3.2}$$

где обозначено $|a|_\infty = |a|$, $\chi_\infty = \exp(-2\pi i x)$ и

$$\lambda_\infty(a) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,a\right) = \begin{cases} \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}, & \text{если } a>0, \\ \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, & \text{если } a<0. \end{cases} \tag{3.3}$$

■ Формула (3.2) вытекает из классической формулы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-iax^2-ibx)\,dx =$$

$$= \lambda_\infty(a)\,|2a|^{-1/2}\exp\left(i\frac{b^2}{4a}\right), \quad a \neq 0, \tag{3.4}$$

если воспользоваться выражением для $\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)$ (см. п. 1 § 3). ■

4. Дальнейшие свойства функции $\lambda_p(a)$. Докажем равенство

$$\lambda_p(a)\lambda_p(b) = \lambda_p(a+b)\lambda_p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \quad a,b,a+b \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{4.1}$$

■ Вытекает из формулы (3.1):

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(ax^2)\,dx\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(by^2)\,dy = \lambda_p(a)\lambda_p(b)\,|2a|^{-1/2}|2b|^{-1/2} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^2}\chi_p(a(x-y)^2)\chi_p(by^2)\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p\left[a(x-y)^2+by^2\right]dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(ax^2)\,dx\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p\left[(a+b)y^2-2axy\right]dydx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(ax^2)\lambda_p(a+b)\,|2a+2b|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{a^2x^2}{a+b}\right)dx =$$

$$= \lambda_p(a+b)\,|2a+2b|_p^{-1/2}\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p\left(\frac{ab}{a+b}\,x^2\right)dx =$$

$$= \lambda_p(a+b)\,|2a+2b|_p^{-1/2}\lambda_p\left(\frac{ab}{a+b}\right)\left|\frac{ab}{a+b}\right|_p^{-1/2} =$$

$$= \lambda_p(a+b)\lambda_p\left(\frac{a+b}{ab}\right)|2a|^{-1/2}|2b|^{-1/2}.$$

Интегралы, входящие в эту цепочку вычислений, фактически берутся по кругам конечных радиусов (зависящих от a и b) (см. п. 1 § 4). Поэтому применение теоремы Фубини здесь обоснованно. ■

Справедлива адельная формула

$$\prod_{2\le p\le\infty} \lambda_p(a) = 1, \; a \in \mathbb{Q}^*. \tag{4.2}$$

■ Произведение (4.2) сходится для всех рациональных $a \ne 0$, так как только конечное число сомножителей в нем отлично от единицы. Пусть рациональное число $a \ne 0$ имеет вид

$$a = \pm 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \; \alpha_j \in \mathbb{Z} \; (j = 0,1,\ldots,n),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – различные простые числа, отличные от 2. В силу соотношения $\lambda_p(a)\lambda_p(-a) = 1$, $2 \le p \le \infty$, формулу (4.2) достаточно установить для чисел $a > 0$, так что $\lambda_\infty(a) = \exp(-i\frac{\pi}{4})$. В силу соотношения $\lambda_p(ac^2) = \lambda_p(a)$, формулу (4.2) достаточно установить для чисел a вида

$$a = 2^{\alpha_0} p_1 p_2 \ldots p_n, \; \alpha_0 = 0,1.$$

Пусть $\alpha_0 = 0$. Обозначим через l, $0 \le l \le n$, число простых чисел вида $4N+3$ в множестве $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, так что $n-l$ – число простых чисел вида $4N+1$ в этом множестве. Отметим, что произведение чисел вида $4N+1$ есть снова число такого же вида, а произведение чисел вида $4N+3$ есть число вида $4N+1$, если число сомножителей четно, и вида $4N+3$, если число сомножителей нечетно.

Тогда

$$\lambda_2(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(-1)^l i\right];$$

$$\lambda_{p_j}(a) = \begin{cases} \left(\dfrac{\prod_{k\neq j} p_k}{p_j}\right), & \text{если } p_j\equiv 1 \pmod 4, \\ i\left(\dfrac{\prod_{k\neq j} p_k}{p_j}\right), & \text{если } p_j\equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

$\lambda_p(a) = 1$, если $p \neq 2$, $p \neq p_j$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Поэтому

$$\prod_{2\le p\le\infty}\lambda_p(a) = e^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(-1)^l i\right] i^l \prod_{1\le j\le n}\left(\frac{\prod_{k\neq j} p_k}{p_j}\right). \qquad (4.3)$$

Принимая во внимание свойства символа Лежандра, в частности, закон взаимности

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

(p и q - простые нечетные числа), получим

$$\prod_{1\le j\le n}\left(\frac{\prod_{k\neq j} p_k}{p_j}\right) = \prod_{\substack{1\le j,\,k\le n\\ j\neq k}}\left(\frac{p_k}{p_j}\right) = \prod_{1\le j<k\le n}\left(\frac{p_k}{p_j}\right)\left(\frac{p_j}{p_k}\right) =$$

$$= \prod_{1\le j<k\le n}(-1)^{\frac{p_k-1}{2}\frac{p_j-1}{2}} = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}. \qquad (4.4)$$

Отсюда и из (4.3) следует формула (4.2) при $\alpha_0 = 0$:

$$\prod_{2\le p\le\infty}\lambda_p(a) =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(-1)^l i\right] i^l (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} = 1, \quad l = 0,1,\ldots$$

Пусть теперь $\alpha_0 = 1$. Обозначим через l_1, l_2, l_3, $0 \le l_1+$

$+l_2+l_3 \le n$, число простых чисел вида $8N+3$, $8N+5$, $8N+7$ в множестве $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ соответственно. Отметим, что произведение чисел вида $8N+1$ есть число такого же вида, а произведение чисел вида $8N+j$ $(j = 3,5,7)$ есть число вида $8N+1$, если число сомножителей четно, и вида $8N+j$, если число сомножителей нечетно. Поэтому

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, & \text{если } l_1, l_2, l_3 \text{ четны или } l_1, l_2, l_3 \text{ нечетны}, \\ -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, & \text{если } l_1 \text{ нечетно, } l_2, l_3 \text{ четны или } l_1 \text{ четно, } l_2, l_3 \text{ нечетны}, \\ -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}, & \text{если } l_2 \text{ нечетно, } l_1, l_3 \text{ четны или } l_2 \text{ четно, } l_1, l_3 \text{ нечетны}, \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}, & \text{если } l_3 \text{ нечетно, } l_2, l_1 \text{ четны или } l_3 \text{ четно, } l_2, l_1 \text{ нечетны}; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\lambda_{p_j}(a) = \begin{cases} \left(\dfrac{\prod_{k \ne j} 2p_k}{p_j}\right), & \text{если } p_j \equiv 1 \pmod 4, \\ i\left(\dfrac{\prod_{k \ne j} 2p_k}{p_j}\right), & \text{если } p_j \equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

$\lambda_p(a) = 1$, если $p \ne 2$, $p \ne p_j$, $j = 1,2,\dots,n$.

Следовательно, действуя как и в (4.4) и пользуясь формулой (4.7) п. 4 § 1, получим

$$\prod_{2<p<\infty} \lambda_p(a) = i^{l_1+l_3} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\prod_{k \ne j} 2p_k}{p_j}\right) =$$

$$= i^{l_1+l_3} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{p_j}\right) \prod_{\substack{1 \le j,\, k \le n \\ j \ne k}} \left(\frac{p_k}{p_j}\right) =$$

$$= i^{l_1+l_3}\prod_{j=1}^{n}(-1)^{\frac{p_j^2-1}{2}}\prod_{1\le j<k\le n}\left(\frac{p_k}{p_j}\right)\left(\frac{p_j}{p_k}\right) =$$

$$= i^{l_1+l_3}(-1)^{l_1+l_2}(-1)^{\frac{(l_1+l_3)(l_1+l_3-1)}{2}} =$$

$$= (-1)^{l_1+l_2+\frac{1}{2}(l_1+l_3)^2},$$

откуда, пользуясь (4.5), выводим (4.2):

$$\prod_{2\le p\le\infty}\lambda_p(a) = \exp(-i\frac{\pi}{4})\lambda_2(a)(-1)^{l_1+l_2+\frac{1}{2}(l_1+l_3)^2} = 1. \blacksquare$$

Замечание. Функция, аналогичная $\lambda_p(a)$, рассматривалась А. Вейлем для локально компактных полей. Функция $\lambda_p(a)$ связана с символом Гильберта.

По определению символ Гильберта (a,b), $a,b \in \mathbb{Q}_p^*$, равен 1 или -1 в зависимости от того, представляет форма ax^2+ $+by^2-z^2$ число 0 в поле $\mathbb{Q}_p$ или нет. Символ Гильберта обладает свойствами:

$$(a,b) = (b,a),\ (a\alpha^2,b\beta^2) = (a,b),$$

$$(a,-a) = 1,\ (a_1a_2,b) = (a_1,b)(a_2,b),$$

и при $p \ne 2$

$$(\varepsilon,\varepsilon_1) = 1,\ (p,\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon_0}{p}\right),\ |\varepsilon|_p = |\varepsilon_1|_p = 1,$$

$$(a,-\varepsilon) = \operatorname{sign}_\varepsilon a,\ \varepsilon \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$$

(см. (2.4) п. 2 § 3).

Справедлива формула

$$\lambda_p(a)\lambda_p(b) = (a,b)\lambda_p(ab),\ a,b \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{4.6}$$

■ Пусть $p \ne 2$. В силу свойств символа Гильберта и функции $\lambda_p(a)$, доказательство равенства (4.6) сводится к рассмотрению следующих случаев (см. п. 2 § 1):

1) $a = b = \varepsilon$, 4) $a = \varepsilon,\ b = p$,

2) $a = b = p$, 5) $a = \varepsilon,\ b = \varepsilon p$,

3) $a = b = \varepsilon p$, 6) $a = p,\ b = \varepsilon p,\ |\varepsilon|_p = 1$,

для которых формула (4.6) проверяется элементарно.

Из формулы (4.6) при $b = -\varepsilon a$ следует формула

$$\lambda_p(a)\lambda_p(-\varepsilon a) = \operatorname{sign}_\varepsilon a\ \lambda_p(-\varepsilon). \tag{4.7}$$

5. Пример 13. $p \neq 2$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} e^{-|y|_p^2}\chi_p(a(x-y)^2)dy =$$

$$= (1-\frac{1}{p})|a|_p^{-1/2}S(|a|_p^{-1},\frac{1}{p}),$$

$$|x|_p \le |a|_p^{-1/2},\ \gamma(a) \text{ четное;} \tag{5.1$_1$}$$

$$= (1-\frac{1}{p})\frac{1}{\sqrt{p}}|a|_p^{-1/2}S(\frac{1}{p}|a|_p^{-1},\frac{1}{p}) +$$

$$+ |a|_p^{-1/2}e^{-p|a|_p^{-1}}\left[\lambda_p(a) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right],$$

$$|x|_p \le \frac{1}{\sqrt{p}}|a|_p^{-1/2},\ \gamma(a) \text{ нечетное;} \tag{5.1$_2$}$$

$$= \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}e^{-|x|_p^2} + |ax|_p^{-1}\chi_p(ax^2)\left[(1-\frac{1}{p})S(|ax|_p^{-2},\frac{1}{p}) -\right.$$

$$\left. - e^{-p^2|ax|_p^{-2}}\right],\ |x|_p \ge \sqrt{p}|a|_p^{-1/2}. \tag{5.1$_3$}$$

Здесь функция $S(\alpha,q)$ определяется формулой

$$S(\alpha,q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!\,(1-q^{2k+1})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} e^{-\alpha q^{2\nu}}, \quad |q| < 1. \qquad (5.2)$$

Из равенства (5.1_3) следует асимптотика

$$\int_{\mathbb{Q}_p} e^{-|y|_p^2} \chi_p(a(x-y)^2)\,dy \sim$$

$$\sim \frac{p^4+p^3}{p^2+p+1} \, \frac{1}{|x|_p^3 |a|_p^3} \, \chi_p(ax^2) + O\left(\frac{1}{|x|_p^5}\right), \quad |x|_p \to \infty. \qquad (5.3)$$

■ Пусть $\gamma(a)$ четно, $|a|_p = p^{2N}$, $N \in \mathbb{Z}$. Тогда $|a|_p \geq p^{2-2\gamma}$ при $\gamma \geq -N+1$. Искомый интеграл равен

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}} \int_{S_\gamma} \chi_p(a(x-y)^2)\,dy =$$

$$= \sum_{\gamma=-\infty}^{-N} e^{-p^{2\gamma}} \chi_p(ax^2) \int_{S_\gamma} \chi_p(-2axy)\,dy +$$

$$+ \sum_{\gamma=-N+1}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}} \chi_p(ax^2) \int_{S_\gamma} \chi_p(ay^2-2axy)\,dy. \qquad (5.4)$$

При $|x|_p \leq |a|_p^{-1/2} = p^{-N}$ имеем $\chi_p(ax^2) = 1$, $\chi_p(-2axy) = 1$, $y \in S_\gamma$, $\gamma \leq -N$, $\left|\frac{2ax}{2a}\right|_p = |x|_p \neq p^\gamma$, $\gamma \geq -N+1$, и в силу формул (1.7) и (5.4) искомый интеграл выражается формулой (5.1_1):

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-N} e^{-p^{2\gamma}} \int_{S_\gamma} dy = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=-\infty}^{-N} e^{-p^{2\gamma}} p^\gamma = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=N}^{\infty} e^{-p^{-2\gamma}} p^{-\gamma} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-N} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} e^{-p^{-2N} p^{-2\gamma}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)|a|_p^{-1/2}\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} e^{-|a|_p^{-1} p^{-2\gamma}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)|a|_p^{-1/2} S\left(|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right).$$

При $|x|_p > |a|_p^{-1/2} = p^{-N}$ имеем $|2ax|_p = p^{M} \ge p^{N+1}$, и в силу формул (5.4), (1.7) и (3.2) § 4 искомый интеграл равен (5.1_3):

$$\chi_p(ax^2)\left[\sum_{\gamma=-\infty}^{-M} e^{-p^{2\gamma}}\int_{S_\gamma} dy + e^{-p^{2(1-M)}}\int_{S_\gamma}\chi_p(-2axy)\,dy +\right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=2-M}^{-N} e^{-p^{2\gamma}}\int_{S_\gamma}\chi_p(-2axy)\,dy + \sum_{\gamma=1-N}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}}\chi_p(ay^2-2axy)\,dy\right] =$$

$$= \sum_{\gamma=-\infty}^{-M} e^{-p^{2\gamma}}\chi_p(ax^2)\,p^{\gamma}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - e^{-p^{2(-M+1)}}\chi_p(ax^2)\,p^{-M} +$$

$$+ e^{-|x|_p^2}|a|_p^{-1/2} = e^{-|x|_p^2}\lambda_p(a)\,|a|_p^{-1/2} +$$

$$+ |ax|_p^{-1}\chi_p(ax^2)\left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} e^{-p^{-2M-2\gamma}} - e^{-p^{2-2M}}\right].$$

Пусть $\gamma(a)$ нечетно, $|a|_p = p^{2N+1}$, $N \in \mathbb{Z}$. Тогда $|a|_p \ge$ $\ge p^{2-2\gamma}$ при $\gamma \ge -N+1$ и $|a|_p = p^{1-2\gamma}$ при $\gamma = -N$. Искомый интеграл равен

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-N-1} e^{-p^{2\gamma}}\chi_p(ax^2)\int_{S_\gamma}\chi_p(-2axy)\,dy +$$

$$+ e^{-p^{-2N}}\chi_p(ax^2)\int_{S_{-N}}\chi_p(ay^2-2axy)\,dy +$$

$$+\sum_{\gamma=-N+1}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}} \chi_p(ax^2) \int_{S_\gamma} \chi_p(ay^2-2axy)\,dy. \qquad (5.5)$$

При $|x|_p \le 1/\sqrt{p}|a|_p^{-1/2} = p^{-N-1}$ имеем $\chi_p(ax^2) = 1$, $\chi_p(-2axy) = 1$, $y \in S_\gamma$, $\gamma \le -N-1$, $\left|\frac{2ax}{a}\right|_p = |x|_p \ne p^\gamma$, $\gamma \ge -N+1$, и в силу формул (1.7) и (1.8) искомый интеграл выражается формулой (5.1_2):

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-N-1} e^{-p^{2\gamma}} p^\gamma (1 - \frac{1}{p}) + e^{-p|a|_p^{-1}} |a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p(-ax^2) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right] =$$

$$= (1 - \frac{1}{p})\frac{1}{\sqrt{p}}|a|_p^{-1/2} S(\frac{1}{p}|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}) + |a|_p^{-1/2} e^{-p|a|_p^{-1}} \left[\lambda_p(a) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right].$$

При $|x|_p > p^{-N}$ имеем $|2ax|_p = p^M \ge p^{N+2}$, и в силу формул (5.5), (1.7), (1.8) и (3.2) § 4 искомый интеграл равен (5.1_3):

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-M} e^{-p^{2\gamma}} \chi_p(ax^2) \int_{S_\gamma} dy \;+$$

$$+ e^{-p^{2(-M+1)}} \chi_p(ax^2) \int_{S_{-M+1}} \chi_p(ay^2-2axy)\,dy \;+$$

$$+ \sum_{\gamma=-M+2}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}} \chi_p(ax^2) \int_{S_\gamma} \chi_p(ay^2-2axy)\,dy =$$

$$= (1 - \frac{1}{p})\chi_p(ax^2) \sum_{\gamma=M} e^{-p^{-2\gamma}} p^{-\gamma} \;+$$

$$+ e^{-p^{2(-M+1)}} \chi_p(ax^2) \int_{S_{-M+1}} \chi_p(-2axy)\,dy \;+$$

$$+ e^{-|x|_p^2}\chi_p(ax^2)\lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\chi_p(-ax^2) = .$$

$$= \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}e^{-|x|_p^2} + (1 - \frac{1}{p})\chi_p(ax^2)|ax|_p^{-1}S(|ax|_p^{-2},\frac{1}{p}) -$$

$$- p^{-M}e^{-p^2|ax|_p^{-2}}\chi_p(ax^2).$$

При $|x|_p = p^{-N}$ имеем $|2ax|_p = p^{N+1}$, и в силу формул (5.5), (1.7) и (1.8) искомый интеграл опять выражается формулой (5.1_3):

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-N-1} e^{-p^{2\gamma}}\chi_p(ax^2)p^{\gamma}(1 - \frac{1}{p}) +$$

$$+ e^{-p^{-2N}}\chi_p(ax^2)\int_S \chi_p(ay^2-2axy)dy +$$

$$+ \sum_{\gamma=-N+1}^{\infty} e^{-p^{2\gamma}}\chi_p(ax^2)\int_{S_\gamma} \chi_p(ay^2-2axy)dy =$$

$$= (1 - \frac{1}{p})\chi_p(ax^2)|ax|_p^{-1}S(|ax|_p^{-2},\frac{1}{p}) +$$

$$+ e^{-|x|_p^2}\chi_p(ax^2)|a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p(-ax^2) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right],$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{p}}|a|_p^{-1/2}e^{-|x|_p^2} = |ax|_p^{-1}e^{-p^2|ax|_p^{-2}}. \blacksquare$$

Пример 14. $p = 2$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} e^{-|y|_2^2}\chi_2(a(x-y)^2)dy = (-1)^{a_1}i|a|_2^{-1/2}e^{-4|a|_2^{-1}} +$$

$$+ \frac{1}{2}|a|_2^{-1/2}S(|a|_2^{-1},\frac{1}{2}),\quad |x|_2 \le |a|_2^{-1/2}, \qquad (5.6_1)$$

$$= |a|_2^{-1/2}e^{-4|a|_2^{-1}} +$$

$$+\frac{i}{2}(-1)^{a_1}|a|_2^{-1/2}S(|a|_2^{-1},\frac{1}{2}), \quad |x|_2 = 2|a|_2^{-1/2}, \qquad (5.6_2)$$

если $\gamma(a)$ четно;

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}|a|_2^{-1/2}S(\frac{1}{2}|a|_p^{-1},\frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}|a|_2^{-1/2}e^{-2|a|_2^{-1}} +$$

$$+ \sqrt{2}\lambda_2(a)|a|_2^{-1/2}e^{-8|a|_2^{-1}}, \quad |x|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}|a|_2^{-1/2}; \qquad (5.6_3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|a|_2^{-1/2}S(2|a|_2^{-1},\frac{1}{2}) +$$

$$+ \sqrt{2}\lambda_2(a)|a|_2^{-1/2}e^{-8|a|_2^{-1}}, \quad |x|_2=|a|_2^{-1/2}; \qquad (5.6_4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda_2(a)|a|_2^{-1/2}S(2|a|_p^{-1},\frac{1}{2}), \quad |x|_2 = \sqrt{2}|a|_2^{-1/2}, \qquad (5.6_5)$$

если $\gamma(a)$ нечетно;

$$= \sqrt{2}\lambda_2(a)|a|_2^{-1/2}e^{-|x|_2^2} +$$

$$+ |x|_2^{-1}|a|_2^{-1}\chi_2(ax^2)\Big[S(4|x|_2^{-2}|a|_2^{-2},\frac{1}{2}) -$$

$$- 2e^{-16|x|_2^{-2}|a|_2^{-2}}\Big], \quad |x|_2 \ge 2|a|_2^{-1/2}. \qquad (5.6_6)$$

Интегралы (5.6) вычисляются аналогично (5.1) при $p \ne 2$.

Из формулы (5.6_6) следует асимптотика

$$\int_{\mathbb{Q}_2} e^{-|y|_2^2}\,\chi_2(a(x-y)^2)dy \sim$$

$$\sim \frac{192}{7}\,\frac{\chi_2(ax^2)}{|x|_2^3|a|_2^3} + O\left(\frac{1}{|x|_2^5}\right), \quad |x|_2 \to \infty. \qquad (5.7)$$

6. **Исследование функции** $S(\alpha,q)$. Функция $S(\alpha,q)$ определена формулами (5.2).

Функция $S(\alpha,q)$ ***– целая по*** α***, удовлетворяет функциональному уравнению***

$$e^{-\alpha} = S(\alpha,q) - qS(\alpha q^2,q) \qquad (6.1)$$

и вещественна при вещественных α *(положительная при* $q \geq 0$*). Она имеет асимптотики*

$$S(\alpha,q) \sim e^{-\alpha} + O(e^{-\alpha q^2}),\ \alpha \to -\infty\ (|q| < 1), \qquad (6.2)$$

$$S(\alpha,q) \sim$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}}C(\ln\alpha,q) + O(e^{-\alpha/q^2}),\ \alpha \to +\infty\ (0 < q < 1), \qquad (6.3)$$

где

$$C(x,q) = e^{x/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k e^{-e^x q^{2k}},\ -\infty < x < \infty, \qquad (6.4)$$

– *вещественно-аналитическая положительная периодическая функция с периодом* $2|\ln q|$.

■ Перечисленные свойства, кроме асимптотики (6.3), непосредственно вытекают из представлений (5.2).

Докажем (6.3). Представим функцию S в виде

$$S(\alpha,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k e^{-\alpha q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} e^{-\alpha q^{-2k}}. \qquad (6.5)$$

Полагая $\alpha = e^x$ и используя функцию (6.4), перепишем равенство (6.6) в виде

$$S(\alpha,q) = \frac{C(\ln\alpha,q)}{\sqrt{\alpha}} - \psi(\alpha), \qquad (6.6)$$

где остаток

$$\psi(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} e^{-\alpha q^{-2k}}$$

удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{q}e^{-\alpha/q^2} < \psi(\alpha) < C_q e^{-\alpha/q^2},\ \alpha \geq 2,$$

а функция $C(x,q)$ $T = 2|\ln q|$-периодическая:

$$C(x+T,q) = e^{\frac{x+T}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k e^{-e^{x+T}q^{2k}} =$$
$$= e^{x/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k-1} e^{-e^x q^{2(k-1)}} = C(x,q).\ ■$$

Из формул (5.1_1), (5.1_2), (5.6_1), (5.6_3) и (6.3) вытекает асимптотика интеграла при $|a|_p^{-1} \to \infty$ $(p = 2,3,\ldots)$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} e^{-|x-y|_p^2} \chi_p(ay^2)dy \sim$$

$$\sim \begin{cases} (1-\frac{1}{p})C(\ln|a|_p^{-1},\frac{1}{p}) + O\left(e^{-p^2|a|_p^{-1}}\right), \\ \qquad\qquad \gamma(a) \text{ четно}, \\ (1-\frac{1}{p})C(\ln|a|_p^{-1}-\ln p,\frac{1}{p}) + O\left(\frac{e^{-p|a|_p^{-1}}}{\sqrt{|a|_p}}\right), \\ \qquad\qquad \gamma(a) \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{6.7}$$

§ 6. Обобщенные функции

1. Локально постоянные функции. Комплекснозначная функция $f(x)$, заданная на $\mathbb{Q}_p$, называется *локально постоянной*, если для любой точки $x \in \mathbb{Q}_p$ существует такое число $l(x) \in \mathbb{Z}$, что

$$f(x+x') = f(x), \quad |x'|_p \le p^{l(x)}.$$

Множество таких функций обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$.

Очевидно, всякая функция из $\mathcal{E}$ непрерывна на $\mathbb{Q}_p$. Множество $\mathcal{E}$ – линейное над полем $\mathbb{C}$.

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathcal{E}$ и K – компакт в $\mathbb{Q}_p$. Тогда существует число $l \in \mathbb{Z}$ такое, что* $f(x+x') = f(x)$, $|x'|_p \le p^{l(x)}$, $x \in K$.

■ Пусть K содержится в круге B_N. Лемму 1 достаточно доказать для компакта B_N. По лемме Гейне – Бореля (см. следствие 4 из леммы 3 § 1) из покрытия $\left\{B_{l(x)}(x),\ x \in B_N\right\}$ компакта B_N можно выбрать конечное подпокрытие (без общих точек)

$$\left\{B_{l(x^k)}(x^k),\ k = 1,2,\ldots,M\right\}.$$

Обозначим $l = \min\limits_k l(x^k)$. Тогда для любой точки $x \in$

$\in B_{l(x^k)}(x^k)$ и для всех $x' \in B_l$ будем иметь

$$f(x+x') = f(x^k+x-x^k+x') = f(x),$$

поскольку

$$|x-x^k+x'|_p \le \max\left(|x-x^k|_p, |x'|_p\right) \le$$

$$\le \max\left(p^{l(x^k)}, p^l\right) = p^{l(x^k)}. \blacksquare$$

Примеры.

1. $|x|_p \in \mathcal{E}$.

2. $|x|_p \Omega\left(p^\gamma |x|_p\right) \in \mathcal{E},\ \gamma \in \mathbb{Z}$,

где $\Omega(t) = 1,\ 0 \le t \le 1,\ \Omega(t) = 0,\ t > 1$.

3. $\chi_p(x),\ \chi_p(x^2) \in \mathcal{E}$.

4. $\delta(x_0-k) \in \mathcal{E},\ k = 1,2,\ldots,p-1$,

где

$$\delta(x_0-k) = \begin{cases} 1, & x_0=k, \\ 0, & x_0\ne k. \end{cases} \tag{1.1}$$

5. Пусть K – открыто-замкнутое множество в $\mathbb{Q}_p$ (см. п. 3 § 1) и $\theta_k(x)$ – его характеристическая функция. Тогда $\theta_k \in \mathcal{E}$.

Обозначим через $\Delta_k(x)$ характеристическую функцию круга B_k: $\Delta_k(x) = \Omega\left(p^{-k}|x|_p\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. *Всякая функция f из $\mathcal{E}$ во всяком круге B_N представляется в виде*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-l}} f(a^\nu)\Delta_l(x-a^\nu),\ x \in B_N, \tag{1.2}$$

при некоторых $l \in \mathbb{Z}$ и $a^\nu \in B_N$ таких, что круги $B_l(a^\nu)$, $\nu = 1,2,\ldots,p^{N-l}$, образуют каноническое покрытие круга B_N.

■ По лемме 1 существует число $l \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$f(x+x') = f(x),\ x \in B_N,\ x' \in B_l,\ l \le N.$$

При $N = l$ утверждение леммы очевидно (при $a^1 = 0$). Пусть $l < N$. В силу п. 3 § 1 (пример 2) круг B_N можно покрыть кругами $B_1(a^\nu)$, $\nu = 1,2,\dots,p^{N-1}$, без общих точек с центрами a^ν вида

$$a^1 = 0,\ a^\nu = p^{-r}(a_0+a_1p+\dots+a_{r-l-1}p^{r-l-1}),$$

$$r = N, N-1,\dots,l+1,\ 0 \le a_j \le p-1,\ a_0 \ne 0$$

(каноническое покрытие круга B_N). Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} \Delta_1(x-a^\nu) = \begin{cases} 1, & x\in B_N, \\ 0, & x\notin B_N. \end{cases}$$

Значит, если $x \in B_N$, то справедливо равенство (1.2):

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} f(x)\Delta_1(x-a^\nu) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} f(a^\nu)\Delta_1(x-a^\nu). \blacksquare$$

Сходимость в $\mathcal{E}$ определим следующим образом: $f_k \to 0$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{E}$, если для любого компакта $K \subset \mathbb{Q}$

$$f_k(x) \xrightarrow[]{x\in K} 0,\ k \to \infty$$

($\Longrightarrow$ означает равномерную сходимость).

2. Основные функции, $n = 1$. *Основной* функцией назовем всякую функцию из $\mathcal{E}$ с компактным носителем. Множество основных функций линейно, его обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда по лемме 1 § 6 существует такое $l \in \mathbb{Z}$, что

$$\varphi(x+x') = \varphi(x),\ x' \in B_l,\ x \in \mathbb{Q}_p.$$

Наибольшее такое число l назовем *параметром постоянности* функции φ, $l = l(\varphi)$.

Обозначим через $\mathcal{D}_N^l = \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p)$ множество функций из $\mathcal{D}$ с носителем в круге B_N и параметром постоянности $\ge l$. Имеет место вложение

$$\mathcal{D}_N^l \subset \mathcal{D}_{N'}^{l'},\ N \le N',\ l \le l'.$$

Примеры.

1. $\Delta_\gamma(x) \equiv \Omega(p^{-\gamma}|x|_p) \in \mathcal{D}_\gamma^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

2. $\delta(|x|_p - p^\gamma) \in \mathcal{D}_\gamma^{\gamma-1}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

где

$$\delta\left(|x|_p - p^\gamma\right) = \begin{cases} 1, & x \in S_\gamma, \\ 0, & x \notin S_\gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

3. $\delta(x_0-k)\delta(|x|_p-p^\gamma) \in \mathcal{D}_\gamma^{\gamma-1}$, $k = 1,2,\dots,p-1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

где функция $\delta(x_0-k)$ определяется формулой (1.1).

4. Если K - открытый компакт, то $\theta_K \in \mathcal{D}$.

5. $\Delta_\gamma(x)\chi_p(x) \in \mathcal{D}_\gamma^l$, $l = \min(\gamma,0)$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

По лемме 2 § 6 всякая функция φ из $\mathcal{D}_N^l$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-l}} \varphi(a^\nu)\Delta_l(x-a^\nu), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{2.2}$$

при некоторых $a^\nu \in B_N$, не зависящих от φ и таких, что круги $B_l(a^\nu)$, $\nu = 1,2,\dots,p^{N-l}$, не имеют общих точек и покрывают круг B_N.

Отсюда следует, что пространство $\mathcal{D}_N^l$ *конечномерно, имеет размерность* p^{N-l} *и функции*

$$\Delta_l(x-a^\nu), \quad \nu = 1,2,\dots,p^{N-l},$$

образуют (ортогональный) базис в $\mathcal{D}_N^l$.

Сходимость в $\mathcal{D}$ определим следующим образом: $\varphi_k \to 0$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$ означает, что

(i) $\varphi_k \in \mathcal{D}_N^l$, где N и l не зависят от k,

(ii) $\varphi_k \xrightarrow[]{x \in \mathbb{Q}_p} 0$, $k \to \infty$.

Эта сходимость задает топологию в $\mathcal{D}$ в смысле Шварца.

Пространство $\mathcal{D}$ *полное,* т.е. для всякой сходящейся в себе последовательности $\{\varphi_k,\ k \to \infty\}$ функций из $\mathcal{D}$, $\varphi_k - \varphi_l \to 0$, $k,l \to \infty$, в $\mathcal{D}$, существует функция $\varphi \in \mathcal{D}$ такая, что $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}$.

Непосредственно из определений вытекает:

$$\mathcal{D} = \lim_{N\to\infty} \operatorname{ind} \mathcal{D}_N, \quad \mathcal{D}_N = \lim_{l\to-\infty} \operatorname{ind} \mathcal{D}_N^l. \tag{2.3}$$

Докажем утверждение: $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ *плотно* в $C(K)$.

■ Пусть $f \in C(K)$ и ε - произвольное положительное число. Существует число $\gamma \in \mathbb{Z}$ такое, что $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, коль скоро $x \in B_\gamma(a) \cap K$, $a \in K$.

Так как компакт K можно покрыть конечным числом кругов $B_\gamma(a^\nu)$ без общих точек (см. следствие 3 из леммы 3 § 1), то характеристические функции $\Delta_\gamma(x-a^\nu)$ этих кругов обладают свойством

$$\sum_\nu \Delta_\gamma(x-a^\nu) = 1, \quad x \in K; \tag{2.4}$$

кроме того, $\Delta_\gamma(x-a^\nu) \in \mathcal{D}$ (см. пример 1). Поэтому

$$f_\gamma(x) = \sum_\nu f(a^\nu)\Delta_\gamma(x-a^\nu) \in \mathcal{D},$$

и в силу (2.4)

$$\|f-f_\gamma\|_{C(K)} \le \max_{x\in K} \sum_\nu |f(x)-f(a^\nu)|\Delta_\gamma(x-a^\nu) < \varepsilon\sum_\nu \Delta_\gamma(x-a^\nu) = \varepsilon. \ ■$$

Пусть O - открытое множество в $\mathbb{Q}_p$. Пространство *основных функций* $\mathcal{D}(O)$ определяется как совокупность основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) = \mathcal{D}$, носители которых содержатся в O. $\mathcal{D}(O)$ - подпространство пространства $\mathcal{D}$; его свойства аналогичны свойствам $\mathcal{D}$, как и в случае поля $\mathbb{R}$.

$\mathcal{D}(O)$ *плотно в* $L^\rho(O)$, $\rho\ge1$, $\rho < \infty$.

■ Вытекает из тех фактов, что $\mathcal{D}(O)$ плотно в $C(K)$, где K - произвольный компакт, содержащийся в O, и $C(K)$ плотно в $L^\rho(O)$ (см. п. 1 § 4). ■

В пространстве $\mathcal{D}(O)$ справедлива **теорема о «разложении единицы»**: *пусть открытое множество O представлено в виде объединения не более чем счетного числа кругов $B_{\gamma_k}(a^k)$, $k = 1,2,\ldots$, без общих точек, $O = \bigcup_k B_{\gamma_k}(a^k)$. Тогда характеристические функции $\Delta_{\gamma_k}(x-a^k)$ кругов $B_{\gamma_k}(a^k)$ дают разложение единицы в O,*

$$\sum_k \Delta_{\gamma_k}(x-a^k) = 1, \; x \in O. \tag{2.5}$$

В заключение докажем следующую лемму.

Лемма. *Для того чтобы* $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$, *в* $\mathcal{D}$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (i) *и одного из условий*

(ii$_1$) $\varphi_k(x) \to 0$, $k \to \infty$, $x \in \mathbb{Q}_p$,

(ii$_2$) $\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi_k(x)\varphi(x)dx \to 0$, $k \to \infty$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

∎ Условия (ii$_1$) и (ii$_2$) необходимы. Докажем их достаточность. Из условий (i) и (ii$_1$) следует условие (ii) в силу представления (2.2). Осталось доказать, что из условий (i) и (ii$_2$) следует условие (ii$_1$). Пусть это не так. По условию (i) $\varphi_k \in \mathcal{D}^l_N$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда найдется подпоследовательность $\{\varphi_{k_i}(a),\; i \to \infty\}$ такая, что в некоторой точке $a \in B_N$ $\varphi_{k_i}(a) \to C \neq 0$, $i \to \infty$ (число C может быть и бесконечным).

Тогда на основной функции $\Delta_l(x-a) = \Omega(p^{-l}|x-a|_p)$ получим противоречивую цепочку равенств

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi_k(x)\Delta_l(x-a)dx = 0 = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi_{k_i}(x)\Omega(p^{-l}|x-a|_p)dx =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int\limits_{B_l(a)} \varphi_{k_i}(x)dx = \lim_{i\to\infty} \varphi_{k_i}(x) \int\limits_{B_l(a)} dx = Cp^l \neq 0. \; ∎$$

3. Обобщенные функции, $n = 1$. *Обобщенной функцией* назовем всякий линейный функционал f на $\mathcal{D}$, $f\colon \varphi \to (f,\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Это множество обозначим через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$.

$\mathcal{D}'$ – линейное множество: линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ обобщенных функций f и g из $\mathcal{D}'$ (λ и μ – любые комплексные числа) определяется равенством

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f,\varphi) + \mu(g,\varphi), \; \varphi \in \mathcal{D}.$$

Сходимость последовательности $\{f_k,\; k \to \infty\}$ обобщенных функций f_k из $\mathcal{D}'$ определяется как слабая сходимость функционалов: $f_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'$ означает, что $(f_k,\varphi) \to 0$,

$k \to \infty$, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$.

Важным свойством линейных функционалов на $\mathcal{D}$ является их *непрерывность*: если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}$, то $(f,\varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Это вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если A – линейный оператор из $\mathcal{D}$ в линейное топологическое пространство M, то A – непрерывный оператор из $\mathcal{D}$ в M.*

■ Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}$. Тогда $\varphi_k \in \mathcal{D}_N^l$ при некоторых N и l и в силу представления (2.2) п. 2 § 6

$$\varphi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} \varphi_k(a^\nu)\Delta_l(x-a^\nu), \quad \varphi_k(a^\nu) \to 0, \ k \to \infty.$$

Отсюда, в силу линейности оператора A, имеем:

$$A\varphi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} \varphi_k(a^\nu)A\Delta_l(x-a^\nu) \to 0, \ k \to \infty, \text{ в } M. \ ■$$

Таким образом, $\mathcal{D}'$ есть совокупность линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D}'$ – *сильно сопряженное пространство к пространству* $\mathcal{D}$. Поэтому для изучения пространства $\mathcal{D}'$ можно применять общие теоремы функционального анализа. При этом теория существенно упрощается по сравнению с соответствующей теорией над полем $\mathbb{R}$: достаточно проверить линейность функционалов, и тогда их непрерывность будет автоматически следовать.

Пространство $\mathcal{D}'$ полное.

■ Пусть последовательность $\{f_k, \ k \to \infty\}$ функционалов f_k из $\mathcal{D}'$ сходится в себе, $f_k - f_l \to 0$, $k,l \to \infty$, в $\mathcal{D}'$, так что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ последовательность чисел $\{(f_k,\varphi), \ k \to \infty\}$ сходится в себе, и, следовательно, существует число $C(\varphi)$ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} (f_k,\varphi) = C(\varphi). \tag{3.1}$$

Очевидно, построенный функционал линеен на $\mathcal{D}$. Положим $C(\varphi) = (f,\varphi)$, $f \in \mathcal{D}'$. Равенство (3.1) показывает, что $f_k \to f$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'$. ■

Всякая функция $f \in L^1_{loc}$ определяет обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'$ по формуле

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\varphi(x)dx, \tag{3.2}$$

и соответствие (3.2) между функциями $f \in L^1_{loc}$ и обобщенными функциями $f \in \mathcal{D}'$ взаимно однозначно.

Обобщенная функция f *обращается в нуль на открытом множестве* $\mathcal{O}$, $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}$, если $(f,\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Аналогично определяется равенство обобщенных функций f и g в $\mathcal{O}$, т.е. $f(x)-g(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}$.

Поскольку в $\mathcal{D}$ справедливо «разложение единицы» (см. п. 2 § 6), то понятие носителя (supp) обобщенной функции f вводится стандартным образом, как и в случае поля $\mathbb{R}$: $x \in \operatorname{supp} f$ эквивалентно тому, что f не обращается в нуль ни в какой окрестности точки x.

Пример 1. δ-функция Дирака

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.3}$$

Ясно, что $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Обратно, *всякая* $f \in \mathcal{D}'$, *для которой* $\operatorname{supp} f = \{0\}$, *представляется в виде* $f = C\delta$, *где* C *– постоянная.*

■ Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и l – ее параметр постоянности, так что $\varphi(x) = \varphi(0)$, $|x|_p \le p^l$. Пусть η – другая функция из $\mathcal{D}'$ такая, что $\eta(x) = 1$, $|x|_p \le p^l$. Тогда

$$(f,\varphi) = (f,\eta\varphi) = \varphi(0)(f,\eta) = C(\delta,\varphi), \ C = (f,\eta). \ ■$$

Пример 2.

$$\delta_k(x) \equiv p^k\Omega(p^k|x|_p) \to \delta(x), \ k \to \infty \text{ в } \mathcal{D}'. \tag{3.4}$$

■ Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и l – параметр постоянности φ. Тогда при всех $k \ge -l$ будем иметь

$$(\delta_k,\varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p} p^k\Omega(p^k|x|_p)\varphi(x)dx = p^k\int_{B_{-k}} \varphi(x)dx =$$

$$= p^k\widetilde{\varphi}(0)\int_{B_{-k}} dx = \varphi(0) = (\delta,\varphi). \ \blacksquare$$

Замечание. Предельное соотношение (3.4) эквивалентно такому:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \delta_k(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0), \ k \to \infty, \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.4'}$$

Предельное соотношение (3.4′) справедливо для всех функций φ, непрерывных в точке 0.

4. Линейные операторы в $\mathcal{D}'$ вводятся как сопряженные к соответствующим линейным операторам в $\mathcal{D}$: пусть A – линейный оператор из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, тогда сопряженный оператор A^*: $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ определяется формулой

$$(A^*f,\varphi) = (f,A\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}, \ f \in \mathcal{D}'. \tag{4.1}$$

Ясно, что $A^*f \in \mathcal{D}'$ и A^* – линейный и, значит, непрерывный оператор из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$ в соответствии с леммой п. 3 § 6.

Конкретное выражение для оператора A^* получим применением формулы (4.1) к функциям $f \in L^1_{loc}$ после преобразования интеграла (см. (3.2))

$$(f,A\varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)(A\varphi)(x)dx$$

к виду (A^*f,φ).

В соответствии со сказанным *произведение* af, $a \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{D}'$, определяется формулой

$$(af,\varphi) = (f,a\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.2}$$

Пример 1. $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

Пример 2. Если $f \in \mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} f \subset B_N$, то

$$f = \Delta_N(x)f. \tag{4.3}$$

Пример 3. Если $f \in \mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} f$ – открыто-замкнутое множество, то

$$f = \theta_{\operatorname{supp} f}(x)f, \tag{4.4}$$

где $\theta_{\mathrm{supp} f}$ – характеристическая функция множества supp f (см. пример 5 п. 1 § 6).

Линейная замена переменной $y = ax+b$, $a \neq 0$, в обобщенной функции $f(y)$ в соответствии с формулой (4.1) определяется равенством

$$\left(f(ax+b),\varphi\right) = \left(f(y),\frac{1}{|a|_p}\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.5}$$

Пример 4. $(\delta(x-x^0),\varphi) = \varphi(x^0)$.

Операцию *отражения* ($a = -1$, $b = 0$) $f(x) \to f(-x)$ будем обозначать $\hat{f}(x) = f(-x)$.

Пример 5. $\delta(x) = \hat{\delta}(x)$, т.е. $\delta(x)$ – четная функция.

Обозначим через $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{Q}_p)$ сильно сопряженное к $\mathcal{E}$ пространство, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}$. Ясно, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$.

Теорема. *Для того чтобы обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ принадлежала $\mathcal{E}'$, необходимо и достаточно, чтобы* supp f *был компактом.*

■ **Достаточность** сразу следует из формулы (4.3).

Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{E}'$ и supp f – неограниченное множество в $\mathbb{Q}_p$. Тогда найдется последовательность точек $\left\{x^k,\ k = 1,2,\ldots\right\}$, $x^k \in$ supp f, такая, что $|x^k|_p \to \infty$, $k \to \infty$. Это значит, что существуют окрестности $B_{\gamma_k}(x^k)$, $\gamma_k \le \gamma$, и функции $\varphi_k \in \mathcal{D}(B_{\gamma_k}(x^k))$ такие, что $(f,\varphi_k) = 1$, $k = 1,2,\ldots$

С другой стороны, $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{E}$ (см. п. 1 § 6), и поэтому $(f,\varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$. Противоречие показывает, что supp f не может быть неограниченным. ■

Пусть $\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p$. Пространство $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ – совокупность линейных (и, значит, непрерывных) функционалов на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Если $\mathcal{O}$ – открыто-замкнутое множество, то всякая $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ допускает продолжение до $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$.

■ В этом случае $\theta_{\mathcal{O}}(x) \in \mathcal{E}$ (см. пример 5 п. 1 § 6), и требуемое продолжение F дается формулой

$$(F,\varphi) = (f,\theta_{\mathcal{O}}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \ ■$$

Пример 6. Функция $e^{|x|_p^{-1}}$ принадлежит $L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p\setminus\{0\})$ и поэтому принадлежит $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p\setminus\{0\})$. Она допускает продолжение (регуляризацию) до обобщенной функции f_0 из $\mathcal{D}'$ по формуле

$$(f_0,\varphi) = \int_{|x|_p\le 1} e^{|x|_p^{-1}}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]dx + \int_{|x|_p>1} e^{|x|_p^{-1}}\varphi(x)dx.$$

Этот факт не имеет места в случае поля $\mathbb{R}$!

Всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ допускает сужение $f_{\mathcal{O}'} \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}')$ на любое открытое множество $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ по правилу

$$(f_{\mathcal{O}'},\varphi) = (f,\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}').$$

Обратно, в пространстве $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ справедлива **теорема о «кусочном склеивании»**: *пусть открытое множество $\mathcal{O}$ представлено в виде объединения не более чем счетного числа кругов $B_{\gamma_k}(a^k)$, $k = 1,2,\ldots$, без общих точек, и пусть заданы $f_k \in \mathcal{D}'(B_{\gamma_k}(a^k))$. Тогда существует единственная $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ такая, что $f\Big|_{B_{\gamma_k}(a^k)} = f_k$, $k = 1,2,\ldots$*

■ Следует из теоремы о «разложении единицы» §6. Искомая обобщенная функция определяется формулой

$$f(x) = \sum_k \Delta_{\gamma_k}(x-a^k)f_k(x), \quad x \in \mathcal{O}. \ ■$$

5. Основные и обобщенные функции, $n > 1$. Теория основных и обобщенных функций в $\mathbb{Q}_p^n$, $n > 1$ (см. п. 7 § 1), строится аналогично теории в $\mathbb{Q}_p$; и все результаты в надлежащей формулировке остаются справедливыми. При этом шар

$$B_\gamma(a) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p^n : |x-a|_p \le p^\gamma\right\}, \quad a = (a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

есть произведение кругов

$$B_\gamma(a) = B_\gamma(a_1)\times B_\gamma(a_2)\times\ldots\times B_\gamma(a_n). \tag{5.1}$$

Параметр постоянности l (см. п. 2 § 6) является вектором, $l = (l_1,l_2,\ldots,l_n)$, где l_j – параметр постоянности по переменной x_j, $j = 1,2,\ldots,n$; $l = \min\limits_{1\le j\le n} l_j$.

Формула (2.2) п. 2 § 6 принимает вид: всякая $\varphi \in \mathcal{D}_N^l$, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{n(N-l)}} \varphi(a^\nu)\Delta_{l_1}(x_1-a_1^\nu)\ldots\Delta_{l_n}(x_n-a_n^\nu), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \qquad (5.2)$$

при некоторых $a^\nu = (a_1^\nu, a_2^\nu, \ldots a_n^\nu) \in B_N$, не зависящих от φ.

При $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$ формулу (5.2) можно в силу (5.1) переписать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{nN-nl}} \varphi(a^\nu)\Delta_l(x-a^\nu), \qquad (5.2')$$

где $\Delta_l(x-a^\nu)$ – характеристическая функция шара $B_l(a^\nu)$.

В теории преобразования Фурье произведение $x\xi$ следует заменить на скалярное произведение

$$(x,\xi) = x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n.$$

6. Прямое произведение обобщенных функций. Пусть даны обобщенные функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^m)$. Их ***прямое произведение*** $f(x)\times g(x)$ определяется формулой

$$\Big(f(x)\times g(y), \varphi\Big) = \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x,y)\Big)\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m}). \qquad (6.1)$$

Поскольку в силу представления (5.2) п. 5 § 6 основная функция φ из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ представляется в виде конечной суммы

$$\varphi(x,y) = \sum_k \varphi_k(x)\psi_k(y), \quad \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n), \quad \psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m), \qquad (6.2)$$

то оператор $\varphi \mapsto \Big(g(y), \varphi(x,y)\Big)$ – линейный иэ $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, и, следовательно, функционал, стоящий справа в (6.1) – линейный на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m})$. Итак, $f(x)\times g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$. Но, в силу (6.1) и (6.2),

$$\Big(f(x)\times g(y), \varphi\Big) = \sum_k (f,\varphi_k)(g,\psi_k) =$$

$$= \Big(g(y)\times f(x), \varphi\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m}), \qquad (6.3)$$

так что прямое произведение ***коммутативно***:

$$f(x)\times g(y) = g(y)\times f(x). \qquad (6.4)$$

Из (6.3) следует также, что прямое произведение $f(x)\times$ $\times g(y)$ непрерывно по совокупности сомножителей f и g: если $f_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $g_k \to g$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^m)$, то $f_k \times g_k \to 0$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$.

При $g = 1$ равенство (6.4) эквивалентно равенству

$$\left(f(x), \int_{\mathbb{Q}_p^m} \varphi(x,y)\,dy\right) = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \left(f(x), \varphi(x,y)\right) dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m}). \qquad (6.5)$$

Аналогично прямое произведение вводится и для обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Пример. $\delta(x) = \delta(x_1)\times\delta(x_2)\times\ldots\times\delta(x_n)$.

7. Теорема о «ядре». Напомним, что все линейные операторы и функционалы, заданные на $\mathcal{D}$, непрерывны (см. п. 3 § 6).

Всякая обобщенная функция F из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ определяет линейный оператор A: $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^m)$ по формуле

$$(A(\varphi), \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m) \qquad (7.1)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Пусть* $B(\varphi,\psi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m)$, *- билинейный функционал. Тогда существует единственная обобщенная функция* $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ *такая, что*

$$(F, \varphi(x)\psi(y)) = B(\varphi,\psi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m). \qquad (7.2)$$

■ Так как всякая $\Psi(x,y)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ представляется в виде конечной суммы

$$\Psi(x,y) = \sum_\nu \varphi_\nu(x)\psi_\nu(y), \quad \varphi_\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n), \quad \psi_\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m)$$

(см. (5.2) п. 5 § 6), то билинейный функционал $B(\varphi,\psi)$ задает некоторый линейный функционал

$$F\colon \Psi \longrightarrow \sum_\nu B(\varphi_\nu, \psi_\nu)$$

на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ и, таким образом, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ и справедливо равенство (7.2). Ясно, что F единственна. ∎

Следствие 1 (теорема Шварца о ядре). *Пусть* $\varphi \to A(\varphi)$ – *линейный оператор из* $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^m)$. *Тогда существует единственная обобщенная функция* $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{m+n})$ *такая, что справедливо равенство* (1.7).

Обобщенная функция $F(x,y)$ называется *ядром* оператора A.

Следствие 2. *Всякая билинейная форма* $B(\varphi,\psi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^m)$, *непрерывна.*

§ 7. Свертка и преобразование Фурье

В этом параграфе мы изучим наиболее важные линейные операции над обобщенными функциями – операции свертки и преобразования Фурье, а также связанную с ними операцию умножения.

1. Свертка обобщенных функций. Последовательность $\left\{\eta_k, k \to \infty\right\}$, $\eta_k \in \mathcal{D}$, назовем *1-последовательностью*, если существует такое $N \in \mathbb{Z}$, что

$$\eta_k(x) = \Delta_k(x) \equiv \Omega(p^{-k}|x|_p), \; k \ge N.$$

Очевидно,

$$\eta_k(x) \longrightarrow 1, \; k \to \infty, \text{ в } \mathcal{E}.$$

Последовательность $\left\{\Delta_k, \; k \to \infty\right\}$ назовем *канонической 1-последовательностью.*

Пусть f и g – обобщенные функции из $\mathcal{D}'$. Их *сверткой* $f*g$ назовем функционал, определяемый равенством

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y), \Delta_k(x)\varphi(x+y)\Big), \tag{1.1}$$

если предел существует для любой $\varphi\in\mathcal{D}$. Правая часть равенства (1.1) определяет линейный функционал на $\mathcal{D}$ и, следовательно, $f*g \in \mathcal{D}'$ (см. п. 3 § 6). Отметим, что равенство (1.1) эквивалентно следующему:

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y), \eta_k(x)\varphi(x+y)\Big), \; \varphi \in \mathcal{D},$$

для любой 1-последовательности $\{\eta_k,\ k \to \infty\}$.

Аналогично определяется свертка $g*f$:

$$(g*f,\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Big(g(y)\times f(x),\Delta_k(y)\varphi(x+y)\Big). \qquad (1.1')$$

Теорема. *Если свертка $f*g$, $f,g \in \mathcal{D}'$, существует, то существует и свертка $g*f$ и они равны:*

$$f*g = g*f.$$

■ Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, так что $\varphi \in \mathcal{D}_N^l$ при некоторых $N,l \in \mathbb{Z}$. По формуле (5.2′) п. 5 § 6 функция φ представляется в виде конечной суммы

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-l}} C_\nu \Delta_l(x-a^\nu)$$

при некоторых $a^\nu \in B_N$ и комплексных C_ν. Поэтому теорему достаточно доказать для основных функций вида

$$\varphi_\nu(x) = \Delta_l(x-a^\nu).$$

По условию свертка $f*g$ существует. Применяя формулу (1.2) к 1-последовательности

$$\Big\{\Delta_k(-x+a^\nu) = \Omega(p^{-k}|-x+a^\nu|_p) = \Omega(p^{-k}|x|_p) = \Delta_k(x),\ k \to \infty\Big\},$$

получим

$$(f*g,\varphi_\nu) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y),\Delta_k(-x+a^\nu)\varphi_\nu(x+y)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y),\Delta_k(-x+a^\nu)\Delta_l(x+y-a^\nu)\Big).$$

Учитывая легко проверяемое тождество при $k \ge l$

$$\Omega(p^{-k}|-x+a^\nu|_p)\Omega(p^{-l}|x+y-a^\nu|_p) = \Omega(p^{-k}|y|_p)\Omega(p^{-l}|x+y-a^\nu|_p),$$

продолжим наши равенства

$$(f*g,\varphi_\nu) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y),\Delta_k(y)\Delta_l(x+y-a^\nu)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y),\Delta_k(y)\varphi_\nu(x+y)\Big) = (g*f,\varphi).$$

Здесь мы воспользовались коммутативностью прямого произведения (см. п. 6 § 6) и формулой (1.2). ■

Отметим формулу: если свертка $f*g$ существует, то

$$\widehat{f*g} = \hat{f}*\hat{g}, \tag{1.3}$$

где операция отражения $\hat{f}$ определена в п. 4 § 6.

Если $g \in \mathcal{D}'$ *и* $\operatorname{supp} g \subset B_N$, *то свертка* $f*g$ *существует и справедливо представление*

$$(f*g,\varphi) = \Big(f(x)\times g(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.4}$$

■ Воспользуемся определением (1.1) и формулой (4.3) п. 4 § 6. При всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем:

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y), \Delta_k(y)\varphi(x+y)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times \Delta_N(y) g(y), \Delta_k(y)\varphi(x+y)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x)\times g(y), \Delta_N(y)\Delta_k(y)\varphi(x+y)\Big) =$$

$$= \Big(f(x)\times g(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big),$$

поскольку

$$\Delta_k(y)\Delta_N(y)\varphi(x+y) \longrightarrow \Delta_N(y)\varphi(x+y), \quad k\to\infty, \text{ в } \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2). \ ■$$

Из представления (1.4) следует, что *свертка* $f*g$ *непрерывна по совокупности* f *и* g: *если* $f_k \to 0$, $k\to\infty$, *в* $\mathcal{D}'$, $g_k \to g$, $k\to\infty$, *в* $\mathcal{D}'$, $\operatorname{supp} g_k \subset B_N$, *то* $f_k*g_k \longrightarrow 0$, $k\to\infty$, *в* $\mathcal{D}'$.

■ Вытекает из непрерывности прямого произведения, см. п. 6 § 6. ■

Пример 1.

$$f*\delta = f = \delta*f, \quad f \in \mathcal{D}'. \tag{1.5}$$

■ Следует из (1.4) и (6.1) п. 6 § 6

$$(f*\delta,\varphi) = \Big(f(x)\times\delta(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big) =$$

$$= \Big(f(x), \big(\delta(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\big)\Big) = (f,\varphi). \ ■$$

Пример 2. Если $f \in \mathcal{D}'$, то

$$f*\delta_k \longrightarrow f, \quad k\to\infty, \text{ в } \mathcal{D}', \tag{1.6}$$

где последовательность $\{\delta_k,\ k\to\infty\}$ определена в (3.4) п. 3 § 6.

■ Вытекает из (1.5) и (3.4) п. 3 § 6

$$f*\delta_k \longrightarrow f*\delta = f,\ k \to \infty \text{ в } \mathcal{D}', \tag{1.6'}$$

в силу непрерывности свертки. ■

При $g = \psi \in \mathcal{D}$ свертка $f*\psi \in \mathcal{E}$, и формула (1.4) принимает вид

$$\left(f*\psi\right)(x) = \left(f(y), \psi(x-y)\right),\ x \in \mathbb{Q}_p; \tag{1.7}$$

при этом параметр постоянности функции $f*\psi$ не меньше параметра постоянности функции ψ.

■ Пусть $\psi \in \mathcal{D}_N^l$. Тогда, пользуясь формулой (6.5) п. 6 § 6 из (1.4), получаем представление (1.7):

$$(f*\psi, \varphi) = \left(f(x), \left(\psi(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\right)\right) =$$

$$= \left(f(x), \int_{\mathbb{Q}_p} \psi(y)\varphi(x+y)dy\right) = \left(f(x), \int_{\mathbb{Q}_p} \psi(\xi-x)\varphi(\xi)d\xi\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} \left(f(x), \psi(\xi-x)\varphi(\xi)d\xi,\ \varphi \in \mathcal{D},\right.$$

так как $\psi(y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2)$. Остальные утверждения следуют из представления (1.7). ■

Пример 3. Если $f \in \mathcal{D}'$, то

$$\Delta_k(f*\delta_k) \longrightarrow f,\ k \to \infty, \text{ в } \mathcal{D}',$$

причем $\Delta_k(f*\delta_k) \in \mathcal{D}$.

Пример 3 показывает, что *всякая обобщенная функция* $f \in \mathcal{D}'$ *есть слабый предел основных функций*, т.е. $\mathcal{D}$ *плотно* в $\mathcal{D}'$.

Формула (1.4) позволяет написать равенство

$$\left(f(x)\times g(y), \Delta_k(x)\varphi(x+y)\right) = \left(\Delta_k(x)f(x)\times g(y), \Delta_k(x)\varphi(x+y)\right) =$$

$$= \left((\Delta_k f)*g, \varphi\right).$$

Поэтому определение свертки (1.1) эквивалентно такому:

$$(\Delta_k f)*g \longrightarrow f*g,\ k \to \infty, \text{ в } \mathcal{D}'. \tag{1.8}$$

Из определения (1.1) следует что supp $(f*g)$ содержится в замыкании множества

$$\left\{\xi:\ \xi \in \mathbb{Q}_p,\ \xi = x+y,\ x \in \operatorname{supp} f,\ y \in \operatorname{supp} g\right\}.$$

В частности, если $\operatorname{supp} f \subset B_N$, $\operatorname{supp} g \subset B_N$, то $\operatorname{supp}(f*g) \subset$ $\subset B_N$.

Таким образом, множество обобщенных функций с носителем в B_N образует *сверточную алгебру* (коммутативную и ассоциативную) с единицей, в которой роль единицы играет δ-функция.

В заключение отметим еще один критерий существования свертки: *пусть функции f и $g \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p)$ и существует функция $q \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p)$ такая, что*

$$\int_{B_k} f(x-y)g(y)dy \longrightarrow q(x),\ k \to \infty, \text{ в } \mathcal{D}'.$$

Тогда свертка $f*g$ существует и равна q: $f*g = q$.

■ Вытекает из определения свертки (1.1):

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\int_{\mathbb{Q}_p} \Delta_k(y)g(y)\varphi(x+y)dydx =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)\int_{B_k} f(\xi-y)g(y)dyd\xi = \int_{\mathbb{Q}_p} q(\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ \ \varphi \in \mathcal{D}.\ ■$$

2. Преобразование Фурье основных функций. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Ее *преобразование Фурье* $\widetilde{\varphi}$ определяется формулой

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = F\left[\varphi\right](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx,\ \ \xi \in \mathbb{Q}_p. \qquad (2.1)$$

Лемма. *Если $\varphi \in \mathcal{D}^l_N$, то $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}^{-N}_{-l}$, т.е. операция $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ – линейна (и, следовательно, непрерывна) из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$.*

■ Докажем, что $\widetilde{\varphi}(\xi) = 0$, $|\xi|_p > p^{-l}$. Совершая в (2.1) замену переменной интегрирования $x = x'+a$, $|a|_p = p^l$, получим

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi(x'+a))\varphi(x'+a)dx' =$$

$$= \chi_p(\xi a)\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x')\varphi(x')dx' =$$

$$= \chi_p(\xi a)\tilde{\varphi}(\xi). \quad (2.2)$$

Но $|\xi a|_p = |\xi|_p|a|_p > 1$. Поэтому для любого ξ, $|\xi|_p > p^{-l}$, найдется такое $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = p^l$, что $\chi_p(\xi a) \neq 1$ (см. п. 1 § 3). Отсюда и из (2.2) следует, что $\tilde{\varphi}(\xi) = 0$, $|\xi|_p > p^{-l}$, т.е. $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_{-l}$.

Докажем, что

$$\tilde{\varphi}(\xi+\xi') = \tilde{\varphi}(\xi),\ \xi' \in B_{-N},\ \xi \in \mathbb{Q}_p,$$

т.е. параметр постоянности функции $\tilde{\varphi}$ не меньше $-N$. Имеем

$$\tilde{\varphi}(\xi+\xi') = \int\limits_{B_N} \chi_p((\xi+\xi')x)\varphi(x)dx = \int\limits_{B_N} \chi_p(\xi x)\chi_p(\xi' x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx = \tilde{\varphi}(\xi),$$

поскольку $|\xi' x|_p = |\xi'|_p|x|_p \le 1$ и $\chi_p(\xi' x) = 1$. ∎

Теорема. *Преобразование Фурье $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ - линейный изоморфизм $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$, причем справедлива формула обращения*

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\xi)\tilde{\varphi}(\xi)d\xi = F\left[\tilde{\varphi}(-x)\right],\ \varphi \in \mathcal{D}, \quad (2.4)$$

и равенство Парсеваля - Стеклова

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\varphi}(\xi)\overline{\tilde{\psi}(\xi)}d\xi,\ \varphi,\psi \in \mathcal{D}, \quad (2.5)$$

а также эквивалентное ему равенство

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\widetilde{\psi}(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{\varphi}(\xi)\psi(\xi)d\xi, \quad \varphi,\psi \in \mathcal{D}. \qquad (2.5')$$

■ В силу леммы, операция $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ отображает $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Чтобы доказать, что это отображение сюръективно и взаимно однозначно, достаточно установить формулу обращения (2.4). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_N^l$. Исходя из (2.1), имеем

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\xi)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{B_{-l}} \chi_p(-x\xi)\int_{B_N} \varphi(x')\chi_p(x'\xi)dx'd\xi =$$

$$= \int_{B_N} \varphi(x') \int_{B_{-l}} \chi_p(-x\xi)\chi_p(x'\xi)d\xi dx' =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x') \int_{B_{-l}} \chi_p(\xi(x'-x))d\xi dx' =$$

$$= \int_{|x'-x|\le p^l} \varphi(x')\int_{B_{-l}} \chi_p(\xi(x'-x))d\xi dx' +$$

$$+ \int_{|x'-x|\ge p^{l+1}} \varphi(x')\int_{B_{-l}} \chi_p(\xi(x'-x))d\xi dx'. \qquad (2.6)$$

В первом интеграле справа в формуле (2.6) $\varphi(x') = \varphi(x)$ и $\chi_p(\xi(x'-x)) = 1$, и он равен (см. (2.3) п. 2 §6)

$$\varphi(x) \int_{B_l(x)} \int_{B_{-l}} d\xi dx' = \varphi(x)p^l p^{-l} = \varphi(x).$$

Второй интеграл справа в (2.6) равен 0 в силу формулы (3.1) п. 3 § 4. Формула обращения (2.4) доказана.

Для доказательства равенства (2.5) обозначим $\overline{\widetilde{\psi}}(\xi) = \eta(\xi) \in \mathcal{D}$ и тогда $\overline{\psi}(x) = \widetilde{\eta}(x)$, приведем его к эквивалентному равенству (2.5′):

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\tilde{\eta}(x)\,dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\varphi}(\xi)\eta(\xi)\,d\xi,$$

которое проверяется непосредственно

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\tilde{\eta}(x)\,dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\int_{\mathbb{Q}_p} \eta(\xi)\chi_p(\xi x)\,d\xi dx =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} \eta(\xi)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\chi_p(\xi x)\,dx d\xi = \int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\varphi}(\xi)\eta(\xi)\,d\xi. \quad \blacksquare$$

Пример 1.

$$\delta_k = \tilde{\Delta}_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.7}$$

где функции δ_k и Δ_k определены в п. 3 § 6 и п. 1:

$$\delta_k(\xi) = p^k\Omega(p^k|\xi|_p), \quad \Delta_k(x) = \Omega(p^{-k}|x|_p).$$

Формула (2.7) есть другая запись формулы (3.1) п. 3 § 4.

Пример 2. $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$F\Big[\delta(|x|_p-p^{\gamma})\Big](\xi) = p^{\gamma}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\Omega(p^{\gamma}|\xi|_p) -$$

$$- p^{\gamma-1}\delta(|\xi|_p-p^{-\gamma+1}), \tag{2.8}$$

где функция $\delta(|x|_p-p^{\gamma})$ определена в п. 2 § 6.

Формула (2.3) есть другая запись формулы (3.2) п. 3 § 4.

Пример 3. $\gamma \in \mathbb{Z}$, $k = 1,2,\dots,p-1$,

$$F\Big[\Omega(p^{\gamma-1}|x|_p)\chi_p(kp^{-\gamma}x)\Big](\xi) = p^{1-\gamma}\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})\delta(\xi_0-k). \tag{2.9}$$

■ Искомая величина в силу (2.7) равна

$$\int\limits_{|x|_p\le p^{1-\gamma}} \chi_p(kp^{-\gamma}x+\xi x)\,dx = \tilde{\Delta}_{1-\gamma}(kp^{-\gamma}+\xi) = \delta_{1-\gamma}(kp^{-\gamma}+\xi) =$$

$$= p^{1-\gamma}\Omega(p^{1-\gamma}|kp^{-\gamma}+\xi|_p) = p^{1-\gamma}\begin{cases}1, & |\xi|_p=p^{\gamma},\ \xi_0=k,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases} =$$

$$= p^{1-\gamma}\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})\delta(\xi_0-k). \ ■$$

Пример 4. $|4a|_p \ge p^{2-2\gamma}$, $\gamma\in\mathbb{Z}$,

$$F\Big[\chi_p(ax^2)\delta(|x|_p-p^{\gamma})\Big](\xi) =$$

$$= \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\delta\left(\left|\frac{\xi^2}{2a}\right|_p-p^{\gamma}\right). \quad (2.10)$$

Формула (2.10) есть другая запись формулы (1.7) п. 1 § 5.

Пример 5. $p\ne 2$, $|a|_p = p^{1-2\gamma}$, $\gamma\in\mathbb{Z}$,

$$F\Big[\chi_p(ax^2)\delta(|x|_p-p^{\gamma})\Big](\xi) =$$

$$= |a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right]\Omega(p^{\gamma-1}|\xi|_p). \quad (2.11)$$

Формула (2.11) есть другая запись формулы (1.8) п. 1 § 5.

Пример 6. $p\ne 2$, $|a|_p p^{2\gamma} > 1$, $\gamma\in\mathbb{Z}$,

$$F\Big[\chi_p(ax^2)\Omega(p^{-\gamma}|x|_p)\Big](\xi) =$$

$$= \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega\left(p^{-\gamma}\left|\frac{\xi}{a}\right|_p\right). \quad (2.12)$$

Формула (2.12) есть другая запись формулы (2.1) п. 2 § 5.

