А.О.Гельфонд

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, М.1952

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория трансцендентных чисел сформировалась как теория, имеющая свои специфические методы и достаточное количество уже решенных проблем, только в XX веке. Отдельные постановки проблем этой теории существовали давно, и первая из них, насколько нам известно, принадлежит Л. Эйлеру. Проблема приближения алгебраических чисел рациональными дробями или, более общо, алгебраическими же числами также может быть отнесена к теории трансцендентных чисел, несмотря на то, что изучение приближения алгебраических чисел рациональными дробями стимулировалось проблемами теории диофантовых уравнений. Целью настоящей монографии является не только показать современное состояние теории трансцендентных чисел и изложить основные методы этой теории, но и дать представление об историческом ходе развития ее методов и о тех связях, которые существуют между этой теорией и другими проблемами теории чисел.

Так как доказательства основных теорем в теории трансцендентных чисел достаточно громоздки и опираются на большое количество вспомогательных предложений, то каждое такое доказательство предваряется кратким изложением его схемы, что должно, по нашему мнению, облегчить понимание основных черт соответствующего метода.

В монографию включены полностью мои статьи «Аппроксимация алгебраических иррациональностей и их логарифмов», «Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов» и использована статья «Приближение алгебраических чисел алгебраическими же числами и теория трансцендентных чисел».

Метод К. Зигеля в монографии изложен в том виде, в каком он дан К. Зигелем в книге «Трансцендентные числа», Принстон, 1949 г.

А. Гельфонд

ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

§ 1. Введение

Алгебраическим числом называется всякий корень алгебраического уравнения с целыми рациональными коэффициентами, другими словами, корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

где все числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые рациональные и $a_0 \neq 0$. Всякое неалгебраическое число называется *трансцендентным*.

Если уравнение (1) неприводимо, другими словами, его левая часть не является произведением двух многочленов с целыми рациональными коэффициентами, то его степень будет степенью алгебраического числа α, ему удовлетворяющего. *Целым алгебраическим* числом называется корень уравнения (1) в случае, когда $a_0 = 1$.

Необходимые для понимания дальнейшего элементарные арифметические свойства алгебраических чисел читатель может найти в любом курсе алгебраических чисел, например в книге Гекке «Лекции по теории алгебраических чисел». Здесь мы займемся только вопросом приближения алгебраических иррациональностей и различными приложениями этой теории.

Все методы доказательства трансцендентности тех или иных чисел в явной или скрытой форме опираются на то обстоятельство, что алгебраические числа не могут быть хорошо приближаемы рациональными дробями или, более общо, алгебраическими же числами. Поэтому в этой главе будет рассмотрен вопрос о приближении алгебраических чисел алгебраическими же числами. Этот вопрос, как будет показано, тесно связан с проблемой решения алгебраических и трансцендентных уравнений в целых числах и другими вопросами теории чисел. Аналитические методы теории трансцендентных чисел в свою очередь могут быть использованы для решения проблем теории уравнений в целых числах, а в дальнейшем, вероятно, и для решения проблем приближения алгебраических иррациональностей.

Заметим, прежде всего, что существование трансцендентных чисел может быть доказано и без использования характера приближений алгебраических чисел алгебраическими же числами. Действительно, так как коэффициенты уравнения (1) могут быть только целыми рациональными числами, то уравнений типа (1) заданной степени n может быть только счетное множество. Отсюда следует, что существует только счетное множество алгебраических чисел степени n, так как каждое уравнение степени n имеет только n корней. Поэтому множество всех алгебраических чисел счетно. Но множество всех комплексных чисел несчетно, откуда и следует, что трансцендентные числа составляют основную часть всех комплексных и действительных чисел. Несмотря на это, доказательства трансцендентности каких-либо конкретно заданных чисел, например π или $2^{\sqrt[3]{2}}$, достаточно сложны.