Пример 7. $p = 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

$$F\left[\chi_2(ax^2)\Omega(2^{-\gamma}|x|_2)\right](\xi) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\delta(|\xi|_2-2^{1-\gamma}), & |a|_2=2^{1-2\gamma}, \\ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega(2^{\gamma}|\xi|_2), & |a|_2=2^{2-2\gamma}, \\ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega\left(2^{-\gamma+1}\left|\frac{\xi}{a}\right|_2\right), & |a|_2\geq 2^{3-2\gamma}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Формулы (2.13) есть другая запись формул (2.3) п. 2 § 5.

Пример 8. $p \neq 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\sum_{k=1}^{p-1}\eta(k) = 0$,

$$F\left[\eta(x_0)\delta(|x|_p-p^{\gamma})\right](\xi) = p^{\gamma-1}\eta'(\xi_0)\delta(|\xi|_p-p^{1-\gamma}), \quad (2.14)$$

где

$$\eta'(\xi_0) = \sum_{k=1}^{p-1}\eta(k)exp\left(2\pi i\frac{k\xi_0}{p}\right), \quad \sum_{k=1}^{p-1}\eta'(k) = 0. \quad (2.15)$$

■ Искомое преобразование Фурье сводится к интегралу

$$I = \int_{S_\gamma}\eta(x_0)\chi_p(\xi x)dx.$$

Если $|\xi|_p \leq p^{-\gamma}$, то $\chi_p(\xi x) = 1$ и

$$I = \int_{S_\gamma}\eta(x_0)dx = p^{\gamma-1}\sum_{k=1}^{p-1}\eta(k) = 0;$$

если $|\xi|_p = p^N \geq p^{2-\gamma}$ (т.е. $N+\gamma-1 \geq 1$), то

$$\left\{\xi x\right\}_p = \left\{p^{-N-\gamma}(\xi_0+\xi_1 p+\dots)(x_0+x_1 p+\dots)\right\}_p =$$

$$= L(x_0,x_1,\dots,x_{N+\gamma-2}) + \frac{\xi_0 x_{N+\gamma-1}}{p},$$

и, следовательно, как и в примере 24 п. 1 § 5, $I = 0$. Если же $|\xi|_p = p^{1-\gamma}$, то $\{\xi x\}_p = \dfrac{\xi_0 x_0}{p}$, и в силу (2.15)

$$I = \int_{S_\gamma} \eta(x_0) exp\left(2\pi i \frac{\xi_0 x_0}{p}\right) dx =$$

$$= p^{\gamma-1} \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) exp\left(2\pi i \frac{k\xi_0}{p}\right) = p^{\gamma-1}\eta'(\xi_0). \ \blacksquare$$

Пример 9. $\operatorname{Re}\alpha > 0$,

$$F\left[|x|_p^{\alpha-1}\Omega\left(\left|\frac{x}{m}\right|_p\right)\right] = |m|_p^{\alpha}\Omega\left(|m\xi|_p\right)\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} +$$

$$+ \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}|\xi|_p^{-\alpha}\left[1-\Omega\left(|m\xi|_p\right)\right]. \quad (2.16)$$

■ Совершая подстановку $t = x\xi$, $dt = |\xi|_p dx$, обозначая $|m\xi|_p = p^N$ и пользуясь формулой (3.2) п. 3 § 4, для искомого преобразования Фурье получим равенство (2.16):

$$\int_{|x|_p \le |m|_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x\xi)dx = |\xi|_p^{-\alpha} \int_{|t|_p \le |m\xi|_p} |t|_p^{\alpha-1}\chi_p(t)dt =$$

$$= |\xi|_p^{-\alpha} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} p^{\gamma(\alpha-1)} \int_{S_\gamma} \chi_p(t)dt =$$

$$= |\xi|_p^{-\alpha} \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma=-N}^{\infty} p^{-\gamma\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right), & N \le 0, \\ \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right) - p^{\alpha-1}, & N \ge 1, \end{cases} =$$

$$= |\xi|_p^{-\alpha} \begin{cases} p^{N\alpha}\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}, & N \le 0, \\ \dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} - p^{\alpha-1} = \dfrac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}, & N \ge 1, \end{cases} =$$

$$= |m|_p^{\alpha}\Omega\left(|m\xi|_p\right)\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} + \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}|\xi|_p^{-\alpha}\left[1-\Omega\left(|m\xi|_p\right)\right]. \ \blacksquare$$

Отметим формулу

$$F\Big[\varphi(ax+b)\Big](\xi) = |a|_p^{-1}\chi_p\Big(-\frac{b}{a}\xi\Big)F\Big[\varphi\Big]\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \ a\neq 0. \tag{2.17}$$

В частности,

$$F\Big[\varphi(-x)\Big](\xi) = F\Big[\varphi(x)\Big](-\xi),$$

$$F\Big[\varphi(x-b)\Big](\xi) = \chi_p(b\xi)F\Big[\varphi\Big](\xi). \tag{2.18}$$

■ Формула (2.17) непосредственно следует из (2.1)

$$F\Big[\varphi(ax+b)\Big](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(ax+b)\chi_p(\xi x)\,dx =$$

$$= |a|_p^{-1}\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x')\chi_p\Big(\xi\,\frac{x'-b}{a}\Big)dx' =$$

$$= |a|_p^{-1}\chi_p\Big(-\xi\frac{b}{a}\Big)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x')\chi_p\Big(\xi\frac{x'}{a}\Big)dx' = |a|_p^{-1}\chi_p\Big(-\frac{b}{a}\xi\Big)F\Big[\varphi\Big]\Big(\frac{\xi}{a}\Big). \ ■$$

Всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}_N^l$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} \tilde{\varphi}(a^\nu)\chi_p(xa^\nu)\delta_{-N}(x) \tag{2.19}$$

при некоторых $a^\nu \in \mathbb{Q}_p$, не зависящих от φ.

■ По лемме $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_{-1}^{-N}$ и представляется в виде (2.2) п. 2

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{N-1}} \tilde{\varphi}(a^\nu)\Delta_{-N}(\xi-a^\nu)$$

для некоторых $a^\nu \in B_{-1}$. Применяя к этому равенству обратное преобразование Фурье и пользуясь формулами (2.18) и (2.7), получим представление (2.19). ■

Из представления (2.18) вытекает, *что множество тригонометрических полиномов*

$$\Big\{_{\nu}\sum_{\text{конечно}} C_\nu\chi_p(\xi^\nu x),\ \xi^\nu \in M\Big\}$$

плотно в $C(K)$ *и, значит, в* $L^2(K)$ *для любого компакта* $K \subset$

$\subset \mathbb{Q}_p$; *здесь* M *- любое счетное всюду плотное подмножество* $\mathbb{Q}_p$.

■ Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в $C(K)$, см. п. 2. ■

3. Преобразование Фурье обобщенных функций. В соответствии с формулой (4.1) п. 4 § 6 преобразование Фурье $\tilde{f}$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$ введем по формуле

$$(\tilde{f},\varphi) = (f,\tilde{\varphi}), \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.1}$$

Поскольку оператор $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$ линеен из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ (см. п. 2), то функционал, стоящий справа в (3.1), линеен на $\mathcal{D}$, так что $\tilde{f} \in \mathcal{D}'$ и оператор $f \longmapsto \tilde{f}$ непрерывен из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$ (см. п. 4 § 6).

Справедлива формула обращения

$$f = F\Big[\tilde{f}(-\xi)\Big], \ f \in \mathcal{D}', \tag{3.2}$$

так что преобразование Фурье $f \longmapsto \tilde{f}$ *есть линейный изоморфизм* $\mathcal{D}'$ *на* $\mathcal{D}'$.

■ Формула (3.2) вытекает из формулы (2.4) и определения (3.1) ■

В случае $f = \psi \in \mathcal{D}$ формула (3.1) совпадает с равенством (2.5′), и поэтому введенное преобразование Фурье (3.1) является расширением классического преобразования Фурье (2.1).

Формулы (2.16) и (2.17) переносятся на обобщенные функции

$$F\Big[f(ax+b)\Big](\xi) = |a|_p^{-1}\chi_p\Big(-\frac{b}{a}\xi\Big)F\Big[f\Big]\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \ f \in \mathcal{D}', \ a \neq 0. \tag{3.3}$$

$$F\Big[f(x-b)\Big](\xi) = \chi_p(b\xi)F\Big[f\Big](\xi), \tag{3.4}$$

где обобщенная функция $f(ax+b)$ определена в п. 4 § 6.

Если $f \in L^1$, *то формула* (3.1) *эквивалентна формуле* (2.1)

$$\tilde{f}(\xi) = F\Big[f\Big](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)f(x)dx, \ \xi \in \mathbb{Q}_p. \tag{3.5}$$

Если $f \in L^1_{loc}$ *и существует такая* $q \in L^1_{loc}$, *что*

$$\int_{B_k} f(x)\chi_p(\xi x)dx \longrightarrow q(\xi), \ k \to \infty, \text{ в } \mathcal{D}',$$

то преобразование Фурье $\tilde{f}$ *существует и равно* q: $\tilde{f} = q$.

■ Вытекает из непрерывности операции преобразования Фурье в $\mathcal{D}'$ и из формулы (3.5): действительно, если

$$\Omega\left(p^{-k}|x|_p\right)f(x) \longrightarrow f,\ k \to \infty,\ \text{в } \mathcal{D}',$$

то

$$F\left[\Omega\left(p^{-k}|x|_p\right)f\right] = \int\limits_{B_k} f(x)\chi_p(\xi x)\,dx \longrightarrow \tilde{f},\ k \to \infty,\ \text{в } \mathcal{D}',$$

откуда в силу единственности предела заключаем, что $\tilde{f} = q$. ■

Аналог теоремы Римана - Лебега. *Если* $f \in L^1$, *то* $\tilde{f}$ *- непрерывная функция на* $\mathbb{Q}_p$ *и* $\tilde{f}(\xi) \longrightarrow 0$, $|\xi|_p \to \infty$.

■ Непрерывность $\tilde{f}(\xi)$ следует из представления (3.5) по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. п. 4 § 6), в силу мажорации

$$|f(x)\chi_p(\xi x)| = |f(x)|,\ x \in \mathbb{Q}_p.$$

Докажем, что $\tilde{f}(\xi) \longrightarrow 0$, $|\xi|_p \to \infty$. Так как $\mathcal{D}$ плотно в L^1 (см. п. 2 § 6), то найдется такая $\varphi \in \mathcal{D}$, что

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - любое наперед заданное число. По лемме п. 2 $\tilde{\varphi}(\xi) = 0$, $|\xi|_p > p^N$ при некотором $N \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$|\tilde{f}(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\left[f(x) - \varphi(x)\right]\chi_p(\xi x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\varphi(x)\chi_p(\xi x)\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |f(x) - \varphi(x)|\,dx + |\tilde{\varphi}(\xi)| < \varepsilon,\ \text{если } |\xi|_p > p^N. \ ■$$

Пример 10.

$$\tilde{\delta} = 1,\ \tilde{1} = \delta \qquad (3.6)$$

■ Вытекают из (3.1) и (3.2):

$$(\tilde{\delta},\varphi) = (\delta,\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p}\varphi(x)\,dx = (1,\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}. \ ■$$

Пример 11. Формула (3.7) п. 3 § 4 принимает вид

$$F\left[\frac{1}{|x|_p^2+m^2}\right](\xi) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{|\xi|_p}{p^2+m^2|\xi|_p^2}\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}\frac{p^2-p^{-2\gamma}}{p^{-2\gamma}+m^2|\xi|_p^2}. \quad (3.7)$$

Пример 12. Формула (2.11) п. 2 § 5 принимает вид

$$F\left[\chi_p(ax^2)\right](\xi) = \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right), \quad a\neq 0. \quad (3.8)$$

Пример 13.

$$\lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \longrightarrow \delta(\xi), \quad |a|_p \to 0, \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (3.9)$$

■ Вытекает из (3.8), поскольку в силу (3.6)

$$F\left[\chi_p(ax^2)\right](\xi) \longrightarrow \tilde{1} = \delta, \quad a \longrightarrow 0, \text{ в } \mathcal{D}'. \; ■$$

Теорема. *Для того чтобы* $f \in \mathcal{D}'$ *и* $\operatorname{supp} f \subset B_N$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\tilde{f} \in \mathcal{E}$ *и параметр постоянности* $\tilde{f}$ *был не меньше* $-N$; *при этом справедливо равенство*

$$\tilde{f}(\xi) = \Big(f(x), \Delta_N(x)\chi_p(\xi x)\Big). \quad (3.10)$$

■ **Необходимость.** Воспользовавшись формулами (4.3) п. 4 § 6 и (6.4) п. 6 § 6, из (3.1) выводим представление (3.10):

$$(\tilde{f},\varphi) = (\Delta_N(x)f,\tilde{\varphi}) = \Big(f(x), \Delta_N(x)\int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(\xi)\chi_p(x\xi)\,d\xi\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p}\Big(f(x), \Delta_N(x)\chi_p(\xi x)\Big)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Далее, если $\xi' \in B_{-N}$, то $|\xi' x|_p \le 1$ и $\chi_p(\xi' x) = 1$ при $x \in B_N$ и

$$\tilde{f}(\xi+\xi') = \Big(f(x), \Delta_N(x)\chi_p((\xi+\xi')x)\Big) =$$

$$= \Big(f(x), \Delta_N(x)\chi_p(\xi x)\Big) = \tilde{f}(\xi),$$

так что параметр постоянности $\tilde{f}$ не меньше $-N$.

Достаточность. Пусть $\tilde{f} \in \mathcal{E}$ и ее параметр постоянности не меньше $-N$. Применяя преобразование Фурье к равенству

$$f(x+x') = f(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad |x'|_p \le p^{-N},$$

и пользуясь формулой (3.4), получим равенство

$$\chi_p(xx')f(x) = f(x),\ x \in \mathbb{Q}_p. \tag{3.11}$$

Но для любого x, $|x|_p > p^N$, существует такое $x' \in S_{-N}$, что $\chi_p(xx') \neq 1$. Из (3.11) следует, что $f(x) = 0$, $|x|_p > p^N$, т.е. $\operatorname{supp} f \in B_N$. ■

4. Пространство L^2 определено в п. 1 § 4. Для $f \in L^2$ при обозначении нормы $\|f\|_2$ индекс 2 будем опускать: $\|f\| =. \|f\|_2$. В L^2 введем скалярное произведение

$$(f,g) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\overline{g(x)}dx,\ f,g \in L^2,$$

так что $\|f\|^2 = (f,f)$. Справедливо неравенство Коши - Буняковского

$$|(f,g)| \le \|f\|\|g\|,\ f,g \in L^2.$$

В терминах скалярного произведения равенство Парсеваля - Стеклова (2.5) принимает вид

$$(\varphi,\psi) = (\tilde{\varphi},\tilde{\psi}),\ \varphi,\psi \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Теорема. *Преобразование Фурье $f \longmapsto \tilde{f}$ отображает L^2 на L^2 взаимно однозначно и взаимно непрерывно. При этом*

$$\tilde{f}(\xi) = \lim_{\gamma\to+\infty} \int_{B_\gamma} f(x)\chi_p(\xi x)dx \text{ в } L^2; \tag{4.2}$$

справедливы формула обращения

$$f(x) = \lim_{\gamma\to+\infty} \int_{B_\gamma} \tilde{f}(\xi)\chi_p(-x\xi)d\xi \text{ в } L^2 \tag{4.3}$$

и равенство Парсеваля - Стеклова

$$(f,g) = (\tilde{f},\tilde{g}),\ \|f\| = \|\tilde{f}\|,\ f,g \in L^2. \tag{4.4}$$

■ Пусть $f \in L^2$. Тогда $f_\gamma = \Omega(p^{-\gamma}|x|_p)f \in L^1$ при всех

$\gamma \in \mathbb{Z}$ и $f_\gamma \longrightarrow f$, $\gamma \to +\infty$, в L^2:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |f_\gamma(x)|dx = \int\limits_{B_\gamma} |f(x)|dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_{B_\gamma} dx\right)^{1/2}\left[\int\limits_{B_\gamma} |f(x)|^2dx\right]^{1/2} \le p^{\gamma/2}\|f\|,$$

$$\|f-f_\gamma\|^2 = \int\limits_{|x|_p>p^\gamma} |f(x)|^2dx \longrightarrow 0, \ \gamma \to +\infty.$$

Поэтому $\|f_\gamma\| \longrightarrow \|f\|$, $\gamma \to +\infty$,

$$\tilde{f}_\gamma(\xi) = \int\limits_{B_\gamma} f(x)\chi_p(\xi x)dx \in L^2 \cap \mathcal{E}$$

(см. (3.5)) и справедливо равенство Парсеваля – Стеклова (4.1) (поскольку $\mathcal{D}$ плотно в L^2, см. п. 2 § 6)

$$\|\tilde{f}_\gamma\| = \|f_\gamma\| \longrightarrow \|f\|, \ \gamma \to +\infty, \tag{4.5}$$

$$\|\tilde{f}_\gamma-\tilde{f}_{\gamma'}\| = \|f_\gamma-f_{\gamma'}\| \longrightarrow 0, \ \gamma,\gamma' \to +\infty. \tag{4.6}$$

Предельное соотношение (4.6) показывает, что последовательность $\left\{\tilde{f}_\gamma, \ \gamma \to +\infty\right\}$ сходится в себе в L^2. По теореме Рисса – Фишера существует функция $F \in L^2$ такая, что $\tilde{f}_\gamma \to F$, $\gamma \to +\infty$, в L^2. С другой стороны, $\tilde{f}_\gamma \to \tilde{f}$, $\gamma \to +\infty$, в $\mathcal{D}'$. Таким образом, $\tilde{f} = F \in L^2$, $\tilde{f}_\gamma \to \tilde{f}$, $\gamma \to +\infty$, в L^2, и представление (4.2) доказано, причем $\|\tilde{f}_\gamma\| \to \|\tilde{f}\|$, $\gamma \to +\infty$.

Отсюда и из (4.5) следуют равенства (4.4). Формула обращения $f = F\left[\tilde{f}(-\xi)\right]$, в силу (4.2), принимает вид (4.3). Таким образом, оператор $f \mapsto \tilde{f}$ отображает L^2 на себя, взаимно однозначно и взаимно непрерывно. ■

Следствие. *Оператор $f \mapsto \tilde{f}$ преобразования Фурье унитарный в L^2.*

Ортонормальный базис в L^2 специального вида будет построен в п. 4 § 9.

Лемма. *Для любой функции* $f \in L^2$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\gamma\to+\infty} p^{-\gamma/2}\int\limits_{B_\gamma} |f(x)|\,dx = 0. \qquad (4.7)$$

■ Пусть $\varepsilon > 0$ и $f \in L^2$. Существует такое N, что

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p\setminus B_N} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Считая $\gamma > N$ и применяя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$p^{-\gamma/2}\int\limits_{B_\gamma} |f(x)|\,dx = p^{-\gamma/2}\int\limits_{B_\gamma\setminus B_N} |f(x)|^2 dx + p^{-\gamma/2}\int\limits_{B_N} |f(x)|\,dx \le$$

$$\le p^{-\gamma/2}\left(\int\limits_{B_\gamma\setminus B_N} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{B_\gamma} dx\right)^{1/2} +$$

$$+ p^{-\gamma/2}\left(\int\limits_{B_N} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{B_N} dx\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} + p^{\frac{N-\gamma}{2}}\|f\| < \varepsilon,$$

если γ таково, что

$$p^{\frac{N-\gamma}{2}}\|f\| < \frac{\varepsilon}{2}. \ ■$$

5. Умножение обобщенных функций. Назовем последовательность $\left\{\omega_k,\ k \to \infty\right\}$, $\omega_k \in \mathcal{D}$, *δ-последовательностью*, если существует такое $N \in \mathbb{Z}$, что

$$\omega_k(x) = \delta_k(x) = p^k\Omega(p^k|x|_p),\ k \ge N.$$

Последовательность $\left\{\delta_k,\ k \to \infty\right\}$ назовем *канонической* δ-последовательностью.

Как установлено в п. 3 § 6

$$\omega_k \longrightarrow \delta,\ k \to \infty,\ \text{в } \mathcal{D}'.$$

Если $\left\{\eta_k,\ k \to \infty\right\}$ – 1-последовательность, то ее преобразование Фурье $\left\{\tilde{\eta}_k,\ k \to \infty\right\}$ – δ-последовательность, и наоборот (см. (2.7)).

Пусть даны обобщенные функции f и g из $\mathcal{D}'$. Их *произведением* $f \cdot g$ назовем функционал, определяемый равенством

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \left(g, (f*\delta_k)\varphi\right), \tag{5.1}$$

если предел существует для любой $\varphi \in \mathcal{D}$. Правая часть равенства (5.1) определяет линейный функционал на $\mathcal{D}$, так что $f \cdot g \in \mathcal{D}'$.

Равенство (5.1) эквивалентно равенству (ср. (1.8))

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \left(g, (f*\omega_k)\varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

для любой δ-последовательности $\left\{\omega_k,\ k \to \infty\right\}$.

Определение (5.1) можно переформулировать в виде:

$$f \cdot g = \lim_{k\to\infty} (f*\delta_k) g,$$

если предел существует в $\mathcal{D}'$.

Аналогично определяется и произведение $g \cdot f$:

$$g \cdot f = \lim_{k\to\infty} f(g*\delta_k), \tag{5.1'}$$

если предел существует в $\mathcal{D}'$.

Пример 1. Пусть f и g непрерывны на $\mathbf{Q}_p$. Тогда их произведение $f \cdot g$ существует и совпадает с поточечным произведением $f(x)g(x)$.

■ *В силу* (5.1), (1.7) *и* (3.4′) *п.* 3 § 6 *для любой* $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \left(g, (f*\delta_k)\varphi\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{Q}_p} g(x)\varphi(x) \int_{\mathbf{Q}_p} f(y)\delta_k(x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{Q}_p} g(x)\varphi(x) \int_{\mathbf{Q}_p} \delta_k(\xi) f(x-\xi)\, d\xi dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{Q}_p} \delta_k(\xi) \int_{\mathbf{Q}_p} g(x)\varphi(x) f(x-\xi)\, dx d\xi = \int_{\mathbf{Q}_p} f(x) g(x) \varphi(x)\, dx,$$

откуда выводим $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$. ∎

Замечание. Утверждение в примере 1 остается справедливым и для тех f и g из L^1_{loc}, для которых функция

$$\int_{\mathbf{Q}_p} g(x)\varphi(x) f(x-\xi)\, dx \tag{5.2}$$

непрерывна в 0, например, если $f \in L^p_{loc}$ и $g \in L^q_{loc}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \ge 1$.

Пример 2. Если $f \in \mathcal{D}'$ и $a \in \mathcal{E}$, то произведение $a\cdot f$ существует и совпадает с произведением af, введенным в п. 4 § 6.

∎ В силу (5.1), (1.7) и (3.4′) п. 3 § 6 для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(a\cdot f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \Big(f, (a*\delta_k)\varphi\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x), \int_{\mathbf{Q}_p} a(y)\delta_k(x-y)\, dy \varphi(x)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x), \int_{\mathbf{Q}_p} \delta_k(\xi) a(x-\xi)\, d\xi \varphi(x)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{Q}_p} \delta_k(\xi) \Big(f(x), \varphi(x) a(x-\xi)\Big) d\xi = (f, \varphi a) = (af, \varphi),$$

откуда вытекает, что $a\cdot f = af$. Здесь мы воспользовались равенством (6.4) п. 6 § 6. ∎

Если f и $g \in \mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} g \subset B_N$, *то справедливо равенство*

$$F\big[f*g\big] = \tilde{f}\cdot\tilde{g}. \tag{5.3}$$

■ Пользуясь формулами (3.1), (1.4) и (3.10), при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\left(F\left[f*g\right],\varphi\right) = (f*g,\tilde{\varphi}) = \left(f(x)\times g(y),\Delta_{N}(y)\tilde{\varphi}(x+y)\right) =$$

$$= \left(f(x),\left(g(y),\Delta_{N}(y)\int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(\xi)\chi_p(\xi(x+y))d\xi\right)\right) =$$

$$= \left(f(x),\int_{\mathbb{Q}_p}\left(g(y),\Delta_{N}(y)\chi_p(\xi y)\right)\varphi(\xi)\chi_p(\xi x)d\xi\right) =$$

$$= \left(f(x),\int_{\mathbb{Q}_p}\tilde{g}(\xi)\varphi(\xi)\chi_p(\xi x)d\xi\right) = \left(f,F\left[\tilde{g}\varphi\right]\right) = (\tilde{f},\tilde{g}\varphi) = (\tilde{g}\tilde{f},\varphi),$$

откуда выводим $F\left[f*g\right] = \tilde{g}\tilde{f} = \tilde{g}\cdot\tilde{f}$, поскольку $\tilde{g} \in \mathcal{E}$ (см. пример 2). Здесь мы воспользовались равенством (6.5) п. 6 § 6. ■

Теорема. *Пусть f и $g \in \mathcal{D}'$. Для того чтобы существовало произведение $f\cdot g$, необходимо и достаточно, чтобы существовала свертка $\tilde{f}*\tilde{g}$. При этом справедливы равенства*

$$F\left[f\cdot g\right] = \tilde{f}*\tilde{g}, \quad F\left[f*g\right] = \tilde{f}\cdot\tilde{g}. \tag{5.4}$$

■ Вытекает из определений свертки, произведения, преобразования Фурье и из равенств

$$F\left[(f*\delta_k)\cdot g\right] = (\Delta_k\tilde{f})*\tilde{g}, \quad F\left[(\Delta_k f)*g\right] = (\tilde{f}*\delta_k)\cdot\tilde{g}, \quad k \in \mathbb{Z}. \ ■$$

Следствие. *Если $f\cdot g$ существует, то существует и $g\cdot f$ и они равны*

$$f\cdot g = g\cdot f. \tag{5.5}$$

■ Вытекает из коммутативности свертки, см. п. 1. ■

§ 8. Однородные обобщенные функции

1. Однородные обобщенные функции. Пусть $\pi(x)$ – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$ (см. п. 2 § 3), $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$, $x,y \in \mathbb{Q}_p^*$. Обобщенную функцию f из $\mathcal{D}'$ назовем *однородной степени однородности* $\pi(x)$, если для любых $\varphi \in \mathcal{D}$

и $t \in \mathbb{Q}_p^*$ выполнено равенство

$$\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \pi(t)|t|_p(f,\varphi), \tag{1.1}$$

т.е. в силу (4.5) п. 4 § 6

$$f(tx) = \pi(t)f(x), \ t \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{1.1$'$}$$

Замечание. Равенство (1.1′) позволяет говорить о значении однородной функции f в точке $x = 1$:

$$f(1) = \frac{f(t)}{\pi(t)}, \ t \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Опишем все однородные обобщенные функции.

Согласно п. 2 § 3, все мультипликативные характеры $\pi(x)$ можно представить в виде

$$\pi(x) \equiv \pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x), \tag{1.2}$$

где $\pi(p) = p^{1-\alpha}$ и $\pi_1(x)$ – нормированный мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$ такой, что

$$\pi_1(x) = \pi_1(|x|_p x), \ \pi_1(p) = \pi_1(1) = 1 \quad (|\pi_1(x)| = 1); \tag{1.3}$$

$\pi_1(x)$ – характер группы S_0.

Если $\pi(x) \not\equiv 1$ – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$, то

$$\int_{S_\gamma} \pi(x)dx = 0, \ \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

■ Так как $\pi(x) \not\equiv 1$, то найдется такое число $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = 1$, что $\pi(a) \neq 1$. Совершая замену переменной интегрирования $x = ax'$ в интеграле (1.4), получим равенство (1.4):

$$\int_{S_\gamma} \pi(x)dx = \int_{S_\gamma} \pi(ax')d(ax') = \pi(a)\int_{S_\gamma} \pi(x')dx'. \ ■$$

Сопоставим характеру $\pi_\alpha(x)$ обобщенную функцию π_α из $\mathcal{D}'$ по формуле

$$(\pi_\alpha,\varphi) = \int_{S_\gamma} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.5}$$

Для $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ интеграл (1.5) абсолютно сходится, определяя голоморфную функцию; для остальных α определим его посредством аналитического продолжения.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим определением: обобщенная функция $f_\alpha \in \mathcal{D}'$, зависящая от комплексного параметра α, называется *голоморфной* в области $O \subset \mathbb{C}$, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ функция $\alpha \mapsto (f_\alpha, \varphi)$ голоморфна в O.

π_α - голоморфная функция в области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. Ее аналитическое продолжение дается формулой

$$(\pi_\alpha, \varphi) = \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \varphi(0)\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.6}$$

Последний интеграл справа в (1.6) при $\pi_1(x) \not\equiv 1$ равен 0, в силу формул (1.3) п. 1 § 4 и (1.4)

$$\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\,dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{0} p^{\gamma(\alpha-1)}\int_{S_\gamma} \pi_1(x)\,dx = 0;$$

при $\pi_1(x) \equiv 1$ этот интеграл в силу формулы (2.5) п. 2 § 4 равен

$$\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}dx = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}. \tag{1.7}$$

Поэтому представление (1.6) можно переписать в виде

$$(\pi_\alpha, \varphi) = \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]dx +$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{Q}_p\setminus B_0} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\varphi(x)dx+\begin{cases}\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,\varphi(0), & \text{если } \pi_1(x)\equiv 1,\\[2ex] 0, & \text{если } \pi_1(x)\not\equiv 1.\end{cases} \tag{1.8}
$$

Обобщенная функция π_α *при* $\pi_1(x)\not\equiv 1$ *- целая по* α*; при* $\pi_1(x)\equiv 1$ π_α *голоморфна по* α *всюду за исключением точек*

$$
\alpha_k=\frac{2k\pi i}{\ln\,p},\quad k=0,\pm1,\dots, \tag{1.9}
$$

где она имеет простые полюса с вычетом $\dfrac{p-1}{p\ln\,p}\delta(x)$. π_α *- однородная обобщеная функция степени однородности* $\pi_\alpha(x)$.

■ Вытекает из представления (1.8). Первый интеграл справа в (1.8) есть целая функция α, так как функция $\varphi(x)-\varphi(0)$ равна 0 в окрестности точки 0. Второй интеграл в (1.8) - также целая функция по α, так как функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель. Поэтому при $\pi_1(x)\equiv 1$ функция (π_α,φ) имеет вид

$$
(\pi_\alpha,\varphi)=\varphi_\alpha+\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,\varphi(0),
$$

где φ_α - целая функция. Поэтому (π_α,φ) голоморфна по α всюду, кроме точек α_k, $k=0,\pm1,\dots$, определяемых равенством (1.9), где она имеет простые полюса, причем

$$
\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_k}(\pi_\alpha,\varphi)=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_k}\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,\varphi(0)=\frac{p-1}{p\ln\,p}(\delta,\varphi).
$$

Однородность обобщенной функции π_α вытекает из (1.1) и (1.5) при $\operatorname{Re}\alpha>0$

$$
\left(\pi_\alpha,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right)=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)dx=
$$

$$
=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|tx'|_p^{\alpha-1}\pi_1(tx')\varphi(x')d(tx')=
$$

$$= |t|_p^{\alpha-1}|t|_p\pi_1(t)\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|x'|_p^{\alpha-1}\pi_1(x')\varphi(x')dx' =$$

$$= \pi_\alpha(t)|t|_p(\pi_\alpha,\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{D},\quad t\in\mathbb{Q}_p^*,$$

и в силу принципа аналитического продолжения. ■

Далее, $\delta(x)$ - однородная обобщенная функция степени однородности $|x|_p^{-1}$.

■ $\left(\delta,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \varphi(0) = |t|_p|t|_p^{-1}(\delta,\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{D},\quad t\in\mathbb{Q}_p^*$. ■

Введем обобщенную функцию $\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p}$ по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p},\varphi\right) = \int\limits_{B_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|_p}dx + \int\limits_{\mathbb{Q}_p\setminus B_0}\frac{\varphi(x)}{|x|_p}dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{1.10}$$

$\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p}$ *не является однородной степени однородности* $|x|_p^{-1}$.

$$■\ \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p},\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \int\limits_{|x|_p\le 1}\frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\varphi(0)}{|x|_p}dx + \int\limits_{|x|_p>1}\frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right)}{|x|_p}dx =$$

$$= \int\limits_{|x'|_p\le|t|_p^{-1}}\frac{\varphi(x')-\varphi(0)}{|x'|_p}dx' + \int\limits_{|x'|_p>|t|_p^{-1}}\frac{\varphi(x')}{|x'|_p}dx' =$$

$$= \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p},\varphi\right) - \varphi(0)\int\limits_{p\le|x'|_p\le|t|_p^{-1}}\frac{dx'}{|x'|_p} \ne \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p},\varphi\right),$$

если $0 < |t|_p < 1$, $\varphi\in\mathcal{D}$, $\varphi(0)\ne 0$. ■

Лемма. *Если* f_i, $i = 1,2,\dots,n$ *- однородные обобщенные функции степени однородности* π_{α_i} *соответственно удовлетворяют соотношению* $\sum\limits_i f_i = 0$ *и все* α_i *различны, то* $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$.

■ При всех $\varphi\in\mathcal{D}$ из (1.1) имеем

$$\sum_i\left(f_i,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \sum_i \pi_{\alpha_i}(t)|t|_p(f_i,\varphi) = 0,\ t\in\mathbb{Q}_p^*.$$

Отсюда, полагая $t = p^N$, $N\in\mathbb{Z}$, и пользуясь (1.3), получаем равенство

$$\sum_i p^{\alpha_i N}(f_i,\varphi) = 0,\ N\in\mathbb{Z},$$

откуда выводим $(f_1,\varphi) = (f_2,\varphi) = \ldots = (f_n,\varphi) = 0$, т.е. $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$. ■

Следующая теорема дает описание всех однородных обобщенных функций.

Теорема. *Всякая однородная обобщенная функция степени однородности $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)$ есть $C\pi_\alpha$, если $\pi_1(x)\not\equiv 1$, или при $\pi_1(x)\equiv 1$, если $\alpha\neq 0$; всякая однородная обобщенная функция степени однородности $\pi_0(x) = |x|_p^{-1}$ есть $C\delta$, где C - произвольная постоянная.*

■ Пусть $f\not\equiv 0$ - однородная обобщенная функция степени однородности $\pi_\alpha(x)$, причем $\pi_1(x)\not\equiv 1$, а если $\pi_1(x)\equiv 1$, то $\alpha\neq 0$.

Сначала докажем, что существует такое число $C\neq 0$, что для любой $\varphi\in\mathcal{D}$, $\varphi(0) = 0$, справедливо равенство

$$(f,\varphi) = C(\pi_\alpha,\varphi). \tag{1.11}$$

Носитель f содержит точки, отличные от 0. (В противном случае было бы $f = C\delta$ (см. п. 3 § 6) и f была бы однородной обобщенной функцией степени однородности $|x|_p^{-1}$, что исключено.) Поэтому найдется такая функция $\omega\in\mathcal{D}$, $\omega(0) = 0$, что $(f,\omega) = 1$, $(\pi_\alpha,\omega)\neq 0$. В силу (1.1) имеем

$$\left(f(x),\omega\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \pi_\alpha(t)|t|_p,\ t\in\mathbb{Q}_p^*,$$

откуда выводим равенство

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\left(f(x),\omega\left(\frac{x}{t}\right)\right)\frac{\varphi(t)}{|t|_p}dt = (\pi_\alpha,\varphi),\ \varphi\in\mathcal{D},\ \varphi(0) = 0. \tag{1.12}$$

Так как $\omega(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль в окрестности 0, то

$$\omega\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\varphi(t)}{|t|_p} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2),$$

и в силу формулы (6.5) п. 6 § 6 из равенства (1.12) выводим

$$(\pi_\alpha,\varphi) = \left(f(x),\int_{\mathbb{Q}_p}\omega\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\varphi(t)}{|t|_p}dt\right). \tag{1.13}$$

Во внутреннем интеграле в (1.13) совершим замену переменной интегрирования (при каждом фиксированном $x \neq 0$)

$$t = \frac{x}{x'},\ dt = \frac{|x|_p}{|x'|_p^2}\,dx'$$

(см. п. 2 § 4). В результате получим

$$(\pi_\alpha,\varphi) = \left(f(x),\int_{\mathbb{Q}_p}\omega(x')\varphi\left(\frac{x}{x'}\right)\frac{|x|_p}{|x'|_p^2}\,\frac{1}{\left|\frac{x}{x'}\right|_p}dx'\right) =$$

$$= \left(f(x),\int_{\mathbb{Q}_p}\omega(x')\varphi\left(\frac{x}{x'}\right)\frac{dx'}{|x'|_p}\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p}\frac{\omega(x')}{|x'|_p}\left(f(x),\varphi\left(\frac{x}{x'}\right)\right)dx'. \tag{1.14}$$

Здесь мы опять воспользовались формулой (6.5) п. 6 § 6, поскольку

$$\omega(x')\varphi\left(\frac{x}{x'}\right)\frac{1}{|x'|_p} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2).$$

Применяя опять свойство (1.1) ($x' \neq 0$!) в правой части равенства (1.14), получим равенство (1.11)

$$(\pi_\alpha,\varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p}\omega(x')\pi_\alpha(x')(f,\varphi)dx' = (\pi_\alpha,\omega)(f,\varphi),$$

в котором $C = 1/(\pi_\alpha,\omega)$.

Из равенства (1.11) следует: либо $f = C\pi_\alpha$, либо

$\operatorname{supp}(f-C\pi_\alpha) = \{0\}$. Но последнее невозможно, так как в противном случае было бы $f-C\pi_\alpha = C_1\delta$, где C_1 - некоторая постоянная, что в силу леммы возможно лишь при $C_1 = 0$ и, значит, $f-C\pi_\alpha = 0$.

Пусть теперь $f \neq 0$ - однородная обобщенная функция степени однородности $|x|_p^{-1}$. Предположим, что $\operatorname{supp} f$ содержит точки, отличные от 0. Тогда, повторяя дословно предыдущие рассуждения, убедимся в справедливости формулы (1.11) и при $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{-1}$:

$$(f,\varphi) = C\int\limits_{\mathbf{Q}_p} \varphi(x)\frac{dx}{|x|_p}, \ \varphi \in \mathcal{D}, \ \varphi(0) = 0 \ (C \neq 0). \qquad (1.15)$$

В терминах обобщенной функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|_p}$ (см. (1.10)) равенство (1.15) можно переписать в виде

$$(f,\varphi) = \left(C\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p}, \varphi\right), \ \varphi \in \mathcal{D}, \ \varphi(0) = 0.$$

Поэтому

$$f - C\mathcal{P}\frac{1}{|x|_p} = C_1\delta,$$

где C_1 - некоторая постоянная. Обобщенная функция $f-C_1\delta$ - однородная степени однородности $|x|_p^{-1}$, в то время как $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|_p}$ не является таковой. Полученное противоречие и доказывает, что $\operatorname{supp} f$ не содержит точек, отличных от 0, и, следовательно, $f = C\delta$. ■

Вычислим интеграл при $\operatorname{Re}\alpha < 0$ (см. §4):

$$\int\limits_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}dx = \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma(\alpha-1)}\int\limits_{S_\gamma} dx =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma\alpha} = -\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}. \qquad (1.16)$$

При $\alpha \neq \alpha_k = \dfrac{2k\pi i}{\ln p}$, $k = 0,\pm1,\ldots$, этот интеграл определим с помощью аналитического продолжения. В силу формул (1.7) и (1.16) справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}dx = \int_{|x|_p\le 1} |x|_p^{\alpha-1}dx +$$

$$+ \int_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}dx = 0, \ \alpha \ne \alpha_k, \ k = 0,\pm 1,\dots \quad (1.17)$$

Поэтому формула (1.8) при $\pi_1(x) \equiv 1$ принимает вид

$$\left(|x|_p^{\alpha-1},\varphi\right) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx,$$

$$\varphi \in \mathcal{D}, \ \alpha \ne \alpha_k, \ k = 0,\pm 1,\dots \quad (1.18)$$

Будем называть обобщенную функцию $|x|_p^{\alpha-1}$ *однородной степени однородности* $\alpha-1$, если

$$|tx|_p^{\alpha-1} = |t|_p^{\alpha-1}|x|_p^{\alpha-1}, \ t \in \mathbb{Q}_p^*, \ \alpha \ne \alpha_k, \ k = 0,\pm 1,\dots .$$

2. Преобразование Фурье однородных обобщенных функций и Г-функция. По теореме п. 1 все однородные обобщенные функции степени однородности $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)$ – это $C\pi_\alpha$, кроме случая $\pi_1(x) \equiv 1$ и $\alpha = 0$; в случае $\pi_1(x) \equiv 1$ и $\alpha = 0$ – это $C\delta$ (C – произвольная постоянная).

Преобразование Фурье однородной обобщенной функции π_α *есть однородная обобщенная функция* $\tilde{\pi}_\alpha$ *степени однородности* $\pi_\alpha^{-1}(x)|x|_p^{-1} = |x|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(x)$.

■ Вытекает из формул (3.3) §7.3 и (1.1′):

$$\tilde{\pi}_\alpha(t\xi) = |t|_p^{-1}F\left[\pi_\alpha\left(\frac{x}{t}\right)\right] = |t|_p^{-1}\pi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right)\tilde{\pi}_\alpha(\xi) =$$

$$= \pi_\alpha^{-1}(t)|t|_p^{-1}\tilde{\pi}_\alpha(\xi) = |t|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(t)\tilde{\pi}_\alpha(\xi), \ t\ne 0. \ ■$$

Поэтому $\tilde{\pi}_\alpha(\xi)$ пропорциональна однородной обобщенной функции $|\xi|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(\xi)$, т.е.

$$\tilde{\pi}_\alpha(\xi) = \Gamma_p(\pi_\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(\xi). \quad (2.1)$$

Множитель пропорциональности $\Gamma_p(\pi_\alpha)$ называется *Г-функцией*, соответствующей характеру $\pi_\alpha(x)$.

Полагая в формуле (2.1) $\xi = 1$ и пользуясь (1.3), получим равенство

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \tilde{\pi}_\alpha(1) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)dx. \tag{2.2}$$

Интеграл в правой части равенства (2.2) понимается как сумма аналитических продолжений по параметру α интегралов, стоящих в правой части равенства (2.3)

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)dx = \int_{|x|_p\le 1} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)dx +$$

$$+ \int_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)dx. \tag{2.3}$$

Докажем *функциональное соотношение для Г-функции*

$$\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}|x|_p^{-1}) = \pi_1(-1). \tag{2.4}$$

Заметим, что формула (2.4) напоминает соотношение

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

для классической Г-функции.

■ Применяя обратное преобразование Фурье к равенству (2.1), получим (см. п. 3 § 7)

$$F\Big[\tilde{\pi}_\alpha(-\xi)\Big] = \pi_\alpha = \Gamma_p(\pi_\alpha)F\Big[|\xi|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(-\xi)\Big] =$$

$$= \frac{\Gamma_p(\pi_\alpha)}{\pi_1(-1)}F\Big[\pi_\alpha^{-1}|\xi|_p^{-1}\Big]. \tag{2.5}$$

Так как $\pi_\alpha^{-1}|\xi|_p^{-1}$ – однородная обобщенная функция степени однородности $\pi_\alpha^{-1}(\xi)|\xi|_p^{-1}$ (см. п. 1), то ее преобразование Фурье – однородная обобщенная функция степени однородности

$$\left[\pi_\alpha^{-1}(x)\,|x|_p^{-1}\right]^{-1}|x|_p^{-1} = \pi_\alpha(x).$$

Поэтому, пользуясь опять формулой (2.1), имеем

$$F\left[\pi_\alpha^{-1}|\xi|_p^{-1}\right] = \Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}|\xi|_p^{-1})\pi_\alpha,$$

откуда в силу (2.5) следует формула (2.1):

$$\pi_\alpha = \frac{\Gamma_p(\pi_\alpha)}{\pi_1(-1)}\,\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}|\xi|_p^{-1})\pi_\alpha. \ \blacksquare$$

Пусть $\pi_1(x) \not\equiv 1$ *и* $k > 0$ *- ранг характера* $\pi_1(x)$. *Тогда*

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = p^{\alpha k}a_{p,k}(\pi_1), \tag{2.6}$$

где число

$$a_{p,k}(\pi_1) = \int\limits_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-k}t)\,dt \tag{2.7}$$

удовлетворяет соотношениям

$$a_{p,k}(\pi_1)a_{p,k}(\pi_1^{-1}) = p^{-k}\pi_1(-1), \tag{2.8}$$

$$|a_{p,k}(\pi_1)| = p^{-k/2}. \tag{2.9}$$

■ Принимая во внимание равенство (1.4), из (2.2) и (2.3) выводим

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \sum_{\gamma=-\infty}^{0} p^{\gamma(\alpha-1)}\int\limits_{S_\gamma} \pi_1(x)\,dx \ +$$

$$+ \int\limits_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)\,dx = \int\limits_{|x|_p\ge p} |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x)\chi_p(x)\,dx.$$

Последний интеграл сходится абсолютно при $\operatorname{Re}\alpha < 0$, определяя там голоморфную функцию. Вычислим его.

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma(\alpha-1)}\int\limits_{S_\gamma} \pi_1(x)\chi_p(x)\,dx.$$

Совершая в интеграле по S_γ замену переменной интегрирования

$x = p^{-\gamma} t$, $dx = p^{\gamma} dt$, получим

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma\alpha} \int_{S_0} \pi_1(p^{-\gamma} t)\chi_p(p^{-\gamma} t)\,dt =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma\alpha} \pi_1(p^{-\gamma}) \int_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-\gamma} t)\,dt =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma\alpha} \int_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-\gamma} t)\,dt, \quad (2.10)$$

поскольку, в силу (1.3), $\pi_1(p^{-\gamma}) = \left[\pi_1(p)\right]^{-\gamma} = 1$.

Докажем, что

$$\int_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-\gamma} t)\,dt = 0, \ \gamma \neq k, \ \gamma \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.11)$$

Пусть $\gamma \geq 1$. Имеем

$$\chi_p(p^{-\gamma} t) = \exp\left[2\pi i (p^{-\gamma} t_0 + p^{-\gamma+1} t_1 + \ldots + p^{-1} t_{\gamma-1})\right], \ t \in S_0.$$

Далее, поскольку ранг характера $\pi_1(t)$ равен $k \geq 1$, то $\pi_1(t)$ зависит лишь от $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$ и при $k \geq 2$ справедливо равенство (см. (2.3) п. 2 § 3)

$$\sum_{t_{k-1}=0}^{p-1} \pi_1(t_0 + t_1 p + \ldots + t_{k-1} p^{k-1}) = 0.$$

Поэтому при $1 \leq \gamma < k$ (2.11) следует из

$$\int_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-\gamma} t)\,dt =$$

$$= C \sum_{t_0=1}^{p-1} \sum_{t_1=0}^{p-1} \sum_{t_{k-2}=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i (p^{-\gamma} t_0 + p^{-\gamma+1} t_1 + \ldots + p^{-1} t_{\gamma-1})\right] \times$$

$$\times \sum_{t_{k-1}=0}^{p-1} \pi_1(t_0 + t_1 p + \ldots + t_{k-1} p^{k-1}) = 0;$$

при $1 \leq k < \gamma$ (2.11) следует из

$$\int_{S_0} \pi_1(t)\chi_p(p^{-\gamma}t)\,dt =$$

$$= C\sum_{t_0=1}^{p-1}\sum_{t_1=0}^{p-1}\sum_{t_{\gamma-2}=0}^{p-1}\pi_1(t_0+t_1p+\ldots+t_{k-1}p^{k-1})\times$$

$$\times\sum_{t_{\gamma-1}=0}^{p-1}\exp\Big[2\pi i(p^{-\gamma}t_0+p^{-\gamma+1}t_1+\ldots+p^{-1}t_{\gamma-1})\Big] = 0.$$

Теперь равенство (2.6) следует из (2.10) и (2.11).

Для получения свойств (2.8) и (2.9) чисел (2.7) вычислим преобразование Фурье функции $\delta(|x|_p-p^k)\pi_1(x)$:

$$F\Big[\delta(|x|_p-p^k)\pi_1\Big] = \int_{S_k}\pi_1(x)\chi_p(\xi x)\,dx =$$

$$= p^k\int_{S_0}\pi_1(t')\chi_p(p^{-k}\xi t')\,dt' =$$

$$= p^k\int_{S_0}\pi_1\Big(\frac{t}{\xi'}\Big)\chi_p(p^{-k-N}t)\,dt = p^k\pi_1\Big(\frac{1}{\xi'}\Big)\int_{S_0}\pi_1(t)\chi_p(p^{-k-N}t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} p^k\pi_1^{-1}(\xi')a_{p,k}(\pi_1), & N=0,\\ 0, & N\neq 0,\end{cases}$$

т.е.

$$F\Big[\delta(|x|_p-p^k)\pi_1\Big] = p^k\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}(\xi)a_{p,k}(\pi_1). \qquad (2.12)$$

При вычислениях мы обозначили $|\xi|_p = p^N$, $\xi' = |\xi|_p\xi$ и воспользовались формулами (2.7) и (2.11).

Из (2.12) в силу равенства Парсеваля - Стеклова (см. п. 4 § 7) следует равенство (2.9):

$$\int_{S_k}|\pi_1(x)|^2dx = p^k\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = p^{2k}|a_{p,k}(\pi_1)|^2\int_{S_0}|\pi_1^{-1}(\xi')|^2d\xi =$$

$$= |a_{p,k}(\pi_1)|^2\Big(1-\frac{1}{p}\Big)p^{2k}.$$

Для доказательства равенства (2.8) применим к равенству (2.12) обратное преобразование Фурье:

$$\delta(|x|_p-p^k)\pi_1(x) = p^k F\Big[\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}(-\xi)\Big]a_{p,k}(\pi_1) =$$

$$= p^k a_{p,k}(\pi_1)\pi_1^{-1}(-1)F\Big[\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}\Big]. \qquad (2.13)$$

Для вычисления преобразования Фурье функции $\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}(\xi)$ заметим, что ранг характера $\pi_1^{-1}(\xi)$ равен k. Обозначая $|x|_p = p^N$, $x' = |x|_p x$, из (2.7) и (2.11), как и выше, получим

$$F\Big[\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}\Big] = \int_{S_0}\pi_1^{-1}(\xi)\chi_p(\xi x)d\xi = \int_{S_0}\pi_1^{-1}(\xi)\chi_p(p^{-N}x'\xi)d\xi =$$

$$= \int_{S_0}\pi_1^{-1}\left(\frac{t}{x'}\right)\chi_p(p^{-N}t)dt = \pi_1^{-1}\left(\frac{1}{x'}\right)\int_{S_0}\pi_1^{-1}(t)\chi_p(p^{-N}t)dt =$$

$$= \begin{cases} \pi_1(x')a_{p,k}(\pi_1^{-1}), & N=k, \\ 0, & N\neq k, \end{cases}$$

т.е.

$$F\Big[\delta(|\xi|_p-1)\pi_1^{-1}\Big] = \pi_1(x)a_{p,k}(\pi_1^{-1})\delta(|x|_p-p^k).$$

Отсюда и из (2.13) вытекает равенство (2.8)

$$1 = p^k a_{p,k}(\pi_1)a_{p,k}(\pi_1^{-1})\pi_1^{-1}(-1). \ \blacksquare$$

Из формул (2.6) и (2.8) выводим

$$\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}) = p^k\pi_1(-1). \qquad (2.14)$$

$$\blacksquare\ \Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}) = p^{\alpha k}a_{p,k}(\pi_1)p^{(2-\alpha)k}a_{p,k}(\pi_1^{-1}) =$$

$$= p^{2k}p^{-k}\pi_1(-1). \ \blacksquare$$

Сравнивая формулы (2.14) и (2.4), получим

$$\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}) = p^k\Gamma_p(\pi_\alpha^{-1}|x|_p^{-1})$$

или, заменяя $\pi_\alpha^{-1}|x|_p^{-1}$ на π_α,

$$\Gamma_p(\pi_\alpha\ |x|_p) = p^k\Gamma_p(\pi_\alpha). \tag{2.15}$$

Формулу (2.15) можно расматривать как аналог равенства $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ для классической Γ-функции.

Пусть теперь $\pi_1(x) \equiv 1$, т.е. ранг характера $\pi_1(x)$ равен 0. В этом случае обозначим

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \Gamma_p(|x|_p^{\alpha-1}) = \Gamma_p(\alpha).$$

Формула (2.4) принимает вид

$$\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(1-\alpha) = 1. \tag{2.16}$$

Докажем формулу

$$\Gamma_p(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}. \tag{2.17}$$

■ Принимая во внимание равенства (2.5) п. 2 § 4 и (3.2) п. 3 § 4, из (2.2) - (2.3) выводим представление (2.17):

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)dx + \int_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)dx =$$

$$= \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1}dx + \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma(\alpha-1)}\int_{S_\gamma} \chi_p(x)dx =$$

$$= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} - p^{\alpha-1} = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}. \ ■$$

Из (2.17) выводим: $\Gamma_p(\alpha)$ *голоморфна в плоскости* α *за исключением точек*

$$\alpha_k = \frac{2\pi i k}{\ln\ p},\ k = 0,\pm1,\dots, \tag{2.18}$$

где она имеет простые полюса с вычетом $\dfrac{p-1}{p\ln\ p}$; $\Gamma_p(\alpha)$ *имеет простые нули в точках* $1+\alpha_k$, $k = 0,\pm1,\dots$

Из формулы (2.1) выводим

$$F\left[|x|_p^{\alpha-1}\right] = \Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}, \ \alpha \neq \alpha_k, \ k = 0,\pm1,\dots \qquad (2.19)$$

Наконец, отметим, что *обобщенная функция*

$$f_\alpha = \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}$$

голоморфна по α за исключением точек

$$1+\alpha_k = 1 + \frac{2k\pi i}{\ln p}, \ k = 0,\pm1,\dots,$$

где она имеет простые полюса с вычетом $-\dfrac{p-1}{p\ln p}|x|_p^{\alpha_k}$; *при этом*

$$f_{\alpha_k} = \delta, \ k = 0,\pm1,\dots \qquad (2.20)$$

■ Вытекает из результатов пп. 1 и 2. Вычислим

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1+\alpha_k} \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)} = \lim_{\alpha\to1+\alpha_k} (\alpha-1-\alpha_k)\frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \frac{\varepsilon\left(1-p^{-\varepsilon-1-\alpha_k}\right)}{1-p^{\varepsilon+\alpha_k}}|x|_p^{\varepsilon+\alpha_k} = -\frac{p-1}{p\ln p}|x|_p^{\alpha_k}.$$

Далее, из формулы (1.8) п. 1 имеем при $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(f_\alpha,\varphi) = \frac{\varphi_\alpha}{\Gamma_p(\alpha)} + \frac{1-p^{-1}}{(1-p^{-\alpha})\Gamma_p(\alpha)}\varphi(0) =$$

$$= \varphi_\alpha \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{\alpha-1}}\varphi(0),$$

где φ_α - целая функция. Отсюда следует формула (2.20)

$$(f_\alpha,\varphi) \longrightarrow \varphi(0) = (\delta,\varphi), \ \alpha \to \alpha_k,$$

т.е. $f_\alpha \longrightarrow \delta$, $\alpha \to \alpha_k$, в $\mathcal{D}'$. ■

Пример. Пусть (см. п. 2 § 3)

$$\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}\operatorname{sign}_\varepsilon x,\ p \neq 2.$$

Тогда

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \begin{cases} \pm\sqrt{\operatorname{sign}_\varepsilon(-1)}\,p^{\alpha-1/2}, & \varepsilon=p,\ p\eta, \\ \dfrac{1+p^{\alpha-1}}{1+p^{-\alpha}}, & \varepsilon=\eta. \end{cases} \tag{2.21}$$

■ При $\varepsilon = p$ и $p\eta$ ранг характера $\pi_1(x)$ равен 1. (Так как любое $x \in \mathbb{Q}_p$ вида $x = 1+pt$, $|t|_p \le 1$, является квадратом p-адического числа, см. п. 4 § 1). Теперь, пользуясь равенством (2.8) при $k = 1$,

$$a_{p,1}(\pi_1)a_{p,1}(\pi_1) = p^{-1}\pi_\alpha(-1),$$

из (2.6) получим (2.21).

При $\varepsilon = \eta$ $\operatorname{sign}_\eta x = 1$, *если* $\gamma(x)$ четные, и $\operatorname{sign}_\eta x = -1$, если $\gamma(x)$ нечетные (см. нижеследующую лемму). Следовательно, $\pi_1(x) \equiv 1$ и

$$\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1+\frac{\pi i}{\ln p}}$$

и, таким образом,

$$\Gamma_p(\pi_\alpha) = \Gamma_p\left(\alpha + \frac{\pi i}{\ln p}\right) = \frac{1-p^{\alpha-1+\frac{\pi i}{\ln p}}}{1-p^{-\alpha-\frac{\pi i}{\ln p}}},$$

откуда и вытекает (2.21). ■

Лемма. *Пусть $p \neq 2$ и ε – единица, $\varepsilon \notin \mathbb{Q}^{*2}$. Число $x \in \mathbb{Q}^*$ принадлежит $\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда $\gamma(x)$ четно.*

Пусть $x \in \mathbb{Q}_p^*$ принадлежит $\mathbb{Q}^*_{p,\varepsilon}$, т.е. представляется в виде

$$x = a^2 - \varepsilon b^2,\ a,b \in \mathbb{Q}_p,\ (a,b) \neq 0. \tag{2.22}$$

Если бы $\gamma(x)$ было нечетно, то мы имели бы сравнение

$$a_0^2 - \varepsilon_0 b_0^2 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{2.23}$$

и, значит, ε_0 - квадратичный вычет по модулю p, что противоречит тому, что $\varepsilon \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$ (см. п. 4 § 1).

Обратно, пусть $x \in \mathbb{Q}_p^*$ и $\gamma(x)$ четное. По теореме Шевалле сравнение

$$a_0^2 - \varepsilon_0 b_0^2 - x_0 c_0^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

имеет нетривиальное решение (a_0, b_0, c_0), причем $c_0 \neq 0$ (иначе при $c_0 = 0$ сравнение (2.23) имело бы нетривиальное решение, что исключено). Следовательно, уравнение

$$a_0^2 - \varepsilon b_0^2 - x c^2 = 0$$

разрешимо при $c \neq 0$. Отсюда следует представление (2.22)

$$x = \left(\frac{a_0}{c}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{b_0}{c}\right)^2. \ \blacksquare$$

3. Свертка однородных обобщенных функций и $\mathcal{B}$-функция. Пусть

$$\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}\pi_1(x) \text{ и } \pi'_\beta(x) = |x|_p^{\beta-1}\pi'_1(x)$$

- мультипликативные характеры поля $\mathbb{Q}_p$ и π_α и π_β - соответствующие им однородные обобщенные функции, α и $\beta \neq \alpha_k$ (см. п. 1).

Свертка $\pi_\alpha * \pi'_\beta$ существует и голоморфна в трубчатой области $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1$, является однородной обобщенной функцией степени однородности

$$\pi_\alpha(x)\pi'_\beta(x)|x|_p = |x|_p^{\alpha+\beta-1}(\pi_1\pi'_1)(x)$$

и выражается формулой

$$(\pi_\alpha * \pi'_\beta)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \pi_\alpha(y)\pi'_\beta(x-y)\,dy =$$

$$= \mathcal{B}_p(\pi_\alpha, \pi'_\beta)|x|_p^{\alpha+\beta-1}(\pi_1\pi'_1)(x), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{B}_p(\pi_\alpha, \pi'_\beta)$ называется *$\mathcal{B}$-функцией*, соответствующей характерам $\pi_\alpha(x)$ и $\pi'_\beta(x)$,

$$\mathcal{B}_p(\pi_\alpha,\pi'_\beta) = \int_{\mathbb{Q}_p} |t|_p^{\alpha-1}|1-t|_p^{\beta-1}\pi_1(t)\pi'_1(1-t)\,dt. \tag{3.2}$$

■ В силу результатов п. 1 § 7, свертка $\pi_\alpha*\pi'_\beta$ локально интегрируемых функций $\pi_\alpha(x)$ и $\pi'_\beta(x)$ существует, является локально интегрируемой функцией и выражается интегралом (3.1):

$$(\pi_\alpha*\pi'_\beta)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{\alpha-1}\pi_1(y)\,|x-y|_p^{\beta-1}\pi'_1(x-y)\,dy,$$

который абсолютно сходится в трубчатой области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta) < 1$, определяя в ней голоморфную функцию параметров (α,β) Действительно,

$$\int_{B_k}\pi_\alpha(y)\pi'_\beta(x-y)\,dy = \int_{B_k}|y|_p^{\alpha-1}\pi_1(y)\,|x-y|_p^{\beta-1}\pi'_1(x-y)\,dy =$$

$$= \int_{B_k}|tx|_p^{\alpha-1}\pi_1(tx)\,|x-tx|_p^{\beta-1}\pi'_1(x-tx)\,d(tx) =$$

$$= |x|_p^{\alpha+\beta-1}\pi_1(x)\pi'_1(x)\ \times$$

$$\times \int_{|t|_p\le p^k|x|_p^{-1}} |t|_p^{\alpha-1}|1-t|_p^{\beta-1}\pi_1(t)\pi'_1(1-t)\,dt \xrightarrow{x\in K}$$

$$\xrightarrow{x\in K} |x|_p^{\alpha+\beta-1}\pi_1(x)\pi'_1(x)\int_{\mathbb{Q}_p}|t|_p^{\alpha-1}|1-t|_p^{\beta-1}\pi_1(t)\pi'_1(1-t)\,dt,$$

где K - произвольный компакт, содержащийся в $\mathbb{Q}_p$.

Из формулы (3.1) следует, что свертка $\pi_\alpha*\pi'_\beta$ - однородная функция степени однородности $|x|_p^{\alpha+\beta-1}\pi_1(x)\pi'_1(x)$. ■

Для параметров (α,β), лежащих вне области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta)<1$, свертка $\pi_\alpha*\pi'_\beta$ определяется с помощью аналитического продолжения правой части равенства (3.1) по (α,β). Наша ближайшая задача - выразить $\mathcal{B}$-функцию через

Г-функции и определить максимальную область, в которую продолжается свертка $\pi_\alpha * \pi'_\beta$.

Поскольку $\pi_\alpha * \pi'_\beta$ - однородная функция степени однородности

$$\pi_\alpha(x)\pi'_\beta(x) = |x|_p^{\alpha+\beta-1}(\pi_1\pi'_1)(x),$$

то, применяя к равенству (3.1) формулу (2.1), получим

$$F\left[\pi_\alpha * \pi'_\beta\right] = \Gamma_p(\pi_\alpha\pi'_\beta|x|_p)B_p(\pi_\alpha, \pi'_\beta)|\xi|_p^{-\alpha-\beta}(\pi_1\pi'_1)^{-1}(\xi). \quad (3.3)$$

С другой стороны, применяя к свертке $\pi_\alpha * \pi'_\beta$ формулу преобразования Фурье (см. п. 5 § 7) и опять используя формулу (2.1), получим

$$F\left[\pi_\alpha * \pi'_\beta\right] = \tilde{\pi}_\alpha \cdot \tilde{\pi}'_\beta = \Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta)|\xi|_p^{-\alpha}\pi_1^{-1}(\xi)|\xi|_p^{-\beta}\pi_1'^{-1}(\xi) =$$

$$= \Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta)|\xi|_p^{-\alpha-\beta}(\pi_1\pi'_1)^{-1}(\xi). \quad (3.4)$$

Сравнивая равенства (3.3) и (3.4), получим формулу

$$B_p(\pi_\alpha, \pi'_\beta) = \frac{\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta)}{\Gamma_p(\pi_\alpha\pi'_\beta|x|_p)}. \quad (3.5)$$

При этом равенство (3.1) принимает вид

$$(\pi_\alpha * \pi'_\beta)(x) = \frac{\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta)}{\Gamma_p(\pi_\alpha\pi'_\beta|x|_p)}|x|_p^{\alpha+\beta-1}(\pi_1\pi'_1)(x). \quad (3.6)$$

При $(\pi_1\pi'_1)(x) \not\equiv 1$ обобщенная функция $|x|_p^{\alpha+\beta-1}(\pi_1\pi'_1)(x)$ - целая (см. п. 1) и $\Gamma_p(\pi_\alpha\pi'_\beta|x|_p)$ - целая и не обращается в нуль (см. п. 2), и поэтому область голоморфности функции (3.6) определяется особыми точками функции $\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta)$: если $\pi_1(x) \not\equiv 1$ и $\pi'_1(x) \not\equiv 1$ - это целая функция; если $\pi_1(x) \equiv 1$ и $\pi'_1(x) \not\equiv 1$, то особые точки - это линии $\alpha = \alpha_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$; если $\pi_1(x) \not\equiv 1$ и $\pi'_1(x) \equiv 1$, то особые точки - это линии $\beta = \alpha_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

При $\pi_1(x) \equiv \pi'_1(x) \equiv 1$ особыми точками являются линии $\alpha = \alpha_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $\beta = \alpha_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $\alpha+\beta = 1+\alpha_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

При $\pi_1(x) \not\equiv 1$ и $\pi'_1(x) = \pi_1^{-1}(x)$ особыми точками являются линии $\alpha+\beta = 1+\alpha_k$, $k = 0,\pm1,\ldots$ В этом случае

$$\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta) = p^{(\alpha+\beta-1)k}\pi_1(-1), \tag{3.7}$$

где k – ранг характера π_α.

■ Формула (3.7) вытекает из формул (2.6) и (2.8):

$$\Gamma_p(\pi_\alpha)\Gamma_p(\pi'_\beta) = p^{\alpha k}a_{p,k}(\pi_1)p^{\beta k}a_{p,k}(\pi_1^{-1}) =$$

$$= p^{(\alpha+\beta-1)k}\pi_1(-1). \quad ■$$

Пусть $\pi_1(x) \equiv \pi'_1(x) \equiv 1$. Как и в п. 2, обозначим

$$\mathcal{B}_p(\pi_\alpha,\pi'_\beta) \equiv \mathcal{B}_p\left(|x|_p^{\alpha-1},|x|_p^{\beta-1}\right) = \mathcal{B}_p(\alpha,\beta).$$

При этом формулы (3.1) и (3.5) принимают классический вид

$$|x|_p^{\alpha-1}*|x|_p^{\beta-1} = \mathcal{B}_p(\alpha,\beta)\,|x|_p^{\alpha+\beta-1}, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{B}_p(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}. \tag{3.9}$$

С учетом (2.16) формула для $\mathcal{B}_p(\alpha,\beta)$ принимает симметричный вид

$$\mathcal{B}_p(\alpha,\beta) = \Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\gamma), \tag{3.10}$$

где $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Докажем равенства при $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) \neq -1+\alpha_k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$|x|_p^{\alpha}\cdot|x|_p^{\beta} = |x|_p^{\alpha+\beta}, \tag{3.11}$$

$$F\left[|x|_p^{\alpha}\cdot|x|_p^{\beta}\right] = F\left[|x|_p^{\alpha}\right]*F\left[|x|_p^{\beta}\right] = F\left[|x|_p^{\alpha+\beta}\right]. \tag{3.12}$$

■ При $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -1$ произведение $|x|_p^{\alpha}\cdot|x|_p^{\beta}$ существует в $\mathcal{D}'$ в смысле п. 5 § 7 и равно $|x|_p^{\alpha+\beta}$, так что справедливы равенства (3.11) и (3.12). Действительно, функции $|x|_p^{\alpha}$ и $|x|_p^{\beta}$ принадлежат L^1_{loc}, а функция (см. (5.2) § 7)

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha}\varphi(x)|x-\xi|_p^{\beta}dx$$

непрерывна в точке $\xi = 0$ для любых $\varphi \in \mathcal{D}$, в силу мажорации

$$|x|_p^{\alpha}|\varphi(x)||x-\xi|_p^{\beta} \le C\max\left(|x|_p^{\alpha}, |x|_p^{\beta}\right), \quad x \in \operatorname{supp}\varphi, \quad |\xi|_p \le 1$$

и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Для остальных α и β равенства (3.11) и (3.12) получаются аналитическим продолжением правых частей по α и β. ■

Аналогично, если $f \in \mathcal{E}$ и $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) \ne -1+\alpha_k$, то

$$|x|_p^{\alpha}\cdot\left(|x|_p^{\beta}f(x)\right) = |x|_p^{\alpha+\beta}f(x) = |x|_p^{\beta}\cdot\left(|x|_p^{\alpha}f(x)\right), \qquad (3.13)$$

$$F\left[|x|_p^{\alpha}\cdot\left(|x|_p^{\beta}f\right)\right] = F\left[|x|_p^{\alpha}\right]*\left(F\left[|x|_p^{\beta}\right]*F[f]\right) =$$
$$= \left(F\left[|x|_p^{\alpha}\right]*F\left[|x|_p^{\beta}\right]\right)*F[f] = F\left[|x|_p^{\beta}\right]*\left(F\left[|x|_p^{\alpha}\right]*F[f]\right) =$$
$$= F\left[|x|_p^{\beta}\cdot\left(|x|_p^{\alpha}f\right)\right]. \qquad (3.14)$$

4. Однородные обобщенные функции многих переменных. Результаты пп. 1 – 3 переносятся без существенных изменений на однородную функцию $|x|_p^{\alpha-n}$ степени однородности $\alpha-1$, зависящую от n переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$|x|_p = \max\left(|x_1|_p, |x_2|_p, \dots, |x_n|_p\right)$$

(см. п. 7 § 1).