Впервые вопрос об арифметической природе широкого класса числовых образований был поставлен Л. Эйлером. В своей книге «Введение в анализ» в 1744 г. он высказал утверждение, что при рациональном основании a логарифм любого рационального числа b, не являющегося рациональной степенью a, не может быть даже числом иррациональным (в современной терминологии алгебраическим) и должен относиться к количествам трансцендентным. Кроме этого утверждения, доказанного только в настоящее время, он ставил и другие задачи, относящиеся непосредственно к теории трансцендентных чисел. Через столетие после Л. Эйлера Лиувилль [2] впервые в 1844 г. дал необходимый признак алгебраичности числа и, тем самым, достаточный признак трансцендентности. Он показал, что если α есть действительный корень неприводимого уравнения степени $\nu \geqslant 2$, а p и q — любые целые рациональные числа то имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^{\nu}}, \quad C > 0,$$

где постоянная C не зависит от p и q.

Доказательство этого неравенства весьма просто. Пусть α — действительный корень неприводимого уравнения

$$f(x) = a_0 x^{\nu} + \ldots + a_{\nu} = 0,$$

где все $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu}$ — целые рациональные числа. Тогда, воспользовавшись теоремой о конечном приращении, имеем:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |f'(\xi)| > \frac{1}{q^{\nu}}; \quad \xi = \alpha + \tau\left(\frac{p}{q} - \alpha\right),$$
$$|\tau| \leqslant 1,$$

откуда непосредственно следует теорема Лиувилля. Этот признак трансцендентности числа позволил впервые строить примеры трансцендентных чисел. Действительно, из лиувиллевского признака трансцендентности следует, например, трансцендентность числа

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}.$$

Итак, Лиувилль установил, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными дробями. В связи с этим фактом возникла проблема определения такой постоянной $\vartheta = \vartheta(\nu)$, что при произвольном алгебраическом α степени ν неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\vartheta + \varepsilon}}, \tag{2}$$

где p и q — целые, будет иметь лишь конечное число решений, когда $\varepsilon > 0$ и бесконечное, когда $\varepsilon < 0$. Заметим, что числа α, для которых неравенство (2) имеет бесчисленное множество решений при любом θ, называются *числами Лиувилля*. Впервые А. Туэ [1] в начале текущего столетия смог понизить величину этой постоянной. Он показал, что $\vartheta \leqslant \frac{\nu}{2}+1$. Для доказательства этого предложения А. Туэ построил многочлен от двух переменных x и y с целыми рациональными коэффициентами, который имеет вид

$$f(x,\ y)=(y-\alpha)f_1(x,\ y)+(x-\alpha)^m f_2(x,\ \alpha), \qquad (3)$$

где $f_1(x,\ y)$ и $f_2(x,\ \alpha)$ — многочлены.

Допуская, что неравенство (2) имеет два решения с достаточно большими знаменателями q_1 и q_2, $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, полагая в соотношении (3) $m \approx \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$ и доказывая, что левая часть (3) при соответствующем выборе $f(x,\ y)$ при $x=\frac{p_1}{q_1}$ и $y=\frac{p_2}{q_2}$ в нуль не обращается, он получает свое утверждение аналогично тому, как была доказана теорема Лиувилля. Этот метод, который позволил существенно понизить постоянную Лиувилля, неразрывно связан с предположением существования двух достаточно больших решений неравенства (2). Поэтому этот метод позволяет устанавливать только границу числа решений неравенства (2), а не максимальные величины их знаменателей.

Действительно, из рассуждений А. Туэ следует, что если при $\vartheta=\frac{\nu}{2}+1$ и $\varepsilon>0$ неравенство (2) имеет достаточно большое решение со знаменателем $q_1>q_1'(\alpha,\ \varepsilon)$, то нет решений со знаменателями $q_2 \geqslant q_2'(\alpha,\ \varepsilon,\ q_1)$. Это сразу позволяет, в частности, установить конечность числа решений уравнения

$$y^n f\left(\frac{x}{y}\right)=c_0y^n+c_1y^{n-1}x+\ldots+c_nx^n=c, \quad n\geqslant 3, \qquad (4)$$

в целых числах x и y при целых рациональных коэффициентах $c,\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$.