Прежде всего покажем, что

$$\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-n}dx = \frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) при $n = 1$ совпадает с (1.7).

■ Индукцией по n. При $n = 1$ формула (4.1) верна. Предполагая ее верной при n, докажем справедливость ее при $n+1$.

Обозначая $x=(\tilde{x},x_{n+1})$, $\tilde{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, и пользуясь теоремой Фубини (см. п. 4 § 4), убеждаемся в справедливости формулы (4.1) и при $n+1$:

$$\int_{B_0}|x|_p^{\alpha-n-1}dx=\int_{B_0}|(\tilde{x},x_{n+1})|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{x}dx_{n+1}=$$

$$=\int_{B_0}\left[\int_{|\tilde{x}|_p\le|x_{n+1}|_p}|x_{n+1}|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{x}+\right.$$

$$\left.+\int_{|\tilde{x}|_p>|x_{n+1}|_p}|\tilde{x}|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{x}\right]dx_{n+1}=$$

$$=\int_{B_0}|x_{n+1}|_p^{\alpha-1}dx_{n+1}+\int_{B_0}\int_{B_0}|\tilde{x}|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{x}dx_{n+1}-$$

$$-\int_{B_0}\int_{|\tilde{x}|_p\le|x_{n+1}|_p}|\tilde{x}|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{x}dx_{n+1}=$$

$$=\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}+\int_{B_0}\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha+1}}dx_{n+1}-\int_{B_0}|x_{n+1}|_p^{\alpha-1}\int_{B_0}|\tilde{t}|_p^{\alpha-n-1}d\tilde{t}dx_{n+1}=$$

$$=\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}+\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha+1}}-\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha+1}}=\frac{1-p^{-n-1}}{1-p^{-\alpha}}.\ \blacksquare$$

Введем обобщенную функцию $|x|_{\dot{p}}^{\alpha-n}\in\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ по формуле (ср. (1.6))

$$\left(|x|_p^{\alpha-n},\varphi\right)=\int_{B_0}|x|_p^{\alpha-n}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]dx+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus B_0}|x|_p^{\alpha-n}\varphi(x)dx+$$

$$+\varphi(0)\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}},\quad\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n).\qquad(4.2)$$

Обобщенная функция $|x|_p^{\alpha-n}$ голоморфна всюду за исключением точек (1.9)

$$\alpha_k = \frac{2k\pi i}{\ln p}, \; k = 0, \pm 1, \ldots,$$

где она имеет простые полюса с вычетом

$$\frac{p^n - 1}{p^n \ln p} \delta(x).$$

Справедлива формула преобразования Фурье

$$F\left[|x|_p^{\alpha-n}\right] = \Gamma_p^n(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}, \; \alpha \neq \alpha_k, \; k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{4.3}$$

где Γ_p^n - n-мерная Г-функция ($\Gamma_p^1 = \Gamma_p$)

$$\Gamma_p^n(\alpha) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) dx = \frac{1 - p^{\alpha-n}}{1 - p^{-\alpha}}. \tag{4.4}$$

При $n = 1$ формула (4.4) совпадает с формулой (2.19).

Формула (4.4) следует из более общей формулы

$$F\left[|(x,m)|_p^{\alpha-n}\right] = \Gamma_p^n(\alpha)\Omega\left(|m\xi|_p\right)\left[|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\right], \tag{4.5}$$

где $\xi, x \in \mathbb{Q}_p^n$, $|(x,m)|_p = \max\left(|x|_p, |m|_p\right)$, $m \neq 0$.

■ Это следует из предельных соотношений

$$|(x,m)|_p^{\alpha-n} \longrightarrow |x|_p^{\alpha-n}, \; \Omega\left(|m\xi|_p\right) \longrightarrow 1,$$

$$|m|_p^{\alpha}\Omega\left(|m\xi|_p\right) \longrightarrow 0, \; m \to 0,$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ ($\operatorname{Re}\alpha > n$) и из непрерывности операции преобразования Фурье (см. п. 3 § 7). Таким путем равенство (4.3) доказывается при $\operatorname{Re}\alpha > n$ и далее используется аналитическое продолжение по α. ■

■ Для доказательства формулы (4.5) применим метод индукции по n. Сначала докажем эту формулу для $n = 1$,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |(x,m)|_p^{\alpha-1} \chi_p(x\xi) dx = \Gamma_p(\alpha)\Omega\left(|m\xi|_p\right)\left[|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\right]. \tag{4.6}$$

Воспользовавшись формулами (3.1) п. 3 § 4, (2.16) п. 2 § 7 и (2.19), получим формулу (4.6):

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \left[\max\left(|x|_p, |m|_p\right)\right]^{\alpha-1} \chi_p(x\xi)\,dx = \int\limits_{|x|_p \le |m|_p} |m|_p^{\alpha-1} \chi_p(x\xi)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|_p > |m|_p} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x\xi)\,dx = |m|_p^{\alpha-1} |m|_p \Omega\left(|m\xi|_p\right) +$$

$$+ F\left[|x|_p^{\alpha-1}\right] - \int\limits_{|x|_p \le |m|_p} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x\xi)\,dx =$$

$$= |m|_p^{\alpha} \Omega\left(|m\xi|_p\right) + \Gamma_p(\alpha)\,|\xi|_p^{-\alpha} -$$

$$- |m|_p^{\alpha} \Omega\left(|m\xi|_p\right) \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} - \Gamma_p(\alpha)\,|\xi|_p^{-\alpha}\left[1-\Omega\left(|m\xi|_p\right)\right] =$$

$$= \Gamma_p(\alpha)\,|\xi|_p^{-\alpha} \Omega\left(|m\xi|_p\right) + |m|_p^{\alpha} \Omega\left(|m\xi|_p\right)\left(1 - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\right).$$

Пусть формула (4.5) верна при n и докажем ее для индекса $n+1$, т.е. при $x,\xi \in \mathbb{Q}_p^{n+1}$

$$F\left[|(x,m)|_p^{\alpha-n-1}\right] = \Gamma_p^{n+1}(\alpha)\Omega\left(|m\xi|_p\right)\left[|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\right], \qquad (4.7)$$

Обозначая

$$J_n^m(\xi) = F\left[|(x,m)|_p^{\alpha-n}\right], \quad \tilde{m} = \max\left(|x_{n+1}|_p, |m|_p\right),$$

$$x = (\tilde{x}, x_{n+1}), \quad \xi = (\tilde{\xi}, \xi_{n+1}), \quad \tilde{x}, \tilde{\xi} \in \mathbb{Q}_p^n,$$

и, пользуясь теоремой Фубини, получим

$$J^{m}_{n+1}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^{n+1}} |(x,m)|_p^{\alpha-n-1}\chi_p((x,\xi))dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(x_{n+1}\xi_{n+1}) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{Q}_p^n} \left\{\max\left[|\tilde{x}|_p, \max\left(|x_{n+1}|_p, |m|_p\right)\right]\right\}^{\alpha-n-1}\chi_p((\tilde{x},\tilde{\xi}))d\tilde{x}dx_{n+1} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \tilde{J}^{m}_{n}(\tilde{\xi})\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Gamma_p^n(\alpha-1)\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \Omega\left(|\tilde{m}\tilde{\xi}|_p\right)\left[|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha+1} - |p\tilde{m}|_p^{\alpha-1}\right]\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Gamma_p^n(\alpha-1)\int\limits_{|t|_p\le|m|_p} \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left[|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha+1} - |pm|_p^{\alpha-1}\right]\chi_p(t\xi_{n+1})dt +$$

$$+ \Gamma_p^n(\alpha-1)\int\limits_{|t|_p>|m|_p} \Omega\left(|t\tilde{\xi}|_p\right)\left[|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha+1} - |pt|_p^{\alpha-1}\right]\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Gamma_p^n(\alpha-1)\Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left[|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha+1} - |pm|_p^{\alpha-1}\right]|m|_p\Omega\left(|\xi_{n+1}m|_p\right) +$$

$$+ \Gamma_p^n(\alpha-1)|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha+1}I_1 - \Gamma_p^n(\alpha-1)p^{-\alpha+1}I_2, \qquad (4.8)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t|_p>|m|_p} \Omega\left(|t\tilde{\xi}|_p\right)\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\int\limits_{|m|_p<|t|_p\le|\tilde{\xi}|_p^{-1}} \chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left[\int\limits_{|t|_p\le|\tilde{\xi}|_p^{-1}} \chi_p(t\xi_{n+1})dt - \int\limits_{|t|_p\le|m|_p} \chi_p(t\xi_{n+1})dt\right] =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left[|\tilde{\xi}|_p^{-1}\Omega\left(|\tilde{\xi}|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\right) - |m|_p\Omega\left(|m\xi_{n+1}|_p\right)\right].$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.1) п. 3 § 4.

Пользуясь формулой (2.16) п. 2 § 7, вычислим I_2.

$$I_2 = \int\limits_{|t|_p>|m|_p} |t|_p^{\alpha-1}\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right) \int\limits_{|m|_p<|t|_p\le|\tilde{\xi}|_p^{-1}} |t|_p^{\alpha-1}\chi_p(t\xi_{n+1})dt =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left[\int\limits_{|t|_p\le|\tilde{\xi}|_p^{-1}} |t|_p^{\alpha-1}\chi_p(t\xi_{n+1})dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{|t|_p\le|m|_p} |t|_p^{\alpha-1}\chi_p(t\xi_{n+1})dt\right] =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left\{|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha}\Omega\left(|\tilde{\xi}|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\right)\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} + \right.$$

$$+ \Gamma_p(\alpha)|\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\left[1 - \Omega\left(|\tilde{\xi}|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\right)\right] -$$

$$- |m|_p^{\alpha}\Omega\left(|m\xi_{n+1}|_p\right)\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} -$$

$$\left. - \Gamma_p(\alpha)|\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\left[1 - \Omega\left(|m\xi_{n+1}|_p\right)\right]\right\} =$$

$$= \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\left(|\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} - |m|_p^{\alpha}\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\right) +$$

$$+ \Omega\left(|m\tilde{\xi}|_p\right)\Omega\left(|\tilde{\xi}|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\right) \times$$

$$\times \left(|\tilde{\xi}|_p^{-\alpha}\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} - |\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}\right).$$

Подставляя значения интегралов I_1 и I_2 в (4.8), получим искомое выражение (4.7):

$$\begin{aligned}
J^{m}_{n+1}(\xi) &= \Gamma^n_p(\alpha-1)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)\Big(|m|_p|\tilde\xi|_p^{-\alpha+1}-|m|_p|pm|_p^{\alpha-1}\Big) + \\
&\quad + \Gamma^n_p(\alpha-1)\Omega\Big(|m\tilde\xi|_p\Big)\Omega\Big(|\tilde\xi|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\Big)|\tilde\xi|_p^{-\alpha} - \\
&\quad - \Gamma^n_p(\alpha-1)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)|m|_p|\tilde\xi|_p^{-\alpha+1} - \\
&\quad - \Gamma^n_p(\alpha-1)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)\Big(|\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\frac{p^{-\alpha+1}-1}{1-p^{-\alpha}} - |pm|_p^{\alpha}\frac{p-1}{1-p^{-\alpha}}\Big) - \\
&\quad - \Gamma^n_p(\alpha-1)\Omega\Big(|m\tilde\xi|_p\Big)\Omega\Big(|\tilde\xi|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\Big)\Big(|\tilde\xi|_p^{-\alpha}\frac{p^{-\alpha+1}-p^{-\alpha}}{1-p^{-\alpha}} - \\
&\quad - |\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\frac{p^{-\alpha+1}-1}{1-p^{-\alpha}}\Big) = -\Gamma^{n+1}_p(\alpha)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)|pm|_p^{\alpha} + \\
&\quad + \Gamma^{n+1}_p(\alpha)\Omega\Big(|m\tilde\xi|_p\Big)\Omega\Big(|\tilde\xi|_p^{-1}|\xi_{n+1}|_p\Big)\Big(|\xi|_p^{-\alpha} - |\xi_{n+1}|_p^{-\alpha}\Big) + \\
&\quad + \Gamma^{n+1}_p(\alpha)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)|\xi_{n+1}|_p^{-\alpha} = \\
&= \Gamma^{n+1}_p(\alpha)\Omega\Big(|m\xi|_p\Big)\Big(|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\Big). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Действуя как и в п. 2 и пользуясь формулой (4.5), получим формулу, обобщающую формулу (3.8)

$$|x|_p^{\alpha-n} * |x|_p^{\beta-n} = B^n_p(\alpha,\beta)\,|x|_p^{\alpha+\beta-n}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta \ne \alpha_k, \tag{4.9}$$

где

$$B^n_p(\alpha,\beta) = \Gamma^n_p(\alpha)\Gamma^n_p(\beta)\Gamma^n_p(-\alpha-\beta+n). \tag{4.10}$$

С учетом свойства (см. (4.4), ср. (2.16))

$$\Gamma^n_p(\alpha)\Gamma^n_p(-\alpha+n) = 1 \tag{4.11}$$

равенство (4.10) принимает классический вид

$$\mathcal{B}_p^n(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_p^n(\alpha)\Gamma_p^n(\beta)}{\Gamma_p^n(\alpha+\beta)}. \tag{4.12}$$

Отметим симметричное выражение для

$$\mathcal{B}_p^n(\alpha,\beta) = \Gamma_p^n(\alpha)\Gamma_p^n(\beta)\Gamma_p^n(\gamma), \tag{4.13}$$

где $\alpha+\beta+\gamma = n$.

Замечание. Формулы п. 4 с точностью до обозначений приведены в работе В. А. Смирнова. Они используются в построении теории возмущений в p-адической евклидовой квантовой теории поля с пропагатором вида

$$|(x,m)|_p^\alpha.$$

ГЛАВА II

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Псевдодифференциальным оператором (над полем p-адических чисел) в открытом множестве $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ назовем оператор A вида

$$(A\psi)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} a(\xi,x)\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-(\xi,x))d\xi, \quad x \in O,$$

действующий на комплекснозначные функции $\psi(x)$ p-адических аргументов $x \in O$. Здесь функция ψ предполагается заданной на всем пространстве $\mathbb{Q}_p^n$ и продолженной нулем вне O, $\tilde{\psi}(\xi)$ – ее преобразование Фурье,

$$\tilde{\psi}(\xi) = \int_{O} \psi(x)\chi_p((\xi,x))dx.$$

Функция $a(\xi,x)$, $\xi \in \mathbb{Q}_p^n$, $x \in C$, называется *символом* оператора A.

§ 9. Оператор D^α

Оператор D^α: $\psi \mapsto D^\alpha\psi$ определяется как свертка $f_{-\alpha}$ (см. п. 3 § 8) с ψ:

$$D^\alpha\psi = f_{-\alpha}*\psi, \quad \alpha \neq -1.$$

D^α – псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|_p^\alpha$, в силу формулы преобразования Фурье свертки

$$F\left[D^\alpha\psi\right] = |\xi|_p^\alpha\tilde{\psi}.$$

1. Оператор D^α, $\alpha \neq -1$. В силу результатов §8, обобщенная функция

$$f_\alpha(x) = \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}$$

голоморфна по α всюду на вещественной оси за исключением простого полюса $\alpha = 1$ с вычетом $-\dfrac{p-1}{p\ln\, p}$; при этом $f_0(x) = \delta(x)$ и (см. (3.8) и (3.9) § 8)

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta \neq 1, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Пусть обобщенная функция ψ из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ такова, что свертка $f_{-\alpha}*\psi$ существует ($\alpha \neq -1$). Оператор $D^\alpha\psi = f_{-\alpha}*\psi$ назовем при $\alpha > 0$ оператором (дробного) *дифференцирования порядка* α, а при $\alpha < 0$ — оператором (дробного) *интегрирования порядка* $-\alpha$; *при* $\alpha = 0$ $D^0\psi = \delta*\psi = \psi$ — тождественный оператор.

Пример 1. Аналог первой производной ($\alpha = 1$, $D^1 = D$):

$$D\psi = f_{-1}*\psi = -\frac{p^2}{p+1}|x|_p^{-2}*\psi.$$

Если $\psi \in \mathcal{D}$, то эта формула в силу (1.18) §8 принимает вид

$$(D\psi)(x) = -\frac{p^2}{p+1}\Big(|y|_p^{-2},\psi(x-y)\Big) = \frac{p^2}{p+1}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{\psi(x)-\psi(y)}{|x-y|_p^2}\,dy$$

или, в силу (2.19) §8,

$$(D\psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p}|\xi|_p\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d\xi.$$

Пример 2. Производная $D^\alpha\psi$, $\alpha > 0$, на функциях $\psi \in \mathcal{D}$ дается выражением

$$(D^\alpha\psi)(x) = \frac{p^\alpha-1}{1-p^{-\alpha-1}}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{\psi(x)-\psi(y)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\,dy \tag{1.1}$$

или, эквивалентно,

$$(D^\alpha\psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p}|\xi|_p^\alpha\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d\xi. \tag{1.2}$$

Пример 3. Первообразная $D^\alpha\psi$, $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$, на функциях $\psi \in \mathcal{D}$ дается выражением (см. (2.19) §8)

$$(D^\alpha\psi)(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|x-y|_p^{-\alpha-1}\psi(y)\,dy \tag{1.3}$$

или, эквивалентно,

$$
(D^{\alpha}\psi)(x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{\alpha}\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d\xi, & -1<\alpha<0, \\ \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{\alpha}\Big[\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)-\tilde{\psi}(0)\Big]d\xi, & \alpha<-1. \end{cases} \tag{1.4}
$$

Пусть обобщенная функция $\psi \in \mathcal{E}'$ и $\alpha,\beta,\alpha+\beta \neq -1$. Тогда справедливы равенства

$$
D^{\alpha}D^{\beta}\psi = D^{\alpha+\beta}\psi = D^{\beta}D^{\alpha}\psi. \tag{1.5}
$$

■ Вытекают из формул (3.13)-(3.14) § 8 и (2.19) § 8.

$$
F\Big[D^{\alpha+\beta}\psi\Big] = F\Big[f_{-\alpha-\beta}*\psi\Big] = \tilde{f}_{-\alpha-\beta}\cdot\tilde{\psi} =
$$

$$
= |\xi|_p^{\alpha+\beta}\tilde{\psi} = |\xi|_p^{\alpha}\cdot\Big(|\xi|_p^{\beta}\tilde{\psi}\Big) = |\xi|_p^{\alpha}\cdot F\Big[f_{-\beta}*\psi\Big] =
$$

$$
= F\Big[f_{-\alpha}*D^{\beta}\psi\Big] = F\Big[D^{\alpha}\Big(D^{\beta}\psi\Big)\Big] = F\Big[D^{\beta}\Big(D^{\alpha}\psi\Big)\Big],
$$

поскольку $\tilde{\psi} \in \mathcal{E}$ (см. п. 3 § 7). ■

Из формул (1.5) при $\beta = -\alpha$ следуют равенства

$$
D^{\alpha}D^{-\alpha}\psi = \psi = D^{-\alpha}D^{\alpha}\psi, \quad \psi \in \mathcal{E}', \quad \alpha \neq \pm 1. \tag{1.6}
$$

Замечание. Равенства (1.5) остаются справедливыми и для тех обобщенных функций $\psi \in \mathcal{D}'$, для которых свертки $f_{-\alpha}*(f_{-\beta}*\psi)$, $f_{-\beta}*(f_{-\alpha}*\psi)$ и $f_{-\alpha-\beta}*\psi$ существуют в $\mathcal{D}'$. Существование этих сверток как условие справедливости равенств (1.5) существенно, как показывает следующий пример: пусть $\alpha > 0$ и $\psi = 1$, тогда $f_{-\alpha}*1 = F\Big[|\xi|_p^{\alpha}\delta(\xi)\Big] = 0$, свертка $f_{\alpha}*1$ не существует и равенства (1.6) несправедливы:

$$
D^{-\alpha}\Big(D^{\alpha}1\Big) = D^{-\alpha}0 = 0,
$$

$D^{\alpha}\Big(D^{-\alpha}1\Big)$ не существует.

Пример 4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p \ni a \neq 0$,

$$
D^{\alpha}\chi_p(ax) = |a|_p^{\alpha}\chi_p(ax). \tag{1.7}
$$

■ Вытекает из равенства (2.19) §8 и

$$F\left[\chi_p(ax)\right] = \delta(\xi+a)$$

(см. п. 3 § 7),

$$F\left[D^{\alpha}\chi_p(ax)\right] = F\left[f_{-\alpha}*\chi_p(ax)\right] = F\left[f_{-\alpha}\right]\cdot F\left[\chi_p(ax)\right] =$$

$$= \begin{cases} |\xi|_p^{\alpha}\cdot\delta(\xi+a), & \alpha\neq-1, \\ \left[\mathcal{P}\dfrac{1}{|\xi|_p} + \dfrac{1}{p}\delta(\xi)\right]\cdot\delta(\xi+a), & \alpha=-1, \end{cases} = |a|_p^{\alpha}\delta(\xi+a), \tag{1.8}$$

и из существования произведений

$$|\xi|_p^{\alpha}\cdot\delta(\xi+a) = |a|_p^{\alpha}\cdot\delta(\xi+a),\ \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p}\cdot\delta(\xi+a) = |\xi|_p^{-1}\delta(\xi+a),$$

$$\delta(\xi)\cdot\delta(\xi+a) = 0.$$

Применяя обратное преобразование Фурье к равенству (1.8), получим формулу (1.7). ∎

Пример 5. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$\Phi(x) = F\left[\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})f(-\xi)\right],\ f \in \mathcal{D}'.$$

Тогда

$$D^{\alpha}\Phi(x) = p^{\gamma\alpha}\Phi(x). \tag{1.9}$$

∎ Как и в примере 4 имеем:

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \delta(|\xi|_p-p^{\gamma})f(-\xi),$$

$$F\left[D^{\alpha}\Phi\right] = \tilde{f}_{-\alpha}\cdot\tilde{\Phi} = \begin{cases} |\xi|_p^{\alpha}\cdot\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})f(-\xi), & \alpha\neq-1, \\ \left[\mathcal{P}\dfrac{1}{|\xi|_p} + \dfrac{1}{p}\delta(\xi)\right]\cdot\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})f(-\xi), & \alpha=-1, \end{cases} =$$

$$= p^{\gamma\alpha}\delta(|\xi|_p-p^{\gamma})f(-\xi) = p^{\gamma\alpha}\tilde{\Phi}(\xi).\ ∎$$

Пример 6. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $|2a|_p \geq p^{2-2\gamma}$,

$$D^{\alpha}\left[\delta(|x|_p-p^{\gamma})\chi_p(ax^2)\right] = p^{\gamma\alpha}|2a|_p^{\alpha}\delta(|x|_p-p^{\gamma})\chi_p(ax^2). \tag{1.10}$$

∎ Вытекает из формулы (1.9) при $f(\xi) = \chi_p(a\xi^2)$ в силу формулы (2.10) п. 2 § 7. ■

Пример 7. $p \neq 2,\ \gamma \in \mathbb{Z},\ \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) = 0,$

$$D^{\alpha}\left[\eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{\gamma})\right] = p^{\alpha(1-\gamma)}\eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{\gamma}). \qquad (1.11)$$

■ Как и в примере 6, следует из формулы (2.14) п. 2 § 7. ■

2. Оператор D^{-1}. Наша задача - распространить оператор D^{α} на $\alpha = -1$ так, чтобы на классе обобщенных функций $\psi \in \mathcal{E}'$, $(\psi,1) = 0$, оператор D^{α} был бы непрерывен по α в точке $\alpha = -1$ и были бы справедливы равенства (1.5) при всех вещественных α и β.

Прежде всего докажем лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'$,* $\mathrm{supp}\ f \subset B_N$, *удовлетворяла условию*

$$(f,1) = (f,\Delta_N) = 0, \qquad (2.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{f}(\xi) = 0, \quad \xi \in B_{-N}. \qquad (2.2)$$

■ Необходимость условия (2.2) вытекает из результатов п. 3 § 7. Пусть выполнено условие (2.1). Так как параметр постоянности функции $\tilde{f}(\xi)$ не меньше $-N$, то при всех $\xi \in B_{-N}$ $\tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(0) = (f,\Delta_N) = 0$, в силу представления (3.10) п. 3 § 7. Обратно, если выполнено условие (2.2), то, выбирая

$$\varphi \in \mathcal{D},\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset B_{-N},\ \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)d\xi = 1,$$

получим условие (2.1):

$$0 = (\tilde{f},\varphi) = (f,\tilde{\varphi}) = \left(f, \Delta_N(x)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)\chi_p(x\xi)d\xi\right) =$$

$$= \left(f, \Delta_N(x)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)d\xi\right) = (f,\Delta_N). \ ■$$

На основных функциях $\varphi \in \mathcal{D}$ таких, что $\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi\, dx = 0$, справедливо предельное соотношение

$$(f_\alpha,\varphi) \longrightarrow -\frac{p-1}{p\ln p}\int_{\mathbb{Q}_p} \ln|x|_p\varphi(x)\,dx, \quad \alpha \to 1. \tag{2.3}$$

■ Существование предела и формула (2.3) следуют из предельного соотношения

$$(f_\alpha,\varphi) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx =$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{e^{(\alpha-1)\ln|x|_p}-1}{1-e^{-(\alpha-1)\ln p}}(1-p^{-\alpha})\varphi(x)\,dx \quad \to$$

$$\to \quad -\frac{p-1}{p\ln p}\int_{\mathbb{Q}_p} \ln|x|_p\varphi(x)\,dx, \quad \alpha \to 1.$$

Возможность перехода к пределу под знаком интеграла обеспечивается теоремой Лебега (см. п. 4 § 4), в силу мажорации

$$\left|\frac{e^{(\alpha-1)\ln|x|_p}-1}{1-e^{-(\alpha-1)\ln p}}\right| \le C\Big|\ln|x|_p\Big|, \quad x \in \operatorname{supp}\varphi, \quad |\alpha-1|_p \le 1,$$

при некотором $C = C(p,\operatorname{supp}\varphi)$. ■

Обозначим через f_1 регулярную обобщенную функцию $-\frac{p-1}{p\ln p}\ln|x|_p$,

$$(f_1,\varphi) = -\frac{p-1}{p\ln p}\int_{\mathbb{Q}_p} \ln|x|_p\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2.4}$$

Положим

$$D^{-1}\psi = f_1*\psi, \quad \psi \in \mathcal{E}'. \tag{2.5}$$

Докажем предельное соотношение:

$$D^{-\alpha}\psi \longrightarrow D^{-1}\psi, \quad \alpha \to 1, \text{ в } \mathcal{D}', \tag{2.6}$$

если $\psi \in \mathcal{E}'$ *удовлетворяет условию* (2.1).

■ Пусть $\operatorname{supp}\psi \subset B_N$ и $\varphi \in \mathcal{D}$. Пользуясь теорией свертки (см. п. 1 § 7), при всех $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ имеем

$$(D^{-\alpha}\psi,\varphi) = (f_\alpha*\psi,\varphi) = \Big(f_\alpha(x),(\psi(y),\varphi(x+y))\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} f_\alpha(x)g(x)\,dx, \qquad (2.7)$$

поскольку

$$g(x) = \Big(\psi(y), \varphi(x+y)\Big) = \Big(\psi(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big) \in \mathcal{D}.$$

Далее, в силу формулы (6.5) п. 6 § 6 (так как $\Delta_N(y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2)$) и условия (2.1)

$$\int_{\mathbb{Q}_p} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \Big(\psi(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big)dx =$$

$$= \Big(\psi(y), \Delta_N(y)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x+y)\,dx\Big) =$$

$$= \Big(\psi(y), \Delta_N(y)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\,dx\Big) = (\psi, 1)\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\,dx = 0,$$

так что функция g удовлетворяет условию (2.1). Поэтому, пользуясь предельным соотношением (2.3), из (2.7) и (2.5) выводим (2.6):

$$(D^{-\alpha}\psi, \varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_\alpha(x)g(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{Q}_p} f_1(x)g(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} f_1(x)\Big(\psi(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y)\Big)dx = (f_1 * \psi, \varphi) =$$

$$= (D^{-1}\psi, \varphi), \quad \alpha \to 1. \ \blacksquare$$

Докажем формулу

$$\tilde{f}_1(\xi) = \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p} + \frac{1}{p}\,\delta(\xi), \qquad (2.8)$$

где обобщенная функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{|\xi|_p}$ *определена в* (1.10) п. 1 § 8.

■ Из формулы (3.6) п. 3 § 4 следует, что преобразование Фурье функции $f_1(x)$ совпадает с функцией $|\xi|_p^{-1}$, где $\xi \neq$

$\ne 0$. Поэтому (см. п. 3 § 6)

$$\mathcal{F}_1(\xi) - \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p} = C\delta(\xi). \tag{2.9}$$

Для определения постоянной C применим обе части равенства (2.9) к основной функции $\Delta_0 = \tilde{\Delta}_0$ (функции Δ_k определены в п. 1 § 7). Пользуясь интегралом (2.6) §4, получим

$$C = (\mathcal{F}_1, \Delta_0) - \left(\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p}, \Delta_0\right) =$$

$$= (f_1, \tilde{\Delta}_0) - \int\limits_{|\xi|_p \le 1} \frac{\Delta_0(\xi) - \Delta_0(0)}{|\xi|_p} d\xi - \int\limits_{|\xi|_p > 1} \frac{\Delta_0(\xi)}{|\xi|_p} d\xi =$$

$$= -\frac{p-1}{p\ln p}\left(\ln|x|_p, \Delta_0\right) = -\frac{p-1}{p\ln p}\int\limits_{B_0} \ln|x|_p dx = \frac{1}{p}. \ \blacksquare$$

Если $\psi \in \mathcal{E}'$ и удовлетворяет условию (2.1), то по лемме 1 $\tilde{\psi}(\xi)$ обращается в нуль в окрестности точки $\xi = 0$. Поэтому в силу (2.8)

$$\mathcal{F}_1(\xi)\tilde{\psi}(\xi) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p} + \frac{1}{p}\delta(\xi)\right)\tilde{\psi}(\xi) = |\xi|_p^{-1}\tilde{\psi}(\xi).$$

Отсюда, как и выше, убеждаемся, что формулы (1.5) справедливы для всех вещественных α и β, если $\psi \in \mathcal{E}'$, $(\psi, 1) = 0$.

Лемма 2. *Если* $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset B_N$, *то при* $|x|_p > p^N$

$$\left(f_\alpha(x'), \varphi(x-x')\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma_p(\alpha)}|x|_p^{\alpha-1}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi\, dx', & \alpha \ne 1, \\[2ex] -\dfrac{p-1}{p\ln p}\ln|x|_p \displaystyle\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi\, dx', & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

$\blacksquare$ Пусть $\alpha \ne 1$. При $|x|_p > p^N$ $\varphi(x) = 0$ и $|x-y|_p = |x|_p$, $y \in \operatorname{supp}\varphi$ и формулы (1.1), (1.3) дают (2.10):

$$\left(f_\alpha(x'), \varphi(x-x')\right) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)} \int\limits_{|x'| \le 1} |x'|_p^{\alpha-1}\varphi(x-x')dx' +$$

$$+\frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}\int\limits_{|x'|>1}|x'|_p^{\alpha-1}\varphi(x-x')\,dx' = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|x-y|_p^{\alpha-1}\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}|x|_p^{\alpha-1}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\varphi(y)\,dy.$$

Аналогично рассматривается и случай $\alpha = 1$. ∎

Докажем равенства

$$f_1*f_{-\alpha} = f_{1-\alpha} = f_{-\alpha}*f_1,\quad \alpha \geq 0. \tag{2.11}$$

∎ При $\alpha = 0$ $f_0 = \delta$ и равенства (2.11) верны. Пусть $\alpha > 0$. Тогда по определению свертки (см. п. 1 § 7) при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ для любой 1-последовательности $\left\{\eta_k,\ k \to \infty\right\}$ имеем

$$\left(f_1*f_{-\alpha},\varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left(f_1(x)\times f_{-\alpha}(y),\eta_k(x)\varphi(x+y)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\eta_k(x)f_1(x)\left(f_{-\alpha}(y),\varphi(x+y)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f_1(x)\left(f_{-\alpha}(y),\varphi(x+y)\right)dx.$$

Возможность перехода к пределу под знаком интеграла и существование последнего интеграла следует из теоремы Лебега (см. п. 4 § 4) и леммы 2 в силу мажорации при $k \geq N$

$$\left|\Delta_k(x)f_1(x)\left(f_{-\alpha}(y),\varphi(x+y)\right)\right| \leq$$

$$\leq C_\varphi|x|_p^{-\alpha-1}\left|\ln|x|_p\right|,\quad |x|_p > R_\varphi.$$

Итак, свертка $f_1*f_{-\alpha}$ существует и, значит, существует свертка $f_{-\alpha}*f_1$ и они равны. Для ее вычисления рассуждаем следующим образом. Существует произведение $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_{-\alpha}$ и справедливо равенство

$$F\left[f_1*f_{-\alpha}\right] = \mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_{-\alpha}\ \text{(см. п. 5 § 7)}.$$

Принимая во внимание формулы (2.19) §8 и (2.9), перепишем последнее равенство в виде

$$F\left[f_1*f_{-\alpha}\right] = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p} + \frac{1}{p}\delta(\xi)\right)\cdot|\xi|_p^{\alpha}.$$

Нетрудно убедиться, что при $\alpha > 0$

$$\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|_p}\cdot|\xi|_p^{\alpha} = |\xi|_p^{\alpha-1},\ \delta(\xi)\cdot|\xi|_p^{\alpha} = 0.$$

Поэтому

$$F\left[f_1*f_{-\alpha}\right] = |\xi|_p^{\alpha-1},$$

откуда в силу (2.19) §8 вытекают равенства (2.11):

$$f_1*f_{-\alpha} = F\left[|\xi|_p^{\alpha-1}\right] = f_{1-\alpha}. \ \blacksquare$$

Из (2.11) при $\alpha = -1$ следуют соотношения

$$f_1*f_{-1} = \delta = f_{-1}*f_1. \tag{2.12}$$

Теперь докажем такое утверждение: *если $\psi \in \mathcal{E}'$, то при $\alpha \geq 0$ существуют $D^{-1}D^{\alpha}\psi$ и $D^{\alpha}D^{-1}\psi$ и они равны $D^{\alpha-1}\psi$:*

$$D^{-1}D^{\alpha}\psi = D^{\alpha-1}\psi = D^{\alpha}D^{-1}\psi \tag{2.13}$$

или, эквивалентно,

$$f_1*\left(f_{-\alpha}*\psi\right) = f_{1-\alpha}*\psi = f_{-\alpha}*\left(f_1*\psi\right). \tag{2.14}$$

■ Воспользуемся теорией свертки п. 1 § 7. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда при всех $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\left(\left(f_{-\alpha}*\psi\right)(y'),\varphi(x+y')\right) = \left(f_{-\alpha}(y),\left(\psi(y'),\varphi(x+y+y')\right)\right) =$$
$$= \left(f_{-\alpha}(y),g(x+y)\right),$$

где $g(x) = \left(\psi(y'),\varphi(x+y')\right) \in \mathcal{D}$. Поэтому свертка $f_1*\left(f_{-\alpha}*\psi\right)$ существует и равна $f_{1-\alpha}*\psi$:

$$\left(f_1*\left(f_{-\alpha}*\psi\right),\varphi\right) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_1(x)\left(f_{-\alpha}(y),g(x+y)\right)dx =$$

$$= \left(f_1*f_{-\alpha},g\right) = \left(f_{1-\alpha}(x),\left(\psi(y),\varphi(x+y)\right)\right) = \left(f_{1-\alpha}*\psi,\varphi\right),$$

в силу равенства (2.11). Аналогичное рассмотрение и для свертки

$$f_{-\alpha}*\left(f_1*\psi\right) = f_{1-\alpha}*\psi = \left(f_{-\alpha}*f_1\right)*\psi. \blacksquare$$

Из равенств (2.13) при $\alpha = 1$ следуют равенства

$$D^{-1}D\psi = \psi = DD^{-1}\psi,\ \psi \in \mathcal{E}'. \tag{2.15}$$

Подытожим наши результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. *Формулы* (2.5)

$$D^{\alpha}D^{\beta}\psi = D^{\alpha+\beta}\psi = D^{\beta}D^{\alpha}\psi,\ \psi \in \mathcal{E}',$$

справедливы, если $\alpha,\beta,\alpha+\beta \neq -1$ *или* $\alpha \geq 0, \beta = -1$; *если* $\psi \in \mathcal{E}'$ *удовлетворяет условию* (2.1) $(\psi,1) = 0$, *то эти формулы справедливы при всех веществених* α *и* β. *При этом* $D^{\alpha}\psi$ *непрерывно зависит от* α *в* $\mathcal{D}'$.

Замечание. Оператор D^{α}, $\alpha \neq -1$, определяется однородной обобщенной функцией $f_{-\alpha}$ степени однородности $-\alpha-1$; при $\alpha = -1$ это свойство утрачено: оператор D^{-1} определяется функцией $-\frac{p-1}{p\ln p}\ln|x|_p$, которая не обладает свойством однородности.

3. Уравнение $D^{\alpha}\psi = g$. Рассмотрим уравнение

$$D^{\alpha}\psi = g,\ g \in \mathcal{E}',\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

относительно неизвестной обобщенной функции $\psi \in \mathcal{D}'$. Решение уравнения (3.1) ищется в классе тех $\psi \in \mathcal{D}'$, для которых свертка $f_{-\alpha}*\psi$ существует в $\mathcal{D}'$ (и равна g) (см. § 7).

Теорема 1. *При* $\alpha > 0$ *любое решение уравнения* (3.1) *выражается формулой*

$$\psi = D^{-\alpha}g + C, \tag{3.2}$$

где C *– произвольная постоянная; при* $\alpha \leq 0$ *решение уравнения* (3.1) *единственно и выражается формулой* (3.2) *при* $C = 0$.

$\blacksquare$ Тот факт, что $D^{-\alpha}g$ есть решение уравнения (3.1) следует из формул (1.6) и (2.15). Осталось исследовать решения однородного уравнения

$$D^{\alpha}\psi = f_{-\alpha}*\psi = 0. \tag{3.3}$$

Применяя к уравнению (3.3) преобразование Фурье (см. п. 5 § 7), получим $\tilde{f}_{-\alpha}(\xi)\cdot\tilde{\psi}(\xi) = 0$. Так как $\tilde{f}_{-\alpha}(\xi) \neq 0$ при

$\xi \neq 0$ (см. (2.19) § 8 при $\alpha \neq -1$ и (2.8) при $\alpha = -1$), то $\tilde{\psi}(\xi) = 0$, $\xi \neq 0$ и, следовательно, $\tilde{\psi} = C\delta(\xi)$, $\psi = C$.

Докажем, что при $\alpha \le 0$ $C = 0$. При $\alpha = 0$ это так. Пусть $\alpha < 0$ и $C \neq 0$, т.е. $f_{-\alpha}*1 = 0$. Поскольку

$$f_{-\alpha} \in L^1(B_0), \quad \int\limits_{1<|x|_p} f_{-\alpha}(\xi)d\xi = -\infty,$$

то, выбирая функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ такую, что $\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx = 1$, получим противоречие

$$0 = \left(f_{-\alpha}*1,\varphi\right) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f_{-\alpha}(x)\Delta_k(x)\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x+y)dydx =$$

$$= \int\limits_{B_0} f_{-\alpha}(x)dx + \lim_{k\to\infty} \int\limits_{1<|x|_p\le p^k} f_{-\alpha}(x)dx = -\infty. \blacksquare$$

Теорема 1′. *Для того чтобы существовало решение ψ уравнения (3.1) такое, что $\tilde{\psi}(\xi)$ обращается в нуль в окрестности $\xi = 0$, необходимо и достаточно, чтобы g удовлетворяла условию (2.1). При этом решение $\psi = D^{-\alpha}g$ единственно, непрерывно по $\alpha \in \mathbb{R}$ в $\mathcal{D}'$ и справедливы формулы*

$$D^{\beta}\psi = D^{\beta-\alpha}g = D^{-\alpha}D^{\beta}g. \tag{3.4}$$

■ **Необходимость.** Пусть ψ – решение уравнения (3.1) и $\tilde{\psi} \equiv 0$ в окрестности $\xi = 0$. Тогда

$$F\left[D^{\alpha}\psi\right] = F\left[f_{-\alpha}*\psi\right] = \tilde{f}_{-\alpha}(\xi)\cdot\tilde{\psi}(\xi) = \tilde{g}(\xi),$$

откуда следует, что $\tilde{g}(\xi) = 0$ в окрестности $\xi = 0$. По лемме 1 $g \in \mathcal{E}'$ удовлетворяет условию (2.1).

Достаточность. Пусть $g \in \mathcal{E}'$ удовлетворяет условию (2.1). По лемме 1 $\tilde{g}(\xi) \equiv 0$ в окрестности $\xi = 0$. Так как постоянная $C \neq 0$ не удовлетворяет условию (2.1), то по теореме 1 существует единственное решение $\psi = D^{-\alpha}g$ уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (2.1):

$$\tilde{\psi}(\xi) = F\left[D^{-\alpha}g\right] = F\left[f_{\alpha}*g\right] = \tilde{f}_{\alpha}(\xi)\cdot\tilde{g}(\xi).$$

Остальные утверждения теоремы сразу следуют из теоремы п. 2. ■

4. Спектр оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$, $\alpha > 0$. Оператор D^α – псевдодифференциальный с символом $|\xi|_p^\alpha$ (см. п. 1):

$$D^\alpha\psi = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \chi_p(-\xi x)\tilde{\psi}(\xi)d\xi.$$

Он определен на тех функциях ψ из гильбертова пространства $L^2(\mathbb{Q}_p) = L^2$ (см. п. 4 § 7), для которых $|\xi|_p^\alpha\tilde{\psi} \in L^2$. Это множество, – обозначим его через $\mathcal{D}(D^\alpha)$, – называется *областью определения* оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$. При этом

$$\left(D^\alpha\psi,\varphi\right) = \left(D^{\alpha/2}\psi, D^{\alpha/2}\varphi\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha\tilde{\psi}(\xi)\bar{\tilde{\varphi}}(\xi)d\xi, \quad \psi,\varphi \in \mathcal{D}(D^\alpha), \tag{4.1}$$

$$\left\|D^\alpha\psi\right\|^2 = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{2\alpha}|\tilde{\psi}(\xi)|^2 d\xi, \quad \psi \in \mathcal{D}(D^\alpha). \tag{4.2}$$

Равенства (4.1) и (4.2) непосредственно следуют из равенства Парсеваля – Стеклова: $\left(D^\alpha\psi,\varphi\right) = \left(F\left[D^\alpha\psi\right], F\left[\varphi\right]\right)$; здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве L^2(см. п. 4 § 7).

Определенный таким образом оператор D^α – самосопряженный и положительный:

$$\left(D^\alpha\psi,\psi\right) = \left\|D^{\alpha/2}\psi\right\|^2 > 0, \quad 0 \neq \psi \in \mathcal{D}(D^\alpha),$$

так что спектр оператора D^α лежит на полуоси $\lambda \geq 0$.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$D^\alpha\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in L^2(\mathbb{Q}_p). \tag{4.3}$$

Пусть $\lambda = 0$. В п. 3 было установлено, что при $\lambda = 0$ уравнение (4.3) имеет единственное решение в $\mathcal{D}'$ $\psi \equiv \text{const}$. Таким образом, $\psi \equiv 1$ является обобщенной собственной функцией оператора D^α, соответствующей собственному значению $\lambda = 0$. Тем не менее $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора D^α.

Далее, ran D^{α} (область значений оператора D^{α}) *плотна в* L^2.

■ Это вытекает из того факта, что уравнение

$$D^{\alpha}\psi = \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D},\ \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi\, dx = 0$$

имеет решение $\psi = D^{-\alpha}\varphi$ из области $\mathcal{D}(D^{\alpha})$, поскольку $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}$ и

$$\tilde{\psi} = F\left[D^{-\alpha}\varphi\right] = F\left[f_{\alpha}*\varphi\right] = \tilde{f}_{\alpha}\cdot\tilde{\varphi} = |\xi|_p^{-\alpha}\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}$$

(по лемме 1 п. 3 $\tilde{\varphi}(\xi) = 0$ в окрестности точки $\xi = 0$), а множество функций $\left\{\varphi \in \mathcal{D}\colon \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi\, dx = 0\right\}$ плотно в L^2 по лемме, которую мы сейчас докажем. ■

Лемма. *Множество основных функций φ из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих условию $\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi dx = 0$, плотно в L^2.*

■ В силу равенства Парсеваля-Стеклова $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$ (см. п. 4 § 7) и леммы 1 п. 3 достаточно доказать плотность в L^2 множества функций

$$\mathcal{D}\left(\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}\right) = \left\{\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}\colon \tilde{\varphi}(\xi) = 0,\ \xi \in B_N,\ \exists N \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Но в п. 2 § 6 доказано, что $\mathcal{D}\left(\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}\right)$ плотно в $L^2\left(\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}\right) \simeq$ $\simeq L^2(\mathbb{Q}_p) = L^2$. ■

Пусть теперь $\lambda > 0$. Переходя в уравнении (4.3) к преобразованию Фурье, получим эквивалентное уравнение

$$\left(|\xi|_p^{\alpha} - \lambda\right)\tilde{\psi}(\xi) = 0.$$

Отсюда заключаем, что искомые точки спектра λ (в данном случае - собственные значения) имеют вид

$$\lambda_N = p^{N\alpha},\ N \in \mathbb{Z}, \tag{4.4}$$

и соответствующие (нормированные) собственные функции имеют представление

$$\tilde{\psi}(\xi) = \delta(|\xi|_p - p^N)\rho(\xi),\ \int_{S_N} |\rho(\xi)|^2 d\xi = 1,\ N \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

5. Ортонормированный базис собственных функций оператора D^{α}. В качестве функций ρ в (4.5) выберем следующую систему локально постоянных функций на S_N: при $p \neq 2$

$$\rho^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(\xi) =$$

$$= p^{-N/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\lambda_p(\varepsilon_l p^l)\chi_p\left[-\frac{p^{2N-l}}{4\varepsilon_l}\left(\xi+kp^{l-N-1}\right)^2\right], \qquad (5.1')$$

$$l = 2,3,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_l = \varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{l-2}p^{l-2},$$

$$\varepsilon_j = 0,1,\ldots,p-1,\ \varepsilon_0 \neq 0,\ j = 0,1,\ldots,l-2;$$

$$\rho^{1}_{N,k,0}(\xi) = p^{\frac{1-N}{2}}\delta(\xi_0-k), \qquad (5.1'')$$

$$k = 1,2,\ldots,p-1,\ l = 1,\ \varepsilon = 0;$$

при $p = 2$

$$\rho^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(\xi) = 2^{\frac{1-N}{2}}\lambda_2(\varepsilon_l 2^l)\chi_2\left[-\frac{2^{2N-l-2}}{\varepsilon_l}\left(\xi+2^{l-N-k}\right)^2\right], \qquad (5.2')$$

$$l = 2,3,\ldots,\ k = 0,1,\ \varepsilon_l = 1+\varepsilon_1 2+\ldots+\varepsilon_{l-2}2^{l-2};$$

$$\rho^{1}_{N,k,0}(\xi) = 2^{\frac{1-N}{2}}\chi_2\left(k2^{N-2}\xi\right),\ l = 1,\ k = 0,1,\ \varepsilon = 0. \qquad (5.2'')$$

В результате получим следующую систему нормированных собственных функций, преобразования Фурье которых в силу (4.5) и (5.1) равны: при $p \neq 2$

$$\tilde{\psi}^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(\xi) = p^{-N/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\lambda_p(\varepsilon_l p^l)\delta(|\xi|_p-p^N) \times$$

$$\times\chi_p\left[-\frac{p^{2N-l}}{4\varepsilon_l}\left(\xi+kp^{l-N-1}\right)^2\right],\ l \geq 2, \qquad (5.3')$$

$$\tilde{\psi}^{1}_{N,k,0}(\xi) = p^{\frac{1-N}{2}}\delta(|\xi|_p-p^N)\delta(\xi_0-k),\ l = 1; \qquad (5.3'')$$

при $p = 2$

$$\tilde{\psi}^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(\xi) = 2^{\frac{1-N}{2}}\lambda_2(\varepsilon_l 2^l)\delta(|\xi|_2-2^N) \times$$

$$\times \chi_2\left[-\frac{2^{2N-l-2}}{\varepsilon_l}\left(\xi+2^{l-N-k}\right)^2\right], \quad l \geq 2, \qquad (5.4')$$

$$\tilde{\psi}^{1}_{N,k,0}(\xi) = 2^{\frac{1-N}{2}}\delta(|\xi|_2-2^N)\chi_2\left(k2^{N-2}\xi\right), \quad l = 1. \qquad (5.4'')$$

Применяя к функциям (5.3) и (5.4) обратное преобразование Фурье и пользуясь формулами (2.7) – (2.10) п. 2 § 7, получим следующие собственные функции оператора D^{α}, соответствующие собственному значению $\lambda_N = p^{\alpha N}$, $N \in \mathbb{Z}$: при $p \neq 2$

I рода

$(l = 2,3,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_l = \varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{l-2}p^{l-2})$

$$\psi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(x) = p^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\delta(|x|_p-p^{l-N}) \times$$

$$\times \chi_p\left(\varepsilon_l p^{l-2N}x^2+kp^{l-N-1}x\right), \qquad (5.5')$$

II рода

$(l = 1,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon = 0)$

$$\psi^{1}_{N,k,0}(x) = p^{\frac{N-1}{2}}\Omega(p^{N-1}|x|_p)\chi_p(kp^{-N}x); \qquad (5.5'')$$

при $p = 2$

I рода

$(l = 2,3,\ldots,\ k = 0,1,\ \varepsilon_l = 1+\varepsilon_1 2+\ldots+\varepsilon_{l-2}2^{l-2})$

$$\psi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(x) = 2^{\frac{N-1}{2}}\delta\left(|x|_2-2^{l+1-N}\right) \times$$

$$\times \chi_2\left(\varepsilon_l 2^{l-2N}x^2+2^{l-N-k}x\right) \qquad (5.6')$$

II рода

($l = 1$, $k = 0,1$, $\varepsilon = 0$)

$$\psi^1_{N,k,0}(x) = 2^{\frac{N-1}{2}}\left[\Omega\left(2^N|x-k2^{N-2}|_2\right) - \right.$$
$$\left. - \delta\left(|x-k2^{N-2}|_2-2^{1-N}\right)\right]. \qquad (5.6'')$$

Собственные функции (5.5) - (5.6) принадлежат пространству $\mathcal{D}$ и удовлетворяют условию

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \psi^l_{N,k,\varepsilon_1}(x)dx = 0, \qquad (5.7)$$

поскольку в силу (5.3) - (5.4) $\tilde{\psi}^l_{N,k,\varepsilon_1}(0) = 0$ (см. лемму 1 п. 2). Собственные функции I рода удовлетворяют также условию

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\psi}^l_{N,k,\varepsilon_1}(\xi)d\xi = 0, \quad l=2,3,\ldots \qquad (5.8)$$

Ортогональность собственных функций при различных N следует из формул (5.3) - (5.4). Ортогональность функций при различных l и фиксированных N следует из формул (5.5) - (5.6). Ортогональность функций I рода при фиксированных N и l и различных ε_1 следует из формулы (2.10) п. 2 § 7: при $p \neq 2$

$$\left(\psi^l_{N,k,\varepsilon_1}, \psi^l_{N,k',\varepsilon'_1}\right) \sim$$
$$\sim \int_{\mathbb{Q}_p} \delta^2(|x|_p - p^{1-N})\chi_p\left(\varepsilon_1 p^{1-2N}x^2 + kp^{1-N-1}x\right) \times$$
$$\times \bar{\chi}_p\left(\varepsilon'_1 p^{1-2N}x^2 + k' p^{1-N-1}x\right)dx =$$
$$= \int_{S_{1-N}} \chi_p\left[(\varepsilon_1-\varepsilon'_1)p^{1-2N}x^2 + (k-k')p^{1-N-1}x\right]dx \sim$$
$$\sim \delta\left(\left|\frac{(k-k')p^{1-N-1}}{2(\varepsilon_1-\varepsilon'_1)p^{1-2N}}\right|_p - p^{1-N}\right) = 0,$$

поскольку $\varepsilon_1 \neq \varepsilon'_1$, так что

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon'_1|_p \geq p^{-1+2}, \quad |4(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)p^{1-2N}|_p \geq p^{2-2(1-N)},$$

и

$$\left|\frac{(k-k')p^{l-N-1}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)p^{1-2N}}\right|_p = \frac{p^{-l+N+1}}{p^{-1+2N}|\varepsilon_1 - \varepsilon'_1|_p} \leq$$

$$\leq p^{-N+1}p^{1-2}|k-k'|_p < p^{1-N}.$$

При $p = 2$ - аналогично. При фиксированных N, l и ε_1 и различных k собственные функции (5.6) ортогональны, в силу формулы (2.8) §7:

$$\left(\psi^1_{N,0,\varepsilon_1}, \psi^1_{N,1,\varepsilon_1}\right) \sim \int\limits_{S_{l+1-N}} \chi_2\left(2^{l-N}x\right)\chi_2\left(-2^{l-N-1}x\right)dx =$$

$$= \int\limits_{S_{l+1-N}} \chi_2\left(2^{l-N-1}x\right)dx = 0, \quad l \geq 2,$$

$$\left(\tilde{\psi}^1_{N,0,0}, \tilde{\psi}^1_{N,1,0}\right) \sim \int\limits_{S_N} \chi_2\left(2^{N-2}\xi\right) = 0, \quad l = 1$$

Итак, *при $p = 2$ собственные функции* (5.6) *образуют ортонормированную систему в $L^2(\mathbb{Q}_p)$*.

При $p \neq 2$ собственные функции II рода (5.5″) ортогональны при различных k (и фиксированном N), в силу формул (5.3″). Система же собственных функций I рода (5.3′) не ортогональна при различных k (и фиксированных N, l и ε_1).

Для построения ортонормированной системы собственных функций достаточно ортогонализировать систему функций $\left\{\psi^1_{N,k,\varepsilon_1}, \ k = 1, 2, \ldots, p-1\right\}$. Докажем, что в качестве такой ортонормированной системы можно взять следующую систему функций I рода:

$$\varphi^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= p^{\frac{N+l-1}{2}}\delta(|x|_p - p^{1-N})\delta(x_0 - k)\chi_p\left(\varepsilon_1 p^{1-2N}x^2\right), \tag{5.9}$$

$$k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Сначала установим соотношения

$$\psi^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{p-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \chi_p\left(\frac{kj}{p}\right) \varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x), \tag{5.10}$$

$$\varphi^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) = \frac{\sqrt{p-1}}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \left[\chi_p\left(-\frac{kj}{p}\right) - 1\right] \psi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x), \tag{5.11}$$

$$\tilde{\varphi}^1_{N,k,\varepsilon_1}(\xi) = p^{-\frac{N-1}{2}} \lambda_p(\varepsilon_1 p^1)\delta(|\xi|_p - p^N)\delta(\xi_0 - k')\chi_p\left(-\frac{p^{2N-1}}{4\varepsilon_1}\xi^2\right) =$$

$$= \varphi^1_{1-N,k',\varepsilon'_1}(\xi), \tag{5.12}$$

где $\varepsilon'_1 = -\frac{1}{4\varepsilon_1}$ и k' определяется сравнением

$$-2\varepsilon_0 k \equiv k' (\mathrm{mod}\ p),\ k' = 1,2,\ldots,p-1. \tag{5.13}$$

■ Формула (5.10) следует из (5.3′) и (5.9) в силу соотношения при $x \in S_{1-N}$

$$\chi_p\left(kp^{1-N-1}x\right) = \chi_p\left(\frac{kx_0}{p}\right)\sum_{j=1}^{p-1}\delta(x_0 - j) = \sum_{j=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{kj}{p}\right)\delta(x_0 - j).$$

Далее, пользуясь соотношениями

$$\sum_{s=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{ks}{p}\right)\chi_p\left(-\frac{js}{p}\right) = \sum_{s=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{(k-j)s}{p}\right) =$$

$$= \begin{cases} -1, & k \neq j \\ p-1, & k = j \end{cases},\ = -1 + p\delta_{kj}, \tag{5.14}$$

из (5.10) выводим формулу (5.11)

$$\sum_{s=1}^{p-1}\chi_p\left(-\frac{ks}{p}\right)\psi^1_{N,s,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p-1}}\sum_{s=1}^{p-1}\chi_p\left(-\frac{ks}{p}\right)\sum_{j=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{js}{p}\right)\varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p-1}} \sum_{j=1}^{p-1} (-1 + p\delta_{kj}) \varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{p-1}} \varphi^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) - \frac{1}{\sqrt{p-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{p-1}} \varphi^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} \psi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x),$$

в силу равенства

$$- \frac{1}{\sqrt{p-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= -p^{N-1} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|x|_p - p^{1-N}) \chi_p\left(\varepsilon_1 p^{1-2N} x^2\right) \sum_{j=1}^{p-1} \delta(x_0 - j) =$$

$$= p^{N-1} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|x|_p - p^{1-N}) \chi_p\left(\varepsilon_1 p^{1-2N} x^2\right) \sum_{j=1}^{p-1} \chi_p\left(\frac{x_0 j}{p}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} \psi^1_{N,j,\varepsilon_1}(x).$$

Наконец, формула (5.12) следует из (5.11), (5.2′), (5.13) и (5.14):

$$\tilde{\varphi}^1_{N,k,\varepsilon_1}(x) = \frac{\sqrt{p-1}}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \left[\chi_p\left(-\frac{kj}{p}\right) - 1\right] \tilde{\psi}^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) =$$

$$= p^{-\frac{N+1}{2}} \lambda_p(\varepsilon_1 p^1) \delta(|\xi|_p - p^N) \chi_p\left(-\frac{p^{2N-1}}{4\varepsilon_1} \xi^2\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{p-1} \left[\chi_p\left(-\frac{kj}{p}\right) - 1\right] \chi_p\left(-\frac{p^{N-1}}{2\varepsilon_1} \xi j\right) =$$

$$= p^{-\frac{N+1}{2}} \lambda_p(\varepsilon_1 p^1) \delta(|\xi|_p - p^N) \chi_p\left(-\frac{p^{2N-1}}{4\varepsilon_1} \xi^2\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{p-1} \left[\chi_p\left(-\frac{kj}{2\varepsilon_0 p}\right) - 1\right] \chi_p\left(-\frac{\xi_0 j}{2\varepsilon_0 p}\right) =$$

$$= p^{-\frac{N+1}{2}} \lambda_p(\varepsilon_1 p^1) \delta(|\xi|_p - p^N) \chi_p\left(-\frac{p^{2N-1}}{4\varepsilon_1} \xi^2\right) p\delta(\xi_0 - k'). \quad \blacksquare$$

Из представления (5.11) следует, что функции (5.9) – собственные функции оператора D^{α}. Таким образом, построена ортонормированная система (5.9) собственных функций оператора D^{α} при $p \neq 2$, $N \in \mathbb{Z}$:

I рода

$(l = 2,3,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_l = \varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{l-2}p^{l-2})$

$$\varphi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}(x) =$$

$$= p^{\frac{N+l-1}{2}}\delta(|x|_p-p^{l-N})\delta(x_0-k)\chi_p\left(\varepsilon_l p^{l-2N}x^2\right), \qquad (5.15')$$

II рода

$(l = 1,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon = 0)$

$$\varphi^{1}_{N,k,0}(x) = p^{\frac{N-1}{2}}\Omega(p^{N-1}|x|_p)\chi_p(kp^{-N}x) =$$

$$= \psi^{1}_{N,k,0}(x). \qquad (5.15'')$$

Полнота. Докажем полноту построенных ортонормированных систем функций (5.6) и (5.15) в $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Для этого достаточно доказать полноту их преобразований Фурье на любой окружности S_N, $N \in \mathbb{Z}$, поскольку

$$L^2(\mathbb{Q}_p) = \sum_{N=-\infty}^{\infty}{}^{\oplus}L^2(S_N). \qquad (5.16)$$

Для доказательства этого достаточно доказать справедливость равенства Парсеваля – Стеклова на плотном множестве функций $\left\{\chi_p(\xi\sigma),\ |\sigma|_p \geq p^{-N}\right\}$ в $L^2(S_N)$ (см. п. 2 § 7).

Пусть $p \neq 2$. Если $|\sigma|_p = p^{-N}$, то $\chi_p(\xi\sigma) = 1$ на S_N и, значит, в силу (5.2″)

$$1 = \sum_{k=1}^{p-1}\delta(x_0-k) = p^{\frac{N-1}{2}}\sum_{k=1}^{p-1}\tilde{\varphi}^{1}_{N,k,0}(\xi),\ \xi \in S_N.$$

Пусть $|\sigma|_p = p^{-N+1}$. Тогда при $\xi \in S_N$

$$\chi_p(\xi\sigma) = \chi_p\left(\frac{\xi_0\sigma_0}{p}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \delta(\xi_0 - k)\chi_p\left(\frac{\xi_0\sigma_0}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{k\sigma_0}{p}\right)\delta(\xi_0 - k) =$$

$$= p^{\frac{N-1}{2}} \sum_{k=1}^{p-1}\chi_p\left(\frac{k\sigma_0}{p}\right)\tilde{\varphi}^1_{N,k,0}(\xi).$$

Пусть $|\sigma|_p = p^{-N+n}$, $n \ge 2$. Тогда при $\xi \in S_N$

$$C^l_{N,k,\varepsilon_l} = \left(\chi_p(\xi\sigma), \tilde{\varphi}^l_{N,k,\varepsilon_l}\right) = \int_{Q_p} \chi_p(\xi\sigma)\bar{\tilde{\varphi}}^l_{N,k,\varepsilon_l}(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{Q_p} \overline{\tilde{\varphi}^l_{N,k,\varepsilon_l}(\xi)\chi_p(-\xi\sigma)}d\xi = \bar{\varphi}^l_{N,k,\varepsilon_l}(\sigma).$$

Поэтому и в силу (5.14) $C^l_{N,k,\varepsilon_l} = 0$, если $l \ne n$; при $l = n$

$$\left|C^n_{N,k,\varepsilon_n}\right|^2 = \left|\bar{\varphi}^n_{N,k,\varepsilon_n}(\sigma)\right|^2 = p^{N+1-n}\delta(\sigma_0 - k).$$

При фиксированных $l = n \ge 2$ и $k = 1,2,\dots,p-1$ число собственных функций (5.15′) равно $(p-1)p^{n-2}$. Поэтому

$$\left\|\chi_p(\xi\sigma)\right\|^2_{L^2(S_N)} = p^N\left(1-\frac{1}{p}\right)(p-1) =$$

$$= (p-1)p^{n-2}p^{N+1-n}\sum_{k=1}^{p-1}\delta(\sigma_0 - k) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{\varepsilon_l}\left|C^n_{N,k,\varepsilon_l}\right|^2,$$

так что равенство Парсеваля - Стеклова выполнено.

Пусть $p = 2$. При $|\sigma|_2 = 2^{-N}$ или $|\sigma|_2 = 2^{-N+1}$ $\chi_2(\xi\sigma) = \text{const}$ на S_N и, таким образом, в силу (5.4″) $\chi_2(\xi\sigma) \sim \tilde{\psi}^1_{N,0,0}(\xi)$ на S_N. При $|\sigma|_2 = 2^{-N+n}$, $n \ge 3$, как и в случае $p \ne 2$, имеем

$$C^l_{N,k,\varepsilon_l} = \left(\chi_2(\xi\sigma), \tilde{\psi}^l_{N,k,\varepsilon_l}\right) = \bar{\psi}^l_{N,k,\varepsilon_l}(\sigma).$$

Поэтому $C^{l}_{N,k,\varepsilon_l} = 0$, если $l+1 \neq n$, и при $l+1 = n$

$$\left|C^{n-1}_{N,k,\varepsilon_{n-1}}\right|^2 = \left|\overline{\psi}^{n-1}_{N,k,\varepsilon_{n-1}}(\sigma)\right|^2 = 2^{N-n+1}.$$

При фиксированном $l = n-1 \geq 2$ число собственных функций (5.6′) равно $2\cdot 2^{l-2} = 2^{n-2}$. Поэтому

$$\left\|\chi_2(\xi\sigma)\right\|^2_{L^2(S_N)} = 2^N(1-\tfrac{1}{2}) =$$

$$= 2^{N-n+1}2^{n-2} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{1}\sum_{\varepsilon_l}\left|C^{l}_{N,k,\varepsilon_l}\right|^2. \blacksquare$$

Наконец, отметим, что функции вида

$$\left\{\chi_p(x\sigma),\ |\sigma|_p = p^N\right\} \tag{5.17}$$

удовлетворяют уравнению (4.3) при $\lambda = \lambda_N = p^{\alpha N}$, в силу (1.7).

Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема. *Спектр оператора D^α состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_N = p^{\alpha N}$, $N \in \mathbb{Z}$, каждое из которых бесконечной кратности, и точки $\lambda = 0$ (предельная точка собственных значений), образующих существенный спектр. Существует ортонормированный в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ базис собственных функций* (5.6) *при $p = 2$ и* (5.15) *при $p \neq 2$. Собственные функции принадлежат $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ и удовлетворяют условям* (5.7) *и* (5.8). *Точке $\lambda = 0$ соответствует единственная обобщенная собственная функция $\psi(x) = 1$; собственным значениям λ_N соответствуют обобщенные собственные функции вида* (5.17).

6. Разложения по собственным функциям. Для единообразия записи при $p = 2$ собственные функции (5.6) $\psi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}$ переобозначим через $\varphi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}$. Из результатов пп.4 – 5 вытекает следующая **теорема о разложении по собственным функциям $\varphi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}$ оператора D^α**:

$$D^\alpha\varphi^{l}_{N,k,\varepsilon_l} = p^{\alpha N}\varphi^{l}_{N,k,\varepsilon_l}, \tag{6.1}$$

$$N \in \mathbb{Z},\ l=1,2\ldots,\ k = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_l.$$

Теорема. *Всякая функций* $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ *разлагается в ряд Фурье по собственным функциям* $\left\{\varphi^l_{N,k,\varepsilon_l}\right\}$ *оператора* D^α:

$$f(x) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k} \sum_{\varepsilon_l} f^l_{N,k,\varepsilon_l} \varphi^l_{N,k,\varepsilon_l}(x), \tag{6.2}$$

где

$$f^l_{N,k,\varepsilon_l} = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \overline{\varphi}^l_{N,k,\varepsilon_l}(x)\, dx. \tag{6.3}$$

Ряд (6.2) *сходится в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$, *и справедливо равенство Парсеваля - Стеклова*

$$\|f\|^2 = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k} \sum_{\varepsilon} |f^l_{N,k,\varepsilon_l}|^2. \tag{6.4}$$

Другими словами, $L^2(\mathbb{Q}_p)$ разлагается в прямую сумму конечномерных собственных подпространств (серий) $\mathfrak{h}^l_N$, $N \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$,

$$L^2(\mathbb{Q}_p) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty}{}^{\oplus} \mathfrak{h}^l_N. \tag{6.5}$$

При $p \neq 2$ подпространства $\mathfrak{h}^l_N$, $l \geq 2$, натянуты на собственные функции I рода (5.15′), так что $\dim \mathfrak{h}^l_N = (p-1)^2 p^{l-2}$; $\mathfrak{h}^1_N$ натянуты на собственные функции II рода (5.15″), так что $\dim \mathfrak{h}^1_N = p-1$. При $p = 2$ $\mathfrak{h}^l_N$, $l \geq 2$ натянуты на собственные функции I рода (5.6′), $\dim \mathfrak{h}^l_N = 2^{l-1}$; $\mathfrak{h}^1_N$ натянуты на собственные функции II рода (5.6″), $\dim \mathfrak{h}^1_N = 2$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что построенные собственные функции оператора D^α, $\alpha > 0$ (см., например, формулы (5.5) и (5.6)) при комплексном сопряжении переходят либо в себя (вещественные), либо в другие собственные функции из той же серии (комплексные). Поэтому комплексная собственная функция (5.5) и (5.6) дает вклад в $\dim \mathfrak{h}^l_N$, равный 1, а не 2, как это имеет место в классической математической физике.

Оператором типа Шредингера назовем псевдодифференциальный оператор вида

$$A\psi = a*\psi + V\cdot\psi.$$

Символом оператора A является функция

$$\tilde{a}(\xi) + V(x),$$

где $\tilde{a}(\xi)$ - преобразование Фурье (обобщенной) функции $a(x)$; функция $V(x)$ называется *потенциалом*. Простейшим примером таких операторов может служить оператор $D^\alpha = f_{-\alpha}*$, $\alpha>0$. Его символ есть $|\xi|_p^\alpha$ (см. п. 1 § 9).

1. Ограниченные снизу самосопряженные операторы. Пусть A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с (плотной) областью определения $\mathcal{D}(A)$. Обозначим: $\rho(A)$ - резольвентное множество, $\sigma(A)$ - спектр и $\mathcal{P}(\lambda)$ - проекторнозначная спектральная мера оператора A,

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mathcal{P}(\lambda),\ (A\varphi,\psi) = \int_{\sigma(A)} \lambda d(\mathcal{P}(\lambda)\varphi,\psi),\ \varphi,\psi\in\mathcal{D}(A).$$

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Скажем, что λ принадлежит *существенному спектру* $\sigma_{ess}(A)$ оператора A если проектор

$$\mathcal{P}(\lambda+\varepsilon) - \mathcal{P}(\lambda-\varepsilon) \tag{1.1}$$

бесконечномерен для всех $\varepsilon > 0$; если проектор (1.1) конечномерен при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то λ принадлежит *дискретному спектру* $\sigma_{disc}(A)$ оператора A.

Таким образом,

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A),\ \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{disc}(A) = \varnothing;$$

$\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ тогда и только тогда, когда λ - изолированная точка спектра $\sigma(A)$ и λ - собственное значение оператора A конечной кратности. Оператор A, для которого $\sigma(A) = \sigma_{disc}(A)$, называется *оператором с дискретным спектром*.

Другая классификация точек спектра $\sigma(A)$ основывается на разложении спектральной меры $d\mathcal{P}(\lambda)$ (точнее, мер $d(\mathcal{P}(\lambda)\psi,\psi)$, $\psi \in H$) на сингулярную, абсолютно непрерывную и непрерывно сингулярную части. Это дает соответственно $\sigma_{pp}(A)$ - чисто точечную, $\sigma_{ac}(A)$ - абсолютно непрерывную и

$\sigma_{sing}(A)$ – непрерывно сунгулярную части спектра $\sigma(A)$,

$$\sigma(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A).$$

Однако эти множества могут пересекаться.

Теперь предположим, что самосопряженный оператор A *ограничен снизу*, т.е. существует такая постоянная C, что

$$(A\psi,\psi) \geq C\|\psi\|^2, \ \psi \in \mathcal{D}(A). \tag{1.2}$$

Замкнутую билинейную форму, порожденную оператором A, обозначим $A(\varphi,\psi)$; ее область определения обозначим через $Q(A) \supset \mathcal{D}(A)$, так что

$$A(\varphi,\psi) = (A\varphi,\psi), \ \varphi,\psi \in \mathcal{D}(A). \tag{1.3}$$

Обозначим через $\lambda_k(A)$, $k = 1,2,\ldots$, числа, определяемые принципом минимакса

$$\lambda_k(A) = \\ = \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}\in H} \ \inf_{\substack{(\psi,\varphi_i)=0,\ i=1,2,\ldots,k-1 \\ \psi\in Q(A)}} \frac{A(\psi,\varphi)}{\|\psi\|^2}. \tag{1.4}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть A – ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(A)$; пусть $A(\varphi,\psi)$ – соответствующая билинейная форма с областью определения $Q(A)$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Оператор $(A-\lambda)^{-1}$ компактен при некотором $\lambda \in \rho(A)$;*

(2) *Оператор $(A-\lambda)^{-1}$ компактен при всех $\lambda \in \rho(A)$;*

(3) *Множество функций*

$$\left\{\psi \in \mathcal{D}(A): \ \|\psi\|\leq a, \ \|A\psi\|\leq b\right\}$$

компактно при всех $a > 0$ и $b > 0$;

(4) *Множество функций*

$$\left\{\psi \in Q(A): \ \|\psi\|\leq a, \ A(\psi,\psi)\leq b\right\}$$

компактно при всех $a > 0$ и $b > 0$;

(5) *Существует ортонормированный базис*

$$\left\{\varphi_k \in \mathcal{D}(A), \ k = 1,2,\ldots,\right\}$$

собственных функций оператора A, соответствующих собственным значениям $\left\{\lambda_k, \ k = 1,2,\ldots\right\}$,

$$A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \tag{1.5}$$

причем каждое λ_k *- конечной кратности,*

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots, \ \lambda_k \to \infty, \ k \to \infty; \tag{1.6}$$

(6) $$\lambda_k(A) \longrightarrow \infty, \ k \to \infty, \tag{1.7}$$

где числа $\lambda_k(A)$ *определяются из принципа минимакса* (1.4).

Другими словами, *при выполнении одного из условий* (1) - (6) *выполнены и остальные условия, и спектр* $\sigma(A) = \left[\lambda = \lambda_k, \ k = 1,2,\ldots\right]$ *- дискретный, причем* $\lambda_k = \lambda_k(A) \to \infty, \ k \to \infty$.

Пример 1. Пусть потенциал $V(|x|_p)$ ограничен снизу и конечен в $\mathbf{Q}_p$: $C \le V(|x|_p) < \infty, \ x \in \mathbf{Q}_p$. Оператор типа Шредингера

$$A\psi = D^\alpha\psi + V(|x|_p)\psi, \ \alpha > -1, \tag{1.8}$$

с символом

$$|\xi|_p^\alpha + V(|x|_p)$$

и областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \left[\varphi \in L^2(\mathbf{Q}_p): \ |\xi|_p^\alpha\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbf{Q}_p), \ V(|x|_p)\varphi \in L^2(\mathbf{Q}_p)\right]$$

ограничен снизу и симметричен в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{Q}_p)$. Он допускает самосопряженное расширение $\tilde{A}$ по Фридрихсу с помощью замкнутой ограниченной снизу билинейной формы

$$A(\varphi,\psi) = \int_{\mathbf{Q}_p} |\xi|_p^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)\overline{\tilde{\psi}(\xi)}d\xi + \int_{\mathbf{Q}_p} V(|x|_p)\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx =$$

$$= (D^{\alpha/2}\varphi, D^{\alpha/2}\psi) + (V\varphi,\overline{\psi}), \tag{1.9}$$

область определения которой есть

$$Q(A) = \left[\varphi \in L^2(\mathbf{Q}_p): \right.$$

$$\left. |\xi|_p^{\alpha/2}\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbf{Q}_p), \ \sqrt{V(|x|_p)+|C|+1}\ \varphi \in L^2(\mathbf{Q}_p)\right]. \tag{1.10}$$

Ясно, что

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset Q(A).$$

Пример 2. *Многомерные операторы типа Шредингера с символами*

$$|\xi_1|_p^2 + \ldots |\xi_n|_p^2 + V(x), \ |(\xi,\xi)|_p + V(x),$$

где потенциал $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{Q}_p^n)$ и $V(x) \geq -C$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$, дают примеры ограниченных снизу симметричных операторов в $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$.

2. Критерии компактности функций в $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$. Так как пространство $\mathbb{Q}_p^n$ локально компактно, то ряд критериев компактности функций вещественных аргументов непосредственно переносятся и на комплекснозначные функции p-адических аргументов, например, лемма Арчела - Асколи:

Если бесконечное множество M непрерывных функций на компакте $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ ограничено в $C(K)$ и состоит из равностепенно непрерывных функций на K, то из M можно выбрать последовательность, сходящуюся в $C(K)$.

Пусть G - открыто-замкнутое множество в $\mathbb{Q}_p^n$ (например, шар B_r, сфера S_r, внешность шара B_r: $\mathbb{Q}_p^n \setminus B_r$, внешность сферы S_r: $\mathbb{Q}_p^n \setminus S_r$, все пространство $\mathbb{Q}_p^n$ и т.д.). Пространство $L^2(G)$ (см. п. 1 § 4) нам будет удобно рассматривать как множество тех функций из $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$, для которых носитель содержится в G, т.е. всякая функция f из $L^2(G)$ будет считаться заданной во всем $\mathbb{Q}_p^n$ и равной 0 почти всюду вне G.

Определения.

1. Будем говорить, что множество функций $M \subset L^2(G)$ состоит из *равностепенно непрерывных в целом в* $L^2(G)$ функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n = n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, что для любой функции f из M справедливо неравенство

$$\int_G |f(x+h)-f(x)|^2 dx < \varepsilon \ \forall h \in B_n.$$

2. Будем говорить, что множество $M \subset L^2(G)$ состоит из функций с *равностепенно непрерывными $L^2(G)$-интегралами на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, что для любой $f \in M$ справедливо неравенство

$$\int_{G\setminus B_N} |f(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

3. Будем говорить, что измеримая вещественная функция $F(x)$, заданная на множестве $G \subset \mathbb{Q}_p^n$, *стремится к $+\infty$ на бесконечности* (т.е. $F(x) \to +\infty$, $|x|_p \to \infty$, $x \in G$), если G - *неограниченное множество и для любого* $M > 0$ существует такое $N = N_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, что $F(x) > M$ при $|x|_p \geq p^N$, $x \in G$.

Аналог критерия Рисса - Колмогорова о компактности. *Для того чтобы множество* $M \subset L^2(G)$ *было компактным в* $L^2(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям:*

(1) *ограничено в* $L^2(G)$;

(2) *состоит из равностепенно непрерывных в целом в* $L^2(G)$ *функций;*

(3) *состоит из функций с равностепенно непрерывными* $L^2(G)$*-интегралами на бесконечности.*

Переходя к преобразованию Фурье, из критерия Рисса - Колмогорова получаем такой критерий компактности.

Для того чтобы множество $M \subset L^2(G)$ *было компактным в* $L^2(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (1) *и* (3) *и условие*

(2′) *множество* $\left[g = \tilde{f}:\ f \in M\right]$ *состоит из функций с равностепенно непрерывными* $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$*-интегралами на бесконечности.*

Из последнего критерия сразу следует аналог **критерия Реллиха.** *Если множество функций* $M \subset L^2(G)$ *ограничено в* $L^2(G)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \sigma(\xi)\,|\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \le C,\ f \in M, \tag{2.1}$$

$$\int_{G} \rho(x)\,|f(x)|^2 dx \le C,\ f \in M, \tag{2.2}$$

где $\sigma(\xi)$ *и* $\rho(x)$ *- положительные функции, стремящиеся к* $+\infty$ *на бесконечности, и число* C *не зависит от* f, *то* M *компактно в* $L^2(G)$.

Замечание. В случае ограниченной области G условия (3) и (2.2), естественно, отсутствуют.

3. Оператор типа Шредингера $a{*}{+}V\cdot$. Оператор $a{*}{+}V\cdot = A$ - псевдодифференциальный,

$$(A\psi)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-(x,\xi))\,d\xi + V(x)\psi(x). \tag{3.1}$$

Будем рассматривать оператор A в гильбертовом пространстве $L^2(G)$, где G - открыто-замкнутое множество пространства $\mathbb{Q}_p^n$. Поэтому в (3.1) x пробегает множество G. Символом оператора A является (обобщенная) функция

$$\tilde{a}(\xi) + V(x), \ \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \ x \in G.$$

Предполагаем, что $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ - функции, ограниченные снизу, локально ограниченные и стремятся к $+\infty$ на бесконечности в $\mathbb{Q}_p^n$ и G соответственно. Без ограничения общности можно считать, что функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ положительны.

В качестве области определения оператора A возьмем множество

$$\mathcal{D}(A) = \left[\psi \in L^2(G): \tilde{a}\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{Q}_p^n), \ V\psi \in L^2(G)\right].$$

При сделанных предположениях оператор A симметричен и положителен. Соответствующая билинейная форма

$$A(\psi,\varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\psi}(\xi)\overline{\tilde{\varphi}(\xi)}d\xi + \int_G V(x)\psi(x)\overline{\varphi(x)}dx \qquad (3.2)$$

с областью определения

$$Q(A) = \left[\psi \in L^2(G): \tilde{a}^{1/2}\ \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{Q}_p^n), \ V^{1/2}\psi \in L^2(G)\right]$$

замкнута и положительна. Поэтому оператор A допускает (единственное) самосопряженное расширение (по Фридрихсу) $\tilde{A}$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A^*) \cap Q(A) \subset Q(A)$, причем

$$A(\psi,\varphi) = (\tilde{A}\psi,\varphi), \ \varphi,\psi \in \mathcal{D}(\tilde{A}).$$

Соответствующая (3.2) квадратичная форма имеет вид

$$A(\psi,\psi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \tilde{a}(\xi)|\tilde{\psi}(\xi)|^2 d\xi + \int_G V(x)|\psi(x)|^2 dx, \ \psi \in Q(A). \quad (3.3)$$

«Краевая» задача для оператора A на множестве G ставится так: пусть $f \in L^2(G)$, найти функцию φ из $\mathcal{D}(\tilde{A})$, удовлетворяющую уравнению

$$(\tilde{A}\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) + f(x), \ x \in G. \qquad (3.4)$$

При $f \equiv 0$ получаем задачу о спектре оператора A.

Замечание 1. «Граничные» условия в «краевой» задаче (3.4) спрятаны в определении квадратичной формы (3.3), в которой предполагается, что функции ψ обращаются в нуль вне G.

В силу аналога критерия Релиха (см. п. 2) любое ограниченное в $L^2(G)$ множество M, для которого

$$A(\psi,\psi) \le b, \ \psi \in M,$$

при некотором $b > 0$, компактно в $L^2(G)$. Отсюда, пользуясь теоремой п. 1, выводим, что к оператору A применима теория Гильберта - Шмидта, а именно, справедлива следующая

Основная теорема. *Пусть функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ ограничены снизу, локально интегрируемы и стремятся к $+\infty$ на бесконечности в $\mathbb{Q}_p^n$ и G соответственно. Тогда спектр оператора $A = a*+V\cdot$ дискретный и состоит из вещественных собственных значений $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$, $k \to \infty$; каждое собственное значение - конечной кратности. Соответствующие собственные функции $\varphi_k \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ образуют ортонормальный базис в $L^2(G)$,*

$$\tilde{A}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \ (\tilde{A}\varphi_k,\varphi_j) = \delta_{kj}, \ k,j = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

Справедлив вариационный принцип

$$\lambda_k = \min_{\substack{(\psi,\varphi_j)=0,\ j=1,2,\ldots,k-1 \\ \psi\in Q(A)}} \frac{A(\psi,\psi)}{\|\psi\|^2}, \tag{3.6}$$

причем min *в (3.6) реализуется на собственной функции $\psi = \varphi_k$, соответствующей собственному значению λ_k.*

При $\lambda \ne \lambda_k$, $k = 1,2,\ldots$, оператор $(\tilde{A}-\lambda)^{-1}$ вполне непрерывен, так что уравнение (3.4) однозначно разрешимо в $\mathcal{D}(\tilde{A})$ при любой $f \in L^2(G)$ и его решение выражается формулой

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda-\lambda_k}\varphi_k. \tag{3.7}$$

При $\lambda = \lambda_k$ решение уравнения (3.4) существует тогда и только тогда, когда f ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим собственному значению λ_k,

$$(f,\varphi_{k+j}) = 0, \ j = 0,1,\ldots,n_k-1, \tag{3.8}$$

где n_k - кратность λ_k; это решение выражается формулой

$$\varphi = \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j\ne\lambda_k}}^{\infty} \frac{(f,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\varphi_j + \sum_{j=0}^{n_k-1} c_j\varphi_{k+j}, \tag{3.9}$$

где c_j - произвольные постоянные.

Замечание 2. Основная теорема остается справедливой и для тех ограниченных снизу псевдодифференциальных операторов, для которых символ $a(\xi,x)$ локально итегрируем и на $\mathbb{Q}_p^n\times G$ и обладает тем свойством, что всякое множество функций вида

$$\left\{\psi \in L^2(G):\ \|\psi\| \le 1,\quad \int_{\mathbb{Q}_p^n\times G} a(\xi,x)\chi_p(-(\xi,x))\tilde{\psi}(\xi)\bar{\psi}(x)d\xi dx \le 1\right\}$$

компактно в $L^2(G)$.

Обращение основной теоремы. *Если оператор* $A = a{*}{+}V\cdot$ *в* $\mathbb{Q}_p^n$ *типа Шредингера с символом вида*

$$\mathcal{P}(|\xi_1|_p,\ldots,|\xi_n|_p) + V(|x_1|_p,\ldots,|x_n|_p),$$

где $\mathcal{P}$ *и* V *локально ограниченные и ограниченные снизу функции, таков, что числа* $\lambda_k(A)$, $k = 1,2,\ldots$, *определяемые принципом минимакса* (1.4) *по квадратичной форме*

$$A(\psi,\psi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n}\mathcal{P}|\tilde{\psi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{Q}_p^n} V|\psi(x)|^2 dx, \tag{3.10}$$

таковы, что $\lambda_k(A)\to\infty$, $k\to\infty$, *то* $\mathcal{P}\to\infty$, $|\xi|_p\to\infty$ *и* $V\to\infty$, $|x|_p\to\infty$.

■ Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть $V(|x|_p)$ не стремится к ∞ при $|x|_p\to\infty$. Тогда найдутся число $K > 0$ и последовательность целых чисел $\rho_k\to\infty$, $k\to\infty$ такие, что

$$V\left(p^{\rho_k}\right) \le K,\ k = 1,2,\ldots \tag{3.11}$$

На функциях I рода (см.(5.15′) п. 5 § 9 для $p\neq 2$ и (5.6′) п. 5 § 9 для $p = 2$) $\varphi^2_{2-\rho_k,1,1}(x)$, для которых

$$\left|\varphi^2_{2-\rho_k,1,1}(x)\right|^2 = \frac{p}{p-1}p^{-\rho_k}\delta\left(|x|_p - p^{\rho_k}\right),$$

$$\left|\tilde{\varphi}^2_{2-\rho_k,1,1}(\xi)\right|^2 = \frac{p}{p-1}p^{\rho_k-2}\delta\left(|\xi|_p - p^{2-\rho_k}\right),$$

квадратичная форма (3.10) принимает значение

$$A(\varphi^2_{2-\rho_k,1,1},\varphi^2_{2-\rho_k,1,1}) =$$

$$= \frac{p}{p-1}p^{\rho_k-2}\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{P}(|\xi|_p)\delta\left(|\xi|_p - p^{2-\rho_k}\right)d\xi\ +$$

$$+\frac{p}{p-1}p^{-\rho_k}\int\limits_{\mathbb{Q}_p} V(|x|_p)\delta\left(|x|_p-p^{\rho_k}\right) = \mathcal{P}\left(p^{2-\rho_k}\right)+V\left(p^{\rho_k}\right)$$

и, следовательно, в силу (3.11) ограничена по k числом

$$\sup_{k\ge 1}\mathcal{P}\left(p^{2-\rho_k}\right)+K.$$

По теореме п. 1 множество функций

$$\left\{\varphi^2_{2-\rho_k,1,1}(x),\ k=1,2,\dots\right\} \tag{3.12}$$

должно быть компактным в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, что несовместимо с ортогональностью этой системы. Полученное противоречие и доказывает, что $V(|x|_p)\to\infty$, $|x|_p\to\infty$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{P}(|\xi|_p)\to\infty$, $|\xi|_p\to\infty$. Предполагая, что это не так, для соответствующей последовательности целых чисел $\rho_k\to\infty$, $k\to\infty$, функции, аналогичные (3.12), выбираются в виде

$$\left\{\varphi^2_{\rho_k,1,1}(x),\ k=1,2,\dots\right\}. \tag{3.13}$$

При $n>1$ доказательство проводится аналогично. В качестве ортонормальных систем функций нужно взять произведения функций (3.12) и (3.13) с различными аргументами. ∎

4. Оператор D^α, $\alpha>0$ в B_r. Вычислим в явном виде все собственные значения и все собственные функции оператора D^α, рассматриваемого в круге $B_r\subset\mathbb{Q}_p$, $r\in\mathbb{Z}$.

По основной теореме п. 3 спектр оператора D^α (его символ есть $|\xi|_p^\alpha$) в круге B_r дискретный, а собственные функции образуют ортонормированный базис в $L^2(B_r)$. В соответствии с принятыми определениями собственными функциями оператора D^α в B_r являются те собственные функции оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$, носители которых содержатся в B_r. Собственные функции оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$ вычислены в п. 5 § 9.

Предварительно убедимся в справедливости следующей леммы.

Лемма. *Пусть функция $f(|x|_p)$, $x\in\mathbb{Q}_p$, такова, что*

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-\gamma\alpha}|f(p^\gamma)|<\infty,\quad \sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-\gamma}|f(p^\gamma)|<\infty$$

при некотором $\alpha>0$. Тогда

$$(D^{\alpha}f)(x) = \frac{p^{\alpha}(p^{\alpha}+p-2)}{p^{\alpha+1}-1}|x|_p^{-\alpha}f(|x|_p) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[|x|_p^{-\alpha-1}\int\limits_{|y|_p<|x|_p} f(|y|_p)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|y|_p>|x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}f(|y|_p)dy\right], \quad x \in \mathbb{Q}_p. \qquad (4.1)$$

В частности, при $f(|x|_p) = \Omega\left(p^{-r}|x|_p\right)$, $r \in \mathbb{Z}$,

$$(D^{\alpha}f)(x) = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)}, \quad x \in B_r; \qquad (4.2)$$

при $f(|x|_p) = \delta\left(|x|_p-p^r\right)$, $r \in \mathbb{Z}$,

$$(D^{\alpha}f)(x) = \frac{p^{\alpha}+p-2}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)}, \quad x \in S_r. \qquad (4.3)$$

■ По определению оператора D^{α} (см. п. 1 § 9) имеем

$$(D^{\alpha}f)(x) = f_{-\alpha}*f(|x|_p) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{f(|y|_p)-f(|x|_p)}{|x-y|^{\alpha+1}}dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[|x|_p^{-\alpha-1}\int\limits_{|y|_p<|x|_p} f(|y|_p)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|y|_p>|x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}f(|y|_p)dy\right] -$$

$$- \frac{f(|x|_p)}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[|x|_p^{-\alpha-1}\int\limits_{|y|_p<|x|_p} dy + \int\limits_{|y|_p>|x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}dy\right]. \qquad (4.4)$$

Но, обозначая $|x|_p = p^N$, имеем

$$- \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[|x|_p^{-\alpha-1}\int\limits_{|y|_p<|x|_p} dy + \int\limits_{|y|_p>|x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[|x|_p^{-\alpha-1}p^{N-1} + \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} p^{-(\alpha+1)\gamma}p^{\gamma}(1-\frac{1}{p})\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[\frac{|x|_p^{-\alpha}}{p} + p^{-\alpha(N+1)}(1-\frac{1}{p})\frac{1}{1-p^{-\alpha}}\right] =$$

$$= |x|_p^{-\alpha}\frac{p^{\alpha}-1}{1-p^{-\alpha-1}}\left[\frac{1}{p} + (1-\frac{1}{p})\frac{p^{-\alpha}}{1-p^{-\alpha}}\right] = |x|_p^{-\alpha}p^{\alpha}\frac{p^{\alpha}+p-2}{p^{\alpha+1}-1},$$

откуда и из (4.4) следует равенство (4.1).

Равенство (4.2) следует проще из (4.4): если $|x|_p \leq p^r$, то

$$(D^{\alpha}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int_{|y|_p>p^r} |y|_p^{-\alpha-1}dy =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\sum_{\gamma=r+1}^{\infty}(1-\frac{1}{p})p^{-(\alpha+1)\gamma}p^{\gamma} =$$

$$= \frac{p^{\alpha}-1}{1-p^{-\alpha-1}}(1-\frac{1}{p})p^{-\alpha(r+1)}\frac{1}{1-p^{-\alpha}} = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)}.$$

Равенство (4.3) следует из (4.1) при $x \in S_r$. ∎

Пусть $p\neq 2$. Собственные функции I рода $\varphi^{1}_{N,j,\varepsilon_1}$ (см. (5.15′) п. 5 § 9) с номерами $l-N \leq r$ имеют носители в B_r, с номерами $l-N > r$ обращаются в нуль в B_r. Собственные функции II рода $\varphi^{1}_{N,j,0}$ (см. (5.15″) п. 5 § 9) с номерами $1-N \leq r$ имеют носители в B_r, с номерами $1-N > r$ обращаются в 1 в B_r. Но по лемме функция $\psi_0(x)\equiv 1$, $x \in B_r$, является собственной функцией оператора D^{α} в B_r, соответствующей собственному значению

$$\lambda_0 = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)}. \tag{4.5}$$

Равенство (4.2) при $\psi_0(x) \equiv 1$ и $x \in B_r$ принимает вид

$$(D^{\alpha}\psi_0)(x) = \lambda_0\psi_0(x).$$

Так как собственные функции $\varphi^{1}_{N,j,\varepsilon_1}$ оператора D^{α} в $\mathbb{Q}_p$ образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, то перечисленные выше собственные функции оператора D^{α} в B_r образуют ортонормированный базис в $L^2(B_r)$. В частности, кратность собственного значения λ_0 равна 1.

Итак, получены следующие собственные значения и ортонормированный базис собственных функций оператора D^α, $\alpha > 0$ в B_r при $p \neq 2$:

$$\lambda_0 = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1} p^{\alpha(1-r)}, \quad \varphi_0(x) = p^{-r/2},$$

кратность 1;

$$\lambda_1 = p^{\alpha(1-r)}, \text{ II рода } \varphi^1_{1-r,j,0}(x), \quad j = 1,2,\ldots,p-1,$$

кратность $p-1$;

$$\lambda_k = p^{\alpha(k-r)}, \text{ I рода } \varphi^1_{k-r,j,\varepsilon_l}(x),$$

$$j = 1,2,\ldots,p-1, \quad l = 2,3,\ldots,k, \quad \varepsilon_l,$$

$$\text{II рода } \varphi^1_{k-r,j,0}(x), \quad j = 1,2,\ldots,p-1,$$

суммарной кратности

$$(p-1)^2+(p-1)^2p+\ldots+(p-1)^2p^{k-2}+p-1 = (p-1)p^{k-1}, \quad k = 2,3,\ldots$$

Пусть $p = 2$. Среди собственных функций I рода $\varphi^1_{N,j,\varepsilon_l}$ (см. (5.6′) п. 5 § 9), носители которых содержатся в B_r, – те, для которых $l+1-N \leq r$; остальные обращаются в нуль в B_r. Среди собственных функций II рода $\varphi^1_{N,j,0}$ (см. (5.6″) п. 5 § 9) – те, для которых $1-N \leq r$ при $j = 0$ и $2-N \leq r$ при $j = 1$. (Заметим, что носитель функции $\varphi^1_{N,1,0}$ содержится в S_{2-N}.) Кроме того, при $1-N > r$ $\varphi^1_{N,0,0}(x) \equiv 1$ в B_r, а при $2-N > r$ $\varphi^1_{N,1,0}(x) \equiv 0$ в B_r. По лемме $\psi_0 \equiv 1$ есть собственная функция оператора D^α в B_r, соответствующая собственному значения λ_0; λ_0 – простое собственное значение.

Итак, получены следующие собственные значения и ортонормальный базис собственных функций оператора D^α в B_r при $p = 2$:

$$\lambda_0 = \frac{2}{2^{\alpha+1}-1}, \quad \varphi_0(x) = 2^{-r/2},$$

кратность 1;

$$\lambda_1 = 2^{\alpha(1-r)}, \text{ II рода } \varphi^1_{1-r,0,0}(x),$$

кратность 1;

$$\lambda_2 = 2^{\alpha(2-r)}, \text{ II рода } \varphi^1_{2-r,j,0}(x), \quad j = 0,1,$$

кратность 2;

$$\lambda_k = 2^{\alpha(k-r)}, \quad \text{I рода } \varphi^1_{k-r,j,\varepsilon_l}(x),$$

$$l = 2,3,\ldots,k-1, \ j = 0,1, \ \varepsilon_l,$$

$$\text{II рода } \varphi^1_{k-r,j,0}(x), \ j = 0,1,$$

суммарной кратности

$$2(1+2+\ldots+2^{k-3})+2 = 2^{k-1}, \ k = 3,4,\ldots .$$

5. Оператор D^α, $\alpha > 0$, в S_r. Как и в случае круга B_r, вычислим в явном виде собственные функции и собственные значения оператора D^α на окружности $S_r \subset \mathbb{Q}_p$, $r \in \mathbb{Z}$.

Пусть $p\neq2$. Среди собственных функций I рода $\varphi^1_{N,j,\varepsilon_l}$ (см. (5.15′) п. 5 § 9), носители которых содержатся в S_r – те, для которых $l-N = r$; остальные обращаются в нуль вне S_r. Среди собственных функций II рода $\varphi^1_{N,j,0}$ (см. (5.15″) п. 5 § 9) таких нет. Их отличные от 0 следы на S_r – это функции

$$1, \ v_j(x) = \chi_p(jp^{r-1}x), \ j = 1,2,\ldots,p-1, \ x \in S_r. \tag{5.1}$$

Функции (5.2) линейно зависимы на S_r, поскольку

$$\sum_{j=1}^{p-1} v_j(x) = \sum_{j=1}^{p-1}\chi_p(jp^{r-1}x) = \sum_{j=1}^{p-1} exp\left(2\pi i\frac{j}{p}x\right) = -1, \ x \in S_r.$$

Оставшиеся функции $\left\{v_j, \ j = 1,2,\ldots,p-1\right\}$ линейно независимы на S_r, поскольку (см. (3.2) п. 3 § 4)

$$(v_j,v_k) = \int\limits_{S_r} \chi_p((j-k)p^{r-1}x)dx = \begin{cases} p^r(1-\frac{1}{p}), & j=k, \\ -p^{r-1}, & j\neq k, \end{cases} \tag{5.2}$$

и поэтому

$$\det\left\|(v_j,v_k)\right\| = p^{(r-1)(p-1)}\begin{vmatrix} p-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & p-1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & \ldots & p-1 \end{vmatrix} = p^{rp-r-1} \neq 0.$$

В качестве базиса функций (5.1) выберем функции

$$\psi_0 = 1, \ \psi_j = \chi_p(jp^{r-1}x)-\chi_p((j+1)p^{r-1}x), \tag{5.3}$$

$$j = 1,2,\dots,p-2.$$

По лемме п. 4 § 10 функция $\psi_0(x) \equiv 1$ – собственная функция оператора D^α, соответствующая собственному значению (см. (4.3))

$$\lambda_0 = \frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)}. \tag{5.4}$$

Функции же $\left\{\psi_j,\quad j = 1,2,\dots,p-2\right\}$ пропорциональны на S_r соответственно функциям

$$\varphi_{1-r,j}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^1_{1-r,j,0}(x) - \varphi^1_{1-r,j+1,0}(x)\right],\ j = 1,2,\dots,p-2 \tag{5.5}$$

(см. (5.16″) п. 5 § 9), и поэтому являются собственными для оператора D^α, соответствующими собственному значению

$$\lambda_1 = p^{\alpha(1-r)}.$$

Резюмируем: при $p \neq 2$ оператор D^α в S_r, $r \in \mathbb{Z}$, имеет следующие собственные значения и нормированный базис собственных функций:

$$\lambda_0 = \frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}p^{\alpha(1-r)},\ \varphi_0(x) = p^{-r/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}, \tag{5.6}$$

кратности 1;

$$\lambda_1 = p^{\alpha(1-r)},\ \varphi_{1-r,j}(x) =$$

$$= \frac{p^{-r/2}}{\sqrt{2}}\left[\chi_p(jp^{r-1}x) - \chi_p((j+1)p^{r-1}x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^1_{1-r,j,0}(x) - \varphi^1_{1-r,j+1,0}(x)\right], \tag{5.7}$$

$$j=1,2,\dots,p-2,$$

кратности $p-2$;

$$\lambda_k = p^{\alpha(k-r)}, \ \varphi^k_{k-r,j,\varepsilon_k}(x), \tag{5.8}$$

$$j = 1,2,\dots,p-1, \ \varepsilon_k,$$

кратности $(p-1)^2 p^{k-2}$, $k = 2,3,\dots$

Перечисленные собственные функции взаимно ортогональны в $L^2(S_r)$, кроме функций $\left\{\varphi_{1-r,j} \ j = 1,2,\dots,p-2\right\}$, для которых в силу (5.3)

$$\left(\varphi_{1-r,j},\varphi_{1-r,k}\right) = \begin{cases} -1/2, & \text{если } j=k+1 \text{ или } k=j+1, \\ 0, & \text{если } j\ne k,\ j\ne k+1,\ k\ne j+1. \end{cases} \tag{5.9}$$

При $p = 2$ собственные значения и ортонормальный базис собственных функций оператора D^α в S_r имеют вид:

$$\lambda_0 = \frac{2^{\alpha(2-r)}}{2^{\alpha+1}-1}, \ \varphi_0(x) = 2^{\frac{1-r}{2}}, \text{ кратности } 1;$$

$$\lambda_1 = 2^{\alpha(2-r)}, \ \varphi^1_{2-r,1,0}(x), \text{ кратности } 1;$$

$$\lambda_k = 2^{\alpha(k+1-r)}, \ \varphi^k_{k-1-r,j,\varepsilon_k}(x), \ j = 0,1,$$

$$\text{кратности } 2^{k-1}, \ k = 2,3,\dots.$$

6. Оператор $D^\alpha+V(|x|_p)$, $\alpha > 0$, **в** $\mathbb{Q}_p$ $(p \ne 2)$. Рассмотрим оператор типа Шредингера $A = D^\alpha+V(|x|_p)$ (см. пример 1 п. 1) в предположениях, что потенциал $V(|x|_p)$ – конечная ограниченная снизу функция и $V(|x|_p) \to \infty$, $|x|_p \to \infty$. Оператор A ограничен снизу и самосопряжен, если в качестве его области определения $\mathcal{D}(A)$ взять множество тех и только тех функций ψ из $L^2(\mathbb{Q}_p)$, для которых $A\psi \in L^2(\mathbb{Q}_p)$. Он удовлетворяет условиям основной теоремы п. 3. В частности, его спектр дискретный. Пусть λ_0, λ_1, λ_2, … – его собственные значения, $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$, φ_0, φ_1, φ_2, … – его собственные функции

$$A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \ \varphi_k \in \mathcal{D}(A), \ k = 0,1,2,\dots,$$

Все собственные функции I рода $\varphi^1_{N,j,\varepsilon_1}$ (см. (5.15′) § 9) являются собственными функциями оператора A, соответствующими собственным значениям

$$\lambda^1_N = p^{\alpha N} + V\left(p^{1-N}\right),\ l = 2,3,\ldots,\ N \in \mathbb{Z}. \qquad (6.1)$$

Кратность λ^1_N не меньше, чем

$$(p-1)^2 \sum_y p^{y-2},$$

где (x,y) - различные решения уравнения

$$p^{\alpha x} + V\left(p^{y-x}\right) = p^{\alpha N} + V\left(p^{1-N}\right),\ y = 2,3,\ldots,\ x \in \mathbb{Z}. \qquad (6.2)$$

Это число конечно по основной теореме п. 3.

Далее, собственные функции II рода (см. (5.16″) п. 5 § 9) и (5.5))

$$\varphi_{N,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^1_{N,j,0}(x) - \varphi^1_{N,j+1,0}(x)\right] =$$

$$= \frac{p^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{2}}\delta\left(|x|_p - p^{1-N}\right)\left[\chi_p(jp^{-N}x) - \chi_p((j+1)p^{-N}x)\right], \qquad (6.3)$$

$$j = 1,2,\ldots p-2$$

являются собственными функциями оператора A, соответствующими собственным значениям

$$\lambda^1_N = p^{\alpha N} + V\left(p^{1-N}\right),\ N \in \mathbb{Z}. \qquad (6.4)$$

Как найти недостающие собственные функции оператора A?

Как следует из результатов п. 5 § 10, подпространство, натянутое на те собственные функции (5.15′) §9 и (6.3), у которых носители содержатся в окружности S_r, $r \in \mathbb{Z}$:

$$\Big\{\varphi^1_{1-r,j,\varepsilon_1},\ N+r = 2,3,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_1;$$

$$\varphi_{1-r,j},\ j = 1,2,\ldots,p-2\Big\}, \qquad (6.5)$$

имеет коразмерность 1 и ортогонально к 1 в $L^2(S_r)$. Другими словами, всякая функция ψ из $L^2(\mathbb{Q}_p)$, ортогональная ко всем собственным функциям (6.5) при всех $r \in \mathbb{Z}$, есть постоянная на каждой окружности S_r, разлагается по ортогональному каноническому базису $\left\{\delta(|x|_p-p^\gamma),\ \gamma\in\mathbb{Z}\right\}$ в $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\psi(|x|_p) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}\psi_\gamma\delta\left(|x|_p-p^\gamma\right),\ \psi_\gamma = \psi(p^\gamma). \tag{6.6}$$

Множество функций ψ из $L^2(\mathbb{Q}_p)$ вида (6.6) образует гильбертово пространство $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ - (замкнутое) подпространство $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Оно изоморфно гильбертову пространству l_0^2 последовательностей $\Psi = \left\{\psi_\gamma,\ \gamma\in\mathbb{Z}\right\}$ с нормой

$$\|\Psi\|_0^2 = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}p^\gamma|\psi_\gamma|^2, \tag{6.7}$$

причем

$$\|\psi\|^2 = (1-\frac{1}{p})\|\Psi\|_0^2.$$

7. Оператор $D^\alpha+V(|x|_p)$, $\alpha>0$, **в** $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$, $p\neq 2$. Предварительно докажем утверждение

Пространство $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ инвариантно относительно операции преобразования Фурье.

■ Это вытекает из формулы (3.3) §4: преобразование Фурье функций из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, зависящих только от $|x|_p$ (плотного в $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ множества) есть функция такого же класса. Так как подпространство $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ замкнуто в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, а операция преобразования Фурье непрерывна в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ (см. п. 4 § 7), это утверждение справедливо и для всех функций из $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$. ■

Из доказанного утверждения следует, что оператор A преобразует область $\mathcal{D}(A)\cap L_0^2(\mathbb{Q}_p)$, где $\mathcal{D}(A)$ - область определения оператора A (см. п. 6), в $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ (поскольку его символ $|\xi|_p^\alpha+V(|x|_p)$ зависит лишь от $|\xi|_p$ и $|x|_p$).

Обозначим через A_0 сужение оператора A на подпространство $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$. Его область определения есть $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)\cap L_0^2(\mathbb{Q}_p)$. По лемме п. 4 оператор A_0 на функциях ψ из $\mathcal{D}(A_0)$ имеет вид

$$(A_0\psi)(|x|_p) = (K\psi)(|x|_p) + V(|x|_p)\psi(|x|_p), \tag{7.1}$$

где K - положительный интегральный оператор,

$$(K\psi)(|x|_p) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varkappa\Big(|x|_p, |y|_p\Big)\psi(|y|_p)\,dy, \tag{7.2}$$

с симметричным вещественным ядром

$$\varkappa(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} t^{-\alpha-1}, & \tau<t, \\[2ex] \dfrac{p^{\alpha}+p-2}{(p-1)(1-p^{-\alpha-1})} t^{-\alpha-1}, & \tau=t, \\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \tau^{-\alpha-1}, & \tau>t. \end{cases} \tag{7.3}$$

В терминах последовательностей $\Psi = \Big\{\psi_\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}\Big\}$ оператор A_0 принимает вид

$$(A_0\Psi)_\gamma = \sum_{\gamma'=-\infty}^{\infty} \varkappa_{\gamma\gamma'}\psi_{\gamma'} + V(p^\gamma)\psi_\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}, \tag{7.4}$$

$$\varkappa_{\gamma\gamma'} = \begin{cases} \dfrac{p-1}{p\Gamma_p(-\alpha)} p^{-\gamma(\alpha+1)+\gamma'}, & \gamma'\le\gamma-1, \\[2ex] \dfrac{p^{\alpha}(p^{\alpha}+p-2)}{p^{\alpha+1}-1} p^{-\gamma\alpha}, & \gamma'=\gamma, \\[2ex] \dfrac{p-1}{p\Gamma_p(-\alpha)} p^{-\alpha\gamma'}, & \gamma'\ge\gamma+1. \end{cases} \tag{7.5}$$

Матрица $\varkappa_{\gamma\gamma'}$, $\gamma,\gamma' \in \mathbb{Z}$, симметризуема.

Наша задача - исследовать спектральные свойства оператора A_0.

Оператор A_0 - ограниченный снизу и симметричный в $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A) \cap L_0^2(\mathbb{Q}_p)$. Он удовлетворяет условиям теоремы п. 1 с $H = L_0^2(\mathbb{Q}_p)$. В частности, его спектр - дискретный, т.е. состоит из собственных значений $\Big\{\mu_k,\ k = 0,1,\ldots\Big\}$:

$$\mu_0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots,\ \mu_k \to \infty,\ k \to \infty,$$

каждое μ_k конечной кратности n_k; соответствующие собственные функции $\psi_k(|x|_p)$,

$$A_0\psi_k = \mu_k\psi_k,\ \psi_k \in \mathcal{D}(A_0),\ k = 0,1,\ldots, \tag{7.6}$$

образуют ортонормированный базис в $L_0^2(\mathbb{Q}_p)$.

8. Наименьшее собственное значение. Здесь мы докажем, что *наименьшее собственное значение* λ_0 *оператора типа Шредингера*

$$A = D^{\alpha} + V\left(|x|_p\right),\ \alpha > 0,$$

простое, удовлетворяет оценкам

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{Z}} V(p^{\gamma}) < \lambda_0 <$$

$$< \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}}(1 - \tfrac{1}{p})\left[\frac{p^{-\alpha\gamma}}{1-p^{-\alpha-1}} + p^{-\gamma}\sum_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} V(p^{\gamma'})p^{\gamma'}\right], \tag{8.1}$$

$\lambda_0 = \mu_0$, *и ему соответствует* (*единственная*) *положительная собственная функция* $\psi_0(|x|_p)$ *из* $\mathcal{D}(A_0)$.

■ Для наименьшего собственного значения λ_0 оператора A справедлив вариационный принцип (см. пп. 1, 3)

$$\lambda_0 = \inf_{\psi\in Q(A)} \frac{(K\psi,\psi)+(V\psi,\psi)}{\|\psi\|^2} = (A\varphi_0,\varphi_0) =$$

$$= (K\varphi_0,\varphi_0) + (V\varphi_0,\varphi_0), \tag{8.2}$$

причем ядро $\mathcal{K}\left(|x|_p, |y|_p\right)$ интегрального оператора K обладает свойством: $\mathcal{K}(t,\tau) < 0$ при $t\neq\tau$ и $\mathcal{K}(t,t) > 0$ (см. (7.5)); в (8.2) $\varphi_0(x)$ - любая собственная функция оператора A, соответствующая λ_0. Без ограничения общности можно считать φ_0 вещественной.

Докажем сначала, что $\varphi_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{Q}_p$.

■ Пусть, напротив, существуют ограниченные окрестности $U(x')$ и $V(x'')$ точек x' и x'' такие, что $\varphi_0(x) > 0$, $x \in U(x')$ и $\varphi_0(x) < 0$, $x \in V(x'')$, так что

$$|\varphi_0(x)| = \varphi_0(x),\ x \in U(x'),\ \text{и}\ |\varphi_0(x)| > \varphi_0(x),\ x \in V(x'')$$

(и всегда $|\varphi_0(x)| \geq \varphi_0(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$).

Введем последовательность функций

$$\left\{\psi_N(x) = \varphi_0(x)\left[\Omega\left(p^{-N}|x|_p\right) - \Omega\left(p^N|x|_p\right)\right],\ N \to +\infty\right\}$$

из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathcal{D}(A)$ с носителями в $B_N \backslash B_{-N}$, так что $\psi_N \to \varphi_0$, $N \to \infty$ в L^2. Отсюда и из замкнутости квадратичной формы $A(\psi,\psi)$ (см. п. 1) и (8.2) следует

$$\inf_N \frac{A(\psi_N,\psi_N)}{\|\psi_N\|^2} = \inf_N \frac{(A\psi_N,\psi_N)}{\|\psi_N\|^2} = (A\varphi_0,\varphi_0) = \lambda_0. \qquad (8.3)$$

Далее, при достаточно большом N $U(x') \cup V(x'') \subset B_N \backslash B_{-N}$ и, таким образом,

$$\int\limits_{\substack{\mathbb{Q}_p^2 \\ |x|_p \neq |y|_p}} \mathcal{K}\left(|x|_p,|y|_p\right)\left(\psi_N(x)\psi_N(y) - |\psi_N(x)||\psi_N(y)|\right)dxdy \geq \eta, \qquad (8.4)$$

где число $\eta > 0$, равное

$$\eta = -4\int\limits_{U(x')}\int\limits_{V(x'')} \mathcal{K}\left(|x|_p,|y|_p\right)\varphi_0(x)|\varphi_0(y)|dxdy.$$

Из (8.4) выводим

$$(A|\psi_N|,|\psi_N|) = \int\limits_{\substack{\mathbb{Q}_p^2 \\ |x|_p \neq |y|_p}} \mathcal{K}\left(|x|_p,|y|_p\right)|\psi_N(x)||\psi_N(y)|dxdy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}\left(|x|_p,|x|_p\right)|\psi_N(x)|^2dx + \int\limits_{\mathbb{Q}_p} V\left(|x|_p\right)|\psi_N(x)|^2dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\substack{\mathbb{Q}_p^2 \\ |x|_p \neq |y|_p}} \mathcal{K}\left(|x|_p,|y|_p\right)\psi_N(x)\psi_N(y)dxdy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}\left(|x|_p, |x|_p\right)\psi_N(x)^2 dx + \int\limits_{\mathbb{Q}_p} V\left(|x|_p\right)\psi_N(x)^2 dx - \eta =$$

$$= (A\psi_N, \psi_N) - \eta.$$

Отсюда, учитывая, что $\||\psi_N|\| = \|\psi_N\|$, выводим неравенство

$$\frac{(A|\psi_N|, |\psi_N|)}{\||\psi_N|\|^2} \le \frac{(A\psi_N, \psi_N) - \eta}{\|\psi_N\|^2}, \quad N \to \infty,$$

которое в силу (8.3) противоречит вариационному принципу (8.2). ■

Аналогично доказывается, что любая собственная функция $\psi_0(|x|_p)$ оператора A_0, соответствующая наименьшему собственному значению μ_0, неотрицательна.

Докажем, что $\psi_0(|x|_p) > 0$, $x \in \mathbb{Q}_p$.

■ Пусть, напротив, существует такое $\gamma \in \mathbb{Z}$, что $\psi_0(p^\gamma) = 0$. Тогда, интегрируя уравнение

$$A_0\psi_0 \equiv K\psi_0 + V\psi_0 = \mu_0\psi_0$$

по окружности S_γ и обозначая $\psi = \delta\left(|x|_p - p^\gamma\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, получим противоречие

$$\left(A_0\psi_0, \psi\right) = \left(\psi_0, A_0\psi\right) = \left(\psi_0, K\psi\right) + \left(\psi_0, V\psi\right) = \mu_0(\psi_0, \psi) = 0,$$

поскольку

$$\left(\psi_0, V\psi\right) = 0, \quad \left(\psi_0, K\psi\right) =$$

$$= (1 - \tfrac{1}{p})p^\gamma \int\limits_{|y|_p \ne p^\gamma} \mathcal{K}\left(p^\gamma, |y|_p\right)\psi_0\left(|y|_p\right) dy < 0. \quad ■$$

Отсюда следует, что μ_0 - *простое собственное значение*.

■ Если бы нашлась другая линейно независимая собственная функция ψ, соответствующая μ_0, то по доказанному $\psi_0(|x|_p) > 0$, $x \in \mathbb{Q}_p$, и можно построить их линейную комбинацию, принимающую как положительные, так и отрицательные значения, что противоречиво. ■

Из вариационного принципа (8.2) с очевидностью следует, что $\lambda_0 \le \mu_0$. Но $\lambda_0 < \mu_0$ быть не может, иначе собственные функции $\varphi_0(x) \ge 0$ и $\psi_0(|x|_p) > 0$ должны быть ортогональными в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, что невозможно. Следовательно, $\lambda_0 = \mu_0$ и $\varphi_0(x) = \psi_0(|x|_p)$ фактически зависит от $|x|_p$. ■

Оценки (8.1) следуют из вариационного принципа (8.2). Нижняя оценка очевидна

$$\lambda_0 = (K\psi_0,\psi_0) + (V\psi_0,\psi_0) >$$

$$> \int_{\mathbb{Q}_p} V(|x|_p)\psi_0^2(|x|_p)dx \ge \inf_{x\in\mathbb{Q}_p} V(|x|_p).$$

Для получения верхней оценки (8.1) подставим в (8.2)

$$\psi = \Delta_\gamma(x) = \Omega\left(p^{-\gamma}|x|_p\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p).$$

Поскольку

$$\|\Delta_\gamma\|^2 = p^\gamma,\ \tilde{\Delta}_\gamma(\xi) = p^\gamma\Omega\left(p^\gamma|\xi|_p\right)$$

(см. п. 2 § 7), а также $\varphi_0 \ne \Delta_\gamma$ и λ_0 - простое, то

$$\lambda_0 < \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}} p^{-\gamma}\left[(D^\alpha\Delta_\gamma,\Delta_\gamma) + (V\Delta_\gamma,\Delta_\gamma)\right] =$$

$$= \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}} p^{-\gamma}\left[(|\xi|_p^\alpha\tilde{\Delta}_\gamma,\tilde{\Delta}_\gamma) + \int_{B_\gamma} V(|x|_p)dx\right] =$$

$$= \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}}\left[p^\gamma\int_{B_{-\gamma}} |\xi|_p^\alpha d\xi + (1-\frac{1}{p})p^{-\gamma}\sum_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} V(p^{\gamma'})p^{\gamma'}\right] =$$

$$= \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}}(1-\frac{1}{p})\left[p^{-\gamma}\sum_{\gamma'=-\infty}^{-\gamma} p^{\alpha\gamma'+\gamma'} + p^{-\gamma}\sum_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} V(p^{\gamma'})p^{\gamma'}\right]. \ ■$$

9. Оператор $D^\alpha + V(|x|_p)$, $\alpha > 0$, в $\mathbb{Q}_p$ $(p \ne 2)$ (продолжение). Подытожим результаты пп. 6 - 8 в виде следующей теоремы.

Теорема. *Спектр оператора $D^\alpha + V(|x|_p)$ дискретный и состоит из следующих собственных значений и им соответствуют следующие (нормированные) собственые функции, образующие базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$:*

Наименьшего собственного значения λ_0 *кратности* 1, *собственная функция* $\psi_0(|x|_p) > 0$, $x \in \mathbb{Q}_p$.

Собственных значений μ_k, $k = 1,2,\ldots$, $\mu_k \to \infty$, $k \to \infty$, *кратности*

$$n_k + (p-2)\omega_k + (p-1)^2 \sum_{i=1}^{b_k} p^{l_i^k - 2} \tag{9.1}$$

где ω_k – *число решений* $\left\{N_i^k,\ i = 1,2,\ldots,\omega_k\right\}$ *уравнения*

$$\mu_k = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}),\ N \in \mathbb{Z}, \tag{9.2}$$

$\left\{(N_i^k, l_i^k),\ i = 1,2,\ldots,b_k\right\}$ – *все решения уравнения*

$$\mu_k = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}),\ N \in \mathbb{Z},\ l = 2,3,\ldots, \tag{9.3}$$

собственные функции суть:

$$\psi_{k+i}(|x|_p),\ i = 0,1,\ldots,n_k-1,$$

$$\varphi_{N,j}(x),\ N = N_i^k,\ j = 1,2,\ldots,p-2,\ i = 1,2,\ldots,\omega_k,$$

$$\varphi^l_{N,j,\varepsilon_1}(x),\ N = N_i^k,\ l = l_i^k,$$

$$j = 1,2,\ldots,p-1,\ i = 1,2,\ldots,b_k.$$

Собственных значений

$$\lambda_N^1 = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}) \neq \mu_k,\ N \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.4}$$

кратности

$$(p-2)\eta_N + (p-1)^2 \sum_{i=1}^{c_N} p^{y_i^N - 2}, \tag{9.5}$$

где η_N – *число решений* $\left\{x_i^N,\ i = 1,2,\ldots,\eta_N\right\}$ *уравнения*

$$\lambda_N^1 = p^{\alpha x} + V(p^{1-x}),\ x \in \mathbb{Z}, \tag{9.6}$$

$\left\{(x_i^N, y_i^N),\ i = 1,2,\ldots,c_N\right\}$ – *все решения уравнения*

$$\lambda_N^l = p^{\alpha x} + V(p^{l-x}), \; x \in \mathbb{Z}, \; l = 2,3,\ldots; \qquad (9.7)$$

собственные функции суть:

$$\varphi_{N,j}(x), \; N = x_i^N, \; j = 1,2,\ldots,p-2, \; i = 1,\ldots,\eta_N,$$

$$\varphi^l_{N,j,\varepsilon_1}(x), \; N = x_i^N, \; l = y_i^N, \; j = 1,2,\ldots,p-1, \; i = 1,\ldots,c_N.$$

Собственных значений

$$\lambda_N^l = p^{\alpha N} + V(p^{l-N}) \neq \mu_k, \quad \neq \lambda^l_{N'}, \qquad (9.8)$$

$$N \in \mathbb{Z}, \; l = 2,3,\ldots, \; k \in \mathbb{Z}_+, \; N' \in \mathbb{Z},$$

кратности

$$(p-1)^2 \sum_{i=1}^{d_{N,l}} p^{y_i^{N,l}-2}, \qquad (9.9)$$

где $\left\{(x_i^{N,l}, y_i^{N,l}), \; i = 1,2,\ldots,d_{N,l}\right\}$ *– все решения уравнения*

$$\lambda_N^l = p^{\alpha x} + V(p^{y-x}), \; x \in \mathbb{Z}, \; y = 2,3,\ldots, \qquad (9.10)$$

собственные функции суть:

$$\varphi^l_{N,j,\varepsilon_1}(x), \; N = x_i^{N,l}, \; l = y_i^{N,l},$$

$$j = 1,2,\ldots,p-1, \; i = 1,\ldots,d_{N,l}.$$

Замечание 1. Перечисленные в теореме собственные функции взаимно ортогональны, кроме функций

$$\left\{\varphi_{N,j}, \; j = 1,2,\ldots,p-2\right\},$$

для которых имеют место соотношения (5.8) при каждом $N \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2. Собственная функция $\psi_0(|x|_p) > 0$, соответствующая наименьшему собственному значению λ_0, определяет *основное* состояние физической системы («вакуум»); «вакуум» – единственный. Собственные функции, отвечающие собственным значениям кратности >1, определяют «вырожденные» возбужденные состояния.

10. Пример потенциала $V(|x|_p) = |x|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, $p \neq 2$. Для потенциала $|x|_p^\alpha$ результаты п. 9 допускают уточнения. Оценки (8.1) принимают вид

$$0 < \lambda_0 < \frac{2(p-1)p^\alpha}{p^{\alpha+1}-1} < 2. \tag{10.1}$$

■ $$\inf_{\gamma\in\mathbb{Z}}(1-\frac{1}{p})\left[\frac{p^{-\alpha\gamma}}{1-p^{-\alpha-1}} + p^{-\gamma}\sum_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} p^{\gamma'(\alpha+1)}\right] =$$

$$= \inf_{\gamma\in\mathbb{Z}}(1-\frac{1}{p})\frac{p^{-\alpha\gamma}+p^{\alpha\gamma}}{1-p^{-\alpha-1}} = \frac{2(1-p^{-1})}{1-p^{-\alpha-1}}.$$ ■

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Все решения диофантова уравнения*

$$p^{\alpha N} + p^{\alpha M} = p^{\alpha x} + p^{\alpha y},\ N,M,x,y \in \mathbb{Z},\ \alpha \geq \frac{\ln 2}{\ln p},$$

имеют вид $N = x$, $M = y$ *или* $N = y$, $M = x$.

■ Без ограничения общности можно считать, что

$$N = \max(N,M,x,y).$$

Если предположить, что $N \neq x$ и $N \neq y$, тогда $x+1 \leq N$, $y+1 \leq N$ и, следовательно,

$$2p^{\alpha(N-1)} = p^{\alpha(N-1)} + p^{\alpha(N-1)} \geq$$

$$\geq p^{\alpha x} + p^{\alpha y} = p^{\alpha N} + p^{\alpha M} > p^{\alpha N},$$

что невозможно для $\alpha \geq \dfrac{\ln 2}{\ln p}$. Следовательно, либо $N = x$ (и тогда $M = y$), либо $N = y$ (и тогда $M = x$). ■

Из доказанной леммы следует, что уравнение

$$\lambda_N^l = p^{\alpha x} + p^{\alpha(y-x)},\ l,y \in \mathbb{Z}_+,\ N,x \in \mathbb{Z}, \tag{10.2}$$

имеет всего два решения $x = N$, $y = l$ и $x = l-N$, $y = l$, если $l \neq 2N$, и одно решение $x = N$, $y = l$, если $l = 2N$. Отсюда следует, что в теореме п. 9 возможны следующие случаи. Если $\alpha \geq \dfrac{\ln 2}{\ln p}$, то ω_k может принимать лишь значения 0 и 2, в последнем случае для решений N_1^k и N_2^k уравнения (9.2) справедливо соотношение $N_2^k = 1-N_1^k$; b_k может принимать лишь значения 0 и 1, если $l = 2N$, и 0 и 2, если $l \neq 2N$; в последнем случае решения уравнения (9.3) имеют вид (N_1^k, l_1^k), $(l_1^k - N_1^k, l_1^k)$; $\eta_k = 2$, и для решений x_1^N и x_2^N уравнения (9.6) справедливо соотношение $x_2^N = 1 - x_1^N$, $c_N = 0$; $d_{N,1}$ может принимать лишь значение 1, если $l = 2N$, и значение 2, если $l \neq 2N$, в последнем случае решения уравнения (9.10) имеют вид $(x_1^{N,1}, y_1^{N,1})$, $(y_1^{N,1} - x_1^{N,1}, y_1^{N,1})$.

В заключение отметим: *если φ – собственная функция оператора $D^\alpha + |x|_p^\alpha$, соответствующая собственному значению λ, то ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}$ – также собственная функция, соответствующая тому же собственному значению λ, так что*

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{10.3}$$

где $\{\varphi_k, \ k = 1,2,\dots,n\}$ – собственные функции, соответствующие собственному значению λ, n – кратность λ и c_k – некоторые постоянные.

■ Уравнение

$$D^\alpha \varphi + |x|_p^\alpha \varphi = \lambda \varphi$$

при преобразовании Фурье переходит в себя (см. п. 4 § 9):

$$|\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi} + D^\alpha \tilde{\varphi} = \lambda \tilde{\varphi}. \ ■$$

Замечание. Для собственных функций I рода $\varphi^1_{N,j,\varepsilon}(x)$ (см. (5.16′) §9.5) формула (10.3) упрощается, в силу (5.12) п. 5 § 9:

$$\tilde{\varphi}^1_{N,j,\varepsilon_1}(x) = \varphi^1_{1-N,j',\varepsilon_1'}(x), \quad \varepsilon' = -\frac{1}{4\varepsilon}, \quad j' \equiv -2\varepsilon_0 j \pmod{p},$$

т.е. собственные функции серии $\mathfrak{h}_N^l$ $(l \geq 2)$ при преобразовании Фурье переходят в собственные Функции серии $\mathfrak{h}_{1-N}^l$ и принадлежат одному и тому же собственному значению λ_N^l (ср. п. 6 § 9).

11. Оператор $D^\alpha + V(|x|_p)$, $\alpha > 0$, вне круга ($p \neq 2$). Обозначим через $G_s = \mathbb{Q}_p \setminus B_{s-1} = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \geq p^s\}$ внешность круга B_{s-1}, $s \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим оператор $A = D^\alpha + V(|x|_p)$ в множестве G_s в предположениях п. 6 о потенциале $V(|x|_p)$.

Как и в п. 6 заключаем, что базис собственных функций оператора A в $L^2(G_s)$ состоит из тех собственных функций $\varphi^l_{N,j,\varepsilon_l}$ $(l \geq 2)$ и $\varphi_{N,j}$, у которых носители содержатся в G_s, а также из собственных функций $\psi_k(|x|_p)$, $k = 0,1,\ldots$, оператора A_0 в G_s,

$$A_0\psi_k = D^\alpha\psi_k + V(|x|_p)\psi_k = \mu_k\psi_k, \tag{11.1}$$

$$\psi_k \in \mathcal{D}(A_0) \subset L^2_0(G_s),$$

соответствующих собственным значениям μ_k.

Попытаемся найти в явном виде

$$\left\{\mu_k,\ \psi_k(|x|_p),\ k = 0,1,\ldots\right\}.$$

Предварительно отметим следующее равенство, вытекающее из леммы п. 4 (см. также п. 7)

$$D^\alpha\delta(|x|_p-p^r) =$$

$$= \sum_{-\infty<\gamma<\infty} K_{r\gamma}\delta(|x|_p-p^\gamma),\ x \in \mathbb{Q}_p,\ r \in \mathbb{Z}\ (\alpha > 0), \tag{11.2}$$

где

$$K_{r\gamma} = \begin{cases} -\rho p^{r-(1+\alpha)\gamma}, & r<\gamma, \\ \sigma p^{-\alpha r}, & r=\gamma, \\ -\rho p^{-\alpha r}, & r>\gamma, \end{cases} \tag{11.3}$$

$$\sigma = \frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}p^\alpha,\ \rho = -\frac{p-1}{p\Gamma_p(-\alpha)} =$$

$$= \frac{(p-1)(p^\alpha-1)}{p(1-p^{-\alpha-1})},\ \sigma + \rho = p^\alpha. \tag{11.4}$$

Пусть $\psi(|x|_p)$ – собственная функция оператора A_0 в G_s – соответствует собственному значению μ и удовлетворяет условию $\psi(p^s) \neq 0$. Будем искать ее в виде формального ряда по ортогональному каноническому базису

$$\left\{\delta(|x|_p - p^\gamma),\ \gamma = s, s+1, \ldots\right\}$$

в $L_0^2(G_s)$:

$$\psi(|x|_p) = \sum_{s \le r < \infty} d_r \delta(|x|_p - p^r),\ d_s \neq 0. \qquad (11.5)$$

Тогда в силу (11.2) и (11.4) будем иметь при $x \in G_s$

$$D^\alpha \psi(|x|_p) = \sum_{s \le r < \infty} d_r D^\alpha \delta(|x|_p - p^r) =$$

$$= \sum_{s \le r < \infty} d_r \sum_{-\infty < \gamma < \infty} \varkappa_{r\gamma} \delta(|x|_p - p^\gamma) =$$

$$= \sum_{s \le r < \infty} \delta(|x|_p - p^\gamma) \sum_{-\infty < \gamma < \infty} \varkappa_{r\gamma} d_r =$$

$$= \delta(|x|_p - p^s) \sum_{s \le r < \infty} C_s^r d_r + \sum_{s+1 \le \gamma < \infty} \delta(|x|_p - p^\gamma) \sum_{s \le r < \infty} C_\gamma^r d_r =$$

$$= \delta(|x|_p - p^s) \Big(\varkappa_{ss} d_s + \sum_{s+1 \le r < \infty} \varkappa_{rs} d_r\Big) +$$

$$+ \sum_{s+1 \le \gamma < \infty} \delta(|x|_p - p^\gamma) \Big(\sum_{s \le r \le \gamma - 1} \varkappa_{r\gamma} d_r + \varkappa_{\gamma\gamma} d_\gamma + \sum_{\gamma+1 \le r < \infty} \varkappa_{r\gamma} d_r\Big) =$$

$$\delta(|x|_p - p^s) \Big((\sigma + \rho) p^{-\alpha s} d_s - \rho \sum_{s \le r < \infty} p^{-\alpha r} d_r \Big) +$$

$$+ \sum_{s+1 \le \gamma < \infty} \delta(|x|_p - p^\gamma) \Big(-\rho \sum_{s \le r \le \gamma - 1} p^{r - (1+\alpha)\gamma} d_r +$$

$$+ \sigma p^{-\alpha\gamma} d_\gamma - \rho \sum_{\gamma+1 \le r < \infty} p^{-\alpha r} d_r \Big). \qquad (11.6)$$

Обозначим

$$\sum_{s \le r < \infty} p^{-\alpha r} d_r = \kappa d_s. \qquad (11.7)$$

Тогда равенство (11.6) с учетом (11.3) примет вид

$$D^{\alpha}\psi(|x|_p) = \delta(|x|_p-p^s)\left(p^{(1-s)\alpha} - \rho\kappa\right)d_s +$$

$$+ \sum_{s+1\le\gamma<\infty} \delta(|x|_p-p^{\gamma})\left(-\rho\kappa d_s + p^{(1-\gamma)\alpha}d_{\gamma} +\right.$$

$$\left. + \rho \sum_{s\le r\le\gamma-1} C_{\gamma,r}p^{-\alpha r}d_r\right), \qquad (11.8)$$

где обозначено

$$C_{\gamma,r} = 1 - p^{(1+\alpha)(r-\gamma)}. \qquad (11.9)$$

Подставляя выражения (11.8) и (11.5) в уравнение (11.1), при $|x|_p \ge p^s$ получим

$$\delta(|x|_p-p^s)\left(p^{(1-s)\alpha} - \rho\kappa\right)d_s +$$

$$+ \sum_{s+1\le r<\infty} \delta(|x|_p-p^r)\left(-\rho\kappa d_s + p^{(1-r)\alpha}d_r +\right.$$

$$\left. + \rho \sum_{s\le\gamma\le r-1} C_{r,\gamma}p^{-\alpha\gamma}d_{\gamma}\right) +$$

$$+ \sum_{s\le r<\infty} d_r V(p^r)\delta(|x|_p-p^r) = \mu \sum_{s\le r<\infty} d_r\delta(|x|_p-p^r),$$

т.е.

$$p^{(1-s)\alpha} - \rho\kappa + V(p^r) = \mu, \qquad (11.10)$$

$$-\rho\kappa d_s + p^{(1-r)\alpha}d_r + \rho \sum_{s\le\gamma\le r-1} C_{r,\gamma}p^{-\alpha\gamma}d_{\gamma} +$$

$$+ V(p^r)d_r = \mu d_r, \; r = s+1, \; s+2, \; \dots \qquad (11.11)$$

Формула (11.11) определяет рекуррентную формулу для определения коэффициентов d_r:

$$d_r = \frac{-\rho\kappa d_s + \rho \sum_{s\le\gamma\le r-1} C_{r,\gamma}p^{-\alpha\gamma}d_{\gamma}}{\mu - p^{(1-r)\alpha} - V(p^r)}, \qquad (11.12)$$

$$d_s = 1, \; r = s+1, \; s+2, \; \dots$$

при условиях (см. обозначение (6.4))

$$\mu \neq p^{(1-r)\alpha}+V(p^r) = \lambda^1_{1-r}, \ r = s+1, \ s+2, \ \ldots \qquad (11.13)$$

С помощью равенства (11.10) исключим из равенств (11.12) и (11.7) неизвестную величину

$$\kappa = \frac{1}{\rho}\left(\lambda^1_{1-s} - \mu\right)$$

и в результате получим рекуррентное соотношение

$$d_r = \frac{\mu - \lambda^1_{1-s} + \rho \sum\limits_{s\le\gamma\le r-1} C_{r,\gamma}p^{-\alpha\gamma}d_\gamma}{\mu - \lambda^1_{1-r}}, \qquad (11.14)$$

$$d_s = 1, \ r = s+1, \ s+2, \ \ldots,$$

и трансцендентное уравнение для определения неизвестных собственных значений $\mu = \mu_k$,

$$\sum_{s+1\le r<\infty} p^{-\alpha r}d_r(\mu) = \frac{1}{\rho}\left(\lambda^1_{1-s} - \mu\right) - p^{-\alpha s}, \ d_r(\mu) = d_r, \qquad (11.15)$$

при условиях (11.13).