Действительно, из уравнения (4) следуют соотношения

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\alpha-\frac{x}{y}\right)f'(\xi)=\frac{c}{y^n}, \qquad (5)$$

$$\xi=\alpha+\tau\left(\frac{x}{y}-\alpha\right), \quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

из которых при условии неприводимости многочлена $f(t)$ в рациональном поле сразу следует противоречие с неравенством (2) при $\vartheta+\varepsilon<n$, если только мы допустим существование бесконечного числа решений уравнения (4).

Этот метод был обобщен и уточнен К. Зигелем [1], который показал, пользуясь, как и А. Туэ, существованием двух достаточно больших решений, что верно неравенство

$$\vartheta\leqslant\min_{1\leqslant s\leqslant\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right]<2\sqrt{\nu}. \qquad (6)$$

К. Зигель не только уточнил метод А. Туэ, но и распространил его на случай приближения алгебраического числа α числом ζ также алгебраическим, высоты H и степени n. *Высотой алгебраического* числа ζ мы называем максимум модуля коэффициентов того неприводимого в рациональном поле уравнения, которому ζ удовлетворяет, если все коэффициенты этого уравнения целые и их общий наибольший делитель равен единице. Он показал, что неравенство

$$|\alpha-\zeta|<H^{-n(\vartheta+\varepsilon)}, \quad \vartheta=\min_{1\leqslant s\leqslant\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right], \quad \varepsilon>0 \qquad (7)$$

имеет лишь конечное число решений в алгебраических числах ζ, если α есть алгебраическое число степени ν.

Кроме этого, им были даны и другие варианты неравенства (7). Дальнейшие попытки К. Зигеля [2] и его учеников уменьшить величину константы ϑ в неравенствах (2) и (7), использовав предположение о существовании уже не двух, а любого числа достаточно больших решений неравенств (2) и (7), привели его к теореме, которая была уточнена его учеником Т. Шнейдером [1] и в уточненной форме звучит так: если $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$

будут знаменатели всех последовательных решений неравенства (2) при $\vartheta=2$ и $\varepsilon>0$, то или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}=\infty$ или $n<n_0$. Эта теорема Зигеля-Шнейдера, как мы видим, не только не дает возможности установить границу для величины знаменателей решений неравенства (2) при $2<\vartheta<\vartheta_0$, $\vartheta_0=\min\limits_{1\leqslant s\leqslant\nu}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right]$, но и не утверждает даже их конечности.

Последняя приведенная теорема естественно обобщается на случай неравенства (7). Из первого, основанного на рассмотрении двух достаточно больших решений, обобщения теоремы А. Туэ следует, в частности, что уравнение

$$c_0y^n+c_1y^{n-1}x+\ldots+c_nx^n=P_m(x,\ y),\quad n\geqslant 3, \tag{8}$$

при целых рациональных $c_0, c_1, \ldots, c_n$ и $P_m(x, y)$ многочлене с целыми рациональными коэффициентами степени m, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах x и y, когда

$$n-m>\min_{1\leqslant s\leqslant n-1}\left[\frac{n}{s+1}+s\right]$$

и левая часть уравнения неприводима. Из теоремы же Зигеля-Шнейдера следует только, что при $n>m+2$ целочисленные решения уравнения (8) очень редки. Можно отметить, что вопрос о конечности или бесконечности решений уравнения (8) при $n\geqslant m+1$ решен до конца другим путем.

Дальнейшие обобщения теоремы Зигеля-Шнейдера и ее приложения можно найти в работах К. Малера [2—5]. Следует также отметить, что некоторые результаты в области приближения алгебраических иррациональностей были получены Д. Д. Мордухай-Болтовским [1, 4—6], Р. О. Кузьминым [2], А. О. Гельфондом [10, 11] и другими авторами.