Формула (11.8) принимает вид

$$D^\alpha\psi(|x|_p) = \sum_{s\le r<\infty} d'_r\delta(|x|_p-p^r), \qquad (11.16)$$

где

$$d'_s = \left[\mu - V(p^s)\right]d_s,$$

$$d'_r = p^{(1-r)\alpha}d_r - \rho\sum_{r\le\gamma<\infty} p^{-\alpha\gamma}d_\gamma -$$

$$- \rho p^{-(1+\alpha)r} \sum_{s\le\gamma\le r-1} p^\gamma d_\gamma. \qquad (11.17)$$

Приведенные рассуждения носят формальный характер, поскольку сходимость рядов (11.5), (11.15) и (11.16) здесь не рассматривалась. Подытожим наши результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть собственное значение μ оператора A_0 в G_s удовлетворяет условиям* (11.13) *и соответствующая ему* *собственная функция $\psi(|x|_p)$ удовлетворяет условию $\psi(p^s) \neq \neq 0$. Тогда $\psi(|x|_p)$ представляется рядом (11.5) в G_s, причем коэффициенты $d_s = d_s(\mu)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (11.14) и μ удовлетворяет трансцендентному уравнению (11.15). Обратно, всякое (вещественное) решение μ уравнения (11.15), удовлетворяющее условиям (11.13), является собственным значением оператора A_0 в G_s, а функция $\psi(|x|_p)$, построенная по формулам (11.5) и (11.14), является соответствующей собственной функцией и удовлетворяет условию $\psi(p^s) \neq 0$.*

12. Обоснование метода. Исследуем сходимость рядов (11.5), (11.15) и (11.16). Для этого оценим коэффициенты d_r при $r \to \infty$. Из формул (11.9) и (11.13) следуют оценки

$$1-p^{-\alpha-1} \le C_{r,\gamma} < 1, \quad s \le \gamma \le r-1,$$

$$\lambda^1_{1-r} \sim V(p^r), \quad r \to +\infty. \tag{12.1}$$

Отсюда и из (11.14) (при фиксированном μ) вытекает рекуррентная оценка

$$|d_r| \le \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{1-r}|}\Big(|\mu-\lambda^1_{1-s}| + $$

$$+ \rho \sum_{s\le\gamma\le r-1} p^{-\alpha\gamma}|d_\gamma|, \quad d_s = 1, \quad r \ge s+1. \tag{12.2}$$

Выберем целое число $s_0 \ge s$ таким, чтобы было

$$\rho \sum_{s_0\le\gamma<\infty} \frac{p^{-\alpha\gamma}}{|\mu-\lambda^1_{1-\gamma}|} = q < 1. \tag{12.3}$$

(Ряд (12.3) сходится, так как $\lambda^1_{1-\gamma} \sim V(p^\gamma) \to +\infty$, $\gamma \to +\infty$.) И перепишем рекуррентное неравенство (12.2) в виде

$$|d_r| \le \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{1-r}|}\Big(C + \rho \sum_{s_0\le\gamma\le r-1} p^{-\alpha\gamma}|d_\gamma|\Big), \quad r \ge s_0+1, \tag{12.4}$$

где обозначено

$$C = |\mu-\lambda^1_{1-s}| + \rho \sum_{s\le\gamma\le s_0-1} p^{-\alpha\gamma}|d_\gamma|.$$

Вводя новую последовательность

$$T_r = |d_r(\mu-\lambda^1_{1-r})|, \ r = s_0, \ s_0+1, \ \ldots, \tag{12.5}$$

перепишем рекуррентное неравенство (12.4) в виде

$$T_r \le C + \rho \sum_{s_0 \le \gamma \le r-1} p^{-\alpha\gamma} \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{1-\gamma}|} T_\gamma,$$

$$T_{s_0} = |d_{s_0}(\mu-\lambda^1_{1-s_0}|, \ r \ge s_0+1. \tag{12.6}$$

Отсюда выводим оценку

$$T_r \le \frac{M_1}{1-q}, \ r \ge s_0, \text{ где } M_1 = \max\left(C, T_{s_0}\right). \tag{12.7}$$

■ Неравенство (12.7) докажем методом математической индукции по r. Это неравенство верно при $r = s_0$. Считая его верным для $s_0+1, \ldots, r$, докажем его для $r+1$. Из (12.6) с учетом (12.3) имеем

$$T_{r+1} \le C + \rho \sum_{s_0 \le \gamma \le r} p^{-\alpha\gamma} \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{1-\gamma}|} \frac{M_1}{1-q} \le M_1\left(1 + \frac{q}{1-q}\right) = \frac{M_1}{1-q}. \ ■$$

Из оценки (12.7) и в силу (12.5) и (12.1) следует оценка (при некотором M)

$$|d_r| \le M \frac{1}{|V(p^r)|}, \ r \ge s. \tag{12.8}$$

Из полученной оценки следует, что ряд (11.15) сходится.

Теперь предположим, что потенциал $V(|x|_p)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{Q}_p} V^{-2}(|x|_p)dx = (1 - \tfrac{1}{p}) \sum_{s \le r < \infty} p^r \frac{1}{V^2(p^r)} < \infty. \tag{12.9}$$

В этом случае в силу (12.8) ряд (11.5) сходится в $L^2_0(G_s)$, поскольку $\sum_{s \le r < \infty} p^r |d_r|^2 < \infty$, так что $\psi \in L^2_0(G_s)$.

Докажем оценку

$$|d'_r| \le M_2 p^{-(\alpha+1/2)r}, \quad r \ge s, \tag{12.10}$$

где числа d'_r определены в (11.17).

■ Пользуясь оценками (12.8) и (12.9) при $r \ge s$ имеем

$$|d'_r| \le p^{(1-r)\alpha}|d_r| + \rho \sum_{r\le\gamma<\infty} p^{-\alpha\gamma}|d_\gamma| +$$

$$+ \rho p^{-(\alpha+1)r} \sum_{s\le\gamma\le r-1} p^{\gamma}|d_\gamma| \le p^{(1-r)\alpha}\frac{M}{|V(p^r)|} +$$

$$+ \rho M \sum_{r\le\gamma<\infty} p^{-\alpha\gamma}\frac{1}{|V(p^\gamma)|} + \rho M p^{-(\alpha+1)r} \sum_{s\le\gamma\le r-1} p^{\gamma}\frac{1}{|V(p^\gamma)|} \le$$

$$\le M_1\left[\frac{p^{-\alpha r}}{|V(p^r)|} + \sqrt{\sum_{r\le\gamma<\infty} p^{-(2\alpha+1)\gamma}}\sqrt{\sum_{r\le\gamma<\infty} p^{\gamma}\frac{1}{V^2(p^\gamma)}} +\right.$$

$$\left.+ p^{-(\alpha+1)r}\sqrt{\sum_{s\le\gamma\le r-1} p^{\gamma}}\sqrt{\sum_{s\le\gamma\le r-1} p^{\gamma}\frac{1}{V^2(p^\gamma)}}\right] \le M_2 p^{-(\alpha+1/2)r}$$

при некоторых M_1 и M_2. Здесь мы воспользовались неравенством

$$\left|\frac{1}{|V(p^r)|}\right| \le M_3 p^{-r/2}, \quad r \ge s,$$

вытекающим из (12.9). ■

Из оценки (12.10) следует, что ряд $\sum_{s\le r<\infty} p^r|d'_r|^2$ сходится и, таким образом, ряд (11.16) сходится в $L_0^2(G_s)$, т.е. $D^\alpha\psi \in L_0^2(G_s)$. Отсюда в силу уравнения (11.1) следует, что $V\psi \in L_0^2(G_s)$, так что

$$A_0\psi = D^\alpha\psi + V\psi \in L_0^2(G_s).$$

Таким образом, функция $\psi(|x|_p)$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(A_0)$ (см. пп. 6 – 7) и, следовательно, является собственной функцией оператора A_0. Отметим также, что из условия $V\psi \in L_0^2$ следует сходимость ряда

$$\sum_{s\le r<\infty} p^r V^2(p^r)|d_r|^2 < \infty. \tag{12.11}$$

Подытожим наши результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть потенциал $V(|x|_p)$ удовлетворяет условию* (12.9), *собственное значение μ оператора A_0 в G_s удовлетворяет условиям* (11.13), *а соответствующая ему собственная функция $\psi(|x|_p)$ такова, что $\psi(p^s) \neq 0$. Тогда коэффициенты d_r, вычисленные по рекуррентной формуле* (11.14), *определяют эту функцию по формуле*

$$\psi(|x|_p) = \sum_{s \le r < \infty} d_r \delta(|x|_p - p^r),$$

а собственное значение μ удовлетворяет трансцендентному уравнению (11.15); *при этом сходится ряд* (12.11).

Замечание. Открытым остается вопрос о том, можно ли изложенным методом получить все собственные функции оператора A_0 в G_s.

13. Дальнейшие результаты о спектре оператора $D^\alpha + V(|x|_p)$, $\alpha > 0$, в $\mathbb{Q}_p$ ($p \neq 2$), получены А. Н. Кочубеем в предположении, что потенциал $V(|x|_p)$ вещественен и локально ограничен. При доказательствах он использовал результаты п. 5 § 9. Приведем без доказательства его результаты.

Обозначим через $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ гильбертовы пространства, натянутые на собственные функции I и II рода соответственно (см. (5.16) §9), так что $L^2(\mathbb{Q}_p) = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, и через A_1 и A_2 – сужение оператора A на $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ соответственно. (Доказано, что подпространства $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ *приводят* оператор A.)

1. *Если последовательность $\left\{V(p^\gamma),\ \gamma = 1,2,\dots\right\}$ не имеет конечных предельных точек, то спектр оператора A_2 чисто дискретный и оператор A имеет полную систему собственных функций.*

Напомним (см. п. 6), что спектр оператора A_1 известен – он чисто дискретный и состоит из собственных значений

$$\lambda_N^l = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}),\ N \in \mathbb{Z},\ l = 2,3,\dots$$

Пусть $N(\lambda)$ – функция распределения собственных значений оператора A_2, т.е. количество собственных значений (с учетом их кратностей), меньших, чем λ.

2. *Пусть $V(|x|_p) \sim C|x|_p^\beta$, $|x|_p \to \infty$, где $C > 0$ и $\beta > 0$, и существует такое N, что $V(|x|_p) \neq V(|y|_p)$, если $|x|_p \neq$*

$\neq |y|_p$, $|x|_p > p^N$, $|y|_p > p^N$. *Тогда*

$$N(\lambda) = (p-1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\log_p\lambda + O(1),\ \lambda \to +\infty.$$

3. *Если* $V(|x|_p) \to 0$, $|x|_p \to \infty$, *то*

$$\sigma_{ess}(A_2) = \{0\}.$$

4. *Если* $V(|x|_p) \to 0$, $|x|_p \to 0$, *то* $\sigma_{ess}(A_2)$ *совпадает с множеством конечных предельных точек последовательности* $\left\{V(p^\gamma),\ \gamma \to +\infty\right\}$.

5. *Если*

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{0}|V(p^\gamma)| < \infty, \tag{13.1}$$

то спектр оператора A_2 *(и, следовательно, спектр оператора* A*) чисто сингулярный.*

Пример. Для потенциала $V(|x|_p) = \sin(a|x|_p)$, $a \in \mathbb{R}$, условие (13.1) выполнено и $\sigma_{ess}(A_2) = [-1,1]$ для почти всех a.

14. Нестационарное уравнение типа Шредингера с потенциалом $V(x)$ относительно волновой функции $\psi(t,x)$ имеет вид:

$$D_t\psi = \frac{1}{|4|_p}D_x^2\psi + V(x)\psi. \tag{14.1}$$

При $V(x) = 0$ получаем уравнение для свободной частицы

$$D_t\psi - \frac{1}{|4|_p}D_x^2\psi = 0. \tag{14.2}$$

Общее решение ψ *уравнения* (14.2) *в классе обобщенных функций* $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^2)$ *дается формулой*

$$\psi(t,x) = \tilde{\Phi}(t,x), \tag{14.3}$$

где $\Phi(k_1,k_2)$ *– произвольная обобщенная функция из* $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^2)$ *с носителем на многообразии* $|k_1|_p = |k_2/2|_p^2$.

■ Переходя в уравнении (14.2) к преобразованию Фурье, получим уравнение

$$\left(|k_1|_p - \left|\frac{k_2}{2}\right|_p^2\right)\tilde{\psi}(k_1,k_2) = 0, \ \tilde{\psi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^2),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{supp}\tilde{\psi} \subset \left[(k_1,k_2) \in \mathbb{Q}_p^2: \ |k_1|_p - \left|\frac{k_2}{2}\right|_p^2 = 0\right]. \ \blacksquare$$

В том случае, когда

$$\Phi(k_1,k_2) = \rho(k_2)\delta\left(k_1 - \frac{k_2^2}{4}\right),$$

формулу (14.3) перепишем в виде

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \rho(k)\chi_p\left(\frac{k^2}{4}t - kx\right)dk. \tag{14.4}$$

Формулу (14.4) можно интерпретировать как разложение решения $\psi(t,x)$ по плоским волнам

$$\chi_p\left(\frac{k^2}{4}t - kx\right). \tag{14.5}$$

(Чтобы убедиться, что плоские волны (14.5) удовлетворяют уравнению (14.2), достаточно воспользоваться формулой дифференцирования (1.7) §9.)

Для плоских волн справедлива адельная формула (см. (1.11) §3)

$$\prod_{p=2}^{p=\infty}\chi_p\left(\frac{k^2}{4}t - kx\right) = 1, \ k,t,x \in \mathbb{Q}, \tag{14.6}$$

связывающая p-адические плоские волны (14.5) с классическими плоскими волнами

$$\chi_\infty\left(\frac{k^2}{4}t - kx\right) = \exp\left[-2\pi i\left(\frac{k^2}{4}t - kx\right)\right]. \tag{14.7}$$

При $\rho \equiv 1$ формула (14.4) дает волновую функцию - ядро оператора эволюции свободной частицы (см. ниже п. 3 § 11)

$$\mathcal{K}_t^{(p)}(x) = F\left[\chi_p\left(\frac{k^2}{4}t\right)\right] = \lambda_p(t)\left|\frac{2}{t}\right|^{1/2}\chi_p\left(-\frac{x^2}{t}\right), \tag{14.8}$$

в силу формулы (3.8) §7 волновая функция $\mathcal{K}_t^{(p)}$ удовлетворяет начальному условию (см. (3.9) §7)

$$\mathcal{K}_t^{(p)}(x) \to \delta(x), \ t \to 0, \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p). \tag{14.9}$$

Теперь рассмотрим классическое уравнение Шредингера для свободной частицы

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{i}{8\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0. \tag{14.10}$$

Соответствующая волновая функция есть (см. (3.2) §5)

$$\mathcal{K}_t^{(\infty)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\pi i\left(t\frac{k^2}{4} - xk\right)\right]dk =$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_\infty}\chi_\infty\left(t\frac{k^2}{4} - xk\right)dk = \lambda_\infty(t)\left|\frac{2}{t}\right|^{1/2}\chi_\infty\left(-\frac{x^2}{t}\right), \tag{14.11}$$

$$\mathcal{K}_t^{(\infty)}(x) \to \delta(x), \ t \to 0, \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{14.12}$$

Здесь обозначено (см. (3.3) §5)

$$\lambda_\infty(t) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} t\right).$$

Для волновых функций справедлива адельная формула

$$\prod_{p=2}^{p=\infty}\mathcal{K}_t^{(p)}(x) = 1, \ t, x \in \mathbb{Q}, \ t \neq 0, \tag{14.13}$$

вытекающая из адельных формул (1.4) §1.1, (1.11) §3 и (4.2) §5.

Имеет место аналогия между «фазами» $\lambda_\infty(t)$ и $\lambda_p(t)$. В соответствии со знаком t вещественное время $\mathbb{R}$ можно представить как объединение трех множеств без общих точек: двух секторов: $\mathbb{R}^+$ (сектор будущего), где $\lambda_\infty(t) = e^{-i\pi/4}$ (т.е. $t > 0$); $\mathbb{R}^-$ (сектор прошедшего), где $\lambda_\infty(t) = e^{i\pi/4}$ (т.е. $t < 0$); и точки $t = 0$ (настоящее).

Аналогично, p-адическое время $\mathbb{Q}_p$ можно представить следующим образом (определение $\lambda_p(t)$ см. §5).

При $p \equiv 1 \pmod 4$ – объединение (без общих точек) двух секторов: $\mathbb{Q}_p^+$, где $\lambda_p(t) = 1$, $\mathbb{Q}_p^-$, где $\lambda_p(t) = -1$, и точки $t = 0$.

При $p \equiv 3 \pmod 4$ – объединение (без общих точек) трех секторов: $\mathbb{Q}_p^+$, где $\lambda_p(t) = 1$, $\mathbb{Q}_p^{\pm i}$, где $\lambda_p(t) = \pm i$, и точки $t = 0$.

При $p = 2$ – объединение (без общих точек) четырех секторов: $\mathbb{Q}_2^{\pm}$, где $\lambda_2(t) = e^{\pm i\pi/4}$, $\mathbb{Q}_2^{\pm i}$, где $\lambda_2(t) = ie^{\pm i\pi/4}$, и точки $t = 0$.

Задача Коши для уравнения (14.10) в области $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ с начальной (обобщенной) функцией $\psi_0(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ставится так: найти решение $\psi(t,x)$ уравнения (14.10) в области $(t,x) \subset \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^1$, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(t,x) \to \psi_0(x), \ t \to +0, \ \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Аналогично, задача Коши для уравнения (14.2) в секторе, скажем, $\mathbb{Q}_p^+\times\mathbb{Q}_p$ с начальной (обобщенной) функцией $\psi_0(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ ставится так: найти решение $\psi(t,x)$ уравнения (14.2) в секторе $(t,x) \subset \mathbb{Q}_p^+\times\mathbb{Q}_p$, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(t,x) \to \psi_0(x), \ t \to 0, \ t \in \mathbb{Q}_p^+, \ \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p).$$

Решение задачи Коши для уравнения (14.10) дается формулой

$$\psi(t,x) = \mathcal{E}(t,x)*\psi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(t,x-x')\psi_0(x')dx',$$

где $\mathcal{E}(t,x)$ – фундаментальное решение уравнения (14.10):

$$\mathcal{E}(t,x) = \theta(t)\mathcal{K}_t^{(\infty)}(x) = \theta(t)\sqrt{\frac{2}{t}}\exp\left(2\pi i\frac{x^2}{t} - \frac{\pi i}{4}\right).$$

Здесь $\theta(t)$ – функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$, $t \ge 0$, $\theta(t) = 0$, $t < 0$.

Интересно отметить, что *фундаментальное решение уравнения* (14.2) *в классе* $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^2)$ *не существует.*

■ Пусть для определенности $p \ne 2$, и существует решение $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^2)$ уравнения

$$D_t\mathcal{E} - D_x^2\mathcal{E} = \delta(t,x)$$

в $\mathbb{Q}_p^2$. Переходя к преобразованию Фурье и пользуясь формулой (1.7) §9, для обобщенной функции $\tilde{\mathcal{E}}(\xi_1,\xi_2)$ получим противоречивое равенство

$$\left(|\xi_1|_p - |\xi_2|_p^2\right)\tilde{\mathcal{E}}(\xi_1,\xi_2) = 1, \ (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{Q}_p^2,$$

поскольку левая часть этого равенства обращается в нуль в открытом множестве

$$\left[(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{Q}_p^2\colon \ |\xi_1|_p - |\xi_2|_p^2 = 0, \ (\xi_1,\xi_2) \ne 0\right]. \ ■$$

ГЛАВА III

p-АДИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

§ 11. p-адическая квантовая механика

В настоящей главе излагаются основы квантовой механики над полем p-адических чисел и детально исследуются простейшие и важнейшие модели - свободная частица и гармонический осциллятор. Оказывается, уже эти простейшие модели имеют замечательно богатую структуру.

Исследование p-адической квантовой механики представляет значительный интерес как с математической точки зрения, так и с физической. Как возможные физические применения отметим рассмотрение моделей с неархимедовой геометрией пространства-времени на очень малых расстояниях, а также в теории процессов в сложных средах. Кроме того, распространение формализма квантовой теории на поле p-адических чисел представляет интерес даже независимо от возможных новых применений, поскольку дает возможность лучшего понимания формализма обычной квантовой теории.

Можно ожидать, что изучение p-адической квантовой механики будет полезно и для чисто математических исследований в теории представлений, теории чисел и p-адическом анализе. Напомним в этой связи, что квантовомеханическое представление Вейля (см. ниже) нашло, как известно, широкие применения в теории чисел и теории представлений, однако с точки зрения квантовой теории оно отвечает лишь простейшей свободной невзаимодействующей системе. Нет сомнений, что изучение нелинейных взаимодействующих систем даст возможность получить еще более глубокие математические результаты.

Выше, при изложении p-адического анализа, мы рассматривали функции p-адического аргумента со значениями в поле

p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, а также со значениями в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Соответственно возможны различные варианты формулировок классической и квантовой механики. Ниже будут рассмотрены формулировки, которые представляются нам наиболее естественными. Мы начнем с исследования формулировки, которая задается тройкой $(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t))$, где $W(z)$ - представление Вейля коммутационных соотношений, $U(t)$ - унитарное представление аддитивной подгруппы поля p-адических чисел, задающее динамику. Квантовая механика будет получена при помощи квантования классической p-адической механики.

1. Классическая механика над $\mathbb{Q}_p$. Начнем с рассмотрения p-адического аналога классических гамильтоновых уравнений. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{1.1}$$

Здесь все величины: координаты $q = q(t)$, импульсы $p = p(t)$, гамильтониан $H = H(p,q)$ и время t принимают значения в $\mathbb{Q}_p$. Мы будем рассматривать только аналитические функции $q(t)$, $p(t)$ и $H(p,q)$, производные понимаются в смысле п. 2 § 2. Рассмотрим простейшие модели свободной частицы и гармонического осциллятора.

Свободная частица. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} p^2, \tag{1.2}$$

здесь $m \in \mathbb{Q}_p$, $m \neq 0$. Уравнения Гамильтона

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \frac{1}{m}p; \quad p(0) = p, \quad q(0) = q,$$

имеют единственное решение в классе аналитических функций при всех $t \in \mathbb{Q}_p$ вида

$$p(t) = p, \quad q(t) = q + \frac{p}{m}t. \tag{1.3}$$

Гармонический осциллятор. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \tag{1.4}$$

где $m, \omega \in \mathbb{Q}_p$, $m \neq 0$.

Уравнения Гамильтона

$$\dot{p} = -m\omega^2 q,\ \dot{q} = \frac{p}{m};\ p(0) = p,\ q(0) = q,$$

имеют решение того же вида, что и в вещественном случае

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}p\sin\omega t \\ p\cos\omega t - qm\omega\sin\omega t \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Здесь

$$T_t = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{m\omega}\sin\omega t \\ -m\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Свойства функций $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ рассмотрены в п. 4 § 2, они задаются рядами (4.3) и (4.4) из § 2, которые сходятся в области G_p, задаваемой неравенствами

$$|\omega t|_p \le \frac{1}{p} \text{ при } p \ne 2 \text{ и } |\omega t|_2 \le \frac{1}{4} \text{ при } p = 2.$$

Область G_p является группой относительно сложения: если t, $t' \in G_p$, то $t+t' \in G_p$. При таких t и t' имеет место групповое соотношение

$$T_t T_{t'} = T_{t+t'}, \qquad (1.7)$$

На фазовом пространстве $V = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ зададим кососимметрическую билинейную форму

$$B(z,z') = p'q - pq', \qquad (1.8)$$

где $z = (q,p) \in V$, $z' = (q',p') \in V$. Пара (V,B) образует симплектическое пространство.

Имеет место соотношение

$$B(T_t z,\ T_t z') = B(z,z'),\ t \in G_p, \qquad (1.9)$$

т.е. динамика осциллятора задает однопараметрическую группу симплектических автоморфизмов пространства (V,B). Это же верно и для динамики свободной частицы (1.3).

2. Представление Вейля. Здесь будет построена квантовая механика, в которой состояния описываются комплексными волновыми функциями p-адического аргумента.

8*

Обычная квантовая механика начинается с представления канонических коммутационных соотношений

$$[\hat{q},\hat{p}] = i$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В Шредингеровском представлении оператор $\hat{q}$ реализуется как оператор умножения, а $\hat{p}$ - как оператор дифференцирования. Однако в p-адическом случае $x \in \mathbb{Q}_p$, а $\psi(x) \in \mathbb{C}$, и операция умножения на x: $\psi(x) \to x\psi(x)$, не определена. К счастью, в этой ситуации возможен выход из положения за счет перехода к представлению Г.Вейля. Именно, рассматриваются унитарные операторы в $L_2(\mathbb{R})$

$$e^{i\hat{p}q}: \psi(x) \mapsto \psi(x+q); \quad e^{iq\hat{p}}: \psi(x) \mapsto e^{ixp}\psi(x).$$

В таком виде их можно обобщить на p-адический случай. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{Q}_p)$ унитарные операторы

$$U_q: \psi(x) \mapsto \psi(x+q), \quad V_p: \psi(x) \mapsto \chi(2px)\psi(x),$$

где $q,p,x \in \mathbb{Q}_p$ и χ - аддитивный характер на $\mathbb{Q}_p$ (см. § 3).

Семейство унитарных операторов

$$W(z) = \chi(-qp)U_qV_p, \quad z = (q,p) \in \mathbb{Q}_p^2 \tag{2.1}$$

удовлетворяет соотношению Вейля

$$W(z)W(z') = \chi(B(z,z'))W(z+z'). \tag{2.2}$$

Оператор $W(z)$ действует следующим образом:

$$W(z)\psi(x) = \chi(2px+pq)\psi(x+q). \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) удобно записать в виде

$$W(z)\psi(x) = \int W(z;x,y)\psi(y)dy. \tag{2.4}$$

Семейство операторов $W(z)$ задает представление группы Гейзенберга - Вейля, состоящей из элементов (z,α), $z \in V$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, с групповой операцией

$$(z,\alpha)\cdot(z',\alpha') = (z+z', \alpha+\alpha'+B(z,z')). \tag{2.5}$$

Представление группы Гейзенберга - Вейля задается формулой

$$(z,\alpha) \mapsto \chi(\alpha)W(z) \tag{2.6}$$

Заметим, что пара $(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z))$, где операторы $W(z)$ определяются формулой (2.4), есть частный случай *системы Вейля* (см. п. 7 § 11).

В обычной квантовой механике использование представления Вейля является вопросом удобства. Как видно из изложенного, в p-адической квантовой механике это по существу единственный способ корректного задания канонических коммутационных соотношений.

Рассмотрим теперь вопрос о задании динамики в p-адической квантовой механике. В обычной квантовой механике сначала задается квантовый гамильтониан, и затем по нему строится оператор эволюции $U(t)$. Разумеется, классический p-адический гамильтониан следует использовать для эвристических соображений. Опишем здесь соответствующую конструкцию. Как известно, обычная процедура квантования заключается в том, что каждой функции $f(p,q)$ из некоторого класса, заданной на фазовом пространстве, сопоставляется оператор $\hat{f}$ в $L_2(\mathbb{R})$. При этом соответствие $f \mapsto \hat{f}$ должно удовлетворять некоторым естественным требованиям. Вообще говоря, процедура квантования неоднозначна и существуют разные квантования. Если функция $f(p,q)$ есть преобразование Фурье некоторой функции $\varphi(\alpha,\beta)$

$$f(p,q) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha p+\beta q)}\varphi(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta = \tilde{\varphi}(p,q), \tag{2.7}$$

то квантование Вейля заключается в построении оператора

$$\hat{f} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha\hat{p}+\beta\hat{q})}\varphi(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta,$$

где $\hat{p}$ и $\hat{q}$ - операторы импульса и координаты. Такая теория квантования в $\mathbb{R}^2$ по существу тесно связана с теорией псевдодифференциальных операторов. Этот способ квантования можно обобщить на p-адический случай. Именно, пусть на p-адическом фазовом пространстве $V = \mathbb{Q}_p^2$ задана комплексно-значная функция f из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2)$. Она представляется в виде интеграла Фурье (см. § 7)

$$f(p,q) = \int_{\mathbb{Q}_p^2} \chi(\alpha p + \beta q)\varphi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta = \tilde{\varphi}(p,q), \ \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2).$$

Всякой такой функции f по аналогии с (2.4) сопоставим оператор в $L_2(\mathbb{Q}_p)$

$$\hat{f} = \int_{\mathbb{Q}_p^2} W(\alpha,\beta)\varphi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta,$$

где $W(\alpha,\beta) = W(z)$ – унитарный оператор (2.1). Функция $f(p,q)$ называется *символом* оператора $\hat{f}$. Отметим существенное отличие описанного квантования p-адической теории от вещественной – такой метод не дает возможности квантовать полиномиальные функции $f(p,q)$, так как такие функции принимают значения в $\mathbb{Q}_p$, а не в $\mathbb{C}$.

В вещественном случае для описания динамики системы обычно начинают с построения оператора Гамильтона и доказательства его самосопряженности. В p-адическом случае этот способ не применим. Для построения оператора эволюции можно рассуждать следующим образом.

Как известно, в вещественном случае символ $U(t)$ можно задать и в виде функционального фейнмановского интеграла. Естественно ожидать, что в p-адическом случае соответствующее ядро будет выражаться функциональным интегралом

$$K_t(x,y) = \int \chi\left(\int_0^t L(q,\dot{q})dt\right)\prod_t dq(t), \tag{2.8}$$

причем интегрирование выполняется по классическим p-адическим траекториям с граничными условиями $q(0) = x$, $q(t) = y$. Здесь $L(q,\dot{q})$ – p-адический Лагранжиан, $L(q,\dot{q}) \in \mathbb{Q}_p$. В формуле (2.8) имеется в виду, что интеграл $\int_0^t Ldt = S(t)$ понимается как функция, обратная к операции дифференцирования, т.е. $\dot{S}(t) = L$, $S(0) = 0$, $S(t) \in \mathbb{Q}_p$.

Мы рассмотрим ниже простейшие случаи свободной частицы и гармонического осциллятора. В этих случаях формула (2.8) действительно приводит к правильному ответу. Как и в вещественном случае будет показано, что $K_t(x,y) \sim \sim \chi(S_{кл}(t))$, где $S_{кл}(t)$ - действие, вычисленное на классической p-адической траектории.

3. Свободная частица. Динамику свободной квантовой частицы, отвечающую классическому гамильтониану (1.2), зададим в импульсном представлении при помощи перехода к преобразованию Фурье. Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ и $\tilde{\psi}(k)$ - ее преобразование Фурье.

Как известно (см. п. 4 § 7), преобразование Фурье F: $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ является унитарным оператором в $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Оператор эволюции в импульсном представлении $\tilde{U}(t)$ зададим формулой

$$\tilde{U}(t)\tilde{\psi}(k) = \chi\left(\frac{k^2}{4m}t\right)\tilde{\psi}(k), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \tag{3.1}$$

а в координатном представлении

$$U(t) = F^{-1}\tilde{U}(t)F. \tag{3.2}$$

Получаем семейства унитарных операторов $\tilde{U}(t)$, $U(t)$, причем выполняются соотношения

$$\tilde{U}(t)\tilde{U}(t') = \tilde{U}(t+t'), \quad t,t' \in \mathbb{Q}_p, \tag{3.2}$$

$$U(t)U(t') = U(t+t'), \quad t,t' \in \mathbb{Q}_p. \tag{3.3}$$

Вычислим ядро K_t оператора эволюции в координатном представлении. Рассмотрим семейство регуляризованных операторов

$$\tilde{U}_N(t)\tilde{\psi}(k) = \chi_N\left(\frac{k^2}{4m}t\right)\tilde{\psi}(k), \tag{3.4}$$

где

$$\chi_N\left(\frac{k^2}{4m}t\right) = \begin{cases} \chi\left(\frac{k^2}{4m}t\right), & |k|_p \le p^N, \\ 0, & |k|_p > p^N. \end{cases}$$

Последовательность операторов $\tilde{U}_N(t)$ сильно сходится к $\tilde{U}(t)$ при $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \|\tilde{U}_N(t)\tilde{\psi} - U(t)\tilde{\psi}\| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{|k|_p > p^N} |\tilde{\psi}(k)|^2 dk = 0, \ \tilde{\psi} \in L_2(\mathbb{Q}_p), \ t \in \mathbb{Q}_p. \qquad (3.5)$$

Соответственно последовательность операторов $U_N(t)$ сильно сходится к $U(t)$.

Пользуясь теоремой о преобразовании Фурье свертки (3.5) из § 7, выполним обратное преобразование Фурье в соотношении (3.3):

$$U_N(t)\psi(x) = F^{-1}\left[\tilde{U}_N(t)F\psi(x)\right] = F^{-1}\left[\chi\left(\frac{k^2}{4m}t\right)F\psi\right] =$$

$$= F\left[\chi_N\left(\frac{k^2}{4m}t\right)\right]*\psi = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} K_t^{(N)}(x-y)\psi(y)dy, \qquad (3.6)$$

где

$$K_t^{(N)} = F\left[\chi_N\left(\frac{k^2}{4m}t\right)\right](\xi) = \int\limits_{|k|_p \le p^N} \chi_N\left(\frac{k^2}{4m}t + k\xi\right)dk. \qquad (3.7)$$

Интеграл (3.7) был вычислен в § 7 (формула (2.3)). Отметим, в частности, что функция $K_t^{(N)}(\xi)$ имеет компактный носитель. Переходя к пределу $N \to \infty$ в формуле (3.6) в пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$, имеем при $t \ne 0$

$$U(t)\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} K_t(x-y)\psi(y)dy, \qquad (3.8)$$

где интеграл в (3.8) понимается как несобственный, сходящийся по норме в $L_2(\mathbb{Q}_p)$.

Ядро $K_t(x-y)$ имеет вид, см. (3.1) § 7,

$$K_t(x-y) = \lambda_p\left(\frac{t}{m}\right)\left|\frac{m}{t}\right|_p^{1/2}\chi\left(-\frac{m}{t}(x-y)^2\right), \ t \ne 0. \qquad (3.9)$$

При $t = 0$ имеем

$$K_0(x-y) = \delta(x-y). \tag{3.10}$$

Интересно отметить, что функциональное соотношение (4.1) из § 5 для функции $\lambda_p(a)$ вытекает из равенств (3.3), (3.9) без использования явного выражения функции $\lambda_p(a)$ через символ Лежандра. Из приведенных формул вытекает соотношение для свободной эволюции оператора Вейля $W(z)$ (2.2):

$$U(t)W(z)U(t)^{-1} = W(z_t), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \tag{3.11}$$

где

$$z_t = (q(t), p(t)) = \left(q + \frac{p}{m}t, \; p\right) \tag{3.12}$$

– классическая эволюция свободной частицы.

Подведем итог. Квантовая механика свободной частицы над полем $\mathbb{Q}_p$ задается тройкой $(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t))$, где $W(z)$ – унитарное представление группы Гейзенберга – Вейля (2.3), $U(t)$ – унитарный оператор эволюции (3.8), причем выполняются соотношения (2.2) и (3.11).

4. Гармонический осциллятор. Квантовая механика гармонического осциллятора над полем $\mathbb{Q}_p$ задается тройкой $(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t))$, где $W(z)$ – унитарное представление группы Гейзенберга – Вейля (2.3), а $U(t)$ – такой унитарный оператор эволюции, что выполняются соотношения

$$U(t+t') = U(t)U(t'), \quad t, t' \in G_p, \tag{4.1}$$

$$U(t)W(z)U(t)^{-1} = W(T_t z), \quad t \in G_p, \quad z \in V, \tag{4.2}$$

где классическая эволюция $T_t z$ задается формулами (1.5), (1.6). В дальнейшем мы положим $m = \omega = 1$.

Определим оператор $U(t)$ на основных функциях $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ следующим образом:

$$U(t)\psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} K_t(x,y)\psi(y)dy, \quad t \in G_p, \tag{4.3}$$

где ядро $K_t(x,y)$ имеет вид

$$K_t(x,y) = \lambda_p(t)\frac{1}{|t|_p^{1/2}}\chi\left(-\frac{x^2+y^2}{\operatorname{tg} t} + \frac{2xy}{\sin t}\right), \quad t \neq 0, \tag{4.4}$$

$$K_0(x,y) = \delta(x-y).$$

Выражение (4.4) не определено в нулях функции $\sin t$. Заметим, что единственный нуль у этой функции может быть только при $t = 0$. Это следует из соотношения (4.19) в § 2, $|\sin t|_p = |t|_p$ при $t \in G_p$.

Теорема. *Формула (4.3) задает унитарное непрерывное представление группы G_p в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$ и переводит $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ на себя.*

■ Это следует из вида ядра (4.4), согласно которому при $t \neq 0$

$$U(t)\psi(x) = \chi\left(-\frac{x^2}{\operatorname{tg} t}\right)\frac{\lambda_p(t)}{|t|_p^{1/2}}F\left[\psi(y)\chi\left(-\frac{y^2}{\operatorname{tg} t}\right)\right]\left(\frac{2x}{\sin t}\right).$$

Отсюда видно, что оператор $U(t)$ при $t \neq 0$ есть композиция унитарных операторов и переводит $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. При $t = 0$ оператор $U(0) = I$.

Докажем групповое свойство (4.1) на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ при $p \geq 3$. Пусть $\psi(z) = 0$ при $|z| \geq p^N$ и $U(t')\psi(y) = 0$ при $|y|_p \geq p^M$ $(t' \neq 0)$. Тогда

$$U(t)U(t')\psi(x) = \int\limits_{|y|_p \leq p^M} K_t(x,y) \int\limits_{|z|_p \leq p^N} K_{t'}(y,z)\psi(z)\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{|z|_p \leq p^N} \psi(z) \int\limits_{|y|_p \leq p^M} K_t(x,y)K_{t'}(y,z)\,dy\,dz =$$

$$= \frac{\lambda_p(t)\lambda_p(t')}{|tt'|_p^{1/2}}\chi\left(-\frac{x^2}{\operatorname{tg} t}\right)\int\limits_{|z|_p \leq p^N}\psi(z)\int\limits_{|y|_p \leq p^M}\chi\left(-y^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} t} + \frac{1}{\operatorname{tg} t'}\right) + \right.$$

$$\left. + 2y\left(\frac{x}{\sin t} + \frac{z}{\sin t'}\right)\right)dy\,dz. \tag{4.5}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (4.5) используем формулу (2.3) из § 5. Обозначим

$$a = -\frac{1}{\operatorname{tg}t} - \frac{1}{\operatorname{tg}t'},\quad b = \frac{2x}{\sin t} + \frac{2z}{\sin t'}. \tag{4.6}$$

Тогда, считая что $t+t' \neq 0$, имеем

$$|a|_p = \left|\frac{\operatorname{tg}(t+t')}{(1-\operatorname{tg}t\operatorname{tg}t')\operatorname{tg}t\operatorname{tg}t'}\right|_p = \left|\frac{t+t'}{tt'}\right|_p. \tag{4.7}$$

Поскольку левая часть в (4.5) не зависит от M, при достаточно больших M (фиксированных t, t', x) число M мы можем выбрать сколь угодно большим и поэтому воспользуемся верхней строкой в формуле (2.3) § 5. Имеем далее

$$\left|\frac{b}{2a}p^M\right|_p = p^{-M}\left|\frac{x\sin t' + z\sin t}{t+t'}\right|_p.$$

Поэтому

$$\Omega\left(\left|\frac{b}{2a}p^M\right|_p\right) = 1.$$

Итак,

$$\int\limits_{|y|_p \le p^M} dy\chi\left(-y^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}t} + \frac{1}{\operatorname{tg}t'}\right) + 2y\left(\frac{x}{\sin t} + \frac{z}{\sin t'}\right)\right) =$$

$$= \lambda_p\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}t} - \frac{1}{\operatorname{tg}t'}\right)\left|\frac{tt'}{t+t'}\right|_p \times$$

$$\times\chi\left(\left(\frac{x}{\sin t} + \frac{z}{\sin t'}\right)^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}t} + \frac{1}{\operatorname{tg}t'}\right)^{-1}\right). \tag{4.8}$$

Учитывая соотношение (4.1) из § 5, преобразуем выражение для λ_p:

$$\lambda_p\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}t} - \frac{1}{\operatorname{tg}t'}\right) = \lambda_p\left(-\frac{\operatorname{tg}(t+t')}{(1-\operatorname{tg}t\operatorname{tg}t')\operatorname{tg}t\operatorname{tg}t'}\right) = \lambda_p\left(-\frac{t+t'}{tt'}\right) =$$

$$= \lambda_p(t)^{-1}\lambda_p(t')^{-1}\lambda_p(t+t'). \tag{4.9}$$

Примем во внимание соотношение

$$-\frac{x^2}{\operatorname{tg}t}-\frac{z^2}{\operatorname{tg}t'}+\left(\frac{x}{\sin t}+\frac{z}{\sin t'}\right)^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}t}+\frac{1}{\operatorname{tg}t'}\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{x^2+z^2}{\operatorname{tg}(t+t')}+\frac{2xz}{\sin(t+t')}. \quad (4.10)$$

Собирая вместе соотношения (4.5), (4.8), (4.9) и (4.10), получаем

$$U(t)U(t')\psi(x)=$$

$$=\frac{\lambda_p(t+t')}{|t+t'|_p^{1/2}}\int_{\mathbb{Q}_p}\chi\left(-\frac{x^2+z^2}{\operatorname{tg}(t+t')}+\frac{2xz}{\sin(t+t')}\right)\psi(z)dz=U(t+t')\psi(x).$$

Таким образом, групповое свойство (4.1) доказано для t, t', $t+t'\neq 0$. Случай, когда один из этих параметров исчезает, доказывается аналогично, проще, поскольку $K_0(x,y)=\delta(x-y)$. Случай $p=2$ рассматривается аналогично. ∎

Замечание. Как видно из приведенных рассуждений, в p-адической квантовой механике в отличие от стандартной финитная волновая функция при эволюции может остаться финитной, например, волновая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Можно оценить область распространения.

Для проверки соотношения (4.2) вычисляется интеграл

$$\int K_t(x,y)W(z;u,v)K_{-t}(v,y)dvdt=W(T_tz;x,y), \quad (4.11)$$

где $W(z;u,v)$ - ядро (2.4).

5. Лагранжев формализм. В п. 1 § 11 рассматривался гамильтонов формализм p-адической одномерной классической мехники, в настоящем разделе для этого же случая излагается Лагранжев формализм. Начнем рассмотрение с определения интеграла аналитической функции и обсуждения его свойств.

Пусть функция $f\colon \mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ - аналитическая в круге B (см. § 2), точки a и b лежат в круге B', который строго содержится в B. Под интегралом функции f в пределах от a до b понимается следующее p-адическое число:

$$\int_a^b f(x)dx=f^{(-1)}(b)-f^{(-1)}(a), \quad (5.1)$$

первообразная $f^{(-1)}$ аналитической функции определена в п. 2 § 2. Заметим, что $f^{(-1)}$ определена в точках a и b в силу условия $a,b \in B' \subset B$ (см. п. 2 § 2). Формула (5.1) определяет p-адичнозначный функционал на множестве аналитических в круге B функций. Свойства этого функционала отражены в следующей лемме.

Лемма. *Интеграл* (8.1) *обладает свойствами*:

1. $\int_a^b (\lambda f+\mu g)\,dx = \lambda\int_a^b f\,dx + \mu\int_a^b g\,dx,\ \lambda,\mu \in \mathbb{Q}_p.$

2. $\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx,\ a,b,c \in B'.$

3. $\int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx.$

4. *Если для любой аналитической в круге B функции h, удовлетворяющей условиям*

$$h(a) = h(b) = 0,$$

выполнено условие

$$\int_a^b fh\,dx = 0,$$

то $f \equiv 0$.

■ Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения интеграла; свойство 3 вытекает непосредственно из определения интеграла и формулы производной произведения.

Докажем свойство 4. Представляя функции f и h в виде степенных рядов и учитывая сходимость этих рядов в точке a, получаем:

$$h = \sum_{0\le n<\infty} h_n(x-a)^n,$$

$$\int_a^b fh\,dx = \sum_{0\le n<\infty} (fh)_n\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}, \tag{5.2}$$

где

$$h_0 = h(a) = 0,$$

$$h(b) = \sum_{1\le n<\infty} h_n(b-a)^n = 0,$$

$$(fh)_n = \sum_{0\le k\le n} f_k h_{n-k}.$$

Вводя обозначение $d = b-a \neq 0$ и меняя в формуле (5.2) порядок суммирования, получаем:

$$\int_a^b fh dx = \sum_{0\le k<\infty} f_k d^k \sum_{1\le n<\infty} \frac{h_n d}{n+k+1}. \tag{5.3}$$

Коэффициенты h_n функции h при $n\ge 2$ определим произвольно (лишь бы выполнялось условие $|h_n d^n|_p \to 0,\ n\to\infty$), а коэффициент h_1 определим по формуле:

$$h_1 = -\sum_{2\le n<\infty} h_n d^{n-1}.$$

Подставляя последнюю формулу в (5.3), получаем:

$$F = \int_a^b fh dx = \sum_{0\le k<\infty} \frac{f_k d^k}{k+2} \sum_{2\le n<\infty} \frac{1-n}{n+k+1} h_n d^{n+1}. \tag{5.4}$$

С учетом последней формулы утверждение 4 леммы можно переформулировать следующим образом: если для любых p-адических чисел h_n, $n\ge 2$, удовлетворяющих условию $|h_n d^n|_p \to 0$, $n\to\infty$, выполнено равенство $F = 0$, тогда $f_k = 0$ для всех $k = 0,1,\ldots$ Предположим, что лемма не верна. Тогда найдем такое m, что $f_m \neq 0$. Коэффициенты h_n, $n\ge 2$, определим по формуле:

$$h_n = \frac{1}{(1-n)d^n}\begin{cases} 1, & n=p^M-m-1,\\ 0, & n\neq p^M-m-1,\end{cases}$$

где $M\in\mathbb{N}$, $p^M \ge m+3$. Подставляя выражение для h_n в (5.4) и вводя обозначение:

$$c_k = \frac{f_k d^k}{k+2},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,$$

получим

$$F = F(M) = \sum_{0\le k<\infty} \frac{c_k}{k-m+p^M} = 0. \tag{5.5}$$

Аналогично доказательству сходимости ряда для первообразной аналитической функции (см. п. 2 § 2) легко доказать, что

$$r(f) = r\left(\sum_{\substack{0\le k<\infty\\ k\ne m}} \frac{f_k}{(k+2)(k-m)} x^k\right),$$

откуда следует, что ряд

$$\sum_{\substack{0\le k<\infty\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m} \tag{5.6}$$

сходится. Поскольку $\lim\limits_{M\to\infty} p^M = 0$ в $\mathbb{Q}_p$, то

$$\lim_{M\to\infty}\left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m+p^M}\right|_p = \left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m}\right|_p$$

при любом натуральном $N > m$. В силу сходимости ряда (5.6) найдется не зависящая от M и N константа такая, что

$$\lim_{M\to\infty}\left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m+p^M}\right|_p < C.$$

Следовательно, найдется $C' > C$, что, начиная с некоторого M, выполнено неравенство

$$\left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m+p^M}\right|_p < C'. \tag{5.7}$$

Выбирая M таким образом, чтобы $p^M > \dfrac{C'}{|c_m|_p}$, и, принимая во внимание неархимедовость p-адической нормы и неравенство (5.7), получаем:

$$\left|\sum_{0\le k\le N} \frac{c_k}{k-m+p^M}\right|_p = \left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \frac{c_k}{k-m+p^M} + p^{-M}C_m\right|_p = p^M|c_m|_p.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ с учетом (5.5) из последней формулы получаем:

$$|F(M)|_p = p^M|c_m|_p = 0,$$

откуда $f_m = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Лагранжев формализм для $\mathbb{Q}_p$ *строится по аналогии с лагранжевым формализмом для* $\mathbb{R}$. Как и в п. 1 q и t – соответственно координата и время – принимают значения в $\mathbb{Q}_p$, функция $q(t)$ аналитична в круге $B' \supset B$, тогда (см. п. 2 § 2) производная $\dot{q}(t)$ также аналитична в B'. Будем рассматривать только такие лагранжианы $L(q,\dot{q})$, которые являются аналитическими p-адичнозначными функциями во всей плоскости переменных q и $\dot{q}$; в этом случае значение $L(t) = L(q(t),\dot{q}(t))$ лагранжиана $L(q,\dot{q})$ на траектории $q(t)$ есть аналитическая в круге B функция переменной t.

Действие S определим как p-адичнозначный функционал на множестве траекторий по формуле:

$$S[q] = \int_a^b L(q(t),\dot{q}(t))dt, \tag{5.8}$$

где интеграл понимается в смысле (5.1).

Вариационную производную действия S определим по аналогии с вещественным случаем:

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q} = \left.\frac{dS[q+\varepsilon h]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{Q}_p$, $h(t)$ – произвольная аналитическая в круге B функция, удовлетворяющая условиям $h(a) = h(b) = 0$. Действие (5.8) стационарно на траектории $q(t)$, если выполняется условие

$$\left.\frac{\delta S[\gamma]}{\delta\gamma}\right|_{\gamma=q} = 0.$$

Теорема. *Если действие* (5.8) *стационарно на траектории* $q(t)$, *то вдоль этой траектории справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{5.9}$$

■ По условию теоремы

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}S[q+\varepsilon h]\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}h + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{h} \right\}dt = 0. \tag{5.10}$$

Используя утверждение 3 леммы, получаем

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{h}\ dt = \left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}h\right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)h\ dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)h\ dt.$$

Подставляя последнее выражение в (5.10), имеем:

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right\} h \, dt = 0,$$

откуда, с учетом утверждения 4 леммы, следует утверждение теоремы. ∎

Классическая траектория $q_{cl}(t)$, проходящая через точки q_1 и q_2, определяется как решение уравнения (5.9) с граничными условиями: $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$, значение действия $S_{cl}[t_1,t_2]$, соответствующее этой траектории, вычисляется по формуле:

$$S_{cl}[t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_{cl}(t),\dot q_{cl}(t))dt.$$

6. Фейнмановские континуальные интегралы. Один из возможных путей построения фейнмановского континуального интеграла предложен в п. 2 (формула (2.8)). В настоящем разделе дается строгое обоснование этого способа с помощью метода конечных аппроксимаций и вычисляется ядро оператора эволюции p-адического гармонического осциллятора.

Рассмотрим p-адическую систему с лагранжианом $L(q,\dot q)$ - аналитической функцией во всей плоскости переменных q и $\dot q$; траектория $q(t)$ - аналитическая функция в круге B_N. Выберем целое число $n < N$ и построим покрытие круга B_N кругами $B_n(a_j)$, $j = 0,1,\dots,p^{N-n}-1$, радиуса p^n без общих точек (см. п. 3 § 1, пример 2). В каждом из кругов покрытия выберем по одной точке t_j, $j = 0,1,\dots,p^{N-n}-1$, причем считаем, что $t_0 = 0$ и $t_{p^{N-n}-1} = t$. Для каждой пары точек (t_j,t_{j+1}), $j = 0,1,\dots,p^{N-n}-2$, построим классическую траекторию q_{cl} (см. п. 5), удовлетворяющую условиям:

$$q_{cl}(t_j) = q_j, \; q_{cl}(t_{j+1}) = q_{j+1},$$

значение действия на каждой такой траектории имеет вид:

$$S_{cl}[t_j,t_{j+1}] = \int_{t_j}^{t_{j+1}} L\Big(q_{cl}(t),\dot q_{cl}(t)\Big)\, dt, \tag{6.1}$$

$j=0,1,\dots,p^{N-n}-2$. Символ $\int_0^t L(q(\tau),\dot q(\tau))d\tau$, в формуле (2.8) будем понимать следующим образом:

$$\int_0^t L(\tau)d\tau = \lim_{n\to-\infty} \sum_{0\le j\le p^{N-n}-2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L\left(q_{cl}(\tau),\dot q_{cl}(\tau)\right)\, d\tau =$$

$$= \lim_{n\to-\infty} \sum_{0\le j\le p^{N-n}-2} S_{cl}[t_j,t_{j+1}]. \quad (6.2)$$

Формулу (6.2) можно рассматривать как аппроксимацию произвольной траектории отрезками классических траекторий. Параметр n определяет степень аппроксимации.

С учетом формулы (6.2) конечную аппроксимацию $K_t^{(n)}(x,y)$ ядра оператора эволюции запишем в виде:

$$K_t^{(n)}(x,y) =$$

$$= C_n \int_{\mathbb{Q}_p}\dots\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p\Big(\sum_{0\le j\le p^{N-n}-2} S_{cl}[t_j,t_{j+1}]\Big)dq_1\dots dq_{p^{N-n}-2},$$

где $q_0 = x$, $q_{p^{N-n}-1} = y$, n - степень аппроксимации, C_n - нормировочный множитель.

Если существует предел $K_t^{(n)}(x,y)$ при $n\to\infty$, то он определяет ядро оператора эволюции:

$$K_t(x,y) = \lim_{n\to-\infty} K_t^{(n)}(x,y).$$

В случае гармонического осциллятора лагранжиан имеет вид

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2-q^2),$$

а уравнение Эйлера - Лагранжа:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0. \quad (6.3)$$

Решение уравнения (6.3) с краевыми условиями

$$q(t_i) = q_i;\ q(t_{i+1}) = q_{i+1}$$

имеет тот же вид, что и в вещественном случае:

$$q_{cl}(t) = \frac{q_i\sin t_{i+1}-q_{i+1}\sin t_i}{\sin(t_{i+1}-t_i)}\cos t - \frac{q_i\cos t_{i+1}-q_{i+1}\cos t_i}{\sin(t_{i+1}-t_i)}\sin t,$$

где $t_i,t_{i+1},t \in G_p$ (см. п. 1).

С помощью простых, но трудоемких вычислений, полностью аналогичных соответствующим вычислениям в вещественном случае, можно получить следующее выражение для $S_{cl}[t_i,t_{i+1}]$:

$$S_{cl}[t_i,t_{i+1}] = \frac{q_i^2 + q_{i+1}^2}{2\operatorname{tg}(t_{i+1}-t_i)} - \frac{q_i q_{i+1}}{\sin(t_{i+1}-t_i)}. \qquad (6.4)$$

Используя интегралы, вычисленные в п. 3 § 5, докажем следующую лемму.

Лемма. *Имеет место формула:*

$$\left(\prod_{0\le i\le k-1}\frac{\lambda_p(-2a_i)}{|a_i|_p^{1/2}}\right)\int_{\mathbb{Q}_p}\!\!\cdots\!\int_{\mathbb{Q}_p}\chi_p\left(\sum_{0\le i\le k-1}\left[\frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{2\operatorname{tg}\, a_i} - \frac{x_i x_{i+1}}{\sin\, a_i}\right]\right)dx_1\ldots dx_{k-1} =$$

$$= \frac{\lambda_p\left(-2\sum\limits_{0\le i\le k-1} a_i\right)}{\left|\sum\limits_{0\le i\le k-1} a_i\right|_p^{1/2}}\chi_p\left(\frac{x_0^2+x_k^2}{2\operatorname{tg}\left(\sum\limits_{0\le i\le k-1} a_i\right)} - \frac{x_0 x_k}{\sin\left(\sum\limits_{0\le i\le k-1} a_i\right)}\right), \qquad (6.5)$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k \ge 2$, $a_i \in \mathbb{Q}_p$, $|a_i|_p \le \frac{1}{p}$, $i=0,1,\ldots,k-1$, функция $\lambda_p(a)$ определена в § 5.

■ Доказательство проведем по индукции. При $k = 2$ формула (6.5) путем элементарных преобразований сводится к формуле (3.1) §5. Предположим, что формула (6.5) верна для $k = n$ и докажем ее справедливость при $k = n+1$. Обозначая выражение в правой части формулы (6.5) через $F(a_0,\ldots,a_{k-1})$ и сумму $\sum\limits_{0\le i\le k-1} a_i$ через A_k, получим:

$$F(a_0,a_1,\ldots,a_k) =$$
$$= \frac{\lambda_p(-2a_k)}{|a_k|_p^{1/2}}\int_{\mathbb{Q}_p} F(a_0,\ldots,a_{k-1})\chi_p\left(\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{2\operatorname{tg}a_k} - \frac{x_k x_{k+1}}{\sin a_k}\right)dx_k.$$

По предположению индукции имеем:

$$F(a_0,\ldots,a_n) = \frac{\lambda_p(-2a_n)\lambda_p(-2A_{n-1})}{|a_n A_{n-1}|_p^{1/2}}\chi_p\left(\frac{x_0^2}{\sin A_{n-1}} + \frac{x_{n+1}^2}{2\operatorname{tg}a_n}\right)\times$$

$$\times \int\limits_{Q_p} \chi_p\left(\frac{x_n^2}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tg} A_{n-1}} + \frac{1}{\operatorname{tg} a_n}\right) - x_n\left(\frac{x_0}{\sin A_{n-1}} + \frac{x_{n+1}}{\sin a_n}\right]\right) dx_n .$$

С учетом формулы (3.1) § 5 последнюю формулу можно переписать в виде:

$$F(a_0,\dots,a_n) = \frac{\lambda_p(-2a_n)\lambda_p(-2A_{n-1})\lambda_p\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{1}{2\operatorname{tg}a_n}\right)}{\left|a_n A_{n-1}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{1}{\operatorname{tg}a_n}\right)\right|_p^{1/2}} \times$$

$$\times \chi_p\left(\frac{x_0^2}{2\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{x_{n+1}^2}{2\operatorname{tg}a_n} - \frac{\left(\frac{x_0}{\sin A_{n-1}} + \frac{x_{n+1}}{\sin a_n}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{1}{\operatorname{tg}a_n}\right)}\right). \qquad (6.6)$$

Используя свойства функции $\lambda_p(a)$ (см. п. 4 § 5), получаем:

$$\lambda_p\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{1}{2\operatorname{tg}a_n}\right) = \lambda_p\left(\frac{\sin(a_n+A_{n-1})}{2\sin a_n \sin A_{n-1}}\right) =$$

$$= \lambda_p\left(\frac{a_n+A_{n-1}}{2a_n A_{n-1}}\right) = \lambda_p(2a_n)\lambda_p(2A_{n-1})\lambda_p(-2A_n) .$$

Аналогично, используя свойства функций $\sin x$ и $\cos x$ (см. п. 4 § 2), выражение под знаком нормы приводится к виду:

$$\left|a_n A_{n-1}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}A_{n-1}} + \frac{1}{\operatorname{tg}a_n}\right)\right|_p = |A_n|_p .$$

Дальнейшее доказательство леммы сводится к элементарным преобразованиям под знаком характера в правой части формулы (6.6). ∎

Для вычисления ядра $K_t(x,y)$ для осциллятора выберем нормировочный множитель C_n в виде:

$$C_n = \prod_{0 \le j \le p^{N-n}-2} \frac{\lambda_p\left(-2(t_{j+1}-t_j)\right)}{|t_{j+1}-t_j|_p^{1/2}}. \tag{6.7}$$

Тогда аппроксимация порядка n ядра $K_t(x,y)$ будет иметь вид:

$$K_t^{(n)}(x,y) = \prod_{0 \le i \le p^{N-n}-2} \frac{\lambda_p\left(-2(t_{i+1}-t_i)\right)}{|t_{i+1}-t_i|_p^{1/2}} \times$$

$$\times \int_{Q_p} \cdots \int_{Q_p} \chi_p\left[\prod_{0 \le i \le p^{N-n}-2}\left(\frac{q_i^2+q_{i+1}^2}{2\mathrm{tg}(t_{i+1}-t_i)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{q_i q_{i+1}}{\sin(t_{i+1}-t_i)}\right)\right] dq_1 \ldots dq_{p^{N-n}-2}$$

С учетом леммы имеем:

$$K_t^{(n)}(x,y) = \frac{\lambda_p(-2t)}{|t|_p^{1/2}}\, \chi_p\left(\frac{x^2+y^2}{2\mathrm{tg}t} - \frac{xy}{\sin t}\right) = K_t(x,y).$$

Полученная формула совпадает, с точностью до несущественных множителей, с ядром оператора эволюции гармонического осциллятора, построенным в п. 4 (см. (4.4)).

7. Квантовая механика с p-адичнозначными функциями. В предыдущем разделе мы рассмотрели формализм p-адической квантовой механики с комплекснозначными функциями. В настоящем разделе мы обсуждаем подход к p-адической квантовой механике с p-адичнозначными функциями.

Напомним формализм вторичного квантования в обычной квантовой механике в терминах операторов рождения и уничтожения. Через ℓ_2 обозначим гильбертово пространство последовательностей $f = (f_0, f_1, \ldots)$ комплексных чисел со скалярным произведением

$$(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n \overline{g}_n. \tag{7.1}$$

Операторы рождения и уничтожения a^* и a действуют по следующим правилам:

$$a^* f_n = f_{n+1},\ a f_n = n f_{n-1},\ n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{7.2}$$

и удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям:

$$\left[a, a^*\right] = aa^* - a^* a = 1 \tag{7.3}$$

в некоторой области в ℓ_2. Гамильтониан гармонического осциллятора имеет вид:

$$H_c = \omega a^* a, \tag{7.4}$$

где ω - вещественное число. Можно рассмотреть более общий гамильтониан

$$H = H_0 + V, \tag{7.5}$$

где V, например, полином от операторов a^* и a. Эволюция во времени дается уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{7.6}$$

где $\psi = \psi(t)$ - вектор из ℓ_2. Для самосопряженного оператора H имеем

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi(0). \tag{7.7}$$

Отметим, что выражения (7.1) - (7.5) могут быть непосредственно распространены на случай p-адической квантовой механики, если рассмотреть пространство последовательностей $f = (f_0, f_1, \ldots)$ p-адических чисел со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n, \tag{7.8}$$

где ряды сходятся в $\mathbb{Q}_p$. Проблема заключается в том, что теория операторов в подобных p-адических гильбертовых пространствах недостаточно развита по сравнению с соответствующей теорией в комплексных гильбертовых пространствах.

Ниже мы кратко изложим p-адическое интегральное исчисление и его применение в p-адической квантовой механике с p-адичнозначными фунциями, которая была развита в работах А.Ю.Хренникова. Через $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\tau})$ обозначим квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Выберем $\rho > 0$ и через A_ρ обозначим пространство аналитических функций на шаре

$$U_\rho = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le \rho\right\},$$

принимающих значения в $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\tau})$ и снабженное топологией, определяемой нормой

$$\|f\|_\rho = \max_n |f_n|\rho^n,$$

если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Проективный предел пространств A_ρ

$$A = \lim_{\rho\to\infty} \operatorname{proj} A_\rho$$

является неархимедовым пространством Фреше. Через A' мы обозначим двойственное к A пространство и будем использовать обозначение

$$\int \varphi(x)\mu(dx) = \langle\varphi,\mu\rangle$$

для действия $\mu \in A'$ на функцию $\varphi \in A$. Любая обобщенная функция $\mu \in A'$ имеет преобразование Лапласа $L(\mu)$, которое принадлежит индуктивному пределу пространств функций аналитичных в окрестности нуля. Гауссово распределение на $\mathbb{Q}_p$ это по определению обобщенная функция $\nu \in A'$, имеющая следующее преобразование Лапласа:

$$L(\nu)(x) = e^{1/4x^2}.$$

На пространстве A определим скалярное произведение по формуле:

$$(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\nu(dx).$$

Пополнение пространства A по соответствующей норме есть по определению p-адическое гильбертово пространство $L_2(\mathbb{Q}_p,\nu(dx))$. В этом пространстве развита теория псевдодифференциальных операторов.

§ 12. Спектральная теория в p-адической квантовой механике

Обсудим постановку задачи о спектре для гармонического осциллятора. В стандартной квантовой механике над полем вещественных чисел изучаются спектральные свойства оператора Гамильтона. В p-адической квантовой механике мы не имеем оператора Гамильтона, поэтому следует выразить спектральные свойства в терминах группы $U(t)$. Рассмотрим сначала гармонический осциллятор в стандартной квантовой механике, и пусть $U(t)$ - соответствующий оператор эволюции, который задает унитарное представление аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Разложение представления $U(t)$ на неприводимые имеет вид

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n, \tag{0.1}$$

где инвариантные подпространства H_n натянуты на полиномы Эрмита. Соответствующее уравнение для собственных функций имеет вид

$$U(t)\psi_2 = e^{i\omega_n t}\psi_2, \ \psi \in H_n. \tag{0.2}$$

Здесь ω_n - известные собственные числа для гармонического осциллятора, которые интерпретируются как уровни энергии. Аналогично, изучение спектральных свойств p-адического гармонического осциллятора связано с разложением представления $U(t)$ группы G_p на неприводимые.

Решение этой задачи разбивается на следующие этапы:

описание характоров группы G_p, см. § 3;

вычисление размерностей инвариантных подпространств H_α;

исследование явных формул для собственных функций оператора эволюции $U(t)$.

Мы установим разложение, аналогичное (0.1), (0.2),

$$L_2(\mathbb{Q}_p) = \bigoplus_{\alpha \in I_p} H_\alpha, \tag{0.3}$$

$$U(t)\psi = \chi(\alpha t)\psi, \ \psi \in H_\alpha. \tag{0.4}$$

Как известно, в стандартной квантовой механике для гармонического осциллятора инвариантные подпространства H_n одномерны, т.е. отсутствует вырождение. Спектральные же свойства p-адического гармонического осциллятора существенно богаче. В частности, при $p \equiv 1 \pmod 4$ имеет место бесконечное вырождение как инвариантного вектора (вакуума), так и возбужденных состояний. При $p \equiv 3 \pmod 4$ имеется единственный вакуумный вектор, а кратность вырождения возбужденных состояний равна $p+1$. При $p = 2$ имеются два вакуумных вектора, а кратность вырождения возбужденных состояний равна 2 или 4.

В этом параграфе проведено также исследование собственных функций при помощи унитарного преобразования к новому представлению.

Приведем вначале необходимые для дальнейшего сведения из гармонического анализа и теории операторов.

1. Гармонический анализ. Пусть G - локально компактная коммутативная группа. Всякое неприводимое унитарное представление группы G одномерно, поэтому описание представлений сводится к описанию характеров группы G. *Характером* группы G называется комплекснозначная непрерывная функция $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ со свойствами $\chi(g+g') = \chi(g)\chi(g')$, $|\chi(g)| = 1$, где g и g' - любые элементы группы G. Множество характеров, снабженное операцией поточечного умножения и топологией равномерной сходимости на компактах, является локально компактной коммутативной группой, которую будем обозначать $\hat{G}$. Группа $\hat{G}$ называется *дуальной* группой к G или *двойственной по Понтрягину*. Группа $\hat{G}$ компактна тогда и только тогда, когда G дискретна. Имеет место теорема двойственности Понтрягина: $\hat{\hat{G}} = G$.

Пусть $U(g)$ - унитарное непрерывное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Тогда имеет место представление

$$U(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g)\, dE(\chi), \tag{1.1}$$

где $dE(\chi)$ - спектральная мера на $\hat{G}$.

Пусть группа G компактна. На группе G существует инвариантная мера dg (мера Хаара). В этом случае меру Хаара будем нормировать условием

$$\int_G dg = 1. \tag{1.2}$$

Множество характеров $\hat{G} = \left\{\chi_\alpha(g),\ \alpha \in I\right\}$, где α - абстрактный индекс, нумерующий характеры, образует полную ортонормированную систему в $L_2(G)$,

$$\int_G \chi_\alpha(g)\overline{\chi_\beta(g)}\,dg = \delta_{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера, $L_2(G)$ - гильбертово пространство комплекснозначных функций, квадратично суммируемых по мере Хаара на G.

В этом случае гильбертово пространство H допускает разложение в ортогональную прямую сумму

$$H = \bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha, \tag{1.4}$$

где H_α - максимальное подпространство, представление в котором кратно $\chi_\alpha(g)$. Эрмитов проектор на H_α имеет вид

$$P_\alpha = \int_G \overline{\chi_\alpha(g)}U(g)\,dg,\ \alpha \in I. \tag{1.5}$$

В силу (1.4), (1.5) формула (1.1) принимает вид

$$U(g) = \sum_{\alpha\in I} \chi_\alpha(g)P_\alpha. \tag{1.6}$$

Имеет место соотношение

$$U(g)P_\alpha = \chi_\alpha(g)P_\alpha. \tag{1.7}$$

2. Теория операторов. Пусть A - ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H и $\{\psi_n\}_1^\infty$ - ортонормированный базис в H. ***Следом*** оператора A называется выражение

$$\mathrm{Tr}\ A = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n,\ A\psi_n). \tag{2.1}$$

След существует не для всякого оператора, кроме того, след может зависеть от выбора ортонормированного базиса. Имеют место следующие утверждения:

1) Пусть A - положительный ограниченный оператор в H. Тогда сумма в правой части (2.1) сходится (к конечному или бесконечному пределу) и не зависит от выбора базиса.

2) Пусть A - положительный ограниченный оператор в H,

T_n - последовательность положительных ограниченных операторов, сходящаяся к тождественному в сильной топологии. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(T_n A T_n) = \mathrm{Tr}\ A.$$

3) Пусть K - компакт, dx - положительная мера на K. Пусть A - интегральный оператор в $L_2(K)$ с ядром $A(x,y)$, непрерывным на компакте $K\times K$. Тогда след оператора A корректно определен (не зависит от выбора базиса и конечен) и справедлива следующая формула:

$$\mathrm{Tr}\ A = \int_K A(x,x)\,dx.$$

3. Теорема о размерностях инвариантных подпространств. Характеры группы B_γ были изучены в § 3. Напомним, что группа G_p совпадает с B_{-1} при $p \geq 3$ и с B_{-2} при $p = 2$. Из п. 1 § 3 следует, что характеры группы G_p имеют вид $\chi(\alpha t)$, где $\alpha \in I_p$. Множество I_p состоит при $p \geq 3$ из элементов α вида

$$\alpha = 0 \text{ либо } \alpha = p^{-\gamma}(\alpha_0+\alpha_1 p+\ldots+\alpha_{\gamma-2}p^{\gamma-2}),$$

где $\gamma = 2,3,4,\ldots$, $0 \leq \alpha_j \leq p-1$, $\alpha_0\neq 0$, $j = 0,1,\ldots,\gamma-2$. При $p = 2$ множество I_2 состоит из элементов вида

$$\alpha = 0 \text{ либо } \alpha = 2^{-\gamma}(1+\alpha_1 2+\alpha_2 2^2+\ldots+\alpha_{\gamma-3}2^{\gamma-3}),$$

где $\gamma = 3,4,\ldots$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $j = 1,2,\ldots,\gamma-3$.

В соответствии с п. 1 § 11 оператор

$$P_\alpha = |G_p|^{-1}\int_{G_p} \chi(-\alpha t)U(t)\,dt,$$

где

$$|G_p| = \int_{G_p} dt = \begin{cases} 1/p \text{ при } p\geq 3, \\ 1/4 \text{ при } p=2, \end{cases} \tag{3.1}$$

является проекционным оператором на подпространство $H_\alpha = P_\alpha H$, $H = L_2(\mathbb{Q}_p)$, причем H_α является *инвариантным подпространством для представления* $U(t)$ и представление в H_α кратно $\chi(\alpha t)$. Имеет место следующая теорема о размерностях подпространств H_α:

Теорема. *Инвариантные подпространства* H_α *имеют следующие размерности:*

При $p \equiv 1 \pmod 4$ $\dim H_\alpha = \infty$ *для любого* $\alpha \in I_p$.

При $p \equiv 3 \pmod 4$ *для* $\alpha = 0$ $\dim H_\alpha = 1$; *для* $|\alpha|_p = p^\gamma$ *и четных* $\gamma \geq 2$ $\dim H_\alpha = p+1$.

При $p = 2$ *для* $\alpha = 0$ *или* $|\alpha|_2 = 2^3$ $\dim H_\alpha = 2$; *для* $|\alpha|_2 \geq 2^4, \alpha_1 = 1$ $\dim H_\alpha = 4$.

Для остальных $\alpha \in I_p$ $\dim H_\alpha = 0$.

Для доказательства теоремы используем следующее

Предложение 1. *Размерность подпространства* H_α, $\alpha \in I_p$, *выражается через след проектора* P_α *по формуле*

$$\dim H_\alpha = \operatorname{Tr} P_\alpha. \tag{3.2}$$

Доказательство предложения легко получается при помощи выбора соответствующего базиса в пространстве H.

Для вычисления следа оператора P_α будем использовать утверждения 2) и 3) из п. 2. Определим в $L_2(\mathbb{Q}_p)$ ограниченный оператор ω_n по формуле

$$\omega_n\psi(x) = \Omega(p^{-n}|x|_p)\psi(x), \quad \psi \in L_2(\mathbb{Q}_p), \tag{3.3}$$

где

$$\Omega(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Поскольку $\Omega(p^{-n}|\chi|_p) \to 1$ равномерно на каждом компакте при $n \to \infty$, то $\omega_n \to E$ в сильной топологии (E - тождественный оператор). В силу утверждения 2) из п. 2 имеем следующее соотношение:

$$\operatorname{Tr} P_\alpha = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n). \tag{3.5}$$

В силу определения оператора P_α (4.1) имеем

$$\operatorname{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n) = |G_p|^{-1} \int\limits_{|t| \leq 1/p} \chi(-\alpha t)\operatorname{Tr}(\omega_n U(t)\omega_n)\,dt. \tag{3.6}$$

Рассмотим подынтегральное выражение (3.6). Используя выражение (4.4) из § 11 для ядра $K_t(x,y)$ оператора эволюции $U(t)$ и утверждения 3) из п. 2, получим при $t \in G_p$, $t \neq 0$,

$$\mathrm{Tr}(\omega_n U(t)\omega_n) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \Omega(p^{-n}|x|_p) K_t(x,x) \Omega(p^{-n}|x|_p)\, dx =$$

$$= \int\limits_{|x|_p \le p^n} K_t(x,x)\, dx = \int\limits_{|x|_p \le p^n} \frac{\lambda_p(t)}{|t|_p^{1/2}} \chi\left(2x^2 \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right) dx. \qquad (3.7)$$

В силу формулы (2.3) § 5 имеем

$$\int\limits_{|y|_p \le 1} \chi(ay^2)\, dy = \begin{cases} \lambda_p(a)\, |a|_p^{-1/2} & \text{при } |a|_p \ge 1, \\ 1 & \text{при } |a|_p \le 1. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Преобразуем последний интеграл в (3.7) к виду (3.8):

$$\int\limits_{|x|_p \le p^n} \chi\left(2x^2 \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right) dx = p^n \int\limits_{|y|_p \le 1} \chi\left(2p^{-2n} y^2 \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right) dy =$$

$$= \begin{cases} \lambda_p(t)\, |t|_p^{-1/2} & \text{при } |t|_p \ge p^{-2n}, \\ p_n & \text{при } |t|_p \le p^{-2n}. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Здесь использованы соотношения

$$\lambda_p\left(2p^{-2n} y^2 \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right) = \lambda_p\left(2\frac{t}{2}\right) = \lambda_p(t),$$

$$|\sin t|_p = |t|_p, \quad |\cos t|_p = 1.$$

Поэтому в силу (3.7) и (3.9) имеем

$$\mathrm{Tr}(\omega_n U(t)\omega_n) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_p(t)}{|t|_p^{1/2}} & \text{при } |t|_p \ge p^{-2n}, \\ p^n & \text{при } |t|_p \le p^{-2n}. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Далее рассмотрим случай $p \ge 3$. Подставляя (3.10) в (3.6), получим при $n = 1,2,\ldots$

$$\mathrm{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n) = p^{n+1} \int\limits_{|t|_p \le p^{-2n}} \frac{\lambda_p(t)}{|t|_p^{1/2}} \chi(-\alpha t)\, dt +$$

$$+ p \int\limits_{p^{-2n+1} \le |t|_p \le p^{-1}} \frac{\lambda_p^2(t)}{|t|_p} \chi(-\alpha t)\, dt. \quad (3.11)$$

Обозначим первое слагаемое в (3.11) через J_1 и представим его в виде

$$J_1 = p \int\limits_{|\tau|_p \le 1} \frac{\lambda_p(\tau)}{|\tau|_p^{1/2}} \chi(-\alpha p^{2n}\tau)\, d\tau. \quad (3.12)$$

Поскольку мы интересуемся пределом при $n \to \infty$, то для любого заданного α выберем n такое, что $|\alpha p^{2n}|_p = p^{-2n}|\alpha|_p \le 1$. Тогда

$$\chi(-\alpha p^{2n}\tau) = 1, \ J_1 = p \int\limits_{|\tau|_p \le 1} \frac{\lambda_p(\tau)}{|\tau|_p^{1/2}} d\tau. \quad (3.13)$$

Вычисление J_1 производится следующим образом:

$$J_1 = p \int\limits_{|\tau|_p \le 1} \frac{\lambda_p(\tau)}{|\tau|_p^{1/2}} d\tau = p \sum_{0 \le \gamma < \infty} \frac{1}{p^{\gamma/2}} \int\limits_{|\tau|_p = p^\gamma} \lambda_p(\tau)\, d\tau =$$

$$= p \sum_{\substack{0 \le \gamma < \infty \\ \gamma \text{ четн}}} \frac{1}{p^{\gamma/2}} \int\limits_{|\tau|_p = p^\gamma} d\tau + \sum_{\substack{-1 \le \gamma < -\infty \\ \gamma \text{ нечетн}}} \frac{1}{p^{\gamma/2}} \varepsilon_p \sum_{1 \le k \le p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{|\tau|_p = p^\gamma \\ \tau_0 = k}} d\tau = p \sum_{\substack{-\infty < \gamma \le 0 \\ \gamma \text{ четн}}} \frac{1}{p^{\gamma/2}} p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

так как

$$\sum_{1 \le k \le p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0, \qquad \int\limits_{\substack{|\tau|_p = p^\gamma \\ \tau_0 = k}} d\tau = p^{\gamma - 1}. \quad (3.14)$$

Здесь $\varepsilon_p = 1$ при $p \equiv 1 \pmod 4$ и $\varepsilon_p = i$ при $p \equiv 3 \pmod 4$. Поэтому

$$J_1 = p \sum_{0\le n<\infty} \frac{1}{p^n}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p. \tag{3.15}$$

Обозначим второе слагаемое в (4.11) через

$$J_2 = p \int\limits_{p^{-2n+1}\le|t|_p\le p^{-1}} \frac{\lambda_p^2(t)}{|t|_p}\chi(-\alpha t)\,dt. \tag{3.16}$$

Предложение 2. *Пусть $n \ge 1$. Тогда имеет место равенство*

$$J_2 = \begin{cases} (p-1)(2n-1) & \text{при } \alpha=0,\ p\equiv1 \pmod 4, \\ (p-1)(2n-N)-1 & \text{при } |\alpha|_p=p^N,\ 2\le N\le 2n,\ p\equiv1 \pmod 4, \\ 1-p & \text{при } \alpha=0,\ p\equiv3 \pmod 4, \\ (-1)^N\dfrac{p+1}{2} - \dfrac{p-1}{2} & \text{при } |\alpha|_p=p^N,\ 2\le N\le 2n,\ p\equiv3 \pmod 4. \end{cases}$$

∎ Заметим, что поведение функции $\lambda_p^2(t)$ зависит от p. При $p \equiv 1 \pmod 4$ $\lambda_p^2(t) = 1$ при всех t; при $p \equiv 3 \pmod 4$ $\lambda_p^2(t) = (-1)^\gamma$, если $|t|_p = p^\gamma$.

В случае $\alpha = 0$, $p \equiv 1 \pmod 4$ имеем

$$J_2 = p \int\limits_{p^{-2n+1}\le|t|_p\le p^{-1}} \frac{dt}{|t|_p} = p \sum_{-2n+1\le\gamma\le-1} p^{-\gamma} \int\limits_{|\tau|_p=p^\gamma} dt =$$

$$= p \sum_{-2n+1\le\gamma\le-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = (p-1)(2n-1). \tag{3.17}$$

В случае $|\alpha|_p = p^N$, $2 \le N \le 2n$, $p \equiv 1 \pmod 4$, пользуясь формулой (4.2) § 4, имеем

$$J_2 = p \int\limits_{p^{-2n+1}\le|t|_p\le p^{-1}} \chi(-\alpha t)\frac{dt}{|t|_p} =$$

$$= p \sum_{-2n+1\le\gamma\le-1} \begin{Bmatrix} 1-1/p, & \gamma\le-N, \\ -1/p\ , & \gamma=-N+1, \\ 0\ , & \gamma\ge-N+2, \end{Bmatrix} =$$

$$= p \sum_{-2n+1 \le \gamma \le -N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - 1 = (p-1)(2n-N) - 1. \quad (3.18)$$

в случае $\alpha=0$, $p \equiv 3 \pmod 4$ имеем

$$J_2 = p \sum_{-2n+1 \le \gamma \le -1} (-1)^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1-p. \quad (3.19)$$

Наконец, в случае $|\alpha|_p=p^N$, $2 \le N \le 2n$, $p \equiv 3 \pmod 4$, имеем

$$J_2 = p \sum_{-2n+1 \le \gamma \le -1} (-1)^\gamma \begin{Bmatrix} 1-1/p, & \gamma \le -N, \\ -1/p, & \gamma=-N+1, \\ 0, & \gamma \ge -N+2, \end{Bmatrix} =$$

$$= p \sum_{-2n+1 \le \gamma \le -N} (-1)^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right) - (-1)^{N+1}. \quad (3.20)$$

Последнее выражение равно 1 при четном N и равно $-p$ при нечетном N. Формулы (3.17) - (3.20) доказывают предложение 2. ■

Поскольку

$$\mathrm{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n) = J_1 + J_2,$$

то в силу формулы (3.15) и предложения 2 получаем следующее

Предложение 3. *Пусть даны натуральное число n и p-адическое число α такие, что $p^{2n} \ge |\alpha|_p$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n) =$$

$$= \begin{cases} 2n(p-1)+1 & \text{при } \alpha=0,\ p\equiv1 \pmod 4, \\ (p-1)(2n-N+1) & \text{при } |\alpha|_p=p^N,\ 2\le N\le 2n,\ p\equiv1 \pmod 4, \\ 1 & \text{при } \alpha=0,\ p\equiv3 \pmod 4, \\ 0 & \text{при } |\alpha|_p=p^N,\ N \text{ нечетное},\ 2\le N\le 2n,\ p\equiv3 \pmod 4) \\ p+1 & \text{при } |\alpha|_p=p^N,\ N \text{ четное},\ 2\le N\le 2n,\ p\equiv3 \pmod 4). \end{cases}$$

Переходя в предложении 3 к пределу при $n \to \infty$ с учетом формул (3.2) и (3.5), получаем доказательство теоремы для $p \ne 2$.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$. Вместо формулы (3.11) (для $p \ge 3$) имеем при $p = 2$

$$\mathrm{Tr}(\omega_n P_\alpha \omega_n) = 4\cdot 2^n \int\limits_{|t|_2\le 2^{-2n}} \frac{\lambda_2^2(t)}{|t|_2^{1/2}}\chi(-\alpha t)\,dt +$$

$$+\ 4 \int\limits_{p^{-2n+1}\le |t|_2\le 4^{-1}} \frac{\lambda_2^2(t)}{|t|_2}\chi(-\alpha t)\,dt = J_1 + J_2. \qquad (3.21)$$

Аналогично предыдущему доказывается, что $J_1 = 2$. Далее, при $\alpha = 0$ имеем

$$J_2 = 4 \int\limits_{p^{-2n+1}\le |t|_2\le 2^{-2}} \frac{dt}{|t|_2}\lambda_2^2(t),$$

причем с учетом выражения для $\lambda_2(t)$ из (0.2) § 5, для $t = 2^\gamma(1+2t_1+\ldots)$ имеем

$$\lambda_2^2(t) = \frac{1}{2}(1+(-1)^{t_1}i)^2 = (-1)^{t_1}i.$$

Поэтому

$$J_2 = 4i \int\limits_{p^{-2n+1}\le |t|_2\le 2^{-2}} \frac{dt}{|t|_2}(-1)^{t_1} =$$

$$= 4i \sum_{-2n+1\le\gamma\le -2} 2^\gamma \left[\int\limits_{\substack{|t|_2=2^\gamma\\ t_1=0}} dt - \int\limits_{\substack{|t|_2=2^\gamma\\ t_1=1}} dt \right] = 0. \qquad (3.22)$$

Пусть теперь $|\alpha|_2=2^N$, $N<2n$. Тогда имеем

$$J_2 = 4i \sum_{-2n+1\le\gamma\le -2} 2^\gamma \int\limits_{|t|_2=2^\gamma} (-1)^{t_1}\chi(-\alpha t)\,dt =$$

$$= 4i \sum_{-2n+1\le\gamma\le -2} \frac{f(\gamma)}{2^\gamma}, \qquad (3.23)$$

где

$$f(\gamma) = \int\limits_{|t|_2=2^{\gamma}} (-1)^{t_1}\chi(-\alpha t)dt = f_0(\gamma) - f_1(\gamma),$$

$$f_j = \int\limits_{\substack{\omega t|_2=2^{\gamma}\\ t_1=j}} (-1)^{t_1}\chi(-\alpha t)dt,\ j=0,1.$$

При $|t|_2 \le 2^{-N}$ имеем $|\alpha t|_2 \le 1$. Тогда $f_0(\gamma) = f_1(\gamma)$ и $f(\gamma) = 0$. При $|t|_2=2^{-N+1}$ имеем $\{\alpha t\} = 1/2$. Тогда также $f_0(\gamma) = f_1(\gamma)$ и $f(\gamma) = 0$. При $|t|_2=2^{-N+2}$ имеем $\{\alpha t\} = 1/4+$ $+(\alpha_1+t_1)/2$. Тогда

$$f_0(\gamma) = exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{t_1}{2}\right)\right] \int\limits_{\substack{|t|_2=2^{\gamma}\\ t_1=0}} dt = i(-1)^{\alpha_1}2^{\gamma-2}.$$

Аналогично $f_1(\gamma) = -i(-1)^{\alpha_1}2^{\gamma-2}$. Поэтому при $|t|_2 = 2^{-N+2}$, т.е. при $\gamma=-N+2$, $f(-N+2) = 2^{-N+1}i(-1)^{\alpha_1}$. Наконец, при $|t|_2 \ge 2^{-N+3}$ имеем $f_0(\gamma) = f_1(\gamma)$ и $f(\gamma) = 0$. Таким образом, доказано следующее

Предложение 4. *При $p = 2$ имеет место формула*

$$J_2 = \begin{cases} 0 & , \alpha=0_2 \text{ или } |\alpha|_2=2^3, \\ -2(-1)^{\alpha_1}, & |\alpha|_2=2^N,\ N\ge4. \end{cases}$$

С учетом этого предложения доказательство теоремы закончено.

Замечание. *В силу теоремы $\chi(\alpha t)$ являются собственными значениями оператора эволюции $U(t)$ тогда и только тогда, когда число α имеет вид*

$$\alpha = 0 \text{ или } \alpha = p^{-\gamma}(\alpha_0+\alpha_1p+\ldots+\alpha_{\gamma-2}p^{\gamma-2}),$$

$$0 \le \alpha_j \le p-1,\ \alpha_0 \ne 0;\ j = 0,1,\ldots,\gamma-2,$$

причем при $p \equiv 1 \pmod 4$ $\gamma = 2,3,4,5,\ldots,$ *а при* $p \equiv 3 \pmod 4$ $\gamma = 2,4,6,\ldots;$ *при* $p = 2$

$$\alpha = 0 \text{ или } \alpha = 2^{-\gamma}(1+2+\alpha_2 \cdot 2^2 + \ldots + \alpha_{\gamma-3} \cdot 2^{\gamma-2}),$$

$$\gamma = 4,5,\ldots;\ \alpha_j = 0,1;\ j = 2,3,\ldots,\gamma-3.$$

Это множество индексов обозначим J_p. Числа из J_p аналогичны «уровням энергии» в стандартной квантовой механике.

4. Исследование собственных функций. До настоящего момента мы работали в пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$, причем действие оператора эволюции $U(t)$ на функции из этого пространства имело довольно сложный вид (4.4) § 11, что затрудняло его спектральный анализ.

Рассмотрим вначале случай $p \equiv 1 \pmod 4$. В этом случае поле $\mathbb{Q}_p$ содержит квадратный корень из -1, т.е. существует такой элемент $\tau \in \mathbb{Q}_p$, что $\tau^2 = -1$. Мы совершим унитарное преобразование и перейдем к новому представлению (будем называть его $\mathfrak{Z}$-представлением), в котором действие оператора эволюции задается весьма просто. Используя это представление, мы получим явные выражения для собственных функций оператора эволюции. Для функций $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ введем интегральный оператор $\mathfrak{Z}$ с ядром типа Гаусса по формуле

$$\mathfrak{Z}[f](x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left(\tau x^2 - \frac{\tau}{2}z^2 + 2xz\right) f(z)\,dz. \tag{4.1}$$

Предложение 1. *Оператор $\mathfrak{Z}$ (4.1) унитарный в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, переводит $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ на себя и справедлива формула обращения*

$$f(z) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left(\frac{\tau}{2}z^2 - \tau x - 2xz\right) \mathfrak{Z}[f](x)\,dx. \tag{4.2}$$

■ Предложение вытекает из представления

$$\mathfrak{Z}[f](x) = \chi(\tau x^2) F\left[f(z)\chi\left(-\frac{\tau}{2}z^2\right)\right](2x), \tag{4.3}$$

которое есть композиция четырех унитарных операторов. ■

Мы будем говорить, что формула (4.1) задает переход к $\mathfrak{Z}$-представлению. В $\mathfrak{Z}$-представлении динамика описывается следующей теоремой:

9*

Теорема 1. *Пусть* $p \equiv 1 \pmod 4$. *Тогда для любой функции* f *из* $L_2(\mathbb{Q}_p)$ *справедлива формула*

$$U(t)\Im[f](x) = \Im[f(e^{-\tau t}z)](x), \quad |t|_p \le 1/p. \tag{4.4}$$

■ Пусть сначала $f \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, тогда по предложению 1 $\Im[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, и пусть $f(z) = 0$ при $|z|_p > p^N$ и $\Im[f](y) = 0$ при $|y|_p \ge p^M$. В силу формул (3.8), (3.9) из § 11 после изменения порядка интегрирования имеем

$$U(t)\Im[f](x) = \frac{\lambda_p(t)}{|t|_p^{1/2}}\chi\left(-\frac{x^2}{\operatorname{tg} t}\right)\int_{|t|_p \le p^N} f(z)\chi\left(-\frac{\tau}{2}z^2\right) \times$$

$$\times \int_{|z|_p \le p^N} \chi\left(\left(\tau - \frac{1}{\operatorname{tg} t}\right)y^2 + \left(\frac{2x}{\sin t} + 2z\right)y\right)dy\,dz. \tag{4.5}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (4.5) используем формулу (2.1) § 5.

Положим

$$a = \tau - \frac{1}{\operatorname{tg} t}, \quad b = \frac{2x}{\sin t} + 2z. \tag{4.6}$$

Тогда

$$|a|_p = \left|\frac{\tau\sin t - \cos t}{\sin t}\right|_p = \frac{1}{|t|_p} > 1 \tag{4.7}$$

при $|t|_p \le 1/p$. Заметим, что так как левая часть (4.5) не зависит от M при $M \to \infty$, то мы можем выбрать число M сколь угодно большим. Поэтому при вычислении интеграла воспользуемся верхней строкой в формуле (2.1) § 5. Имеем далее

$$\left|\frac{b}{2a}p^M\right|_p = \left|\frac{x + z\sin t}{\tau\sin t - \cos t}p^M\right|_p = p^{-M}|x + z\sin t|_p. \tag{4.8}$$

Переменная z принадлежит кругу $|z| \le p^N$, следовательно, $p^{-M}|z\sin t|_p \le 1$ при достаточно большом M и $|t|_p \le 1/p$. Далее, переменная x тоже принадлежит конечному кругу, поскольку она входит в аргумент (4.8) функции $\Omega\left(\left|\frac{b}{2a}p^M\right|_p\right)$, которая не исчезает только при $p^{-M}|x+z\sin t|_p \le 1$. Поэтому при таких значениях параметров

$$\Omega\left(\left|\frac{b}{2a}p^M\right|_p\right) = 1. \tag{4.9}$$

Теперь заметим, что $\cos t - \tau\sin t = b^2$ с некоторым $b \in \mathbf{Q}_p$. Поэтому, используя соотношения (0.3) § 5, имеем

$$\lambda_p(a) = \lambda_p\left(-\frac{\cos t-\tau\sin t}{\sin t}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{\sin t}\right) =$$

$$= \lambda_p\left(-\frac{1}{t}\right) = \lambda_p(-t). \tag{4.10}$$

Таким образом, применяя (4.7), (4.8), (4.9) и (4.10), получаем при описанных значениях параметров

$$\int\limits_{|y|_p\le p^M} dy\chi\left(\left(\tau - \frac{1}{\operatorname{tg} t}\right)y^2 + \left(\frac{2x}{\sin t} + 2z\right)y\right) =$$

$$= \frac{\lambda_p(-t)}{|t|_p^{-1/2}}\chi\left(-\frac{\left(z + \frac{x}{\sin t}\right)^2\sin t}{\tau\sin t - \cos t}\right). \tag{4.11}$$

Следовательно, выражение (4.5) преобразуется к виду

$$U(t)\mathfrak{Z}[f](x) = \chi\left(x^2\left(-\frac{1}{\operatorname{tg} t} + \frac{1}{\sin t(\cos t-\tau\sin t)}\right)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{Q}_p} f(z)\chi\left(-\frac{\tau}{2}z^2 + \frac{z^2\sin t+2zx}{\cos t-\tau\sin t}\right)dz. \tag{4.12}$$

Воспользуемся соотношениями

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}t}+\frac{1}{\sin t(\cos t-\tau\sin t)}=\frac{\tau\left(\cos t+\frac{1}{\tau}\sin t\right)}{\cos t-\tau\sin t}=\tau,$$

$$-\frac{\tau}{2}+\frac{\sin t}{\cos t-\tau\sin t}=\frac{-\tau\cos t+\sin t}{2(\cos t-\tau\sin t)}=-\frac{\tau}{2}e^{2\tau t},$$

$$e^{\tau t}=\cos t+\tau\sin t.$$

Выражение (4.5) приобретает вид

$$U(t)\mathfrak{Z}[f](x)=\chi(\tau x^2)\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dz(e^{-\tau t}z)\chi\left(-\frac{\tau}{2}z^2+2zx\right),\qquad(4.13)$$

что совпадает с (4.4) на функциях $f\in\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. По непрерывности формула (4.4) продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{Q}_p)$. ■

Таким образом, динамика в $\mathfrak{Z}$-представлении в силу (4.4) дается простой формулой

$$f(z)\mapsto f(e^{-\tau t}z),\ f\in L_2(\mathbb{Q}_p).\qquad(4.14)$$

Можно рассматривать $\mathfrak{Z}$-представление как своеобразный p-адический аналог представления вторичного квантования, хорошо известного в стандартной квантовой механике.

В $\mathfrak{Z}$-представлении построим явные формулы для всех собственных функций оператора эволюции.

Найдем, наример, инвариантные векторы («вакуумы»), т.е. элементы $f(z)\in L_2(\mathbb{Q}_p)$, удовлетворяющие соотношению

$$U(t)\psi=\psi,\ |t|_p\le 1/p.\qquad(4.15)$$

Для этого найдем инвариантные векторы в $\mathfrak{Z}$-представлении, т.е. функции $f\in L_2(\mathbb{Q}_p)$, удовлетворяющие соотношению

$$f(e^{-\tau t}z)=f(z),\ |t|_p\le 1/p.\qquad(4.16)$$

Заметим, что любое ненулевое p-адическое число $z\in\mathbb{Q}_p^*$ однозначно представляется в каноническом виде $z=p^{\gamma}\varepsilon^k e^{a_p}$, где $|a|_p \le 1/p$. Динамика, задаваемая формулой (4.14), сводится к замене

$$z = p^\gamma \varepsilon^k e^a \mapsto e^{-\tau t} z = p^\gamma \varepsilon^k e^{a-\tau t}, \qquad (4.17)$$

т.е. числа γ и k в каноническом виде не меняются. Это означает, что любая функция $f(z)$ из $L_2(\mathbb{Q}_p)$, которая зависит только от γ и k, будет общим решением соотношения (4.16), т.е. будет инвариантным вектором. Эквивлентно, если $z \in \mathbb{Q}_p^*$ имеет каноническое представление $z = p^\gamma(z_0 + z_1 p + \dots)$, то *любая функция* $f(z) = f(|z|_p, z_0)$ *из* $L_2(\mathbb{Q}_p)$ *будет инвариантным вектором, и любой инвариантный вектор будет иметь такой вид.*

Приведем явный вид инвариантных векторов в исходном представлении. В силу формулы (4.1) имеем

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left(\tau x^2 - \frac{\tau}{2} z^2 + 2xz\right) f(|z|_p, z_0)\, dz =$$

$$= \sum_{-\infty<\gamma<\infty} \sum_{1\le k\le p-1} f(p^\gamma, k)\psi_{\gamma,k}(x), \qquad (4.18)$$

где

$$\psi_{\gamma,k}(x) = \int_{\substack{|z|_p = p^\gamma \\ z_0 = k}} dz\, \chi\left(\tau x^2 - \frac{\tau}{2} z^2 + 2xz\right).$$

Вычисления показывают, что

$$\psi_{\gamma,k}(x) = \chi(\tau x^2 + 2p^{-\gamma} kx) p^{\gamma-1} \Omega(p^{\gamma-1}|x|_p), \ \gamma \le 0.$$

В частности, при $f(|z|_p, z_0) = \Omega(|z|_p)$, $\delta(p^\gamma - |z|_p)$, $\gamma = 1,2,\dots$, из (4.18) получим вакуумные векторы:

$$\psi_0(x) = \Omega(|x|_p), \quad \psi_0(x) = \chi(\tau x^2)\delta(p^\gamma - |x|_p), \ \gamma = 1,2,\dots$$

Таким образом, мы видим, что размерность вакуумного подпространства бесконечна, что согласуется с теоремой из п. 3.

Для возбужденных состояний, т.е. для векторов ψ_α из H_α, уравнение

$$U(t)\psi_\alpha = \chi(\alpha t)\psi_\alpha, \ \alpha \in J_p, \ \alpha \neq 0, \ |t|_p \leq 1/p, \qquad (4.19)$$

после перехода в $\mathfrak{Z}$-представление $\psi_\alpha = \mathfrak{Z}[f_\alpha]$ запишется в виде

$$f_\alpha(e^{-\tau t}z) = \chi(\alpha y)f_\alpha(z), \ |t|_p \leq 1/p. \qquad (4.20)$$

учитывая формулу (4.17), находим, что общее решение уравнения (4.20) есть

$$f_\alpha(z) = \varphi(|z|_p, z_0)\chi(-\alpha\tau a), \qquad (4.21)$$

где φ - произвольная функция из $L_2(\mathbb{Q}_p)$, зависящая от параметра α. Подставляя выражение (4.21) в (4.1), получим явное представление для всех собственных функций задачи (4.19)

$$\psi_\alpha(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left(\tau x^2 - \frac{\tau}{2}z^2 + 2xz - \alpha\tau a\right)\varphi(|z|_p, z_0)\,dz,$$

где $z = p^\gamma \varepsilon^k e^a$.

5. Системы Вейля и когерентные состояния. В основе формализма p-адической квантовой механики, рассмотренной в пп. 2 - 4 § 11 лежит представление Вейля коммутационных соотношений. Представляет интерес изучение свойств этого представления вне связи с конкретными моделями. В частности, один из вопросов - описание таких представлений с точностью до унитарной эквивалентности. Начнем рассмотрение этого вопроса с изложения некоторых элементарных фактов из геометрии симплектических пространств.

Пусть $V = \mathbb{Q}_p^{2n}$, $n \geq 1$, B - невырожденная симплектическая форма на V, тогда пара (V,B) называется симплектическим пространством. Подпространство пространства V по определению невырождено, если сужение формы B на это подпространство невырождено. Если (V,B) - симплектическое пространство, то V представляется в виде прямой ортогональной относительно формы B суммы своих двумерных невырожденных подпространств h_i, $i = 1,2,\dots,n$ (так называемых гиперболических плоскостей):

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} h_i.$$

В каждой из таких плоскостей h_i выберем базис (e_i, f_i), $i = 1,2,\dots,n$, удовлетворяющий условию

$$B(e_i, f_i) = 1.$$

Построенный таким образом базис $\left\{(e_i, f_i), i = 1,2,\dots,n\right\}$ пространства V удовлетворяет условиям

$$(e_i, e_j) = (f_i, f_j) = 0,$$

$$(e_i, f_j) = - (f_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

и называется симплектическим. Матрица формы B в этом базисе имеет канонический вид

$$B = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Всюду далее считаем, что в пространстве V фиксирован симплектический базис и форма B имеет канонический вид. Справедливо неравенство:

$$|B(z,z')|_p \le \|z\|\|z'\|, \tag{5.1}$$

$z,z' \in V$, а норма $\|\cdot\|$ определена в п. 7 § 1. Под прямой суммой двух (и, аналогично любого конечного числа) конечномерных симплектических просранств $(V_1,B_1)\oplus(V_2,B_2)$ понимается конечномерное симплектическое пространство (V,B), где $V = V_1 \oplus V_2$ и

$$B((z_1,z_2),(z_1',z_2')) = B_1(z_1,z_1')+B_2(z_2,z_2'),$$

$$z_1,z_1' \in V_1, \quad z_2,z_2' \in V_2.$$

Пусть теперь (V,B) - $2n$-мерное симплектическое пространство над $\mathbb{Q}_p$. *Системой Вейля* над (V,B) назовем пару (H,W), где H - гильбертово пространство, W - отображение из V в семейство унитарных операторов на H, удовлетворяющее условию (соотношению Вейля):

$$W(x)W(y) = \chi(B(x,y))W(x+y), \tag{5.2}$$

где $x,y \in V$, $\chi_p(\xi)$ – аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$, удовлетворяющий условию:

$$\chi(\xi) \equiv 1,\ |\xi|_p \le 1 \text{ и } \chi(\xi) \not\equiv 1,\ |\xi|_p \le p \text{ (см. п. 1 § 3)},$$

причем отображение W непрерывно в сильной топологии на множестве унитарных операторов на H.

Прежде чем переходить к изучению свойств системы Вейля, отметим, что для построения новых систем Вейля из уже имеющихся можно использовать операции прямой суммы и тензорного произведения.

Пример 1. Система Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ над пространством $(V = \mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p,B)$, где операторы $W(z)$, $z \in V$, определяются по формуле (2.3) § 11.

Пример 2. Тензорное произведение $\otimes_{i=1}^{n}(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ n систем Вейля из примера 1 есть система Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p^n),W^{(n)})$ над пространством $(\mathbb{Q}_p^{2n},B)$, где

$$W^{(n)}(z) = \bigotimes_{i=1}^{n} W(z_i),\ z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{Q}_p^{2n}.$$

(Здесь мы воспользовались естественным изоморфизмом $\bigotimes_{i=1}^{n} L_2(\mathbb{Q}_p) \simeq L_2(\mathbb{Q}_p^n)$.)

Обозначим через V_0 следующую компактную подгруппу аддитивной группы пространства V:

$$V_0 = \left\{x \in V:\ \|x\|\le 1\right\}. \tag{5.3}$$

Пример 3. Пусть (V,B) – произвольное конечномерное симплектическое пространство над $\mathbb{Q}_p$. Гильбертово пространство L_2^{χ} определим как замкнутое подпространство в $L_2(V)$ следующего вида:

$$L_2^{\chi} = \left\{\phi \in L_2(V):\ \phi(x+x') = \chi(B(x,x'))\phi(x),x' \in V_0\right\}, \tag{5.4}$$

а семейство операторов $\tilde{W}(z)$, $z \in V$, по формуле

$$\tilde{W}(z)\phi(x) = \chi(B(z,x))\phi(x-z),\ z \in V,\ \phi \in L_2^{\chi}. \tag{5.5}$$

Тогда пара $(L_2^{\chi},\tilde{W})$ есть система Вейля над (V,B).

■ Унитарность операторов $\tilde{W}(z)$, $z \in V$, очевидна. Достаточно проверить соотношение Вейля (5.2).

$$\tilde{W}(z)\tilde{W}(z')\phi(x) = \tilde{W}(z)\Big[\chi(B(z',x))\phi(x-z')\Big] =$$

$$= \chi(B(z,x))\chi(B(z',x-z))\phi(x-z'-z) =$$

$$\chi(B(z,z'))\chi(B(z+z',x))\phi(x-(z+z')) =$$

$$= \chi(B(z,z'))\tilde{W}(z+z')\phi(x).$$

Аналогично проверяется, что операторы $\tilde{W}(z)$, $z \in V$, переводят L_2^{χ} в L_2^{χ}. ■

Исследование свойств систем Вейля над p-адическим симплектическим пространством существенно опирается на понятие вакуумного вектора. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой системы Вейля (H,W) над пространством (V,B) существует вектор $\phi_0 \in H$ такой, что справедливо равенство*

$$W(x)\phi_0 = \phi_0 \tag{5.6}$$

для всех $x \in V_0$. Вектор ϕ_0 назовем вакуумным вектором системы (H,W).

■ Прежде всего отметим, что V_0 (как и V) является коммутативной группой относительно сложения.

Пусть $x,y \in V_0$. Тогда справедливы неравенства (см. (5.1))

$$|B(x,y)|_p \le \|x\|\|y\| \le 1.$$

Учитывая свойство характера

$$\chi(\xi) \equiv 1, \ |\xi|_p \le 1, \tag{5.7}$$

получаем, что сужение (H,W_0) системы Вейля (H,W) на $V_0(W_0 = W|_{V_0})$ есть унитарное представление группы V_0 в пространстве H. Действительно, соотношение Вейля (5.2) при сужении на (H,W_0) принимает вид

$$W_0(x)W_0(y) = W_0(x+y), \ x,y \in V_0.$$

Таким образом, изучение сужения системы Вейля (H,W_0) на V_0 эквивалентно изучению унитарного представления компактной коммутативной группы V_0.

По известной теореме из теории представлений, неприводимые унитарные представления компактной коммутативной группы одномерны (т.е. являются характерами этой группы). Группа $\hat{V}_0$ характеров группы V_0 (двойственная по Понтрягину) изоморфна факторгруппе V/N_0, $\hat{V}_0 \simeq V/N_0$ (см. п. 1 § 3) и в силу невырожденности формы B всякий характер группы V_0 имеет вид

$$\lambda_{\hat{\alpha}}(x) = \chi(B(\alpha,x)), \ x \in V_0,$$

где α - произвольный представитель класса эквивалентности $\hat{\alpha} \in V/N_0$. В силу (5.7) $\lambda_{\hat{\alpha}}(x)$ не зависит от выбора представителя $\alpha \in \hat{\alpha}$. Таким образом, пространство представления H допускает разложение в ортогональную прямую сумму

$$H = \bigoplus_{\alpha \in V/N_0} H_\alpha, \tag{5.8}$$

где H_α- максимальное подпространство, представление в котором кратно $\lambda_{\hat{\alpha}}(x)$. В силу (5.8) найдется такое $\hat{\alpha} \in V/N_0$, что H_α не тривиально. Обозначая через $\|\cdot\|_H$ норму в пространстве H, выберем элемент $\psi \in H_{\hat{\alpha}}$, удовлетворяющий условию $\|\psi\|_H = 1$. Тогда в качестве искомого вектора ϕ_0 можно выбрать вектор

$$\phi_0 = W(\tfrac{1}{2}\alpha)\psi, \ \alpha \in \hat{\alpha} \in V/N_0. \tag{5.9}$$

Действительно, пользуясь соотношением Вейля (5.2) и условием $\psi \in H_\alpha$, при $x \in V_0$ получаем

$$W(x)\phi_0 = W(x)W(\tfrac{1}{2}\alpha)\psi = \chi(B(x,\alpha))W(\tfrac{1}{2}\alpha)W(x)\psi =$$

$$= \chi(-B(\alpha,x))W(\tfrac{1}{2}\alpha)\chi(B(\alpha,x)\psi = W(\tfrac{1}{2}\alpha)\psi = \phi_0. \ \blacksquare$$

Следующее важное понятие - это понятие системы когерентных состояний.

Пусть $\phi_0 \in H$ - вакуумный вектор системы Вейля (H,W). Из каждого класса эквивалентности $\hat{\alpha} \in V/N_0$ выберем по одному представителю $\alpha \in \hat{\alpha}$, семейство таких представителей обозначим через J_0. Построим следующее семейство векторов $\Phi \subset H$:

$$\Phi = \left\{\phi_\alpha = W(\alpha)\phi_0,\ \alpha \in J_0\right\}. \tag{5.10}$$

Пусть α_1 и α_2 принадлежат одному и тому же классу эквивалентности $\hat{\alpha} \in V/V_0$. Тогда, пользуясь формулами (5.2), (5.6) и (5.7), получаем

$$\phi_{\alpha_1} = W(\alpha_1)\phi_0 = W(\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_2))\phi_0 =$$

$$= \chi(-B(\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2))W(\alpha_2)W(\alpha_2-\alpha_1)\phi_0 = \chi(B(\alpha_1,\alpha_2))W(\alpha_2)\phi_0 =$$

$$= \chi(B(\alpha_1,\alpha_2))\phi_{\alpha_2}.$$

Следовательно, $|\phi_\alpha|$ не зависит от выбора представителя в классе $\hat{\alpha} \in V/V_0$.

Семейство векторов (5.10) назовем системой *когерентных состояний* (*КС*) системы Вейля (H,W). Основное свойство системы КС отражает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в пространстве H существует единственный (с точностью до множителя) вакуумный вектор ϕ_0 системы Вейля (H,W). Тогда система КС системы Вейля (H,W) образует ортонормированный базис в H.*

■ Докажем, что подпространство $H_{2\alpha}$ (см. (5.8)) натянуто на вектор $\phi = W(-\alpha)\phi_0$. Действительно, при $x \in V_0$ имеем

$$W(x)\phi = W(x)W(-\alpha)\phi_0 = \chi(2B(x,-\alpha))W(\alpha)\phi_0 = \chi(B(2\alpha,x))\phi,$$

таким образом, $\phi \in H_{2\alpha}$. Обратно, пусть $\phi \in H_{2\alpha}$, $\|\phi\| = 1$. Тогда, в силу формулы (5.9) и единственности вакуумного вектора, получаем:

$$\phi_0 = W(\alpha)\phi,$$

следовательно, $\phi = W(-\alpha)\phi_0$. Дальнейшее доказательство непосредственно вытекает из разложения (5.8) ■

Замечание. *Мы видим, что над полем p-адических чисел введенная система когерентных состояний образует ортонормированный базис, в отличие от вещественного случая, где когерентные состояния образуют переполненную систему.*

Для дальнейшего рассмотрения нам потребуются следующие определения.

Система Вейля (H,W) называется неприводимой, если не существует подпространства пространства H, отличного от нулевого и самого H, инвариантного относительно действия операторов $W(x)$, $x \in V$. Будем говорить, что (H,W) представляется в виде прямой суммы систем Вейля (H_i,W)

$$(H,W) = \underset{i}{\oplus}(H_i,W),$$

если выполнено условие $H = \underset{i}{\oplus} H_i$ и подпространства H_i инвариантны относительно действия операторов $W(x)$, $x \in V$.

Семейство вакуумных векторов системы Вейля (H,W) образует подпространство H_0 пространства H, которое будем называть *вакуумным подпространством* системы (H,W). В подпространстве H_0 фиксируем некоторый ортонормированный базис $\left\{\phi_0^i,\ i \in I\right\}$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Система Вейля (H,W) неприводима тогда и только тогда, когда вакуумное подпространство H_0 этой системы одномерно. В противном случае (H,W) представляется в виде прямой суммы следующего вида:*

$$(H,W) = \underset{i\in I}{\oplus}(H_i,W),$$

где подпространство H_i натянуто на векторы

$$\left\{\phi_\alpha^i = W(\alpha)\phi_0^i,\ \alpha \in J_0\right\}.$$

■ Пусть H_0 одномерно и $\phi_0 \in H_0$ - вакуумный вектор системы (H,W). Допустим, что (H,W) приводима. Тогда существует подпространство H' пространства H, отличное от нулевого и самого H, инвариантное относительно действия операторов $W(x)$, $x \in V$. Рассмотрим систему Вейля (H',W). Согласно теореме 1 существует вакуумный вектор ϕ_0' этой системы. В силу единственности вакуумного вектора имеем $\phi_0' = \phi_0$.

Согласно теореме 2 семейство векторов

$$\left\{\ \phi_\alpha = W(\alpha)\phi_0,\ \alpha \in J_0\ \right\}$$

образует ортонормированный базис в H, но $\phi_\alpha \in H'$, следовательно $H' = H$. Полученное противоречие доказывает неприводимость системы (H,W).

Пусть теперь H_0 не одномерно. Докажем, что при $i \neq j$ подпространства H_i и H_j ортогональны. Для этого, в силу определения этих подпространств, достаточно доказать справедливость формулы

$$\left(W(x)\phi_0^i, W(y)\phi_0^j\right) = 0, \ x,y \in V, \ i,j \in I, \ i \neq j. \qquad (5.11)$$

Пусть $z \in V_0$. В силу унитарности оператора $W(z)$ и формул (5.2) и (5.6) имеем:

$$\left(W(x)\phi_0^i, W(y)\phi_0^j\right) = \left(W(z)W(x)\phi_0^i, W(z)W(y)\phi_0^j\right) =$$

$$= \left(\chi(2B(z,x))W(x)\phi_0^i, \chi(2B(z,y))W(y)\phi_0^j\right) =$$

$$= \chi(2B(z,x-y))\left(W(x)\phi_0^i, W(y)\phi_0^j\right). \qquad (5.12)$$

Для любых $x,y \in V$, $x-y \notin V_0$, всегда можно найти такое $z \in V_0$, что $\chi(2B(z,x-y)) \neq 1$, и в этом случае из (5.12) следует (5.11). В случае $x-y \in V_0$ при $i \neq j$ имеем:

$$\left(W(x)\phi_0^i, W(y)\phi_0^j\right) = \left(W(-y)W(x)\phi_0^i, \phi_0^j\right) = \chi(B(-y,x))\left(\phi_0^i, \phi_0^j\right) = 0.$$

Формула (5.11) доказана.

Рассмотрим теперь пространство $\tilde{H} = \bigoplus_{i\in I} H_i$ и докажем, что $\tilde{H} = H$. Допустим обратное и рассмотрим ортогональное дополнение $\tilde{H}^\perp$ к $\tilde{H}$ в H. В силу унитарности операторов $W(x)$, $x \in V$ $\tilde{H}^\perp$ инвариантно относительно действия этих операторов. Рассмотрим систему Вейля $(\tilde{H}^\perp, W)$. По теореме 1 существует вакуумный вектор $\tilde{\phi}_0$ этой системы, который удовлетворяет соотношению

$$W(x)\tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}_0 \ , \ x \in V_0,$$

следовательно, $\tilde{\phi}_0 \in H_0$, что невозможно в силу условия $H_0 \subset \tilde{H}$. Полученное противоречие доказывает справедливость формулы

$$H = \tilde{H} = \bigoplus_{i\in I} H_i.$$

Инвариантность подпространств H_i, $i \in I$, относительно действия операторов $W(x)$, $x \in V$, непосредственно вытекает из определения этих подпространств. ∎

В качестве приложения теоремы 3 докажем неприводимость систем Вейля из примеров 1 - 3. Для этого, согласно теореме, достаточно показать одномерность вакуумных подпространств.

∎ Пусть $\phi_0 \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ - вакуумный вектор системы Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ из примера 1. Тогда он удовлетворяет соотношению (см. (2.3) § 11)

$$\chi(2px+pq)\phi_0(x+q) = \phi_0(x), \tag{5.13}$$

где $z = (q,p) \in V_0 = B_0 \times B_0$, $x \in \mathbb{Q}$. Полагая в (5.13) $q = 0$, получаем формулу

$$\chi(2px)\phi_0(x) = \phi_0(x),$$

из которой следует, что

$$\operatorname{supp} \phi_0 \subset \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : \chi(2px) = 1,\ p \in B_0 \right\} = B_0.$$

Полагая в (5.13) $p = 0$, получим

$$\phi_0(x) = \phi_0(x+q),\ x,q \in B_0.$$

Следовательно, $\phi_0(x) = C\Omega(|x|_p)$, где $\Omega(|x|_p)$ - характеристическая функция B_0 (см. п. 2 § 6), C - произвольная постоянная. Таким образом, вакуумное подпространство H_0 системы $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ одномерно.

Неприводимость системы Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p^n),W^{(n)})$ непосредственно следует из неприводимости системы Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ и определения тензорного произведения систем Вейля. Вакуумный вектор этой системы имеет вид:

$$\phi_0^{(n)}(x) = \Omega(\|x\|) = \prod_{i=1}^{n} \Omega(|x_i|_p, x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Неприводимость системы Вейля $(L_2^{\chi},\tilde{W})$ из примера 3 доказывается аналогично неприводимости $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$. Вакуумный вектор в этом случае имеет вид $\phi_0(x) = \Omega(\|x\|)$. ∎

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Всякая система Вейля представляется в виде прямой суммы неприводимых систем Вейля.*

По определению, назовем две системы Вейля (H,W) и $(\tilde{H},\tilde{W})$ над пространством (V,B) эквивалентными, если существует унитарный оператор U: $H \to \tilde{H}$, удовлетворяющий условию

$$UW(x) = \tilde{W}(x)U, \quad x \in V. \tag{5.14}$$

Докажем еще одно следствие теоремы 3.

Следствие 2. *Неприводимые системы Вейля над пространством* (V,B) *эквивалентны.*

■ Пусть (H,W) и $(\tilde{H},\tilde{W})$ - неприводимые системы Вейля над пространством (V,B). В силу теорем 1 - 3 для каждой из этих систем существует единственный с точностью до множителя вакуумный вектор $\phi_0 \in H$ и $\tilde{\phi}_0 \in \tilde{H}$ и пространства H и $\tilde{H}$ натянуты на базисы из когерентных состояний

$$\Phi=\left\{\phi_\alpha=W(\alpha)\phi_0, \alpha\in J_0\right\}, \tag{5.15″}$$

$$\tilde{\Phi}=\left\{\tilde{\phi}_\alpha=\tilde{W}(\alpha)\tilde{\phi}_0, \alpha\in J_0\right\}. \tag{5.15″}$$

Построим унитарный оператор U: $H \to \tilde{H}$, по формуле

$$U\phi_\alpha = \tilde{\phi}_\alpha, \quad \alpha \in J_0. \tag{5.16}$$

Легко убедиться в том, что оператор (5.13) удовлетворяет условию (5.14). Действительно, соотношение (5.14) достаточно установить для базисных векторов ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$. Используя формулы (5.12), (5.15), (5.16) и замечание о произвольности выбора представителей J_0, получаем:

$$UW(x)\phi_\alpha = UW(x)W(\alpha)\phi_0 = \chi(B(x,\alpha))UW(x+\alpha)\phi_0 =$$

$$= \chi(B(x,\alpha))U\phi_{\vee+\alpha} = \chi(B(x,\alpha))\tilde{\phi}_{x+\alpha} = \chi(B(x,\alpha))\tilde{W}(x+\alpha)\tilde{\phi}_0 =$$

$$= \tilde{W}(x)\tilde{W}(\alpha)\tilde{\phi}_0 = \tilde{W}(x)U\phi_\alpha. \ ■$$

6. Симплектическая группа. По определению, симплектической группой $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ назовем группу линейных автоморфизмов пространства $V = \mathbb{Q}_p^{2n}$, сохраняющих симплектическую форму. Каждому элементу $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ можно поставить в соответствие матрицу (g_{ij}), $1 \le i,j \le 2n$, в некотором базисе. Под нормой матрицы g будем понимать величину

$$\|g\| = \max_{1\le i,\, j\le 2n} |g_{ij}|_p. \tag{6.1}$$

Отметим, что для $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$, $\det g = 1$. Нас прежде всего будет интересовать подгруппа группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$, определяемая следующей леммой:

Лемма. *Семейство матриц* $G = \left\{g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p):\ \|g\| = 1\right\}$ *образует подгруппу группы* $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$.

■ Докажем, что для любого элемента $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ справедливо неравенство

$$\|g\| \ge 1. \tag{6.2}$$

Действительно, пользуясь определением $\det g$ и свойствами нормы (6.1), получаем

$$1 = |\det g|_p \le \max_{1\le i_1,\dots,i_{2n}\le 2n} |g_{1i_1}\cdots g_{2ni_{2n}}|_p \le \|g\|^{2n}.$$

Пусть теперь $g,h \in G$. Докажем, что $gh \in G$. Пользуясь формулами (6.1) и (6.2), получаем

$$1 \le \|gh\| \le \max_{1\le i,\, j\le 2n} \left|\sum_{k=1}^{2n} g_{ik}h_{kj}\right|_p \le \|g\|\,\|h\| = 1.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что если $g \in G$, то $g^{-1} \in G$:

$$1 \le \|g^{-1}\| \le \max_{1\le i,\, j\le 2n} \left|(-1)^{i+j}M_{ij}\right|_p \le \|g\|^{2n-1} = 1,$$

где M_{ij} – дополнительный минор элемента g_{ij} в матрице g. ■

Замечание 1. Построенная группа G есть симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_p)$ над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Она является максимальной компактной подгруппой группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$.

Замечание 2. В случае $n = 1$ группа матриц $\Big\{T_t,$ $t \in G_p\Big\}$, построенная в § 11 и задающая эволюцию классического гармонического осциллятора, является подгруппой группы G.

Пусть $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$, $x \in V$. Через gx обозначим следующий элемент пространства V:

$$(gx)_i = \sum_{j=1}^{2n} g_{ij} x_j. \tag{6.3}$$

Формула (6.3) определяет действие группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ на пространстве V.

Рассмотрим произвольную неприводимую систему Вейля (H,W) на пространстве (V,B). В силу того, что $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ действует на V транзитивно и сохраняет симплектическую форму, получаем, что (H,W_g), $W_g(x) = W(gx)$, является неприводимой системой Вейля на (V,B). Следовательно, по следствию 2 теоремы 3 п. 5 существует унитарный оператор $U(g)$: $H \to H$, удовлетворяющий условию

$$U(g)W(x) = W(gx)U(g), \ g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p), \ x \in V. \tag{6.4}$$

Построенное таким образом семейство операторов $\{U(g),\ g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)\}$ образует проективное представление группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ в пространстве H, которое становится унитарным на двулистном накрытии группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ (так называемой *метаплектической группе*). Нас будет интересовать сужение этого представления на подгруппу G. Заметим также, что в силу неприводимости системы Вейля (H,W), формула (6.4) определяет $U(g)$ однозначно с точностью до фазового множителя. *При* $n = 1$ *оператор эволюции* $U(t)$, $t \in G_p$, квантового p-адического гармонического осциллятора, построенный в п. 4 § 11, есть не что иное, как представление подгруппы $\left\{T_t,\ t \in G_p\right\}$ группы G, определяемое по формуле (6.4) с помощью системы Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p),W)$ из примера 1 п. 5.

При $n > 1$ аналогичный оператор можно построить с помощью тензорного произведения n операторов $U(t)$ одномерного осциллятора, используя систему Вейля $(L_2(\mathbb{Q}_p^n),W^{(n)})$ из примера 2 п. 5. В обоих случаях определяемое формулой (6.4) представление оказывается унитарным (а не проективным). То же самое справедливо и для всей группы G. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Семейство операторов* $\{U(g),\ g \in G\}$, *удовлетворяющих соотношению* (6.4) *для некоторой неприводимой системы Вейля* (H,W) *над пространством* (V,B), *образует унитарное представление группы* G *в пространстве* H.

■ В силу эквивалентности неприводимых систем Вейля утверждение теоремы достаточно доказать для произвольной фиксированной неприводимой системы Вейля. В качестве такой системы выберем систему Вейля $(L_2^\chi,\tilde{W})$ из примера 3 п. 5.

В пространстве L_2^χ определим семейство операторов $\{\tilde{U}(g),\ g \in G\}$ по формуле:

$$\tilde{U}(g)f(z) = f_g(z) = f(g^{-1}z),\ f \in L_2^\chi. \tag{6.5}$$

Легко убедиться в том, что $\tilde{U}(g)$, $g \in G$, переводит L_2^χ в L_2^χ. Действительно, при $f \in L_2^\chi$, $z' \in V_0$, $g \in G$ справедливы равенства

$$f_g(z+z') = f(g^{-1}z+g^{-1}z') =$$
$$= \chi(B(g^{-1}z,g^{-1}z'))f(g^{-1}z) = \chi(B(z,z'))f_g(z).$$

Используя определения операторов $\tilde{W}(z)$ и $\tilde{U}(g)$, не составляет труда проверить выполнение соотношения (6.4) для системы Вейля $(L_2^\chi,\tilde{W})$ и операторов $\tilde{U}(g)$, $g \in G$.

Действительно, при $f \in L_2^\chi$ имеем:

$$\tilde{U}(g)\tilde{W}(z)f(x) = \tilde{U}(g)\Big[\chi(B(z,x))f(x-z)\Big] =$$
$$= \chi(B(gz,x))f(g^{-1}(x-gz)) = \tilde{W}(gz)f(g^{-1}x) = \tilde{W}(gz)\tilde{U}(g)f(x).$$

Очевидно, что семейство операторов $\{\tilde{U}(g),\ g \in G\}$ образует унитарное представление группы G в пространстве L_2^χ. Из неприводимости системы Вейля $(L_2^\chi,\tilde{W})$ следует, что оператор $\tilde{U}(g)$, $g \in G$, удовлетворяющий соотношению (6.4), определен однозначно с точностью до фазового множителя, следовательно, произвольное представление $\{U(g),\ g \in G\}$, удовлетворяющее условию теоремы 1, также является унитарным (не проективным). ■

Изучение свойств системы Вейля дает возможность получить некоторую информацию о представлении $\Big\{U(g),\ g \in G\Big\}$ группы G, определяемом формулой (6.4).

Будем говорить, что вектор $\phi_0 \in H$ является собственным вектором представления $\left\{U(g),\ g \in G\right\}$ в пространстве H, если он обладает свойством:

$$U(g)\phi_0 = \lambda(g)\phi_0,$$

где $\lambda(g)$ - комплексное число, по модулю равное 1.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* (H,W) *- неприводимая система Вейля над* (V,B); $\{U(g),\ g \in G\}$ *- унитарное представление группы* G *в* H, *определяемое условием* (6.4). *Тогда вакуумный вектор* ϕ_0 *системы Вейля* (H,W) *является собственным вектором представления* $\{U(g),\ g \in G\}$.

■ По условию вектор $\phi_0 \in H$ обладает свойством $W(z)\phi_0 = \phi_0$, $z \in V_0$. Так как V_0 инвариантно относительно действия $g \in G$, то справедливо равенство:

$$W_g(z)\phi_0 = \phi_0 \tag{6.6}$$

и, следовательно, ϕ_0 - вакуумный вектор неприводимой системы Вейля (H,W_g). С другой стороны, из (6.4) следует, что $U(g)\phi_0$, $g \in G$, - также вакуумный вектор (H,W_g). С учетом (6.6) и теоремы 3 п. 5 отсюда следует утверждение теоремы.■

7. Исследование собственных функций при $p \equiv 3 \pmod 4$. Как отмечалось, исследование спектральных свойств гармонического осциллятора, построенного в п. 4 § 11 эквивалентно исследованию представления группы T матриц вида

$$T_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},\ t \in G_p\ (\text{см. } (1.6)\ \S\ 11),$$

задаваемого формулами (4.3) - (4.4) § 11. Эта задача полностью решена для случая $p \equiv 1 \pmod 4$ (см. п. 4), однако для случая $p \equiv 3 \pmod 4$ вычислены лишь размерности собственных подпространств (см. п. 3).

Исследование представления группы T тесно связано с исследованием более широкой группы S матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{Q}_p,\ a^2+b^2 = 1.$$

В рассматриваемом случае $p \equiv 3 \pmod 4$ группа S компактна (см. п. 5 § 1) и является подгруппой группы $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}_p)$.

Для исследования собственных функций фазовое пространство $V = \mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p$ классической системы удобно рассматривать как квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_p$: $V \cong \mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ (см. п. 4 § 1). Вводя обозначение $i = \sqrt{-1}$, элемент $z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ можно однозначно представить в виде $z = x+iy$, через $\bar{z}$ обозначим сопряженный элемент из $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$: $\bar{z} = x-iy$, $x,y \in \mathbb{Q}_p$. Группа S изоморфна подгруппе мультипликативной группы $\mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ следующего вида:

$$S \simeq \left\{z \in \mathbb{Q}_p^* (\sqrt{-1}):\ z\bar{z} = 1\right\}.$$

Введем также функцию e^{it}: $G_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p^* (\sqrt{-1})$ по формуле:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t,\ t \in G_p.$$

Эта функция удовлетворяет соотношению:

$$e^{it}e^{it'} = e^{i(t+t')}.$$

Группа T изоморфна подгруппе $\mathbb{Q}_p^* (\sqrt{-1})$ следующего вида:

$$T \simeq \left\{e^{it},\ t \in G_p\right\}.$$

Очевидно, что группа T есть подгруппа группы S. Более того, справедлива следующая

Лемма 1. *Группа S изоморфна (при $p \equiv 3 \pmod 4$) прямому произведению циклической группы порядка $p+1$ Z_{p+1} и группы T:*

$$S \simeq Z_{p+1}\times T. \tag{7.1}$$

■ Дадим набросок доказательства. Из равенства $a^2+b^2 = 1$, $a,b \in \mathbb{Q}_p$ при $p \equiv 3 \pmod 4$ следует, что либо $|a|_p = 1$, $|b|_p \le 1$, либо $|a|_p \le 1$, $|b|_p = 1$ (см. п. 4 § 1).

Отсюда и из того факта, что функция $\sin t$ отображает взаимно однозначно G_p на G_p (см. п. 4 § 2), легко доказать, что любое $a+ib \in S$ представляется в виде:

$$a+ib = (a_0+ib_0)\cdot(\cos t+i\sin t) = (a_0+ib_0)e^{it}$$

при некотором $t \in G_p$ и a_0 и b_0, удовлетворяющих соотношению

$$a_0^2 + b_0^2 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{7.2}$$

Множество пар (a_0, b_0), удовлетворяющих (7.2), изоморфно некоторой подгруппе мультипликативной группы $\mathbb{F}_p^*(\sqrt{-1})$ квадратичного расширения поля $\mathbb{F}_p$. Эта подгруппа является циклической (как любая подгруппа мультипликативной группы конечного поля). Порядок этой группы равен числу различных решений сравнения (7.2), которое может быть вычислено методом гауссовых сумм, и равно $p+1$. ■

Прежде чем переходить к исследованию собственных функций, нам потребуются следующие свойства квадратичного расширения $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$. Через ε обозначим фиксированный элемент из $\mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$ такой, что $\varepsilon\bar{\varepsilon} = -1$.

Лемма 2. *При* $p \equiv 3 \pmod 4$ *любой элемент* $z \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$ *можно представить в виде*:

$$z = r\varepsilon^k c^n e^{i\tau}, \tag{7.3}$$

где $r = r(z) \in \mathbb{Q}_p^*$, $\left(\frac{r_0}{p}\right) = 1$; $k = k(z) = 0,1$; c *– образующая группы* $Z_{p+1} \simeq S/T$; $n = n(z) = 0,1,\ldots,p$; $\tau = \tau(z) \in G_p$.

■ Пусть $z \in \mathbb{Q}_{p_2}^*(\sqrt{-1})$. При $p \equiv 3 \pmod 4$ возможны два случая: либо $z\bar{z} = a^2$, либо $z\bar{z} = -a^2$, $a \in \mathbb{Q}_p$ (см. п. 4 § 1). В первом случае выберем в качестве r квадратный корень из $z\bar{z}$, принадлежащий $\mathbb{Q}_p^{*2}$: $r = \sqrt{z\bar{z}}$, тогда $\frac{1}{r}z \in S$, $k = 0$ и формула (7.3) вытекает из (7.1). Во втором случае $r = \sqrt{-z\bar{z}} \in \mathbb{Q}_p^{*2}$ и $\frac{1}{r\varepsilon}z \in S$, $k = 1$. Дальнейшие рассуждения очевидны. ■

Представление (7.3) будем называть *полярным разложением* элемента $z \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$. Как следует из леммы 2, полярное разложение определяет на $\mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$ четыре функции:

$$r(z)\colon\ \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1}) \longrightarrow \left\{x \in \mathbb{Q}_p^*,\ \left(\frac{x_0}{p}\right) = 1\right\};$$

$$k(z)\colon\ \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1}) \longrightarrow \{0,1\};$$

$$n(z)\colon\ \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1}) \longrightarrow \{0,1,\ldots,p\};$$

$$\tau(z)\colon\ \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1}) \longrightarrow G_p.$$

По построению, эти функции обладают следующими свойствами:

$$r(e^{it}z) = r(z),\ k(e^{it}z) = k(z),$$

$$n(e^{it}z) = n(z),\ \tau(e^{it}z) = \tau(z) + t, \tag{7.4}$$

$$z \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1}),\ t \in G_p.$$

Менее очевидные свойства этих функций отражает следующая

Лемма 3. *Пусть* $z, z' \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$, *причем* $\|z\| \geq p$, $\|z'\| \leq 1$ $(z' \in V_0)$. *Тогда справедливы соотношения*:

1) $|r(z+z') - r(z)|_p \leq 1$,

2) $k(z+z') = k(z)$,

3) $n(z+z') = n(z)$.

■ Пусть $z = x+iy$ и $z' = x'+iy'$ удовлетворяют условиям леммы.

1) Путем элементарных преобразований получаем формулу:

$$r(z+z') - r(z) = \frac{\gamma^2(z')+2(xx'+yy')}{\gamma(z+z')+\gamma(z)}.$$

Поскольку $r \in \mathbb{Q}_p^{*2}$, то $(r(z+z'))_0+(r(z))_0 \not\equiv 0 \pmod p$ и, таким образом,

$$|r(z+z') + r(z)|_p = \max\left\{|r(z+z')|_p,\ |r(z)|_p\right\} =$$

$$= \max\left\{\|z+z'\|,\ \|z\|\right\} = |r(z)|_p. \tag{7.5}$$

Из равенств $\|z\| = |r(z)|_p = \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$ следуют неравенства:

$$|x|_p \leq |r(z)|_p,\ |y|_p \leq |r(z)|_p. \tag{7.6}$$

Из (7.5) и (7.6) получаем:

$$|r(z+z') - r(z)|_p \leq \frac{1}{|\gamma(z)|_p}\max\left\{|r(z')|_p^2, |xx'|_p, |yy'|_p\right\} \leq 1.$$

2) Из построения функции $k(z)$ следует, что она зависит только от первого члена канонического разложения p-адического числа $z\bar{z}$: $k(z) = \tilde{k}((z\bar{z})_0)$.

Соотношение же $((z+z')(\overline{z+z'}))_0 = (z\bar{z})_0$ вытекает из оценки:

$$|(z+z')(\overline{z+z'}) - z\bar{z}|_p = |z'\bar{z}'+2(z\bar{z}'+z'\bar{z})|_p < |z\bar{z}|_p.$$

3) В силу равенств $\|z\| = |r(z)|_p = \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$ выполнено одно из двух условий: либо $|x|_p = |r(z)|_p$, $|y|_p \le \le |r(z)|_p$, либо $|y|_p = |r(z)|_p$, $|x|_p \le |r(z)|_p$. Пусть, для определенности, имеет место первый случай. Из определения функции $n(z)$ и леммы 1 следует, что если $|y|_p<|r(z)|_p$, то

$$n(z) = \tilde{n}\left(\left(\frac{x}{\gamma}\right)_0\right),$$

если же $|y|_p = |r(z)|_p$, то

$$n(z) = n\left(\left(\frac{x}{\gamma}\right)_0, \left(\frac{y}{\gamma}\right)_0\right).$$

Пусть имеет место второй случай (первый рассматривается аналогично, проще). В силу утверждения 1) леммы, равенств $|x|_p = |y|_p = |r(z)|_p \ge p$ и оценки

$$|x'|_p \le |r(z')|_p \le 1$$

имеем:

$$n(z+z') = \tilde{n}\left(\left(\frac{x+x'}{\gamma(z+z')}\right)_0, \left(\frac{y+y'}{\gamma(z+z')}\right)_0\right) = \tilde{n}\left(\left(\frac{x}{\gamma}\right)_0, \left(\frac{y}{\gamma}\right)_0\right) = n(z). \blacksquare$$

Обозначая через $\delta_{k,n}$ символ Кронекера, на $\mathbb{Q}_p^*(\sqrt{-1})$ определим функции:

$$\delta_m^{\varepsilon}(z) = \delta_{m,k(z)},\ m = 0,\ 1;$$

$$\delta_n^{c}(z) = \delta_{n,n(z)},\ n = 0,\ 1,\ \dots,\ p.$$

Из определения этих функций и свойств функций $n(z)$ и $k(z)$ имеем:

$$\operatorname{supp} \delta_m^{\varepsilon,c}(z) \cap \operatorname{supp} \delta_n^{\varepsilon,c}(z) = \varnothing \text{ при } n \neq m; \tag{7.7}$$

$$\delta_m^{\varepsilon,c}(z+z') = \delta_m^{\varepsilon,c}(z), \ \|z\| \geq p, \ \|z'\| \leq 1; \tag{7.8}$$

$$\delta_m^{\varepsilon,c}(e^{it}z) = \delta_m^{\varepsilon,c}(z), \ t \in G_p. \tag{7.9}$$

Как отмечалось в п. 7 § 11, с каждой неприводимой системой Вейля над пространством ($V = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p, B$) связано представление для гармонического осциллятора. Например, в п. 3 § 11 осциллятор рассматривается в представлении, которому соответствует система Вейля из примера 1 п. 5. В случае $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ исследование собственных функций удобнее проводить в представлении, которому соответствует система Вейля $(L_2^\chi, \widetilde{W})$ из примера 3 п. 5. Напомним, что в этом случае пространство представления имеет вид:

$$L_2^\chi = \left\{ f \in L_2(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p) : \ f(x+x') = \chi(B(x,x'))f(x), \|x'\| \leq 1 \right\},$$

а представление $U(t)$ группы T определяется по формуле:

$$U(t)f(x) = f(e^{-it}x), \ t \in G_p, \ f \in L_2^\chi,$$

представление $V(z)$ группы S определяется по формуле:

$$V(z)f(x) = f(\bar{z}x), \ z \in S, \ f \in L_2^\chi.$$

В таком представлении задача отыскания собственных функций осциллятора эквивалентна нахождению при каждом $\alpha \in I_p$ (см. п. 3) полной системы линейно независимых решений следующей системы уравнений в $L_2(V)$:

$$\begin{cases} f(e^{-it}z) = \chi(\alpha t)f(z), \\ f(z+z') = \chi(B(z,z'))f(z), \ \|z'\| \leq 1. \end{cases} \tag{7.10}$$

Принимая во внимание теорему о размерностях инвариантных подпространств (п. 3) для случая $p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, сразу можно сказать, что при $\alpha \in I_p$, $|\alpha|_p = p^{2k+1}$, $k = 0,1,\ldots$, система (7.10) не имеет решений; при $\alpha \doteq 0$ она имеет единственное с точностью до множителя решение, а при $\alpha \in J_p$ она имеет $p+1$ линейно независимых решений.

Явные формулы для собственных функций даются следующей теоремой.

Теорема. *Пусть* $p \equiv 3 \pmod 4$. *При* $\alpha = 0$ *любое решение системы* (7.10) *пропорционально*

$$\phi_0(z) = \Omega(\|z\|).$$

При $\alpha \in J_p$, $\alpha \neq 0$, $p+1$ *линейно независимых решений системы* (7.10) *даются формулами*:

$$\phi_\alpha^n(z) = \delta_m^\varepsilon(z)\delta_n^c(z)\Omega(|r(z)-a|_p)\chi(-\alpha\tau(z)), \qquad (7.11)$$

где $m = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\alpha_0}{p}\right)\right)$, $a = \sqrt{(-1)^{m+1}\alpha}$, $n = 0,1,\dots,p$.

■ Тот факт, что $\phi_0(z)$ является решением (7.10), проверяется прямой подстановкой. Пусть теперь $\alpha \in J_p$, $\alpha \neq 0$. Функции (7.11) при различных n линейно независимы (более того, из (7.7) следует, что они ортогональны). Кроме того, из (7.9) следует, что функции (7.11) удовлетворяют первому уравнению системы (7.10).

При $\alpha \in J_p$ $(\alpha \neq 0)$ $|\alpha|_p \geq p^2$, следовательно, $|a|_p \geq p$. Учитывая это неравенство, подставляя функции (7.11) во второе уравнение системы (7.10) и пользуясь свойством 1) функции $r(z)$ из леммы 3 и формулой (7.8), получаем

$$\delta_m^\varepsilon(z)\delta_n^c(z)\Omega(|r(z)-a|_p)\chi(-\alpha\tau(z+z')) =$$

$$= \chi(B(z,z'))\delta_m^\varepsilon(z)\delta_n^c(z)\Omega(|r(z)-a|_p)\chi(-\alpha\tau(z)).$$

Согласно (7.7) последняя формула эквивалентна следующей:

$$\chi(\alpha\Delta\tau + B(z,z')) = 1, \qquad (7.12)$$

где

$$\Delta\tau = \tau(z+z')-\tau(z), \quad z = r(z)\varepsilon^m c^n e^{i\tau(z)},$$

$$z' = r(z')\varepsilon^m c^n e^{i\tau(z')}, \quad z+z' = r(z+z')\varepsilon^m c^n e^{i\tau(z+z')}.$$

С учетом последних равенств форму $B(z,z')$ можно преобразовать к виду:

$$B(z,z') = B(z,z+z') = r(z)r(z+z')(\varepsilon\bar{\varepsilon})^m B(e^{i\tau(z)},e^{i\tau(z+z')}) =$$

$$r(z)r(z+z')(-1)^m \sin\Delta t. \qquad (7.13)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующее равенство: (при $p \equiv 3 \pmod 4$)

$$\|e^{ia}-e^{ib}\| = |a-b|_p, \quad a,b \in G_p. \tag{7.14}$$

Действительно:

$$\|e^{ia}-e^{ib}\| = \|e^{i(a-b)}-1\| = \max\left\{|\cos(a-b)-1|_p, |\sin(a-b)|_p\right\} =$$

$$= |\sin(a-b)|_p = |a-b|_p.$$

Используя (7.14) можно доказать оценку:

$$|a\Delta\tau|_p \le 1. \tag{7.15}$$

Действительно:

$$|a\Delta\tau|_p = |a|_p \|e^{i\tau(z+z')}-e^{i\tau(z)}\| = = \|(r(z+z') +$$

$$+ (a-r(z+z')))e^{i\tau(z+z')} - (r(z)+(a-r(z)))e^{i\tau(z)}\| =$$

$$= \|r(z+z')e^{i\tau(z+z')} - r(z)e^{i\tau(z)}\| = \|z'\| \le 1.$$

Используя формулы (7.13) и (7.15) и неравенства $|r(z)-a|_p \le$ ≤ 1, $|r(z+z')-a|_p \le 1$, выражение (7.12) перепишем в эквивалентной форме:

$$\chi(\alpha\Delta\tau + (-1)^m a^2 \sin\Delta\tau) = 1. \tag{7.16}$$

Из свойств функции $\sin x$, отмеченных в п. 4 § 2, легко следует оценка (при $p \equiv 3 \pmod 4$)

$$|\sin\Delta\tau - \Delta\tau|_p \le p|\Delta\tau|_p^3. \tag{7.17}$$

С учетом (7.15) и (7.17) выражение (7.16) преобразуем к виду:

$$\chi((\alpha + (-1)^m a^2)\Delta\tau) = 1. \tag{7.18}$$

Таким образом, функции (7.11) удовлетворяют второму уравнению системы (7.10), если a, α и m удовлетворяют соотношению (7.18) при любых $\Delta\tau \in G_p$. Легко видеть, что указанные в условии теоремы a и m удовлетворяют равенству

$$\alpha + (-1)^m a^2 = 0,$$

откуда следует (7.18). ■

Теорема дает возможность построить собственные функции осциллятора при $p \equiv 3 \pmod 4$ в любом представлении. А именно, справедливо следующее следствие.

Следствие. *Пусть (H,W) – неприводимая система Вейля над пространством $(\mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p,B)$ с вакуумным вектором ψ_0. Тогда собственные функции осциллятора в представлении (H,W) даются формулами:*

$$\psi^n_\alpha = \int_{G_p} \chi(-\alpha t)W(a\varepsilon^m c^n e^{it})\psi_0 dt, \tag{7.19}$$

где $\alpha \in J_p$, $n = 0,1,\ldots,p$, a и m те же, что и в Теореме.

■ Рассмотрим систему Вейля $(L_2^\chi,\tilde{W})$ с вакуумным вектором $\phi_0 = \Omega(\|z\|)$ и соответствующее представление для гармонического осциллятора.

Легко убедиться в том, что оператор $S\colon L_2^\chi \longrightarrow H$, определяемый формулой

$$S\phi = \int_V \Big(\phi,\tilde{W}(z)\Big)_{L_2(V)} W(z)\psi_0 dz,\ \ \phi \in L_2^\chi, \tag{7.20}$$

есть унитарный оператор (см. п. 7 § 11). Подставляя в формулу (7.20) собственные функции осциллятора в представлении $(L_2^\chi,\tilde{W})$ $\phi^n_\alpha(z)$, получаем

$$\psi^n_\alpha = \int_V dz W(z)\psi_0 \int_V dy\phi^n_\alpha(y)\chi(B(-z,y))\Omega(\|y-z\|) = \int_V dz W(z)\psi_0 \times$$

$$\times \int_V dy\delta^\varepsilon_m(y)\delta^c_n(y)\Omega(|r(y)-a|_p)\chi(-\alpha\tau(y))\ \chi(B(-z,y))\Omega(\|y-z\|).$$

Поскольку интегрирование в последней формуле осуществляется фактически по ограниченной области $\|y\| = \|z\| = |a|_p$, то возможна перемена порядка интегрирования. С учетом формулы

$$\int_V dz\chi(B(-z,y))\Omega(\|y-z\|)W(z)\psi_0 = W(y)\psi_0$$

получаем

$$\psi^n_\alpha = \int_V dy\delta^\varepsilon_m(y)\delta^c_n(y)\Omega(|r(y)-a|_p)\chi(-\alpha\tau(y))W(y)\psi_0.$$

Пользуясь свойствами функций $\delta^\varepsilon_m(y), \delta^c_n(y)$ и полярным разложением, из последней формулы имеем

$$\psi^n_\alpha = \int_{\mathbb{Q}^{*2}_p} |r|_p\Omega(|r-a|_p)dr \int_{|t|_p\le 1/p} \chi(-\alpha t)W(a\varepsilon^m c^n e^{it})\psi_0 dt.$$

Отбрасывая несущественный ненулевой множитель, получаем требуемое выражение для собственных функций осциллятора. ∎

Замечание 1. Аналогично представлению $U(t)$, $t \in G_p$, группы T можно построить унитарное представление $V(g)$, $g \in S$, группы S. В этом случае, используя теорему и формулу (7.1), легко доказать, что собственные подпространства представления $V(g)$ одномерны, а собственные функции совпадают с собственными функциями представления $U(t)$ (с той лишь разницей, что функции ϕ^n_α при различных n соответствуют различным собственным подпространствам).

Замечание 2. Исследование собственных функций при $p \equiv 3 \pmod 4$ (т.е. решение системы (7.10) можно провести без использования теоремы о размерностях инвариантных подпространств.

§ 13. Системы Вейля. Бесконечномерный случай

Через (V,B) обозначим бесконечномерное симплектическое пространство над $\mathbb{Q}_p$. Подпространство $U \subset V$ называется невырожденным, если ограничение формы B на U – невырожденная симплектическая форма на U. Через F обозначим множество всех конечномерных невырожденных подпространств пространства V.

Системой Вейля над (V,B) (см. п. 5 § 12) называется пара (H,W), где H – комплексное гильбертово пространство, а

W - отображение из V в множество унитарных операторов на H, удовлетворяющее условиям

$$W(x)W(y) = \chi_p(B(x,y))W(x+y)$$

для всех $x,y \in V$, причем ограничение W на любое подпространство $U \in F$ непрерывно в сильной топологии.

Напомним, что в случае $\dim V < \infty$ (см. п. 4 § 12) все неприводимые системы Вейля унитарно эквивалентны (теорема единственности Стоуна - фон Неймана) и любая система Вейля представляется в виде ортогональной прямой суммы неприводимых систем. Однако в случае $\dim V = \infty$ это не так.

1. Алгебры Вейля. Пусть (H,W) - некоторая система Вейля над (V,B), $U \in F$ и $\mathfrak{M}_u(H,W)$ - W^*-алгебра, порожденная семейством операторов $\{W(x),\ x \in U\}$. Так как $\dim U < \infty$, используя теорему Стоуна - фон Неймана, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Для любых двух систем Вейля* (H_1,W_1) *и* (H_2,W_2) *над* (V,B) *и любого* $U \in F$ *существует единственный* $*$*-изоморфизм* α *алгебр* $\mathfrak{M}_u(H_1,W_1)$ *и* $\mathfrak{M}_u(H_2,W_2)$, *удовлетворяющий условиям*

$$\alpha(W_1(x)) = W_2(x)$$

при всех $x \in U$.

По определению *алгеброй Вейля системы Вейля* (H,W) над (V,B) называется C^*-алгебра $\mathfrak{A}(H,W)$, получаемая замыканием в равномерной топологии объединения алгебр $\mathfrak{M}_u(H,W)$ по всем $U \in F$:

$$\mathfrak{A}(H,W) = \overline{\bigcup_{U \in F} \mathfrak{M}_u(H,W)}.$$

Как уже отмечалось, в случае $\dim V = \infty$ теорема Стоуна - фон Неймана не имеет места. Однако в этом случае справедлива следующая C^*-алгебраическая версия указанной теоремы.

Теорема 1. *Для любых двух систем Вейля* (H_1,W_1) *и* (H_2,W_2) *над* (V,B) *существует единственный* $*$*-изоморфизм* α *алгебр* $\mathfrak{A}(H_1,W_1)$ *и* $\mathfrak{A}(H_2,W_2)$, *удовлетворяющий условию*

$$\alpha(W_1(x)) = W_2(x).$$

для всех $\alpha \in x$.

■ Алгебры $\mathfrak{M}_u(H,W)$, $U \in F$, образуют частично упорядоченное множество относительно вложения. В силу леммы 1 и леммы Цорна существует единственный $*$-изоморфизм $\tilde{\alpha}$ $*$-алгебр $\bigcup\limits_{U\in F} \mathfrak{M}_U(H_i,W_i)$, $i = 1,2$. Изоморфизм $\tilde{\alpha}$ непрерывен в равномерной топологии (как всякий $*$-морфизм $*$-алгебр) и, таким образом, однозначно продолжается до требуемого $*$-изоморфизма α. ∎

2. Положительные функционалы. Комплекснозначный функционал $\mu\colon V \to \mathbb{C}$ на симплектическом p-адическом пространстве (V,B) будем называть *положительным*, если выполнены условия

(i) $\mu(0) = 1$;

(ii) для любых наборов $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ и $x_1,\dots,x_n \in V$ справедливо неравенство

$$\sum_{1\le i,\,j\le n} \lambda_i\bar{\lambda}_j\mu(x_j-x_i)\chi_p(B(x_i,x_j)) \ge 0,$$

(iii) μ непрерывен при ограничении на любое подпространство $U \in \Gamma$.

Положительные функционалы являются естественным инструментом при изучении циклических систем Вейля. По определению, *циклической системой Вейля* над (V,B) называется тройка (H,W,φ), состоящая из системы Вейля (H,W) над (V,B) и вектора $\varphi \in H$, $\|\varphi\|_H = 1$, такого, что замыкание линейной оболочки множества $\{W(x)\varphi,\ x \in V\}$ совпадает с H. Две циклические системы Вейля (H_1,W_1,φ_1) и (H_2,W_2,φ_2) эквивалентны, если существует унитарный оператор $U\colon H_1 \to H_2$, удовлетворяющий условиям $U\varphi_1 = \varphi_2$ и $UW_1(x)U^{-1} = W_2(x)$ при всех $x \in V$. Изучение произвольных систем Вейля сводится к изучению циклических, поскольку любая система Вейля может быть представлена в виде ортогональной прямой суммы циклических систем.

Положительные функционалы на (V,B) и циклические системы Вейля над (V,B) тесно связаны. В частности, легко заметить, что если (H,W,φ) – циклическая система Вейля над (V,B), то отображение μ, определяемое по формуле

$$\mu(x) = (\varphi,W(x)\varphi), \tag{2.1}$$

определяет положительный функционал на (V,B). Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Для любого положительного функционала* μ *на* (V,B) *существует циклическая система Вейля* (H,W,φ) *над* (V,B) *такая, что соотношение* (2.1) *справедливо для всех* $x \in V$. *Такая система Вейля единственна с точностью до эквивалентности.*

■ *Существование* системы Вейля с указанными свойствами докажем с помощью явной конструкции.

Пространство H. Через K обозначим векторное пространство комплекснозначных функций на V, отличных от нуля в конечном числе точек из V. На пространстве K определим неотрицательную эрмитову форму и полунорму по формулам:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{u,\,v\in V} f(u)\bar{g}(v)\mu(v-u)\chi_p(B(u,v)),\ t,g \in K,$$

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle.$$

Пусть N - замкнутое подпространство в K, состоящее из элементов с нулевой полунормой. Тогда на пространстве K/N форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ естественным образом индуцирует положительную эрмитову форму и, таким образом, K/N снабжается структурой предгильбертова пространства. Искомое пространство H получается пополнением пространства K/N относительно введенного выше скалярного произведения.

Отображение W. На пространстве K определим следующее семейство унитарных операторов $\tilde{W}(x)$, $x \in V$:

$$\tilde{W}(x)f(u) = \chi_p((Bx,u))f(u-x),\ f \in K.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям Вейля (этот факт уже проверялся, см. п. 4 § 12, пример 3)). Легко видеть, что операторы $\tilde{W}(x)$, $x \in V$, изометричны. Следовательно, корректно определены следующие операторы $W(x)$, $x \in V$, на K/N:

$$W(x)\Big[f+N\Big] = \tilde{W}(x)f + N,\ x \in V,\ f \in K,$$

которые однозначно продолжаются до требуемых унитарных операторов на H.

Циклический вектор выберем в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi} + N, \ \tilde{\varphi}(u) = \begin{cases} 1, & u=0, \\ 0, & u\neq 0. \end{cases}$$

Проверка выполнения свойства (2.1) для построенной системы Вейля (H,W,φ) является легким упражнением.

Единственность. Пусть (H_1,W_1,φ_1) и (H_2,W_2,φ_2) – две циклические системы Вейля, отвечающие одному и тому же положительному функционалу μ. Через $\tilde{H}_1$ (соответственно $\tilde{H}_2$) обозначим линейную оболочку семейства векторов $\{W_1(x)\varphi_1, x \in V\}$ в H_1 (соответственно $\{W_2(x)\varphi_2, x \in V\}$ в H_2). Формула

$$UW_1(x)\varphi_1 = W_2(x)\varphi_2, \ x \in V,$$

определяет оператор U: $\tilde{H}_1 \to \tilde{H}_2$. Легко заметить, что U – изометрический оператор:

$$(UW_1(x)\varphi_1, UW_1(y)\varphi_1) = (W_2(x)\varphi_2, W_2(y)\varphi_2) =$$
$$= \chi_p(B(x,y))(\varphi_2, W_2(y-x)\varphi_2) = \chi_p(B(x,y))\mu(y-x) =$$
$$= (W_1(x)\varphi_1, W_1(y)\varphi_1).$$

Так как пространства $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$ плотны в H, то U может быть однозначно продолжен до унитарного оператора на H с нужными свойствами. ∎

Замечание. Утверждения пп. 1 – 2 и их доказательства полностью аналогичны соответствующим утверждениям в вещественной теории.

3. Представление Фока. Оказывается, что в p-адическом случае представления коммутационных соотношений (системы Вейля) тесно связаны с понятием решетки в p-адическом векторном пространстве.

Пусть V – p-адическое векторное пространство (конечно- или бесконечномерное). По определению *решеткой* L в V называется $\mathbb{Z}_p$-подмодуль пространства V, не содержащий ненулевых подпространств и поглощающий пространство V (т.е. для любого $x \in V$ существует $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ такое, что $\lambda x \in L$). В конечномерном случае ($\dim V < \infty$) данное определение совпадает с традиционным определением решетки как конечно порожденного

$\mathbb{Z}_p$-подмодуля V, содержащего базис V. Легко убедиться в том, что в нормированном векторном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{Q}_p$ подмножество $V_0 = \{x \in V\colon \ \|x\| \le 1\}$ (единичный шар) является решеткой. Данный пример показывает важность этого понятия для представлений коммутационных соотношений в p-адическом случае (см. п. 4 § 12, определение вакуумного вектора, когерентных состояний и т.д.). В некотором смысле V_0 есть общий пример решеток. Чтобы пояснить это утверждение, заметим, что решетка $L \subset V$ является абсолютно выпуклым поглощающим подмножеством пространства V (непустое подмножество $A \subset V$ абсолютно выпукло, если при всех $x, y \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_p$ имеем $\lambda x + \mu y \in A$). Для решетки $L \subset V$ определим $\mathbb{R}_+$-значный функционал на V по формуле

$$\rho_L(x) = \inf_{s \in \mathbb{Q}_p^*,\ sx \in L} |s|_p^{-1}$$

(ρ_L - аналог функционала Минковского). Легко видеть, что ρ_L является неархимедовой нормой на V, индуцированную этой нормой топологию на V для краткости назовем L-топологией. Заметим, что решетка L теперь может быть представлена в виде

$$L = \Big\{ x \in V\colon \ \rho_L(x) \le 1 \Big\}.$$

Пусть теперь (V, B) - симплектическое пространство над $\mathbb{Q}_p$ и L - некоторая решетка в V. Подмножество L^* пространства V, определяемое по формуле

$$L^* = \Big\{ x \in V\colon \ B(x, y) \in \mathbb{Z}_p \ \ \forall y \in L \Big\},$$

является решеткой в V и называется *двойственной* решеткой. Если $L = L^*$, то L - самодвойственная решетка. Свойства определенной выше операции * во многом аналогичны свойствам обычной операции ортогонального дополнения относительно формы B и поэтому приводятся без доказательства.

Лемма 2. *Пусть L, L_1, L_2 - решетки в (V, B). Тогда справедливы утверждения:*

(i) $(L^*)^* = L$,

(ii) $(L_1 + L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$,

10*

(iii) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^*$.

Связь самодвойственных решеток и систем Вейля непосредственно видна из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть L - самодвойственная решетка в (V,B). Тогда функционал $\mu_1 : V \to \mathbb{C}$, определяемый по формуле*

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in L, \\ 0, & x \notin L, \end{cases}$$

является положительным функционалом на V.

■ Необходимо показать, что для любых наборов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ комплексных чисел и $x_1, \ldots, x_n$ элементов V справедливо неравенство

$$\sum_{1 \le i,\, j \le n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \mu_1(x_j - x_i) \chi_p(B(x_i, x_j)) \ge 0.$$

Поскольку $\mu_L(x) = 0$ для всех $x \notin L$, указанное неравенство достаточно проверить для случая, когда все x_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$x_i = \alpha + u_i,\ u_i \in L,$$

для некоторого $\alpha \in V$. Для этого случая имеем:

$$\sum_{1 \le i,\, j \le n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \mu_1(u_j - u_i) \chi_p(B(\alpha + u_i, \alpha + u_j)) =$$

$$= \sum_{1 \le i,\, j \le n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \chi_p(B(u_i, \alpha)) \chi_p(B(u_j, \alpha)) =$$

$$= \left| \sum_{1 \le i \le n} \bar{\lambda}_i \chi_p(B(u_i, \alpha)) \right|^2 \ge 0. \ ■$$

Пусть L - самодвойственная решетка в (V,B). По определению *фоковским представлением* (*или L-фоковским представлением*) коммутационных соотношений назовем представление, описываемое циклической системой Вейля (H, W, φ), соответствующей функционалу μ_L (в смысле теоремы 2 настоящего параграфа).

Вектор φ назовем *вакуумным вектором*. Отметим, что в силу результатов п. 4 § 12 любое непрерывное неприводимое представление коммутационных соотношений для конечномерного пространства V является фоковским представлением.

Как и в конечномерном случае, определим систему когерентных состояний. Для этого из каждого класса $\alpha \in V/L$ выберем по одному представлению и через $\mathcal{T}$ обозначим семейство таких представлений. По определению семейство векторов в H

$$\phi_\alpha = \left\{W(\alpha)\varphi,\ \alpha \in \mathcal{T}\right\}$$

образует систему когерентных состояний. Указанную систему Вейля (H,W,φ) для кратности будем называть L-системой Вейля. Эта система обладает следующими свойствами:

Теорема 3. *Пусть L - самодвойственная решетка в пространстве (V,B) и (H,W,φ) - соответствующая ей L-система Вейля. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $W(x)\varphi = \varphi$ *для всех* $x \in L$;

(ii) *системы когерентных состояний образуют ортонормированный базис пространств* H;

(iii) *система Вейля* (H,W,φ) *неприводима*;

(iv) *отображение* W *непрерывно в* L-*топологии на* V *и сильной топологии на множестве унитарных операторов* H.

■ (i) В силу соотношения

$$\mu_1(x) = (\varphi,W(x)\varphi) = \begin{cases} 1, & x\in L, \\ 0, & x\notin L, \end{cases} \qquad (3.1)$$

достаточно показать, что замыкание K линейной оболочки множества векторов $\{W(x)\varphi, x \in L\}$ в H одномерно. Тогда найдется ненулевой вектор $\psi \in K$ вида

$$\psi = \sum_{\alpha\in L} C_\alpha W(\alpha)\phi,$$

ортогональный к φ. Таким образом, справедливо равенство

$$(\varphi,\psi) = \sum_{\alpha\in L} \bar{C}_\alpha = 0,$$

но в таком случае

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\alpha,p\in L} C_\alpha \bar{C}_\beta (W(\alpha)\phi, W(\beta)\phi) = \sum_{\alpha,\beta\in L} C_\alpha \bar{C}_\beta = 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение (i).

(ii) Из формулы (3.1) видно, что множетсво $\phi_\alpha = \{W(\alpha)\varphi, \alpha \in \mathcal{T}\}$ когерентных состояний образует ортонормированную системы векторов в H. Пусть ψ - произвольный вектор из H

$$\psi = \sum_{\beta\in V} C_\beta W(\beta)\varphi$$

(сумма в правой части конечна). Поскольку для всякого $\beta \in V$ найдутся такие $\alpha \in \mathcal{I}$ и $u \in L$, что $\beta = \alpha+u$, принимая во внимание утверждение (i) доказываемой теоремы, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\psi = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \tilde{C}_\alpha W(\alpha)\varphi,$$

где $\tilde{C}_\alpha = C_{\alpha+u}\chi_p(-B(\alpha,u))$. Осталось заметить, что множество векторов ψ указанного вида образует плотное множество в пространстве H (поскольку (H,W,φ) - циклическая система Вейля) и, таким образом, когерентные состояния образуют базис пространства H.

(iii) Из утверждения (ii) доказываемой теоремы видно, что любой ненулевой вектор из H является циклическим, что эквивалентно неприводимости (H,W,φ).

(iv) Пусть ψ - произвольный ненулевой элемент пространства H. Тогда, в силу утверждения (ii):

$$\psi = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} C_\alpha W(\alpha)\varphi, \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |C_\alpha|^2 < \infty,$$

и для произвольного $x \in L$ (т.е. $\rho_1(x)\le 1$) имеем

$$\|W(x)\psi-\psi\| = \|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (1-\chi_p(2B(\alpha,x))C_\alpha W(\alpha)\varphi\| =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |C_\alpha|^2 |1-\chi_p(2B(\alpha,x))|^2. \qquad (3.2)$$

В силу сходимости ряда $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |C_\alpha|^2$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что справедливо неравенство

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I},\rho_1(\alpha)>\Delta} |C_\alpha|^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.3)$$

Кроме того, для всех $\rho_1(x) < \frac{1}{\Delta}$ и $\rho_1(\alpha)\le\Delta$ имеем

$$|B(x,\alpha)|_p \le \rho_1(x)\rho_1(\alpha) \le 1$$

и, следовательно, $\chi_p(2B(\alpha,x)) = 1$. Таким образом, для всех

$$x \in U_\delta = \left\{y \in V:\ \rho_L(y) < \min\{1,\tfrac{1}{\Delta}\} = \delta\right\}$$

из формул (3.2) и (3.3) имеем:

$$\|W(x)\psi-\psi\| = \sum_{\alpha\in\mathcal{T},\rho_1(\alpha)\le\Delta} |C_\alpha|^2|1-\chi_p(2B(\alpha,x))|^2 +$$

$$+ \sum_{\alpha\in\mathcal{T},\rho_1(\alpha)>\Delta} |C_\alpha|^2|1-\chi_p(2B(\alpha,x))|^2 \le$$

$$\le 2 \sum_{\alpha\in\mathcal{T},\rho_1(\alpha)>\Delta} |C_\alpha|^2 < \varepsilon.$$

Следовательно, отображение W непрерывно в указанном смысле в окрестности точки $x = 0$, непрерывность в других точках следует из соотношений Вейля и непрерывности в нуле. ∎

Доказанная теорема показывает, что свойства L-систем Вейля аналогичны свойствам систем Вейля над конечномерными симплектическими пространствами (см. п. 4 § 12). Это оправдывает название «фоковское» для соответствующего представления коммутационных соотношений.

4. Эквивалентность L-фоковских представлений. Напомним, что в случае $\dim V < \infty$ все неприводимые системы Вейля унитарно эквивалентны, однако это не так в случае $\dim V = \infty$. Возникает естественный вопрос об эквивалентности двух L-фоковских представлений для различных решеток L.

Пусть L_1 и L_2 – самодвойственные решетки в пространстве (V,B). Будем говорить, что L_1 и L_2 совпадают почти всюду, если существует подпространство U пространства V конечной коразмерности, для которого справедливо равенство $L_1 \cap U = L_2 \cap U$. Следующая теорема дает ответ на поставленный выше вопрос об эквивалентеності L-фоковских представлений.

Теорема 4. *Пусть L_1 и L_2 – самодвойственные решетки в пространстве (V,B). L_1- и L_2-фоковские представления коммутационных соотношений унитарно эквиалентны тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 совпадают почти всюду.*

∎ *Необходимость*. Пусть (H_1,W_1,φ_1) и (H_2,W_2,φ_2) – соответственно L_1- и L_2-система Вейля над (V,B). Поскольку (H_1,W_1) и (H_2,W_2) унитарно эквивалентны, существует унитарный оператор U: $H_1 \to H_2$, удовлетворяющий при всех $x \in V$ соотношениям

$$UW_1(x)U^{-1} = W_2(x).$$

Через ν: $V \to \mathbb{R}$ обозначим следующее отображение:

$$\nu(x) = \left|(U\varphi_1,W_2(x)\varphi_2)\right|. \tag{4.1}$$

Докажем соотношение

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu(0), & x\in L_1+L_2, \\ 0, & x\notin L_1+L_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Действительно, в силу соотношений Вейля и теоремы 3(i) п. 3 для всех $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ имеем

$$\nu(x_1+x_2) = \left|(U\varphi_1,W_2(x_1+x_2)\varphi_2)\right| = \left|W_2(-x_1)U\varphi_1,W_2(x_2)\varphi_2)\right| =$$

$$= \left|(UW_1(-x_1)\varphi_1,W_2(x_2)\varphi_2)\right| = \left|(U\varphi_1\varphi_2)\right| = \nu(0).$$

Для $x \notin L_1+L_2$ в силу соотношения $(L_1+L_2)^* = L_1 \cap L_2$ (см. п. 3) найдется такой элемент $y \in L_1 \cap L_2$, что $B(x,y) \notin \mathbb{Z}_p$ и, таким образом, $\chi_p(2B(x,y)) \neq 1$ (напомним, что рассматривается случай $p \neq 2$). Таким образом, справедливы формулы:

$$(U\varphi_1,W_2(x)\varphi_2) = (W_2(y)U\varphi_1,W_2(y)W_2(x)\varphi_2) =$$

$$= \chi_p(2B(x,y))(U\varphi_1,W_2(x)\varphi_2),$$

и, следовательно, $\nu(x) = 0$.

Пусть $d(L_1,L_2)$ обозначает порядок группы $(L_1+L_2)/L_2$. В силу теоремы 3(ii) п. 3, формулы (4.2) и равенства Парсеваля - Стеклова имеем

$$1 = \|\varphi_1\|^2_{H_1} = \|U\varphi_1\|^2_{H_2} = \sum_{\alpha\in V/L_2} \left|(U\varphi_1, W_2(\alpha)\varphi_2)\right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in (L_1+L_2)/L_2} \nu^2(0) = \nu^2(0)d(L_1,L_2),$$

и, таким образом, $d(L_1,L_2) < \infty$. Легко заметить, что $d(L_1,L_2) < \infty$ тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 совпадают почти всюду.

Достаточность. Пусть L_1 и L_2 совпадают почти всюду и, следовательно, $d(L_1,L_2) < \infty$. Построим вектор $\psi_2 \in H_2$ по следующей формуле:

$$\psi_2 = d^{-1/2}(L_1,L_2) \sum_{\alpha\in L_1/(L_1\cap L_2)} W_2(\alpha)\varphi_2. \tag{4.3}$$

Заметим, что выражение под знаком суммы в формуле (4.3) не зависит от выбора представления в смежном классе $\alpha \in L_1/(L_1 \cap L_2)$. Пользуясь соотношениями Вейля для произвольного $x \in L_1$, имеем:

$$W_2(x_1)\psi_2 = d^{-1/2}(L_1,L_2) \sum_{\alpha\in L_1/(L_1\cap L_2)} \chi_p(B(x,\alpha))W_2(x+\alpha)\varphi_2 =$$

$$= d^{-1/2}(L_1,L_2) \sum_{\beta\in L_1/(L_1\cap L_2)} W_2(\beta)\varphi_2 = \psi_2. \tag{4.4}$$

Кроме того, в силу теоремы 3(ii) и равенства Парсеваля - Стеклова справедлива формула

$$\|\psi_2\|^2_{H_2} = d^{-1}(L_1,L_2) \sum_{\alpha\in L_1/(L_1\cap L_2)} \|W_2(\alpha)\varphi_2\|^2_{H_2} = 1, \tag{4.5}$$

поскольку группы $L_1/(L_1 \cap L_2)$ и $(L_1+L_2)/L_2$ изоморфны и их порядки совпадают.

Из формул (4.4) и (4.5) следует, что (H_2,W_2,ψ_2) есть L_1-система Вейля. Следовательно, циклические системы Вейля (H_1,W_1,φ_1) и (H_2,W_2,ψ_2) эквивалентны в силу теоремы 2 п. 2, и системы Вейля (H_1,W_1) и (H_2,W_2) унитарно эквивалентны. ■

14. p-адические струны

В этом параграфе будут изложены элементы теории p-адических струн. В начале будут приведены выражения для так называемых дуальных амплитуд. Затем будут рассмотрены p-адические аналоги этих выражений и исследованы их свойства.

1. Дуальные амплитуды. Истоки современной теории струн берут начало, как известно, в дуальной теории сильных взаимодействий элементарных частиц. Сильные взаимодействия адронов должны описываться функциями (амплитудами рассеяния), которые удовлетворяют некоторым общим требованиям, таким как лоренц-инвариантность, унитарность и др. Построить функции, удовлетворяющие этим требованиям, - весьма нетривиальная задача. В 1968 г. Г. Венециано предложил следующую функцию, описывающую взаимодействие четырех частиц:

$$A(s,t) = \int_0^1 dx\ x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}. \tag{1.1}$$

Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 - релятивистские n-мерные импульсы сталкивающихся частиц. Их квадраты равны массам частиц, которые должны быть отрицательны (так называемые тахионы):

$$k_1^2 = (k_1^0)^2 - (k_1^1)^2 - \dots - (k_1^{n-1})^2 = -2. \tag{1.2}$$

Переменные s и t имеют вид

$$s = (k_1+k_2)^2,\ t = (k_2+k_3)^2, \tag{1.3}$$

вводится также переменная $u = (k_1+k_3)^2$, причем имеем $s+t+$ $+u = -8$. Выполняется закон сохранения энергии-импульса:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0. \tag{1.4}$$

Наконец, функция $\alpha(s)$ в (1.1) линейна:

$$\alpha(s) = 1 + \frac{1}{2}s. \tag{1.5}$$

Бета-функция (1.1) может быть выражена через гамма-функцию Эйлера:

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}, \tag{1.6}$$

где

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx. \tag{1.7}$$

Амплитуда Венециано (1.1) обладает свойством симметрии

$$A(s,t) = A(t,s) \tag{1.8}$$

(так называемая кроссинг-симметрия). Она может быть представлена в виде

$$A(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\dots(\alpha(t)+n)}{n!}\frac{1}{\alpha(s)-n}, \tag{1.9}$$

Равенство формул (1.8) и (1.9) выражает свойство *дуальности*: одна и та же амплитуда может быть записана либо как сумма по полюсам в t-канале (формула (1.8)), либо по полюсам в s-канале (формула (1.9)).

Асимптотика $A(s,t)$ при больших s и фиксированных t имеет вид

$$A(s,t) \sim s^{\alpha(t)}, \tag{1.10}$$

так называемое реджевское поведение. Было показано, что для выполнения условия унитарности, размерность пространства-времени должна быть $n = 26$.

Обобщение амплитуды Венециано на случай рассеяния N частиц носит название формулы Коба – Нильсена, она имеет вид

$$A_N = \int\limits_{0<x_2<x_3<\dots<x_{N-2}<1} \prod_{i=2}^{N-2} dx_i \prod_{j=2}^{N-2} |x_j|^{-k_1\cdot k_j} |1-x_j|^{-k_2\cdot k_j} \times$$

$$\times \prod_{2\le l<m\le N-2} |x_l-x_m|^{-k_l\cdot k_m}, \tag{1.11}$$

или в более симметричном виде

$$A_N = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i (dV_3)^{-1} \prod_{1\le l<m\le N} |x_l-x_m|^{-k_l\cdot k_m}, \tag{1.12}$$

где

$$dV_3 = dx_a dx_b dx_c (x_a-x_b)^{-1}(x_b-x_c)^{-1}(x_c-x_a)^{-1}$$

и x_a, x_b, x_c – произвольным образом выбранные из $x_1,\dots,x_N$ различные переменные. Деление на dV_3 в (1.12) соответствует выделению объема группы $SL(2,\mathbb{R})$ из выражения

$$A = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \prod_{1\le l<m\le N} |x_l - x_m|^{-k_l\cdot k_m}, \qquad (1.13)$$

инвариантного относительно группы $SL(2,\mathbb{R})$ дробно-линейных преобразований переменных x_i.

Имеется также другой набор дуальных амплитуд (Вирасоро – Шапиро), отвечающих интегрированию по комплексной плоскости

$$B_N = \int \prod_{l=4}^{N} d^2 z_l \prod_{4\le i,\, j\le N} |z_i - z_j|^{1/2k_i\cdot k_j}. \qquad (1.14)$$

Формула (1.14) получается из симметричного относительно $SL(2,\mathbb{C})$-преобразований выражения

$$B = \int \prod_{i=1}^{N} d^2 z_i \prod_{1\le l<m\le N} |z_l - z_m|^{1/2k_l\cdot k_m} \qquad (1.15)$$

выделением объема группы $SL(2,\mathbb{C})$. Здесь $k_i^2 = -8$, $i = 1,\dots N$.

Для четырех частиц имеем

$$B_4 = \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z|^{1/2k_1\cdot k_4} |1-z|^{1/2k_2\cdot k_4}. \qquad (1.16)$$

В теории струн амплитуды (1.1) отвечают открытым струнам, а (1.16) – замкнутым струнам. Отметим, что приведенные выражения для амплитуд рассеяния являются только первыми членами в так называемом разложении по числу петель для струнных амплитуд.

Аналогично (1.16) можно вместо (1.1) рассмотреть выражение

$$A_4 = \int_{\mathbb{R}} dx |x|^{k_1\cdot k_4} |1-x|^{k_2\cdot k_4}, \qquad (1.17)$$

где интегрирование идет по всей вещественной оси. Тогда получаем симметричное соотношение

$$A_4 = A(s,t) + A(t,s) + A(u,s). \qquad (1.18)$$

2. p-адические амплитуды. Как показало развитие математической физики за последние 20 лет, простые формулы (1.1) привели после соответствующего развития к весьма содержательной современной теории струн. Поэтому представляет значительный интерес математическое обобщение этих выражений. В соответствии с двумя представлениями (1.1) и (1.6) были предложены два возможных пути обобщения, либо через интегральное представление, либо через Г-функцию. Здесь мы рассмотрим интегральное представление. Можно интерпретировать интеграл в (1.1) или в (1.17) как свертку двух мультипликативных характеров на вещественной оси, поскольку $|x|^{a}$ - это характер. Поэтому предлагается следующее обобщение. Пусть K - поле, $\gamma_\alpha(x)$ и $\gamma_\beta(x)$ - мультипликативные характеры на K, где α и β - некоторые параметры, от которых зависят эти характеры. Положим

$$A(\gamma_\alpha,\gamma_\beta) = \int_K \gamma_\alpha(x)\gamma_\beta(1-x)dx, \tag{2.1}$$

где dx - мера на K. При различных выборах поля K и характеров γ_α эта формула дает как известные, так и новые амплитуды. В частности, при $\gamma_\alpha(x) = |x|^{\alpha}$ для $K = \mathbb{R}$ получим выражение (1.17), а для $K = \mathbb{C}$ получим выражение (1.16).

Рассмотрим случай $K = \mathbb{Q}_p$, $\gamma_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1}$, $\gamma_\beta(x) = |x|_p^{\beta-1}$, где α и β - комплексные параметры. Формула (2.1) тогда определяет $\mathcal{B}$-функцию, рассмотренную в п. 3 § 8:

$$\mathcal{B}_p(\alpha,\beta) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1}dx. \tag{2.2}$$

Интеграл (2.2) абсолютно сходится в области, где $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta) < 1$. В § 8 (формула (3.9)) приведено выражение $\mathcal{B}$-функции (2.2) через Γ_p-функцию,

$$\mathcal{B}_p(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}, \tag{2.3}$$

где

$$\Gamma_p(\alpha) = \frac{1-p^{1-\alpha}}{1-p^{-\alpha}}, \tag{2.4}$$

или, в более симметричном виде,

$$\mathcal{B}_p(\alpha,\beta) = \Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\gamma), \tag{2.5}$$

где

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{2.6}$$

Положив в (2.3) $\alpha = -\alpha(s)$, $\beta = -\alpha(t)$, где $\alpha(s)$ определяется формулой (1.5), а s и t - формулами (1.3), получаем простейшую p-адическую дуальную амплитуду $\mathcal{B}_p(-\alpha(s),-\alpha(t))$. В силу соотношения

$$\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = -1,$$

используя (2.5) и (2.6), ее можно записать в симметричном виде

$$\mathcal{B}_p(-\alpha(s),-\alpha(t)) = \prod_{x=s,t,u} \frac{1-p^{-\alpha(x)-1}}{1-p^{\alpha(x)}}. \qquad (2.8)$$

Формула (1.13) допукает непосредственное обобщение на p-адический случай:

$$A = \int_{\mathbb{Q}_p^N} \prod_{i=1}^{N} dx_i \prod_{1\le l<m\le N} |x_l - x_m|_p^{-k_l\cdot k_m}. \qquad (2.9)$$

После выделения объема группы $SL(2,\mathbb{Q}_p)$ из (2.9) получаем, аналогично (1.11):

$$A_{N,p} = \int_{\mathbb{Q}_p^{N-3}} dx_2\ldots dx_{N-2} \prod_{j=1}^{N-2} |x_j|_p^{-k_1\cdot k_j} |1-x_j|_p^{-k_2\cdot k_j} \times$$

$$\times \prod_{2\le l<m\le N-2} |x_l - x_m|_p^{-k_l\cdot k_m}. \qquad (2.10)$$

Интеграл (2.10) может быть вычислен в явном виде, аналогично (2.8).

Интересно отметить, что приведенные p-адические дуальные амплитуды могут быть получены по правилам квантовой теории поля из лагранжиана, соответствующего следующему нелинейному уравнению

$$p^{-\Box/2}\phi = \phi^p. \qquad (2.11)$$

Здесь $\phi = \phi(x)$ - вещественное поле в n-мерном вещественном пространстве-времени с координатами $x = (x_0,\ldots,x_{n-1})$, $\Box$ - оператор Даламбера,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}. \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.11) имеет статическое солитонное решение очень простого вида

$$\phi = \frac{n-1}{p^{2(p-1)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{p-1}{p\ln p}\,\bar{x}^2\right], \qquad (2.13)$$

где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Будем использовать обозначения

$$B(\alpha,\beta) = \int_{\mathbb{R}} dx|x|^{\alpha-1}|1-x|^{\beta-1}, \tag{2.14}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{2.15}$$

Лемма 2.1. *Имеет место следующая формула для функции* (2.14)

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)} \frac{\zeta(1-\beta)}{\zeta(\beta)} \frac{\zeta(1-\gamma)}{\zeta(\gamma)}, \tag{2.16}$$

где ζ – дзета-функция Римана, аргументы α и β лежат в области $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta < 1$, а γ задается формулой (2.15).

■ Разбивая область интегрирования в интеграле (2.14) на три части, преобразуем его к виду

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}. \tag{2.17}$$

Используя соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

и выполняя тригонометрические преобразования, приводим формулу (2.17) к виду

$$B(\alpha,\beta) = \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{\pi\beta}{2}\cos\frac{\pi\gamma}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma). \tag{2.18}$$

Воспользовавшись функциональным соотношением для дзета-функции

$$(2\pi)^x\zeta(1-x) = 2\cos\frac{\pi x}{2}\Gamma(x)\zeta(x)$$

и соотношением (2.15), преобразуем (2.18) к виду

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)} \frac{\zeta(1-\beta)}{\zeta(\beta)} \frac{\zeta(1-\gamma)}{\zeta(\gamma)}. \ ■$$

Замечание. Отметим полученное соотношение между дзета- и гамма-функциями:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} =$$

$$= \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)} \frac{\zeta(1-\beta)}{\zeta(\beta)} \frac{\zeta(1-\gamma)}{\zeta(\gamma)}, \tag{2.19}$$

где

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

3. Адельные произведения. Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть значения вещественных параметров* α *и* β *лежат в области*

$$\alpha < -1,\ \beta < -1. \tag{3.1}$$

Тогда справедливы следующие соотношения для функций (2.3), (2.16):

$$\prod_p (-1) B_p(\alpha,\beta) = \frac{\zeta(-\alpha)}{\zeta(1-\alpha)} \frac{\zeta(-\beta)}{\zeta(1-\beta)} \frac{\zeta(1-\alpha-\beta)}{\zeta(\alpha+\beta)}, \tag{3.2}$$

$$B(\alpha,\beta) \prod_p |B_p(\alpha,\beta)| = \frac{\zeta(-\alpha)}{\zeta(\alpha)} \frac{\zeta(-\beta)}{\zeta(\beta)} \frac{\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta(-\alpha-\beta)}, \tag{3.3}$$

причем произведения в (3.2), (3.3) *по всем простым* p *сходятся абсолютно.*

■ Перепишем выражение (2.3) в виде

$$B_p(\alpha,\beta) = (-1) p^{\alpha} \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{\alpha}} p^{\beta} \frac{1-p^{\beta-1}}{1-p^{\beta}} p^{\gamma-1} \frac{1-p^{1-\gamma}}{1-p^{-\gamma}}$$

или, с учетом (2.15), в виде

$$B_p(\alpha,\beta) = -\frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{\alpha}} \frac{1-p^{\beta-1}}{1-p^{\beta}} \frac{1-p^{1-\gamma}}{1-p^{-\gamma}}. \tag{3.4}$$

В области значений параметров (3.1) имеем $\gamma > 2$ и

$$B_p(\alpha,\beta) < 0. \tag{3.5}$$

Используя формулу Эйлера (0.1) из п. 7 § 7, находим из (3.4)

$$\prod_p (-1) B_p(\alpha,\beta) = \frac{\zeta(-\alpha)}{\zeta(1-\alpha)} \frac{\zeta(-\beta)}{\zeta(1-\beta)} \frac{\zeta(-\gamma)}{\zeta(1-\gamma)} =$$

$$= \frac{\zeta(-\alpha)}{\zeta(1-\alpha)} \frac{\zeta(-\beta)}{\zeta(1-\beta)} \frac{\zeta(1-\alpha-\beta)}{\zeta(\alpha+\beta)}, \tag{3.6}$$

т.е. соотношение (3.2). Произведение в (3.6) сходится абсолютно. Действительно, как известно, для абсолютной сходимости произведения

$$\prod_p (1+x_p)$$

необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда $\sum_p x_p$. Имеем

$$\frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{\alpha}} = 1 + (1-p^{-1})\frac{1}{p^{-\alpha}-1}$$

и при $\alpha < -1$ (1.13)

$$\sum_p \frac{1}{p^{-\alpha}-1} < \infty.$$

Аналогично доказывается сходимость произведений по p для остальных двух сомножителей в (3.4). Формула (3.3) следует из (3.2) с учетом леммы 2.1. ∎

Замечание. В работе Фройнда и Виттена приводится следующая замечательная формула

$$B(\alpha,\beta)\ \prod_p B_p(\alpha,\beta) = 1. \tag{3.7}$$

Однако, к сожалению, произведение в (3.7) расходится и результат зависит от выбора регуляризации.

Покажем, что имеется связь формул (3.2), (3.3) и (3.7) с формулой Тэйта. Из формулы (2.2) из § 7 для $\theta(\lambda) \equiv 1$ следует соотношение

$$\prod_p \int \varphi_p(x_p)\,|x_p|_p^{\beta} dx_p = \prod_p \int \tilde{\varphi}_p(y_p)\,|y_p|_p^{1-\beta} dy_p, \tag{3.8}$$

здесь в произведения включен случай $p = \infty$, β - вещественный параметр. Функции $\varphi_p(x_p)$ здесь должны принадлежать пространству Брюа - Шварца. Однако положим формально

$$\varphi_p(x_p) = |1-x|_p^{\alpha}, \tag{3.9}$$

где α - вещественный параметр, и покажем, что тогда соотношение (3.8) приводит к формуле (3.7). Действительно, имеем

$$\tilde{\varphi}_p(y) = C_p(\alpha)\chi(y)|y_p|_p^{-1-\alpha}, \ p \neq \infty,$$

$$\tilde{\varphi}_\infty(y) = C_\infty(\alpha)e^{2\pi i y}|y|_p^{-1-\alpha}, \ p = \infty,$$

где

$$C_p(\alpha) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-1-\alpha}}, \ p \neq \infty; \ C_\infty(\alpha) = -2(2\pi)^{-1-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1+\alpha).$$

Поэтому, согласно (3.8),

$$\prod_p \int |1-x_p|_p^\alpha |x|_p^\beta dx_p = \prod_p C_p(\alpha)C_p(-\alpha-b-1) = 1,$$

так как

$$\prod_p C_p(\alpha) = -2(2\pi)^{-1-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1+\alpha)\prod_p \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-1-\alpha}} =$$

$$= -2(2\pi)^{-1-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1+\alpha)\frac{\zeta(1+\alpha)}{\zeta(-\alpha)} = 1.$$

Таким образом, получаем соотношение (3.7). Если вместо (3.9) положить

$$\varphi_p(x) = -|1-x|_p^\alpha,$$

то придем к соотношению (3.3).

4. Струнное действие. Мы обсудили амплитуду Венециано и ее обобщения. В действительности, эти амплитуды – только первые члены в так называемом петлевом разложении. Полный ответ имеет вид

$$A(k_1,\dots k_N) = \sum_{h=0}^\infty A_h(k_1,\dots k_N),$$

$$A_h(k_1,\dots k_N) =$$

$$= \int\limits_{M_h} d\mu(\tau) \int\limits_{\Sigma_h} \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\sum_{i<j} k_i\cdot k_j G(\xi_i,\xi_j;\tau)\Bigr)\prod_{j=1}^{N} dS_j. \quad (4.1)$$

Здесь Σ_h - компактная ориентированная поверхность рода h, ξ_j, $j = 1,\ldots,N$, - координаты N точек на этой поверхности, $dS_j = \sqrt{g(\xi_j)}d^2\xi_j$, $g(\xi)=\det\, g_{\alpha\beta}(\xi)$, где $g_{\alpha\beta}$ - метрика на Σ_h, $\alpha,\beta = 1, 2$, M_h - пространство модулей Римановых поверхностей рода h, τ - локальные координаты на M_h, $G(\xi,\zeta;\tau)$ - функция Грина скалярного лапласиана на Σ_h, $d\mu(\tau)$ - мера на M_h, $k_1,\ldots k_N$ - импульсы частиц (тахионов), $k_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1,\ldots N$. Имеем также $k_j^2 = 2$, $k_1+\ldots+k_N = 0$.

Более детально мы рассмотрим это выражение в следующем разделе. Здесь же мы отметим, что эта формула получается из следующего формального функционального интеграла

$$\delta(k)A_h(k_1,\ldots k_N) = \int\bigl[Dg_{\alpha\beta}\bigr]\int\bigl[DX^{\mu}\bigr]\prod_{j=1}^{N}V(k_j)e^{-I}, \quad (4.2)$$

где $\delta(k) = \delta\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N}k_i\Bigr)$, δ - функция Дирака. Классическое действие I в формуле (4.2) имеет вид:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_h} d^2\xi\sqrt{g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\mu, \quad (4.3)$$

$X = X^\mu(\xi)$, $\mu = 1,\ldots,d$, - отображение из Σ_h в $\mathbb{R}^d$, $\partial_\alpha X^\mu = \dfrac{\partial}{\partial\xi^\alpha}X^\mu(\xi)$, вершинный оператор $V(k)$ имеет вид

$$V(k) = \int\limits_{\Sigma_h} d^2\xi\sqrt{g}\,\exp(ik\cdot X(\xi)).$$

Символы $\bigl[Dg_{\alpha\beta}\bigr]$ и $\bigl[DX^\mu\bigr]$ означают, что интегрировать следует по всем метрикам на Σ_h и всем отображениям X^μ.

5. Пространство модулей и тэта-функции. Действие I обладает двумя бесконечными группами симметрий. Одна из них - группа вейлевских растяжений, которая действует по правилу $g_{\alpha\beta} \mapsto e^{\sigma}g_{\alpha\beta}$. Она называется *конформной группой Вейля*. Другая группа симметрий - это группа диффеоморфизмов Diff, или группа перепараметризаций Σ_h. Диффеоморфизмы из связной окрестности единицы называются *локальными диффеоморфизмами*. Группа таких диффеоморфизмов обозначается через Diff_0. Существуют также глобальные диффеоморфизмы, которые не лежат в связной окрестности единицы. Пространство

$$M_h = \left\{\text{метрики на } \Sigma_h\right\} / \mathrm{Diff}\cdot\mathrm{Weyl}$$

называется *пространством модулей*. Пространство M_h – комплексное многобразие комплексной размерности 0 для $h = 0$, 1 для $h = 1$ и $3h-3$ для $h \geq 2$. Более обширное пространство

$$T_h = \left\{\text{метрики на } \Sigma_h\right\} / \mathrm{Diff}_0\cdot\mathrm{Weyl}$$

называется *пространством Тейхмюллера*. Группа всех диффеоморфизмов по модулю локальных диффеоморфизмов называется группой классов отображений (или *модулярной группой*). Рассмотрим слой S пространства метрик, трансверсальный к действию групп Diff_0 и Weyl. Подобласть в S, в которой не существует пары точек, связанных глобальным диффеоморфизмом, называется *фундаментальной областью* модулярной группы. Конформный класс метрики определяет комплексную структуру на Σ_h.

Первая группа гомологий $H_1(\Sigma_h,\mathbb{Z})$ имеет $2h$ образующих. Выберем симплектический базис $\{a_1,\ldots,a_h,b_1,\ldots b_h\}$ 1-циклов на Σ_h, удовлетворяющий следующим условиям на числа пересечения:

$$a_i\cdot a_j = b_i\cdot b_j = 0,\ a_i\cdot b_j = \delta_{ij}$$

Любые два симплектических базиса связаны преобразованием из симплектической модулярной группы $\mathrm{Sp}(2h,\mathbb{Z})$. Пространство голоморфных 1-форм на Σ_h имеет базис $\{\omega_1,\ldots\omega_h\}$, однозначно определяемый условиями

$$\int_{a_i}\omega_j = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots h.$$

Матрица $\tau = (\tau_{ij})$,

$$\tau_{ij} = \int_{b_i} \omega_j,$$

называется *матрицей периодов* на Σ_h и является комплексной симметричной $h\times h$-матрицей с положительно определенной мнимой частью. Выбрав точку $Q_0 \in \Sigma_h$, с каждой точкой Q на Σ_h свяжем комплексный h-компонентный вектор $f(Q)$ с помощью отображения Якоби:

$$Q \longmapsto f_i(Q) = \int_{Q_0}^{Q} \omega_i, \ i = 1, \dots h.$$

Этот вектор единственный с точностью до периодов τ. Следовательно, f есть элемент комплексного тора

$$J(\Sigma_h) = \mathbb{C}^h/\mathbb{Z}^h + \tau\mathbb{Z}^h,$$

называемого *многообразием Якоби* пространства Σ_h.

Тэта-функция определяется для $z \in J(\Sigma_h)$ следующей суммой:

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^h} \exp(i\pi n^t\tau n + 2\pi i n^t z).$$

Тэта-функция с характеристиками $\alpha,\beta \in 1/2\mathbb{Z}^h$ определяется по формуле

$$\theta\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}(z,\tau) = \exp(i\pi n^t\tau\beta + 2\pi i\alpha^t(z+\beta))\theta(z+\tau\alpha+\beta,\tau).$$

Четность числа $4\alpha^t\beta$ называется *четностью характеристики* $\{\alpha,\beta\}$.

Прим-форма $E(w,\xi)$ определяется как голоморфная дифференциальная форма на $\Sigma_h\times\Sigma_h$ веса $(-1/2,\ 0)\times(-1/2,\ 0)$:

$$E(w,\xi) = \frac{\theta\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\left(\int_{\xi}^{w}\omega,\ \tau\right)}{(h(w)^{1/2}(h(\xi)^{1/2}}, \tag{5.1}$$

где

$$h(w) = \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial}{\partial z_i} \Theta\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}(0,\tau) \cdot \omega_i(w).$$

$E(w,\xi)$ не зависит от выбора четной характеристики $\{\alpha,\beta\}$ и обращается в нуль только при $w = \xi$.

На пространстве M_h существует мера, связанная с голоморфной структурой пространства модулей. В соответствии с теоремой Мамфорда линейное расслоение

$$K \otimes \lambda^{-13} \tag{5.2}$$

над пространством модулей голоморфно тривиально. В последней формуле K – каноническое расслоение пространства модулей, т.е. наибольшая внешняя степень кокасательного расслоения, λ – наибольшая внешняя степень расслоения голоморфных 1-форм на поверхности. Существует единственное голоморфкое нигде не обращающееся в нуль сечение F расслоения $K\otimes\lambda^{-13}$. Пусть $v_1,\ldots,v_{3h-3}$ – аналитические координаты на M_h $(h \geq 2)$, тогда

$$d\mu = |F(v)|^2(\det\, \mathrm{Im}\tau)^{-13} dv \wedge d\bar{v} \tag{5.3}$$

есть мера на M_h, где

$$dv = dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_{3h-3}.$$

6. Многопетлевые амплитуды. Для определения функционального интеграла (4.2) используется процедура квантования калибровочных теорий. Можно утверждать, что амплитуда (4.2) имеет вид

$$A_h(k_1,\ldots k_N) = \int\limits_{M_h} d\mu(v) T(k_1,\ldots k_N;v), \tag{6.1}$$

где $T(k_1,\ldots k_N;v)$ определяется Гауссовым интегралом

$$\delta(k)T(k_1,\ldots k_N;v) = \int \left[DX^\mu\right] e^{-I} \prod_{j=1}^{N} V(k_j) =$$

$$= \delta(k)\int \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i<j} k_i\cdot k_j G(\xi_i,\xi_j)\right)\prod_{j=1}^{N}\sqrt{g}\,(\xi_j)d^2\xi_j.$$

Последнее выражение может быть записано при помощи формы (5.1):

$$T(k_1,\dots k_N;v) = \int \prod_{i<j} \left| f(\xi_i,\xi_j) \right|^{2k_i k_j} \prod_{j=1}^{N} d^2\xi_j, \qquad (6.2)$$

$$f(\xi_i,\xi_j) = E(\xi_i,\xi_j)\exp\left\{-\pi \mathrm{Im} z^t_{ij} (\mathrm{Im}\tau)^{-1} \mathrm{Im} z_{ij}\right\},$$

$$z_{ij} = \int_{\xi_i}^{\xi_j} \omega.$$

В частности, для тора ($h = 1$) имеем

$$A_1(k_1,\dots k_N) =$$

$$= \int_{M_1} \frac{d^2 v}{(\mathrm{Im} v)^{14} e^{-4\pi \mathrm{Im} v}} \left| \eta(v) \right|^{-48} \int \prod_{r=1}^{N-1} d^2 \nu_r \prod_{r<s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s /2}. \quad (6.3)$$

В формуле (6.2)

$$\eta(v) = e^{\frac{i\pi v}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{2\pi i n v})$$

– это функция Дедекинда,

$$\chi_{rs} = \chi(\nu_r - \nu_s, e^{2\pi i v}),$$

$$\chi(x,w) = \exp\left(\frac{\ln^2|x|}{2\ln|w|}\right) \left| \frac{(1-x)}{x^{1/2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-w^n x)(1-w^n/x)}{(1-w^n)^2} \right|.$$

Интегрирование проводится по фундаментальной области $M_1 = \{v \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im} v > 0,\ |\mathrm{Re}\ v| \le 1/2\}$ и

$$\left| e^{2\pi i v} \right| \le \left| e^{2\pi \nu_r} \right| \le 1, \quad r = 1,\dots N-1.$$

Интеграл в формуле (6.3) инвариантен относительно модулярных преобразований из $SL(2,\mathbb{Z})$. Этот интеграл расходится, и необходимо использовать процедуру регуляризации. Проблема расходимости исчезает в теории суперструн. Амплитуда рассеяния четырех безмассовых частей в теории суперструн схо-

дится и, однопетлевая амплитуда имеет следующий простой вид:

$$\int\limits_{M_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^5} \int \prod_{r=1}^{3} d^2\nu_r \prod_{r<s} (\chi_{rs})^{k_r k_s/2} .$$

Требование модулярной инвариантности струнной меры $d\mu$ позволяет в случае маленького рода выразить меру в терминах модулярных форм. Для рода $h = 2$ можно использовать верхнюю полуплоскость Зигеля H_2 для описания пространства модулей M_2.

Более точно, M_2 изоморфно пространству $H_2/\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$ по модулю класса эквивалентности пространства диагональных периодических матриц. Мера $d\mu$ на H_2 должна иметь вид

$$d\mu = |f(\tau)|^2(\det\mathrm{Im}\tau)^{-13} \prod_{i\le j} d\tau_{ij}. \qquad (6.4)$$

Голоморфная функция f: $H_h \to \mathbb{C}$ называется модулярной формой рода h и веса k, если f удовлетворяет соотношению:

$$f\left((A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}\right) = \det(C\tau+D)^k f(\tau)$$

для всех $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2h,\mathbb{Z})$.

При модулярных преобразованиях имеем

$$\prod_{i\le j} d\tau_{ij} \longmapsto \det(C\tau+D)^{-3} \prod_{i\le j} d\tau_j$$

$$\det\,\mathrm{Im}\,\tau \longmapsto \frac{\det\,\mathrm{Im}\tau}{|\det(C\tau+D)|^2},$$

следовательно функция f^{-1} в формуле (5.5) должна быть модулярной формой веса 10. Кольцо модулярных форм рода два известно. Существует единственная модулярная форма ψ_{10} веса 10, обращающаяся в нуль на диагональных периодических матрицах,

$$\psi_{10} = \prod_{\alpha,\beta} \theta^2\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}(0,\tau),$$

произведение берется по четным характеристикам.

Таким образом имеем:

$$d\mu = |\psi_{10}|^{-2}(\det \operatorname{Im}\tau)^{-13}\prod_{i\le j} d\tau_{ij}.$$

7. Жесткая аналитическая геометрия и p-адические струны. Как следует из вышеизложенного, в теории струн используется теория Римановых поверхностей, в частности пространство модулей и тэта-функции. Для развития p-адической теории струн необходимо иметь p-адический аналог комплексного анализа, включая основной принцип аналитического продолжения. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ вполне несвязно, поэтому для этих целей не подходит «наивное» понятие аналитичности, рассмотренное в § 2. Однако соответствующая теория была построена Тэйтом и другими. Она называется *жесткой аналитической геометрией*.

Основная идея заключается в том, чтобы осуществлять аналитическое продолжение только по отношению к определенным допустимым открытым покрытиям жесткого пространства. Аналитические функции больше не рассматриваются на всех открытых подмножествах такого пространства; необходимо ограничиться допустимыми открытыми множествами, которые образуют так называемую топологию Гротендика. Существует нетривиальное понятие связности для такого пространства. Такой жестко аналитический подход использовался для униформизации алгебраических кривых и его же естественно использовать для p-адических струн. Ниже кратко рассматриваются некоторые аспекты жесткой аналитической геометрии.

Пусть $T_n = K\langle z_1,\dots z_n\rangle$ - кольцо степенных рядов, сходящихся в шаре

$$B_n = \left\{(x_1,\dots x_n) \in K^n\colon\ |x_i| \le 1,\ i = 1,\dots,n\right\},$$

K - полное неархимедово поле, например, $\mathbb{Q}_p$.

Аффиноидной алгеброй A над K (или алгеброй Тэйта) называется K-алгебра, являющаяся конечным расширением T_n. Это означает, что существует гомоморфизм K-алгебр $T_n \to A$, который превращает A в конечнопорожденный T_n-модуль. Пространство $\mathrm{Sp}(A)$ максимальных идеалов алгебры A называется *аффиноидным пространством*. Каждая аффиноидная алгебра A имеет вид T_n/I для некоторого идеала $I \subset T_n$ и является банаховым пространством. Можно отождествить $\mathrm{Sp}(A)$ с точками $x \in B_n$ по правилу $f(x) = 0$ для всех $f \in I$.

Пусть $X = \mathrm{Sp}(A)$ и $f_0, f_1, \ldots f_n \in A$ не имеет общих нулей на X. Тогда подпространство $U \subset X$,

$$U = \left\{x \in X\colon \ |f_i(x)| \le |f_0(x)|,\ i = 1, \ldots n\right\},$$

называется *рациональной областью*. Мы определим топологию Гротендика на X, взяв в качестве открытых множеств все рациональные области. Топология Гротендика на топологическом пространстве X определяется следующим образом. Пусть F – семейство открытых подмножеств X и $\mathrm{Cov}(U)$ – набор покрытий множества $U \subset X$. Пара (F, Cov) называется *топологией Гротендика*, если выполняются следующие условия:

1) $\phi, X \in F$ и для $U, V \in F$ выполнено $U \cap V \in F$,
2) $\{U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ для всех $U \in F$,
3) если $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ и $V \subset U$, $U, V \in F$, то $\mathcal{U} \cap V \in \mathrm{Cov}(V)$
4) если $\mathcal{U}_i \in \mathrm{Cov}(U_i)$ и $(U_i) \in \mathrm{Cov}(U)$, то $\bigcup\limits_i \mathcal{U}_i \in \mathrm{Cov}(U)$.

Элементы множества F называются *допустимыми открытыми множествами*, элементы $\mathrm{Cov}(U)$ – *допустимыми покрытиями* U.

С рациональной областью U ассоциируется аффиноидная алгебра

$$A_U = A\langle z_1, \ldots, z_n\rangle/(f_1 - z_1 f_0, \ldots, f_n - z_n f_0).$$

Таким образом, можно определить предпучок $\mathcal{O}_X$ на X, строя A_U для каждого допустимого открытого множества U. Основной результат состоит в том, что в действительности $\mathcal{O}_X$ является пучком для топологии Гротендика. Пространство $X = \mathrm{Sp}(A)$ с топологией Гротендика и структурным пучком $\mathcal{O}_X$ называется *аффиноидным пространством*. *Аналитическое* пространство X определяется следующим образом: X имеет топологию Гротендика и пучок $\mathcal{O}_X$ такой, что существуют $(X_i) \in \mathrm{Cov}(X)$, для которых $(X_i, \mathcal{O}_X|X_i)$ – аффиноидные пространства.

Пример. Если X – полная невырожденная неприводимая кривая над K с полем функций $K(X)$, то для любой $f \in K(X)$, $f \neq 0$, множество $X_f = \{x \in X\colon \ |f(x)| \le 1\}$ является допустимым аффиноидным подмножеством X. Аффиноидная алгебра $\mathcal{O}_{X_f}$ есть пополнение множества алгебраических голоморфных функций на X_f.

Униформизация X есть представление X в виде Y/Γ, где Y - аналитическое пространство и Γ - бесконечная группа, действующая разрывно на Y. Как известно, верхняя полуплоскость униформизует кривые рода $g \geq 2$ над $\mathbb{C}$.

Проблема униформизации кривых над неархимедовым полем K более сложна. Прежде всего рассмотрим эллиптическую кривую X. Если X определена над $\mathbb{C}$, то X имеет униформизацию $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ - решетка. Подобного рода униформизации нет для неархимедова поля K. Если мы положим $\Gamma = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\tau$ с $\operatorname{Im}\tau > 0$, то можно построить другую униформизацию X, используя экспоненциальное отображение. Можно получить униформизацию $\mathbb{C}^*/\langle q\rangle$ кривой, где $\langle q\rangle$ - мультипликативная группа с образующей $q = e^{2\pi i\tau}$. Эта униформизация имеет аналог для неархимедова поля K. Для $q \in K^*$, $|q| < 1$, аналитический тор $X_q = K^*/\langle q\rangle$ есть эллиптическая кривая, называемая кривой Тэйта. j-инвариант $j(q)$ кривой X_q удовлетворяет условию $|j(q)| > 1$. Редукция кривой X_q есть рациональная кривая с особенностями над $\bar{K}$, где $\bar{K}$ обозначает поле классов вычетов поля K.

Для униформизации полной несингулярной кривой X рода $g \geq 2$ используется униформизация Шоттки. *Группой Шоттки* Γ называется разрывная конечно порожденная подгруппа группы $\mathrm{PGL}(2,K)$, не имеющая элементов конечного порядка. Эта группа имеет хорошую фундаментальную область: $F = \mathbb{P}-(2g$ открытых дисков$)$. Через L обозначим множество предельных точек действия Γ на $\mathbb{P}$. В этом случае $(\mathbb{P}-L)/\Gamma$ есть аналитическое пространство, аналитически изоморфное полной несингулярной неприводимой кривой рода g. Такая кривая называется кривой Мамфорда. Существуют развитая теория автоморфных форм, многообразие Якоби, матрица периодов, неархимедова верхняя полуплоскость Зигеля и тэта-функции. В частности, можно определить прим-форму

$$E(x,y) = (x-y)\prod_{\gamma\in\Gamma}{}' \frac{x-\gamma(y)}{x-\gamma(x)}\cdot\frac{y-\gamma(x)}{y-\gamma(y)}$$

и попытаться использовать ее в p-адической теории струн, просто заменяя комплексные переменные на p-адические. Если же мы хотим развивать теорию струн более систематическим образом, следует начинать с классического p-адического действия и затем его квантовать. Вспомним, что замкнутые стуны соответствуют римановым поверхностям без границы, а открытые струны римановыми поверхностями с границей.

Можно рассматривать кривую X, снабженную жесткой аналитической структурой как неархимедов аналог комплексной римановой поверхности без границы. Тогда определение X_f наводит на мысль, что аффиноидное пространство есть неархимедов аналог комплексной римановой поверхности с границей. Можно попытаться определить «наивную» границу X_f как множество $B = \{x \in X_f\colon \ |f(x)| = 1\}$. Однако таким образом определенная граница сильно зависит от выбора f. Используя жесткую геометрию, мы можем определить каноническую границу ∂X_f таким образом, что $B \subset \partial X_f$.

Подход к p-адической теории струн, основанный на p-адическом аналоге классического струнного действия, в настоящий момент отсутствует. Можно попытаться использовать $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$-симметрию оператора D и рассмотреть действие

$$S = \iint\limits_{F\,F} \frac{(X^\mu(x)-X^\mu(y))^2}{|x-y|^2}dxdy,$$

где F - фундаментальная область группы Шоттки. В действительности, можно получить p-адические древесные амплитуды из этого действия для $F = \mathbb{Q}_p$. Это также наводит на мысль интерпретировать мировую поверхность открытой p-адической струны как пространство T/Γ, где T - дерево Брюа - Титса, $T = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_p)/\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z}_p)$ и Γ - группа Шоттки. Дерево T - связный бесконечный граф без петель. Каждая вершина графа T соединяется ребрами с $p+1$ соседней вершиной. Отметим, что для каждого компактного подмножества X в $\mathbb{P}$ существует каноническое дерево $T(X)$.

Открытым остается вопрос о струнной мере на p-адическом пространстве модулей. Может быть наиболее последовательный подход к p-адической теории струн следует начинать с теории над глобальным полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в соответствии с обсуждением во введении.

Можно ожидать, что замечательная жесткая аналитическая геометрия найдет применение в p-адической гравитации.

В этом параграфе мы хотим обсудить некоторое замечательное соответствие между квантовыми группами (q-анализом) и p-адическим анализом.

1. p-адический интеграл и q-интеграл. Квантовая группа $SU_q(2)$ - это алгебра Хопфа с образующими a и c, удовлетворяющими квадратичным соотношениям. Как было показано Вороновичем, существует мера Хаара m на $SU_q(2)$.

Предложение 1. *Мера Хаара на* $SU_q(2)$ *совпадает с мерой Хаара на поле p-адических чисел* $\mathbb{Q}_p$ *в случае* $q = 1/p$.

■ Известно, что группа когомологий $H^3(SU_q(2))$ есть $\mathbb{C}$, следовательно, существует единственный линейный функционал

$$\int : \Gamma^3 \longrightarrow \mathbb{C},$$

такой, что $\int d\zeta = 0$ для $\zeta \in \Gamma^2$, где через Γ^n обозначен модуль n-дифференциальных форм. Для координатного кольца группы $SU_q(2)$ имеем

$$\int f\omega_0\omega_1\omega_2 = m(f),$$

где m - мера Хаара, ω_i - дифференциальные формы на $SU_q(2)$. Если f - полином по cc^*, то справедлива формула

$$m(f) = (1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^{2n})q^{2n}, \ 0 < q < 1.$$

Это есть известный интеграл Джексона в q-анализе:

$$\int_0^1 f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n. \tag{1.1}$$

Напомним, что интеграл по $\mathbb{Q}_p$ по мере Хаара имеет вид:

$$\int_{|x|_p\le 1} f(|x|_p)dx = (1-\frac{1}{p})\sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-n})q^{-n}. \tag{1.2}$$

Таким образом, видно, что (1.1) совпадает с (1.2), если

$$q = \frac{1}{p},$$

т.е.

$$\int_0^1 f(x)\,d_{1/p}x = \int_{|x|_p \le 1} f(|x|_p)\,dx. \ \blacksquare$$

Существует следующее обобщение предложения 1. Рассмотрим оператор

$$M[f](|x|_p) = \frac{1}{(1-p^{-1})|x|_p} \int_{|y|_p=|x|_p} f(y)\,dy =$$

$$= \int_{|u|_p=1} f\left(u/|x|_p\right)\frac{du}{1-p^{-1}}, \quad x \in G,$$

где $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$, $G = \bigcup\limits_{\gamma \in B} S_\gamma$, $S_\gamma = \left\{|x|_p = p^\gamma\right\}$. Тогда справедливо равенство

$$\int_G f(x)\,dx = \int_B M[f](r)\,d_{1/p}r,$$

где

$$\int_B \varphi(r)\,d_q r = (1-q) \sum_{\gamma \in B} q^\gamma \varphi(q^\gamma).$$

2. **Дифференциальные операторы.** В этом разделе рассматривается связь между дифференциальными операторами в q-анализе и p-адическом анализе. В q-анализе имеется следующий оператор дифференцирования:

$$\partial_q f(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}. \tag{2.1}$$

Также используется следующий оператор:

$$\partial_q f(x) = \sum_i^{\infty} f(q^{i+1/2}x)/(xq^i - xq^{i+1}).$$

В p-адическом анализе, если мы рассматриваем вещественнозначную функцию $f(x)$ p-адической переменной x, мы не можем использовать стандартное определение дифференцирования, поскольку нельзя умножить p-адическое число на вещественное. В § 9 рассматривался следующий оператор:

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{p-1}{1-p^{-1-\alpha}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dy. \qquad (2.2)$$

Ограничиваясь рациональными x в формулах (2.1) и (2.2), легко заметить, что выражения (2.1) и (2.2) весьма похожи, в частности, оба оператора нелокальны.

3. Спектры q-деформированного осциллятора и p-адической модели. Рассмотрим связь между спектрами q-деформированного осциллятора и p-адической модели.

Спектр p-адического уравнения

$$D\psi(x) + V(|x|_p)\psi(x) = E\psi$$

для случая

$$V(|x|_p) = \frac{p}{1-p^2} \left[|x|_p - \frac{1+p+p^2}{p|x|_p} \right]$$

имеет следующие собственные значения:

$$E_n = [n]_{1/p} = \frac{p^{-n}-p^n}{p^{-1}-p}, \quad p \in Z. \qquad (3.1)$$

Для q-деформированного осциллятора

$$aa^+ - qa^+a = q^{-N}, \quad [N,a^+] = -a, \quad [N,a] = a^+,$$

спектр был найден Биденхарном:

$$H = a^+a, \quad H|n\rangle = [n]_q|n\rangle. \qquad (3.2)$$

Видно, что в случае

$$q = \frac{1}{p}$$

выражение (3.2) дает p-адический спектр (3.1).

В § 10 было показано, что спектр более общего уравнения

$$D^{\alpha}\psi(x) + V(|x|_p)\psi(x) = E\psi, \ \alpha > 0,$$

имеет следующее семейство собственных значений:

$$E_{n,l} = p^{\alpha n} + V(p^{l-n}), \ l = 1,2,3,\ldots; \ n = 0,\pm 1,\ldots$$

Подобный спектр возникает для q-деформированного уравнения Шредингера.

§ 16. Случайные процессы над полем p-адических чисел

В этом параграфе излагаются элементы теории случайных и обобщенных случайных процессов над полем p-адических чисел. После сводки основных определений по теории случайных процессов мы рассматриваем броуновское движение на p-адической прямой как марковский процесс. Затем рассматриваются обобщенные случайные поля на пространстве обобщенных функций.

1. Случайные отображения и марковские процессы. Измеримым пространством называется пара $\{\Omega,\Sigma\}$, где Ω - множество, Σ - σ-алгебра подмножеств Ω. Набор $\{\Omega,\Sigma,P\}$, где $\{\Omega,\Sigma\}$ - измеримое пространство, а P - счетно аддитивная неотрицательная мера на Σ, удовлетворяющая условию

$$P(\Omega) = 1, \tag{1.1}$$

называется *вероятностным пространством*. Элементы $A \in \Sigma$ называются событиями, а $P(A)$ называется вероятностью события A.

Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называется Σ-измеримая вещественная функция на Ω, т.е. $\xi^{-1}(S) \in \Sigma$ для любого борелевского множества S на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$.

Случайная величина ξ порождает вероятностную меру P_ξ на $\mathbb{R}^1$, определяемую соотношением

$$P_\xi(S) = P(\xi^{-1}(S)) \tag{1.2}$$

для любого борелевского множества S на $\mathbb{R}^1$. Мера P_ξ называется ***распределением*** величины ξ.

Условная вероятность $P(A|B)$ любого события A при гипотезе B, если $P(B) \neq 0$, определяется выражением

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Пусть F - произвольная σ-алгебра, содержащаяся в Σ, ξ - случайная величина на вероятностном пространстве (Ω,Σ,P), математическое ожидание которой отсутствует. ***Условным математическим ожиданием случайной величины*** ξ ***относительно σ-алгебры*** F называется случайная величина $E\{\xi|F\}$, F - измеримая и удовлетворяющая при произвольном $B \in F$ равенству

$$\int_B E\{\xi|F\}dP = \int_B \xi dP.$$

Условная вероятность $P\{A|F\}$ относительно σ-алгебры F определяется как частный случай условного математического ожидания, если положить $\xi = \chi_A(\omega)$ - характеристическая функция множества A. Именно, при фиксированном A условная вероятность $P\{A|F\}$ есть F-измеримая случайная величина, удовлетворяющая при любом $B \in F$ уравнению

$$\int_B P\{A|F\}dP = P(A \cap B).$$

Условная вероятность $P\{A|\xi\}$ относительно случайной величины ξ определяется выражением

$$P\{A|F\} = P\{A|F_\xi\},$$

где $F_\xi = \left\{B{:}B = \xi^{-1}(S),\ S \text{ - измеримые борелевы множества в } \mathbb{R}\right\}$ - σ-алгебра, порожденная отображением ξ.

Пусть X - некоторое множество, $\{Y,\mathfrak{B}\}$ - измеримое пространство. ***Случайным отображением*** множества X в измеримое пространство $\{Y,\mathfrak{B}\}$ называется отображение $\xi = \xi(x,\omega)$: $X \times \Omega \to Y$, являющееся при произвольном фиксированном X измеримым отображением $\{\Omega,\Sigma\}$ в $\{Y,\mathfrak{B}\}$, т.е. такое, что для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$\{\omega \in \Omega : \xi(x,\omega) \in B\} \in \Sigma.$$

Ниже будут рассмотрены два примера случайных отображений. Первый, когда X есть подмножество (полуось) вещественной прямой, *- в этом случае вместо x будем использовать* обозначение t и называть случайное отображение *случайным процессом* $\xi(t)$. Аргумент t интерпретируется как время. В другом примере X есть пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$. Здесь случайное отображение будет редуцироваться к *обобщенному случайному полю*.

Пусть n - любое натуральное число, x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, - произвольные точки в X. Меры $P_{x_1x_2\ldots x_n}(B)$ на $\mathfrak{B}^n$ вида

$$P_{x_1x_2\ldots x_n}(B) = P\Big\{\xi(x_1,\omega),\xi(x_2,\omega),\ldots,\xi(x_n,\omega) \in B\Big\},\ B \in \mathfrak{B}^n,$$

называются *частными распределениями* случайного отображения $\xi(x)$. При достаточно широких предположениях семейство частных распределений определяет случайное отображение.

Рассматриваются марковские процессы $\xi = \xi(t)$ полуоси $t \ge 0$. Пусть Y - полное метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ - σ-алгебра борелевских множеств Y. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$, $t \ge 0$, со значениями в Y называется (однородным) *марковским*, если выполнены следующие условия:

1) для любых $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ и $B \in \mathfrak{B}$ выполняются соотношения для условных вероятностей

$$P\Big\{\xi(t) \in B|\xi(t_1),\ \xi(t_2),\ \ldots,\ \xi(t_n)\Big\} =$$

$$= P\Big\{\xi(t) \in B|\xi(t_n)\Big\}\ (\mathrm{mod}\ P)$$

2) существует функция $P(t,x,B)$, которая:

(i) $\mathfrak{B}$-измерима по x при фиксированных t,B;

(ii) при фиксированных t,x является вероятностной мерой на пространстве (Y,B,P);

(iii) удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова

$$P(s+t,x,B) = \int_Y P(s,x,dy)P(t,y,B), \quad s,t \geq 0;$$

(iv) с вероятностью 1 совпадает с условными вероятностями

$$P(t,x,B) = P\left\{\xi(s+t) \in B \mid \xi(s) = x\right\}, \quad s,t > 0.$$

Функция $P(t,x,B)$ называется *переходной функцией* марковского процесса $\xi(t)$. Если на $\{Y,\mathfrak{B}\}$ задана вероятностная мера μ и задана функция $P(t,x,B)$, удовлетворяющая условиям 2), (i) - (iii), то существует марковский процесс $\xi(t)$ с такой переходной функцией.

Часто удобнее работать с *переходной плотностью*. Пусть μ - неотрицательная мера в $\{Y,\mathfrak{B}\}$. Функция $p(t,x,y)$, $t > 0$, $x,y \in Y$, называется переходной плотностью, если выполнены условия:

1) $p(t,x,y) \geq 0$, $t > 0$, $x,y \in Y$,

2) $p(t,x,y)$ при фиксированном $t > 0$ является $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$-измеримой функцией от x,y,

3) $\int_Y p(t,x,y)\mu(dy) \leq 1$, $t \geq 0$, $x \in Y$,

4) $p(s+t,x,z) = \int_Y p(s,x,y)p(t,y,z)\mu(dy)$,

$s,t \geq 0$; $x,z \in Y$.

Если задана переходная плотность $p(t,x,y)$, то функция

$$P(t,x,B) = \begin{cases} \int_B p(t,x,y)\mu(dy), & t>0, \ x\in Y, \ B\in\mathfrak{B}, \\ \chi_B(x), & t=0. \end{cases}$$

определяет переходную функцию, которая соответствует некоторому марковскому процессу.

Переходная функция по формуле

$$T_t f(x) = \int_Y P(t,x,dy)f(y), \quad t \geq 0,$$

11*

определяет семейство линейных опраторов в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ всех ограниченных измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \in Y$, с нормой

$$\|f\| = \sup|f(x)|.$$

Семейство $T_t, t \geq 0$, является сжимающей полугруппой операторов, т.е. операторы T_t ограниченные при $t \geq 0$, и выполняются условия:

$$T_{s+t} = T_s T_t, \quad s,t \geq 0,$$

$$\|T_t\| \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Инфинитезимальный оператор A этой подгруппы называется также инфинитезимальным оператором функции $P(t,x,B)$. Область определения D_A состоит из всех функций f, для которых предел в соотношении

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\int_Y P(t,x,dy)f(y) - f(x) \right]$$

существует равномерно относительно $x \in Y$.

Пусть $C(\mathbb{Q}_p)$ - пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{Q}_p$. Марковский процесс является *стохастически непрерывным*, если

$$\lim_{t\to 0} T_t f = f \;\; \forall f \in C(\mathbb{Q}_p),$$

и называется *феллеровским*, если

$$T_t C(\mathbb{Q}_p) \subset C(\mathbb{Q}_p) \;\; \forall t > 0.$$

Имеется следующий критерий. Если для переходной функции $P(t,x,B)$ для любого компакта B выполняются следующие условия:

$\forall s \geq 0$

$$\lim_{t\to 0} \sup P(t,x,B) = 0, \tag{A}$$

и $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to 0} \sup P(t,x,\overline{U_\varepsilon(x)}) = 0, \tag{Б}$$

где $U_\varepsilon(x)$ - шар радиуса ε с центром в точке x, а $\overline{U_\varepsilon(x)} = Y\setminus U_\varepsilon(x)$, то соответствующий марковский процесс является *ограниченным, непрерывным справа и не имеющим разрывов второго рода с вероятностью* 1.

2. Броуновское движение на p-адической прямой. Как известно, броуновское движение на вещественной прямой может быть описано при помощи уравнения диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.1}$$

Решение уравнения (2.1) задает функцию переходных вероятностей броуновского движения, рассматриваемого как марковский процесс. Здесь мы рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -aD^\alpha_x U \tag{2.2}$$

и сопоставим ему марковский процесс, который будем называть броуновским движением на p-адической прямой. Вещественнозначная функция $U = U(t,x)$ в (2.2) зависит от переменных $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{Q}_p$, постоянной $a > 0$ и $\alpha \geq 1$.

Рассмотрим фундаментальное решение задачи Коши

$$U(x,0) = \varphi(x) \tag{2.3}$$

для уравнения (2.2) при $a = 1$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$p(t,x,y) = p(t,x-y) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(k(x-y))\exp(-t|k|_p^\alpha)dk, \tag{2.4}$$

где $t > 0$, $x,y \in \mathbb{Q}_p$, $\alpha > 0$.

Теорема 1. *Функция* $p(t,x,y)$ (2.4) *удовлетворяет всем условиям* 1) - 4) *для переходной плотности при* $Y = \mathbb{Q}_p$, $\mu(dx) = dx$ *- мера Хаара на* $\mathbb{Q}_p$ *и, следовательно, определяет марковский процесс* $\xi(t)$, *который мы будем называть броуновским движением на p-адической прямой.*

Замечание. В отличие от винеровского процесса, траектории которого непрерывны, не существует непрерывных функций из вещественного отрезка в $\mathbb{Q}_p$.

Приведем доказательство теоремы для $\alpha = 2$.

Рассмотрим функцию

$$K_t(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} e^{-t|\xi|_p^2} \chi_p(x\xi)\,d\xi, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.5}$$

Она обладает свойствами:

(i) $K_t(x) > 0$,

(ii) $\int_{\mathbb{Q}_p} K_t(x)\,dx = 1$,

(iii) $K_t(x) \longrightarrow \delta(x), \ t \to +0$, в $\mathcal{D}'$,

(iv) $K_t * K_{t'} = K_{t+t'}, \ t, t' > 0$.

■ Пользуясь формулой (3.3) п. 3 § 4 при $f(\alpha) = e^{-t\alpha^2}$, имеем:

$$K_t(x) = (1-\frac{1}{p})|x|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} e^{-tp^{-2\gamma}|x|_p^{-2}} - |x|_p^{-1} e^{-tp^2|x|_p^{-2}} =$$

$$= (1-\frac{1}{p})|x|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} e^{-tp^2|x|_p^{-2}} \left[e^{tp^2|x|_p^{-2}(1-p^{-2\gamma-2})} - 1 \right] > 0$$

– свойство (i);

$$\int_{B_k} K_t(x)\,dx = \left(K_t, \Delta_k\right) = \left(F\left[e^{-t|\xi|_p^2}\right], \Delta_k\right) = \left(e^{-t|\xi|_p^2}, \widetilde{\Delta}_k\right) =$$

$$= \left(e^{-t|\xi|_p^2}, \delta_k\right) = \int_{\mathbb{Q}_p} \delta_k(\xi) e^{-t|\xi|_p^2} d\xi \longrightarrow 1, \ k \to \infty,$$

– свойство (ii);

$$K_t(x) = F\left[e^{-t|\xi|_p^2}\right] \longrightarrow \tilde{1} = \delta(x), \ t \to +0, \text{ в } \mathcal{D}'$$

- свойство (iii);

Пользуясь теоремой п. 4 § 7, получим

$$K_t * K_{t'} = F\left[e^{-t|\xi|_p^2} \cdot e^{-t'|\xi|_p^2}\right] = F\left[e^{-(t+t')|\xi|_p^2}\right] = K_{t+t'}$$

- свойство (iv). ■

В силу свойств (i) - (iv) функция $K_t(x)$ является переходной функцией марковского процесса.

3. Обобщенные случайные процессы. Пусть L - некоторое локально выпуклое пространство, L' - двойственное пространство и $\{\Omega,\Sigma,P\}$ - вероятностное пространство. Линейное отображение ϕ из L в множество случайных переменных на $\{\Omega,\Sigma,P\}$ называется *обобщенным случайным процессом* на L. Множество

$$C(\varphi_1,\ldots,\varphi_n;A) = \left\{\phi \in L' : (\phi(\varphi_1),\ldots,\phi(\varphi_n)) \in A \subset \mathbb{R}^n\right\}$$

называется цилиндрическим множеством, где $\varphi_i \in L$, $i = 1,\ldots$ $\ldots,n$, A - борелевское множество в $\mathbb{R}^n$. Цилиндрическое множество N - это такое подпространство в L', для которого $\phi(\varphi) = 0$ для всех φ, принадлежащих к подпространству в L, порожденному $\varphi_1,\ldots\varphi_n$. Семейство цилиндрических множеств Σ_0 образует алгебру. Цилиндрической мерой μ называется вещественнозначная функция $\mu(c)$ на Σ_0, удовлетворяющия условиям:

(i) $0 \le \mu(c) \le 1$ для любого $c \in \Sigma_0$,

(ii) $\mu(\Sigma_0) = 1$,

(iii) если множество c есть объединение пересекающихся цилиндрических множеств $c_1,\ldots c_n,\ldots$ с основанием N, то

$$\mu(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(c_n),$$

(iv) $\mu(c) = \inf \mu(U)$ для любого C, где U пробегает все цилиндрические множества, содержащие U.

Если L - ядерное пространство, то цилиндрическая мера μ может быть продолжена до счетно аддитивной меры на Σ, где

Σ - борелевская σ-алгебра, порожденная Σ_0. В соответствии с теоремой Минлоса, если J: $L \to \mathbb{C}$ - непрерывная функция положительного типа и $J(0) = 1$, то существует вероятностная мера μ на $\{L', \Sigma\}$ такая, что

$$J(\varphi) = \int_{L'} \exp(i\phi(\varphi)) d\mu(\phi).$$

J называется *характеристической функцией* μ. Пусть $B(\varphi, \psi)$ - непрерывное скалярное произведение на ядерном пространстве L. Тогда

$$J(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2} B(\varphi, \varphi)\right)$$

есть непрерывная характеристическая функция и, таким образом, существует вероятностная мера μ на $\{L', \Sigma\}$, удовлетворяющая равенству

$$\exp\left(-\frac{1}{2} B(\varphi, \varphi)\right) = \int_{L'} \exp(i\phi(\varphi)) d\mu(\phi).$$

Мера μ называется гауссовой мерой на L' и $\phi(\varphi)$ называется гауссовским процессом с нулевым средним и ковариацией $B(\varphi, \varphi)$.

4. Квантовая теория поля. Через $L = \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ обозначим пространство вещественных основных функций, которое рассматривалось в § 6. Это локально выпуклое ядерное пространство. Пусть

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{\tilde{\varphi}(k)\tilde{\psi}(-k)}{a(k)} dk,$$

где $a(k) \geq c > 0$ - некоторая функция. Это скалярное произведение задает гауссовский обобщенный процесс. Если положить

$$a(k) = \left| \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \right|_p + m^2, \ m > 0,$$

то по аналогии с евклидовой формулировкой квантовой теории поля можно назвать соответствующий гауссовский процесс свободным скалярным p-адическим квантовым полем. Это поле инвариантно относительно действия группы $SO(n,\mathbb{Q}_p)$. Другой естественный выбор функции $a(k)$ следующий:

$$a(k) = \|k\| + m^2, \quad \|k\| = \max |k_i|_p.$$

p-адический белый шум получается при $a(k) = 1$. Мера $d\mu$ формально может быть записана в виде

$$d\mu \sim e^{-S_0(\phi)} \mathcal{D}\phi,$$

где свободное действие дается формулой

$$S_0(\phi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \phi(x) a(D) \phi(x) dx. \tag{3.1}$$

В последней формуле $a(D)$ - некоторый псевдодифференциальный оператор. Выражение (3.1) не определено для произвольных обобщенных функций $\phi(x)$, поэтому необходима перенормировка или ограничение на подпространство. В p-адической теории струн полагают $a(D) = D$ в формуле (3.1).

Для описания взаимодействия необходимо построить не гауссову меру, соответствующую действию

$$S(\phi) = S_0(\phi) + \int_{\mathbb{Q}_p^n} V(\phi(x)) dx$$

для некоторой функции $V(\phi)$.

В настоящем разделе кратко по главам обсуждается литература, касающаяся основных идей и результатов p-адической математической физики. Эта область математической физики связана с различными разделами математики. А именно, она тесно связана как с традиционными областями математики, имеющими давнюю историю, такими как теория чисел, так и с современной абстрактной алгебраической геометрией и теорией представлений. Список литературы содержит также книги по p-адическому анализу. Этот список не полный, включенные в него книги рассматриваются как более подходящие для современных применений в математической физике. Список содержит ссылки как на чисто p-адические темы, так и на приложения. В список также включены физические статьи, связанные с p-адической математической физикой. Мы заранее приносим извинения за любые ошибки и за возможные пропуски.

Введение

Мы не стремимся дать обзор огромного количества литературы по исследованям структуры пространства-времени, отметим лишь несколько ссылок по данному вопросу. Общие математические вопросы, касающиеся физического пространства, обсуждались многими авторами, в частности, Паункаре [172] и Г. Вейлем [227]. Риман [177] рассматривал как непрерывные (знаменитая Риманова геометрия), так и дискретные модели пространства. Наше интуитивное понимание свойств пространства выражается в аксиомах элементарной геометрии. Полный список геометрических аксиом был приведен в знаменитом труде Гильберта «Glundlagen der Geometry» [104]. Роль аксиомы Архимеда и возможность построения неархимедовой геометрии отмечались Веронезе и Гильбертом.

Абсолютное ограничение на измерения длины в квантовой гравитации и теории струн обсуждалось в [176, 171, 147, 229, 200, 109, 220] и [7, 94]. Как писал Виттен, «существуют основания верить, что в теории струн нет расстояний меньше чем фундаментальная длина $\sqrt{\alpha}$... На расстояниях меньше $\sqrt{\alpha}$ исчезает, как мы знаем, не только физика, но и локальная физика. Там нет расстояний, нет времени, нет энергии, нет частиц, нет локальных сигналов - только дифференциальная топология или ее теоретико-струнный преемник» [232].

Гипотеза о возможной неархимедовой p-адической структуре пространства-времени на планковских масштабах была предложена Воловичем [221]. Подчеркивалась также роль рациональных чисел, выдвигалась идея флюктуирующих числовых полей [219-221].

p-адические числа были введены в 1899 году К. Гензелем. Книги Коблица [121], Малера [138] и Шикхофа [186] могут служить введением в p-адические числа и в p-адический анализ. В качестве начального чтения по алгебре и теории чисел можно использовать книги: Боревич, Шафаревич [37], Кострикин [126], Ленг [128], Серр [189], Виноградов [204], А. Вейль [225].

Возможная роль p-адического анализа в математической физике в контексте суперанализа и суперсимметрии отмечалась Владимировым и Воловичем [221].

Применение ультраметричности в физике твердого тела обсуждалось Мезардом, Паризи, Раммалем, Сурласом, Тулузом и Вирасоро [157, 178]. Матрица Паризи [169], описывающая иерархическую структуру, естественным образом приводит к ультраметричности.

Обсуждение возможной роли теории чисел в физике можно найти в работах Манина [142, 145], Атьи [25], Ботта [39].

Комментарии к литературе, касающейся p-адического анализа, p-адической квантовой механики и теории струн, приводятся ниже по главам.

Глава I

р-адическому анализу посвящены работы [8, 38, 61, 82, 85, 121, 122, 179, 186].

Гомеоморфизм (см. п. 6 § 1) пространства р-адических чисел на некоторое канторово подмножество поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ был построен Зеленовым [240]. При изложении теории аддитивных характеров мы следуем подходу, изложенному в книге Понтрягина [172]. Гауссовы интегралы на произаольной локально компактной абелевой группе рассмстривались А.Вейлем [225]. Явные вычисления в случае поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел были осуществлены авторами [212, 215, 218] и независимо Алакоком, Рюэллем, Тираном, Верстегеном и Вайерсом [3, 128] и Мериком [151]. Теоретико-числовая функция λ_p была введена и исследована Владимировым и Воловичем [212] и Алакоком с соавторами [3]. Доказательство адельной формулы для λ_p публикуется впервые.

Теория обобщенных функций над произвольной локально компактной группой была развита в работе Брюа [43] и над локально компактным несвязным полем Гельфандом, Граевым и Пятецким-Шапиро [82]. Мы излагаем элементы этой теории, следуя [206]. Отличительной чертой теории p-адических обобщенных функций по сравнению с обобщенными функциями Соболева - Шварца над полем вещественных чисел [205] является непрерывность любого линейного функционала (из линейности следует непрерывность). Теория свертки и произведения обобщенных функций, использующая преобразование Фурье, была впервые развита Владимировым [206]. В случае одномерных обобщенных функций мы следовали книге Гельфанда, Граева и Пятецкого-Шапиро [82] и статье Смирнова [193] в многомерном случае. Свойства двумерной функции Грина рассматривались Бикуловым [35].

Глава II

Понятие псевдодифференциального оператора на пространстве $\mathbb{Q}_p^n$ было введено Владимировым [208]. Необходимые сведения из спектральной теории, использованные в этой главе, можно найти в книгах Рида и Саймона [175], Данфорда и Шварца [60] и Иосиды [237].

Нелокальный оператор дробного дифференцирования и интегрирования D^α был определен и изучен Владимировым [206] (см. также [15, 168, 196, 245]).

Спектральная теория оператора D^α, $\alpha > 0$, действующего на $\mathbb{Q}_p$, была построена Владимировым [207], при этом был найден явный вид собственных функций (см. также [218]). Ортонормированный базис собственных функций оператора D^α (включая $p = 2$) для $\mathbb{Q}_p$ впервые приводится в п. 5 § 9.

Спектральная теория псевдодифференциального оператора вида $a*+V(x)$ на открыто-замкнутом множестве G (ограниченном или неограниченном) с ограниченными снизу и стремящимися к $+\infty$ на бесконечности функциями $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ была построена в [208]. Найдены также явные выражения для собственных функций и собственных чисел оператора D^α, $\alpha > 0$, в диске B_γ и на окружности S_γ (для $p \neq 2$). В настоящей главе воспроизводятся эти результаты, включая случай $p = 2$, приводится обращение основной теоремы в более сильной форме.

Метод построения инвариантных собственных функций $\psi(|x|_p)$ p-адического оператора Шредингера $D^\alpha + V(x)$ был развит Владимировым и публикуется здесь впервые. Дальнейшее развитие спектральной теории оператора $D^\alpha + V(x)$ в $\mathbb{Q}_p$ без условия на бесконечности было сделано Кочубеем [123].

Разбиение поля $\mathbb{Q}_p$ на секторы было предложено Владимировым [207].

Стационарные и нестационарные р-адические уравнения Шредингера рассматривались Владимировым и Воловичем [214].

Глава III

По поводу оснований квантовой механики см., например, Дирак [52], Макки [137], Маслов [149], Холево [107].

Формализм p-адической квантовой механики, основанный на тройке $(L^2(\mathbb{Q}_p),\ W(z),\ U(t))$, был предложен Владимировым и Воловичем [212, 213]. Этот формализм возник как квантование p-адической классической механики. Немного отличающийся от этого подход рассматривался Фройндом и Олсоном [74], Алакоком и др. [3] и Мериком [154]. Вместо динамического оператора в этих подходах используется унитарное представление коммутативной группы и, таким образом, они применимы только для квадратичных гамильтонианов. Различные возможности построения p-адической квантовой механики рассматривал Паризи [168]. Лагранжев формализм и фейнмановские интегралы по траекториям коротко обсуждались [213], впоследствии этот подход развивался Зеленовым [240]. Другая возможность построения p-адической квантовой механики, основанная на вероятностных мерах на пространстве обобщенных функций, также отмечалась в [213].

Помимо p-адической квантовой механики с комплекснозначными волновыми функциями представляет интерес и рассмотрение квантовой механики с p-адичнозначными волновыми функциями [212]. Общий подход к квантовой механике с p-адичнозначными функциями, основанный на теории гауссовых распределений, был развит Хренниковым [114, 116 120]. p-адическое гильбертово пространство обсуждалось Байодом [29]. Все указанные выше подходы эквивалентны в случае поля вещественных чисел, в случае же поля p-адических чисел в настоящий момент имеется лишь неполная информация о связи между различными подходами. Отметим, что при построении p-адической квантовой механики существенно использовались идеи и результаты Г.Вейля [227], Макки [136], Сигала [187] и А.Вейля [225]. По-видимому, теория Жаке и Ленглендса [81] будет полезна при дальнейшем развитии p-адической квантовой механики.

В последнее время значительные усилия были направлены на изучение спектральной теории в p-адической квантовой механике. Неожиданным свойством этой теории является наличие богатого спектра для весьма простых систем (p-адический гармонический осциллятор). Спектральная теория для p-адической квантовой механики была построена авторами [218], сходные результаты были получены Рюэллем и др. [182] и Мериком [151].

Исследование р-адических систем Вейля в конечеомерном и бесконечномерном случаях, изучение когерентных состояний и собственных функций в случае $p \equiv 3 \pmod 4$ было проведено Зеленовым [241-243].

Формулировка р-адической теории струн с p-адичнозначными и комплекснозначными амплитудами как свертки характеров была предложена Воловичем [219-221]. Фройнд и Олсон [73] внесли существенный вклад в эту теорию, рассмотрев p-адические $\mathcal{B}$-функции в качестве струнных амплитуд. Фройнд предложил использовать p-адический анализ для упрощения вычислений в случае рассмотрения вещественных систем. Связь p-адической теории струн с гипотезой Вейля в теории чисел обсуждалась Гроссманом [95]. Идея адельного подхода выдвинута Маниным [145]. Важная адельная формула была отмечена Фройндом и Виттеном [75]. Проблемы регуляризации этой формулы и альтернативная адельная формула были рассмотрены Арефьевой, Драговичем и Воловичем [16].

Пятиточечная p-адическая струнная амплитуда рассматривалась Маринари и Паризи [146] и Фрэмптоном и Окада [65]. N-точечная p-адическая амплитуда изучалась Фрэмптоном и Окада [65, 68] и Брекке и др. [40, 42]. Они получили эффективную теорию с замечательным солитонным решением. Интересные статьи Фрэмптона, Нишино, Окада и Убриако [69, 164, 165, 167] посвящены p-адическим σ-моделям.

Действие, рассмотренное в п. 4 § 16, изучалось в квантовой теории поля Паризи [168], Арефьевой и Воловичем [15], Лернером и Миссаровым]131], в теории струн - Спокойным [196] и Зангом [245]. Указанное действие использкет оператор D, предложенный Владимировым. p-адические многопетлевые амплитуды на дереве Брюа - Титса рассматривались Чеховым, Мироновым и Забродиным [238, 44, 45].

Пункты 4 - 6 § 14, посвященные многопетлевым амплитудам, являются очень кратким введением в обширную современную литературу по теории струн. Укажем некоторые источники материала, представленного в этих разделах. Хорошим кратким введением в теорию струн является давний обзор Шерка [184]. Замечательный источник информации по теории струн - книга Грина, Шварца, Виттена [92]. Многопетлевые вычисления, основанные на методе континуальных интегралов, предложенном Поляковым [173], представляют самостоятельную область исследований; более детально различные аспекты многопетлевых вычислений рассмотрены в [6, 31, 87, 108, 143, 203]. Многопетлевые вычисления тесно связаны с геометрией комплексных многообразий [93, 162]. Свойства пространства модулей, рассмотренные в п. 5 § 14, получены Мамфордом [160, 161] и Делинем и Мамфордом [50]. По поводу p-адических групп Шоттки и p-адической униформизации см. Манин [141] и Геррицин и Ван дер Пут [85].

Жесткая аналитическая геометрия была введена Тейтом [198]. Она рассматривалась в работах Геррицина и Ван дер Пута [85], Боша, Гюнцера и Реммерта [28] и Фрезнела и Ван дер Пута [72]. Теория p-адических дифференциальных уравнений представлена в книге Дворка [61].

Жерве [86] выдвинул идею использования p-адических переменных для расширения конформной симметрии на многомерный случай.

Подход к p-адической теории струн с p-адичнозначными амплитудами, использующий гамма-функцию Мориты, был предложен Воловичем [221] и Гроссманом [95]. Посредством формулы Гросса - Коблица этот подход приводит к теории струн над полями Галуа. Струнные амплитуды Галуа - Венециано - Якоби [221] могут быть выражены в терминах действия Фробениуса на пространстве этальных когомологий. Этот подход связан с теорией мотивов и L-функций [158, 100, 48, 49, 28].

Виттен выдвинул предположение, что на малых расстояниях в квантовой теории поля появляется фаза, в которой восстанавливается общая ковариантность. Эта фаза описывается топологической квантовой теорией поля - теорией без локальных распространяющихся степеней свободы. Эта теория связана с когомологиями различных пространств модулей [233], [51]. По-видимому, естественный следующий шаг - рассмотреть аналогичные теории над p-адическими числами и другими числовыми полями. Отметим, что методы современной квантовой теории поля оказались полезными при исследовании свойств пространств модулей римановых поверхностей [99, 170, 234, 124].

Параграф 15, касающийся связей между q-анализом и квантовыми группами, в основном следует работе Арефьевой и Воловича [22]. Другие связи между этими теориями отмечались Макдональдом [134] и Фройндом [78, 79]. В последние годы происходило интенсивное развитие теории квантовых групп. Приведем лишь некоторые ссылки: Дринфельд [58], Джимбо [80], Фаддеев, Решетихин и Тахтаджан [62], Воронович [235], Манин [144]. q-деформированный осциллятор рассматривался Биденхарном [34] и Макферлайном [135]. Общий подход к некоммутативной геометрии развивался Конном [47]. Некоммутативное дифференциальное исчисление рассматривалось Вессом и Зумино [224]. О возможных применениях квантовых групп в теории поля см. Арефьева и Волович [24]. Курнвиндер [125] обсуждал связь между q-анализом и квантовыми группами.

Случайные процессы и обобщенные случайные процессы рассматривались многими авторами. Отметим, в частности, Альбеверио и др. [4], Гельфанд и Виленкин [83], Гихман и Скороход [88], Аккарди, Фригейро и Льюис [2], Хида [103] и Хейер [102]. Вероятностный подход к квантовой теории поля рассматривается в книгах Глимма и Джаффе [89] и Саймона [91].

В последнее время новые интересные подходы к описанию структуры пространства-времени были выдвинуты в работах Беннета, Нильсона и Пичека [33], Альвареца, Сеспедеса и Вердагуера [4] и Айшема, Кубышина и Рентелна [111]. Основная квантовая переменная в этом подходе - метрика на метрическом пространстве. Такой подход должен естественно включать в себя и ультраметрику.

Первые шаги в изучении p-адических уравнений Эйнштейна и квантовой p-адической гравитации были предприняты в работах Арефьевой, Воловича, Драговича и Фрэмптона [20, 71, 21, 54, 57].

1. S.Abyankar: Local analytic geometry. N.Y.: Academic Press, 1964

2. L.C.Accardi, A.Frigerio and J.T.Lewis: Quantum stochastic processes. Publications RIMS **18**, 97 (1982)

3. L.C.Alacoque, P.Ruelle, E.Thiran, D.Verstegen and J.Weyers: Quantum amplitudes on p-adic fields. Phys.Lett. **211B**, 59-62 (1988)

4. S.Albeverio, T.Hida, J.Potthoff and L.Streit: Dirichlet forms in terms of white analysis. Rev. Mod. Phys. **1**, 291-323 (1990)

5. E.Alvarez: Phys. Lett. **210B**, 73-78 (1988); E.Alvarez, J.Cespedes and E.Verdaguer: Dynamical generation of space time dimensions. Preprint CERN-TH.5764/90 (1990)

6. L.Alvarez-Gaume, J.-B.Bost, G.Moore, P.Nelson and C.Vafa: Bosonization on Higher Genus Riemann Surfaces. Comm.Math.Phys. **112**, 503-569 (1987)

7. D.Amati, M.Ciafaloni and G.Veneziano: Phys.Lett. **197**, 81 (1987); Int.Mod.Phys.**3A**, 1615 (1988); Phys.Lett. **216**, 41 (1989)

8. Y.Amis: Les nombres p-adiques. Presses Universitaires de France, 1975

9. Y.Andre: G-functions and Geometry. Aspects of Mathematics **E13**, Vieweg, 1988

10. G.E.Andrews: q-Series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra. In «Regional Conference Series in Math.» v.66, Amer.math.Soc., Providence, RI,1986

11. С.Ю.Аракелов: Теория пересечений на арифметической поверхности. Изв. АН СССР, сер. матем. **38**, 1179-1192 (1974)

12. В.И.Арнольд: Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989

13. I.Ya.Aref'eva: String Field Theory. In «Conformal Invariace and String Theory», eds.P.Dita and V.Gergescu, Bos-

ton: Acadic Press,1989

14. I.Ya.Aref'eva: Physics at the Planck Length and p-adic Field Theory. In «Differential Geometry Methods in Theoretical Physics», ed. L.L. Chau and W.Nahm, N.Y.: Plenum Press, 1990

15. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich: String, gravity and p-adic space-time. In «Quantum Gravity», eds. M.A.Markov, V.A.Berezin and V.P.Frolov, World Scient, 1988

16 I.Ya.Aref'eva, B.Dragovič and I.V.Volovich: On the adelic string amplitudes. Phys.Lett. **B209**, 445-450 (1988)

17. I.Ya.Aref'eva, B.Dragovič and I.V.Volovich: On the p-adic summability of the anharmonic oscillator. Phys.Lett. **B200**, 512-514 (1988)

18. I.Ya.Aref'eva, B.Dragovič and I.V.Volovich: Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields. Phys.Lett. **B212**, 283-289 (1988)

19. I.Ya.Aref'eva, B.Dragovič and I.V.Volovich: P-adic superstrings. Phys.Lett. **B214**, 339-346 (1988)

20. I.Ya.Aref'eva, B.Dragovic, P.Frampton and I.V.Volovich: Wave function of the universe and p-adic gravity. Mod.Phys. Lett **A6**, 4341-4358 (1991)

21. I.Ya.Aref'eva and P.H.Frampton: Beyond Planck energy to non-Archimedean geometry. Mod.Phys.Lett. **A6**, 313-316 (1991)

22. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich: Quantum groups particles and non-Archimedean geometry. Phys.Lett. **B268** 179-193 (1991)

23. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich: Quantum group gauge fields. Mod. Phys. Lett. **A6**, 893-906 (1991)

24. R.Askey: The q-gamma and q-beta functions. Appl.Anal. **8**, 125-146 (1978)

25. M.F.Atiyah: Commentary on the article of Manin. Lect. Notes in Math. **1111**, pp.103-109, Springer, 1985

26. M.F.Atiyah and R.Bott: The Yang-Mills equation over Riemann surfaces. Phil. Trans. R. Soc. London **A308**, 523-615 (1982)

27. J.Atick and E.Witten: The Hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory. Preprint IASSNS-HEP-88/4 (1988)

28. F.Baldassarri: p-Adic interpolation of Evans sums and deformation of the Selberg integrals: an application of Dwork's theory. In «Special Differencial Equations». Proc. of the Taniguchi Workshop, p.7-35, 1991

29. J.M.B. Bayod: Productos Internos en Espacios Normados no Arquimedianos. Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias (Seccion de Matematicas). Univ. de Bilbao, 1976

30. J.M. Bayod, N. De Grande-DeKimpe and J.Martinez- Maurica: p-Adic functional analysis. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 1992

31. A.A.Belavin and V.G.Knizhnik: Algebraic geometry and the geometry of quantum strings. Phys. Lett.**B168**, 201 (1986)

32. S. Ben-Menahem: p-adic iteractions. Preprint TAUP-1627- 88, 1-17 (1988)

33. D.L.Bennett, H.B.Nielsen and I.Picek. Phys. Lett. **B208**, 275-284 (1988)

34. L.C.Biedenharn: J.Phys. A.Math.Gen. **22**, L873 (1989)

35. А.Х.Бикулов: Исследования p-адической функции Грина. ТМФ **87**, 376-390 (1991)

36. J.-M. Bismut, H.Gillet and C.Soule: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III. Comm. Math. Phys. **115**, 301-350 (1988)

37. З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич: Теория чисел. М.: Наука, 1985

38. S.Bosch, U.Guntzer and R.Remmert: Non-Archimedean Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1984

39. R.Bott: On the shape of the curve. Advances in Mathematics, **16**, 144-159 (1975)

40. L.Brekke, P.G.O.Freund, E.Melzer and M.Olson: Adelic N-point amplitudes. Phys.Lett. **B216** (1989)

41. L.Brekke and M.Olson: p-Adic diffusion and relaxation in glasses. Preprint UTTG-16-89, EFI-89-23 (1989)

42. L.Brekke, P.G.O.Freund, M.Olson and E.Witten: Non-archemedean string dynamics. Nucl. Phys. **B302**, 365-402 (1988)

43. F.Bruhat: Distributions sur un groupe localemont compact et applications a l'etude des representations des

groupes p-adiques. Bulletin Soc.Mathem. de France **89**, 43-75 (1961)

44. L.Chekhov: A note on multiloop calculus in p-adic string theory. Mod. Phys. Lett. **A4**, 1151-1158 (1989)

45. L.O.Chekhov, A.D.Mironov and A.Zabrodin: Multiloop calculations in p-adic string theory and Bruhat-Tits trees I,II. Preprints ITP-89-41E, 42E (1989); Mod. Phys. Lett. **A4**, 1127-1235 (1989)

46. G.Christol: Solutious algebriques des equatious differenielles p-adique. Prog. Math. **38**, 51-58 (1983)

47. A.Connes: Non Commutative geometry. Publ. Math. IHES, **62** (1986)

48. P.Deligne: Hodge Cycles on Abelian Varieties. In P.Deligne, J.S.Milne, A.Ogus and Shih Kuang-yen: «Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties». Lect. Notes in Math., - No.900, pp.9-100, Springer-Verlag, 1982

49. P.Deligne: Valeurs de functions L et periodes g'integrales. Proc. Symp. Pure Math. v.XXXIII, 313-336, Amer.Math. Soc. Providence, 1979

50. P.Delinge and D.Mumford: The irreducibility of the space of curves of a given genus. Publ.I .H.E.S. 36,1969

51. R.Dijkgraaf, H.Verlinde and E.Verlinde: Notes on Topological String Theory and 2D Quantum Gravity. Preprint PUPT-1217, IASSNS-HEP-90/80 (1990)

52. P.A.M.Dirac: The principles of Quantum Mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1958

53. B.G. Dragovič: Adelic summability of perturbation series. Preprint IF- 19/89, 1-15 (1989)

54. B.G. Dragovič, P.H.Frampton and B.V.Urosevič: Classical p-adic space-time. Mod.Phys.Lett. **A5**, 1521-1528 (1990)

55. B.G. Dragovič: p-Adic perturbation series and adelic summability. Phys.Lett. **256B**, 392-396 (1991)

56. B.G.Dragovič: On factorial perturbation series. Preprint IF-91-11, 1-8 (1991)

57. B.G.Dragovič: On signature change in p-adic spacetimes. Mod. Phys. Lett. **A6**, 2301-2307 (1991)

58. V.G.Drinfeld: Quantum groups. In Proc. Intern. Congr. Math., Berkeley, 1986, pp.798-820

59. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко: Современная

геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986

60. Н.Данфорд, Дж.Шварц: Линейные операторы. Т.2. Спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966

61. B.M.Dwork: Lectures on p-adic differential equations, N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

62. Н.Ю.Решетихин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев: Квантование групп Ли и алгебр Ли. Алгебра и Анализ **1**, 178-206 (1989)

63. G.Faltings: Calculus on arithmetic surfaces. Ann. of Math. **119**, 387-424 (1984)

64. Г.М.Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969

65. P.H.Frampton and Y.Okada: The p-adic string N-point function. Phys.Rev.Lett. **60**, 484-488 (1988)

66. P.H.Frampton, Y.Okada and M.R.Ubriaco: On adelic formulas for the p-adic string. Phys.Lett. **B213**, 260-264 (1988)

67. P.H.Frampton, Y.Okada and M.R.Ubriaco: New p-adic strings from old dual models. Phys.Rev. **D39**, 1152-1156 (1989)

68. P.H.Frampton and Y.Okada: Effective scalar field theory of p-adic string. Phys.Rev. **D37**, 3077-3079 (1989)

69. P.H.Frampton and H.Nishino: Theory of p-adic closed strings. Phys.Rev.Lett. **62**, 1960-1964 (1989)

70. P.H.Frampton: p-Adic number fields and string tree amplitudes. In «Problems in high energy physics and field theory». Proc. of the XI workshop, Protvino 1988, Nauka, 1989

71. P.H.Frampton and I.V.Volovich: Cosmogenesis and primary quantization. Mod. Phys. Lett. **A4**, 1825-1832 (1990)

72. J.Fresnel and M.van der Put: Geometrie Analytique Rigide et Applications. Boston: Birkhauser, 1981.

73. P.G.O.Freund and M.Olson: Non-archimedean strings. Phys. Lett. **B199**, 186-190 (1987)

74. P.G.O.Freund and M.Olson: Nucl. Phys. **B297**, 86-102 (1988)

75. P.G.O.Freund and E.Witten: Adelic string amplitudes. Phys. Lett. **B199**, 191-194 (1987)

76. P.G.O.Freund: Real, p-adic and adelic strings. Procee-

dings of IXth Int. Congress on Mathematical physics, Swansea, 1988, Adam Hilder, 282-285 (1989)
77. P.G.O.Freund: Scattering on p-adic and on adelic symmetric spaces. Preprint EFI-90-87, 13-17 (1990)
78. P.G.O.Freund: in Superstrings and Particle Theory, L.Clavelle and B.Harms eds., World Sci., Singapore, 251 (1990)
79. P.G.O.Freund: On the quantum group - p-adic connection. Chicago preprint (1991)
80. M.Jimbo: A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation. Lett.Math.Phys. **10**, 63-69 (1985)
81. Э.Жаке, Р.Ленглендс: Автоморфные формы на GL(2). М.: Мир, 1973
82. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, И.И.Пятецкий-Шапиро: Теория представлений и автоморфные функции. Обобщенные функции, вып.6. М.: Наука, 1966
83. И.М.Гельфанд, Н.Я.Виленкин: Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции, вып.4. М.: Наука, 1961
84. L.Gerritzen: p-Adic Siegel halfspace. Groupe Etude Anal. Ultrametrique **3**, J9, 1981/82
85. L.Gerritzen and M. van der Put: Schottky Groups and Mumford Curves. Lecture Notes in Mathematics, v.817. Berlin: Springer-Verlag, 1980
86. J.L.Gervais: p-Adic analyticity and Virasoro algebras for conformal theories in more than two dimensions. Phys. Lett. **B201**, 306-310 (1988)
87. S.W. Giddings: Fundamental strings. Preprint HUTP-88/A061 (1988)
88. И.И.Гихман, А.В.Скороход: Теория случайных процессов. Т.1-3. М.: Наука, 1971-1973
89. Д.Глимм, А.Джаффе: Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984
90. J.A.Gracey and D.Verstegen: The O(N) Gross-Neveu and supersymmetric σ-models on p-adic fields. Mod. Phys. Lett. **A5** 243-254 (1990)
91. N.De Grande-De Kimpe and L.Van Hamme (eds.) Proceedings of the Conference on p-adic analysis, Houthalen,

Brussel: Vrije Universiteit Brussel, 1986.
92. М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен: Теория суперструн. Т.1,2. М.: Мир, 1990
93. Ф.Гриффитс, Д.Харрис: Принципы алгебраической геометрии. Т.1,2. М.: Мир, 1982
94. D.Gross and P.F.Mende: String theory beyond the Planck scale. Nucl.Phys. **303**, 407 (1988)
95. B.Grossman: p-Adic strings, the Weyl conjectures and anomalies. Phys.Lett. **B197** 101-105 (1987)
96. B.Grossman: The adelic components of the Dirac operator. J.Phys. **A21**, L1051-L1060 (1988)
97. B.Grossman: Adelic conformal field theory. Phys.Lett. **B215**, 14-19 (1988)
98. B.Grossman: Arithmetic Directions in Topologycal Quantum Field Theory and Strings. Preprint Rockefeller Univ. DOE/ER40 325-52-Task.B. (1988)
99. J.Hazer and D.Zagier: The Euler characteristic of the moduli space of curves. Invent. Math. **185**, 457-486 (1986)
100. Б.Хартсхорн: Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981
101. F.Herrlich: Moduli and Teichmuller space for degenerating curves. Proc. Conf. p-adic anal. Hendelhoef, 1986, pp.83-95
102. Х.Хейер: Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981
103. Т.Хида: Броуновское движение. М.: Мир, 1987
104. D.Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1930.
105. Z.Hlousek and D.Spector: Scattering amplitudes in p-adic string theory. Phys.Lett. **B214**, 19-25 (1988)
106. Z.Hlousek and D.Spector: p-Adic string theory. Preprint CLNS 88/832, 1988
107. А.С.Холево: Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980
108. E.D'Hoker and D.Phong: The geometry of string perturbation theory, Preprint PUPT-103, 1988
109. G.'t Hooft: Nucl.Phys, B256,1985: Gravitational Collapse and Quantum Mechanics. Lectures given at the 5th Adriatic Meeting on Particle Physics. Dubrovnik, 1986
110. C.J.Isham, Topological and global aspects of quantum theory. In «Relativity, groups and topology II», eds.

B.S.DeWitt and R.Stora , 1983
111. C.J.Isham, Y.Kubyshin and P.Renteln: Quantum norm theory and the quantization of metric topology. Class. Quant. Grav. **7**, 1053-1074 (1990)
112. E.Kani: Potential theory on curves. NSERC preprint, 1987
113. G.Kato: Frobenius map of Fermat curves for p-adic strings. Princeton preprint, 1988
114. А.Ю.Хренников: Квантовая механика над неархимедовыми числовыми полями. ТМФ **83**, 406-418 (1990)
115. А.Ю.Хренников:Квантовая механика над расширениями Галуа числовых полей. ДАН СССР **315**, 860-864 (1990)
116. А.Ю.Хренников: Математические методы неархимедовой физики. УМН **45**, 79-110 (1990)
117. А.Ю.Хренников: Псевдодифференциальные операторы на неархимедовых пространствах. Дифф. уравн. **26**, 1044-1054 (1990)
118. А.Ю.Хренников: Вещественно-неархимедова структура пространства-времени. ТМФ **86**, 177-190 (1991)
119. А.Ю.Хренников: Обобщенные функции и гауссовские континуальные интегралы по неархимедовым функциональным пространствам. Изв. АН СССР сер. матем. **55**, 780-814 (1991)
120. A.Yu.Khrennikov: p-Adic quantum mechanics with p-adic valued functions. J. Math. Phys. **32**, 932-936 (1991)
121. Н.Коблиц: p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982
122. N.Koblitz: p-Adic analysis: a short course on recent work. London: Cambridge University Press, Mathematical Society Lecture Notes, series 46, 1980.
123. А.Н.Кочубей: Операторы типа Шредингера над полем p-адических чисел. ТМФ **86**, 323-333 (1991)
124. M.Kontsevich: Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy functions. Max- Planck- Institute preprint MPI/91-77 (1991)
125. T.H.Koornwinder: Orthogonal polynomials in connection with quantum groups. In «Orthogonal Polynomials: Theory and Practice», ed.P.Nevai, NATO ASI Series C, v.294. Kluwer Academic Publ., 1990
126. А.И.Кострикин: Введение в алгебру. М.: Наука, 1977

127. С.Ленг: Основы диофантовой геометрии. М.: Мир, 1986
128. С.Ленг: Алгебра. М.: Мир, 1968
129. D.R.Lebedev and A.Yu.Morosov: An attempt of p-adic one-loop computations. Preprint ITEP 163-88 (1988)
130. E.Y.Lerner and M.D.Missarov: p-Adic Feynman string amplitudes. Commun. Math.Phys. **121**,35-48 (1989)
131. Е.Ю.Лернер, М.Д.Миссаров: Скалярные модели в p-адической квантовой теории поля и иерархические модели. ТМФ **78**, 248-257 (1989)
132. L.Leroy: Particle in a p-adic box. Mod.Phys.Lett. **A5**, 1359-1364 (1990)
133. J.L.Lucio and Y. Meurice: Asymptotic properties of random walks on p-adic spaces. Preprint U. of Iowa 90-33, 1-5 (1990)
134. I.G.Macdonald: Orthogonal polynomias associated with root systems, preprint
135. A.J.Macfarlane: J.Phys.A.Math.Gen. **22**, 4581 (1989)
136. G.W.Mackey: Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory. N.Y.: Addison-Wesley Publ. Comp., Inc, 1989
137. G.W.Mackey: Mathemetical foundation of quantum mechanics. N.Y.: A.Benjamin, 1963
138. K. Mahler: p-Adic numbers and their functions, London: Cambridge University Press, Cambridge tracts in mathematics 76,1980.
139. B.Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.
140. Yu.I.Manin and V.G.Drinfeld: Periods of p-adic Schottky groups, J.reine angew. Math., **262/263**, 239 (1973)
141. Ю.И.Манин: p-Адические автоморфные функции. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. **3**, 5-92 (1974)
142. Yu.I.Manin: New dimensions in geometry. Lect. Notes in Math. **1111**, 59-101, Springer, 1985
143. Yu.I.Manin: Quantum strings and algebraic curves. Proc. Int. Cong. Math., Berkeley, 1286-1296 (1986)
144. Yu.I.Manin: Multiparametric deformations of the general linear supergroup. Comm.Math.Phys. **123**, 163 (1989)
145. Yu.I.Manin: Reflections on Arithmetical Physics. In

«Conformal Invariace and String Theory», eds. P.Dita and V.Gergescu, p.293-303. Boston: Acadic Press, 1989
146. E.Marinari and G.Parisi: On the p-adic five point function. Phys.Lett. **203B**, 52-56 (1988)
147. M.A.Markov. Progr.Theor.Phys., Suppl. **85** (1965)
148. A.Marshakov and A.Zabrodin: New p-adic string amplitudes. Phys. Lett. (1991)
149. В.П.Маслов: Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988
150. В.П.Маслов: Операторные методы. М.: Наука, 1973
151. Y.Meurice: Quantum mechanics with p-adic numbers. Int. J. Mod.Phys. **A4**, 5133-5137 (1989)
152. Y.Meurice: A path integral formulation of p-adic quantum mechanics. Phys.Lett. **245B**, 99-104 (1990)
153. Y.Meurice: A discretization of p-adic quantum mechanics. Comm. Math. Phys. **135**, 303-312 (1991)
154. Y.Meurice: The classical harmonic oscillator on Galois and p-adic fields. Intern. Journ. of Mod. Phys. **A4**, 2211-2233 (1989)
155. Y.Meurice: Quantum mechanics with p-adic time. Preprint CINVESTAV-FIS-12-89, 1-14 (1989)
156. Y.Meurice: Symanzik's Field Theory on p-adic Spaces. Iowa Preprint, (1991).
157. M.Mezard, G.Parisi, N.Sourlas, G.Toulouse and M.A.Virasoro. J.Phys.(Paris) **45**, 843 (1984)
158. Д.Милн: Этальные когомологии. М.: Мир, 1983
159. M.D.Missarov: Random fields on the adele ring and Wilson's renormalization group. Ann. Inst. H.Poincare **49**, 357-367 (1989)
160. D.Mumford: An analytic construction of degenerating curves over complete local fields. Composito Math. **24**, 129 (1972)
161. D.Mumford: Stability of projective varieties. Enseign. Math. **23**, 39-100 (1977)
162. D.Mumford: Tata lectures on Tetha I,II. Boston: Birkhauser, 1983,1984
163. М.А.Наймарк: Нормированные кольца. М.: Наука, 1968
164. H.Nishino, Y.Okada and M.R.Ubriaco: Effective field theory from a p-adic string. Phys.Rev. **D40**, 1153-1157

(1989)
165. H.Nishino and Y.Okada: Beta function approach to p-adic string. Phys Lett. **B219**, 258-262 (1989)
166. Y.Okada: p-Adic string amplitude. Nucl.Phys. **B6**, 177-182 (1989)
167. Y.Okada and M.R.Ubriaco: Renormalization of O(N) Non-linear σ-Model on a p-adic Field. Phys.Rev.Lett. **61**, 1910-1913 (1988) **A3**, 639-643 (1988)
168. G.Parisi: On p-adic functional integrals. Mod. Phys. Lett. **A4**, 369-374 (1988)
169. G.Parisi. J.Phys. **A13**, 1887-1892 (1980)
170. R.C.Penner: Perturbation series and the moduli space of Riemann surface. J.Diff.Geom. **27**, 35-59 (1988)
171. A.Peres and N.Rosen: Quantum limitation to the measurement of gravitational field. Phys.Rev.**118**, 335-376 (1960)
172. H.Poincare: La Science et l'Hypothese. Paris: Flammarion, 1923.
173. A.M.Polyakov: Quantum geometry of bosonic strings. Phys.Lett.**B103**, 207-212 (1981)
174. Л.С.Понтрягин: Непрерывные группы. М.: Наука, 1973
175. М.Рид, Б.Саймон: Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977; Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982
176. T.Regge. Nuovo Cimento **7**,215 (1958)
177. B.Riemann: Uber die Hypothesen die der Geometrie Zugrunde leigen. Nachr. Ges. Gottingen, Bd.**13**, S.133 (1868)
178. R.Rammal, G.Toulouse and M.A.Virasoro: Ultrametricity for physicist. Rev. Mod. Phys. **58**, 765-821 (1986)
179. A.van Rooij: Non-archimedean functional analysis. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1978.
180. B.O.B.Roth: A general approach to quantum fields and strings on adeles. Phys. Lett. **B213**, 263-268 (1988)
181. P.Ruelle, E.Thiran, D.Verstegen and J.Weyers: Adelic string and superstring amplitudes. Mod. Phys. Lett.**A4**, 1745- 1753 (1989)
182. P.Ruelle, E.Thiran, D.Verstegen and J.Weyers: Quantum mechanics on p-adic fields. J. Math. Phys. **30**, 2854-2859 (1989)
183. Z.Ryzak: Scattering amplitudes from higner dimensional

p-adic world sheets. Phys. Lett. **B208**, 411-416 (1988)
184. J.Scherk: An introduction to the theory of dual models and strings. Rev. Mod. Phys. **47**, 123-165 (1975)
185. W.H.Schikhof: Non-Archimedean Harmonic Analysis. Ph.D. Thesis, Rotterdam University, 1967.
186. W.H.Schikhof: Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis. Cambridge University Press, 1984.
187. И.Е.Сигал: Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968
188. И.Р.Шафаревич: Основы алгебраической геометрии. Т.1,2. М.: Наука, 1988
189. Ж.-П.Серр: Курс арифметики. М.: Мир, 1972
190. Ж.-П.Серр: Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969
191. Б.Саймон: Модель $P(\phi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976
192. V.A.Smirnov: Renormalization in p-adic quantum field theory. Mod.Phys.Lett. **A6**, 1421-1427 (1991)
193. V.A. Smirnov: p-Adic Feynman amplitudes. Preprint MPI-Ph/91-48, 1-13 (1991)
194. О.Г.Смолянов: Анализ на топологических векторных пространствах и его применения. М.: Изд. МГУ, 1979
195. C.Soule: Geometrie d'Arakelov des surfaces arithmetiques. Seminare Bourbaki, 1988-89, No.713, Asterisque 177-178 (1989), p.327-343
196. B.L.Spokoiny: Quantum geometry of non-Archimedean particles and strings. Phys Lett. **207B**, 401-406 (1988)
197. B.L.Spokoiny: Non-Archmedean geometry and quantum mechanics. Phys.Lett. **B211**,120-125 (1989)
198. J.Tate: Rigid Analytic spaces. Invent.Math. **12**, 257-293 (1971)
199. E.Thiran, D.Verstegen and J.Weyers: p-Adic Dynamics. J.Stat.Phys. **54**, 893-913 (1989)
200. H.-J.Treder. In «Relativity, Quants and Cosmology», ed. F.de Finis, N.Y., 1979
201. M.R.Ubriaco: Fermions on the field of p-adic numbers. Phys.Rev. **D41**, 2631-2636 (1990)
202. M.R.Ubriaco: Field quantization in nonarchimedean field theory. Preprint LTP-012-UPR
203. E.Verlinde and H.Verlinde: Chiral bosonization, deter-

minats and string partition functions. Preprint Utrecht, 1986
204. И.М.Виноградов: Основы теории чисел. М.: Наука, 1972
205. B.C.Владимиров: Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976
206. B.C.Владимиров: Обобщенные функции над полем p-адических чисел. УМН **43**, 17-53 (1989)
207. V.S.Vladimirov: p-Adic analysis and p-adic quantum mechanics. Ann. of the NY Ac. of Sci: Symposium in Frontiers of Math. (1988)
208. B.C.Владимиров: О спектре некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел. Алгебра и Анализ **2**, 107-124 (1990)
209. V.S.Vladimirov: An application of p-adic numbers in quantum mechanics. In «Selected topics in Statistical mechanics», 22-24 August 1989, Dubna, USSR, World Scientific, 1990, p.282-297
210. V.S.Vladimirov: Applications of p-adic numbers in mathematical physics. Delph: Culturel Center, 1989
211. B.C.Владимиров, И.В.Волович: Суперанализ. Дифференциальное исчисление. ТМФ **59**, 3-27 (1984)
212. B.C.Владимиров, И.В.Волович: p-Адическая квантовая механика. ДАН СССР **302**, 320-322 (1988)
213. V.S.Vladimirov and I.V.Volovich: P-Adic Quantum Mechanics. Commun.Math.Phys. **123**, 659-676 (1989)
214. V.S.Vladimirov and I.V.Volovich: P-adic Schrodinger-type equation. Letters in Mathem. Phys. **18**, 43-53 (1989)
215. V.S.Vladimirov and I.V.Volovich: A vacuum state in p-adic quantum mechanics. Phys. Letters **B217**, 411-414 (1989)
216. B.C.Владимиров, И.В.Волович: Применение p-адических чисел в математической физике. Труды МИАН **200**, 88-99 (1991)
217. B.C.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов: Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. ДАН СССР **310**, 272-276 (1990)
218. B.C.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов: Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. Изв. АН СССР сер. матем. **54**, 275-302 (1990)
219. И.В.Волович: p-Адическое пространство-время и теория

струн. ТМФ **71**, 337-340 (1987)
220. I.V.Volovich: Number theory as the ultimate physical theory. Preprint CERN-TH. **87**, 4781-4786 (1987)
221. I.V.Volovich: p-Adic string. Class.Quantum Grav. **4**, L83-L87 (1987)
222. I.V.Volovich: Harmonic analysis and p-adic strings. Lett.Math.Phys. **16**, 61-66 (1988)
223. I.V.Volovich: p-Adic quantum theory and strings. In Proceedings of IXth Int. Congress on Mathematical physics, Sweansea, 1988, Adam Hilger, 286-293 (1989)
224. J.Wess and B.Zumino: Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. Preprint CERN-TH-5697/90 (1990)
225. A.Weil: Sur certains groupes d'operateurs unitaries. Acta Math. **111**, 143-211 (1964)
226. А.Вейль: Основы теории чисел. М.: Мир, 1972
227. Г.Вейль: Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986
228. H.Weyl: Philosophy of Mathematics and Natural Science. Princeton University Press, 1949.
229. J.A.Wheeler: Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics. In C.M.DeWitt and J.A.Wheeler, eds., Battell Rencontres: 1967 Lectures in Mathematical Physics, pp.242-307. N.Y.: Benjamin, 1968
230. B.De Witt: The Quantization of Geometry. In «Gravitation: an Introduction to Current Research», ed. L.Witten, N.Y.: J.Wiley and Sons, 1962
231. E.Witten: Free fermions on an algebraic curve. In Proc. of the Symposium on the Mathematical Heritage of Herman Weyl, Durham, North Carolina, 1987
232. E.Witten: The search for higher Symmetry in String Theory, Preprint IASSNS-HEP-88/55 (1988)
233. E.Witten: Topological Quantum Field Theories. Comm. Math. Phys. **117**, 353-391 (1988)
234. E.Witten: Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. Surveys in Diff. Geom. **1**, 243-289 (1991)
235. S.Woronovicz: Comm. Math. Phys. **111**, 613 (1987); **122**, 125 (1989); Publ. RIMS Kyoto Univ. **23**, 117 (1987)
236. H.Yamakoshi: Arithmetic of strings. Phys. Lett. **B207**,

426-428 (1988)
237. K.Yosida: Functional analysis. Springer-Verlag, 1965
238. A.V.Zabrodin: Non-archimedean strings and Bruhat-Tits trees. Mod. Phys. Lett. **A4**, 367-376 (1989)
239. Е.И.Зеленов: p-Адическая квантовая механика при p=2. ТМФ **80**, 253-264 (1989)
240. E.I.Zelenov: p-Adic path integrals. J.Math.Phys. **32**, 147-152 (1991) 12
241. Е.И.Зеленов: p-Адическая квантовая механика и когерентные состояния. 1. Системы Вейля. ТМФ **86**, 210-220 (1991)
242. Е.И.Зеленов: p-Адическая квантовая механика и когерентные состояния. 2. Собственные функции осциллятора. ТМФ **86**, 375-384 (1991)
243. E.I.Zelenov: Representations of commutation relations of p-adic systems of infinitely many degrees of freedom. J. Math. Phys. **33**, 178-188 (1992)
244. E.I.Zelenov: p-Adic Heisenberg group and Maslov index. Comm. Math. Phys. **155**, 489-502 (1993)
245. R.B.Zhang: Lagrangian formulation of open and closed p-adic strings. Phys.Lett. **B209**, 229-232 (1988)

ОГЛАВЛЕНИЕ