Результаты, аналогичные теореме Туэ-Зигеля, относящиеся к вопросу об одновременном приближении нескольких алгебраических чисел рациональными дробями с одинаковыми знаменателями, были получены Г. Гассе [1].

Наиболее интересным непосредственным приложением теорем типа Зигеля-Шнейдера в теории трансцендентных чисел является следующее. Пусть $p(x)$ — целочисленный многочлен, положительный при $x \geqslant 1$. Запишем его значения при $x = 1, 2, 3, \ldots$ по системе счисления с основанием q. Напишем q-ичную бесконечную дробь

$$\eta = 0,\ q_1 q_2 \ldots q_{\nu_1} \ldots q_{\nu_2} \ldots;$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu_1}$ — знаки q-ичного разложения $p(1)$, $q_{\nu_1+1}, \ldots, q_{\nu_2}$ — знаки q-ичного разложения $p(2)$ и т. д. Тогда число η будет трансцендентным, но не числом Лиувилля. В частности, при $p(x) = x$ и $q = 10$ будет трансцендентным числом

$$\eta = 0{,}123456789101112 \ldots$$

Теорема эта была доказана К. Малером [5] с помощью теоремы о приближении алгебраических иррациональностей рациональными дробями, являющейся уточнением теоремы Т. Шнейдера в том случае, когда числители и знаменатели приближающих дробей будут специального вида. Из той же теоремы следует трансцендентность чисел

$$\eta = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_k}{a^{\lambda_k}}, \quad \lambda_{k+1} > (1 + \varepsilon)\lambda_k + \frac{\ln a_{k+1}}{\ln a}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $a > 1$, a_0, a_1, $\ldots$, λ_1, λ_2, $\ldots$ будут целыми рациональными и положительными числами. В частности, это утверждение относится к числу

$$\eta = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{a^{[2^{\alpha n}]}}, \quad \alpha > 0.$$

В связи с тем положением проблемы приближения алгебраических иррациональностей, которое было вкратце изложено выше, прежде всего естественно возникает вопрос о том, можно ли понизить величину постоянной ϑ по сравнению с величиной, полученной К. Зигелем при использовании только двух решений неравенства (2). Далее, принимая во внимание неэффективность результатов, получаемых методом А. Туэ, неэффективность в том смысле, что нельзя установить этим методом границу величины знаменателей решений неравенства (2) при $\vartheta < \nu$, также естественно встает вопрос о том, как должна звучать теорема о приближении алгебраических чисел, которая была бы предельной в смысле эффективности при использовании двух решений неравенства (2). В этой постановке вопроса приходится говорить только о двух решениях, так как использование большего числа решений наталкивается на непреодолимые пока трудности, связанные с общей теорией элиминации.

Теорему, которая давала бы ответ на поставленный вопрос, мы сформулируем, введя предварительно понятие *меры алгебраического* числа. Пусть ζ есть число алгебраического поля K степени σ, а числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ пусть образуют базис кольца целых чисел этого поля. Взятое нами число ζ может быть бесчисленным множеством способов представлено в форме

$$\zeta = \frac{p_1\omega_1 + \ldots + p_\sigma\omega_\sigma}{q_1\omega_1 + \ldots + q_\sigma\omega_\sigma}, \quad q[p_1, \ldots, q_\sigma] = \max[|p_1|, \ldots, |q_\sigma|], \tag{9}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma, q_1, \ldots, q_\sigma$ — целые рациональные числа с общим наибольшим делителем, равным единице. Мы будем называть число q мерой числа ζ, если оно определяется соотношением

$$q = \min q[p_1, \ldots, p_\sigma, q_1, \ldots, q_\sigma], \tag{10}$$

где минимум в правой части берется по всем возможным представлениям числа ζ. Нетрудно заметить, что когда $\zeta = \frac{p}{q}$ есть число рациональное, то его мера равна $\max[|p|, |q|]$, другими словами, с точностью до несущественного постоянного множителя совпадает с его знаменателем q, если ζ есть элемент последовательности дробей, сходящихся с ростом q к числу $\alpha \neq 0, 1$. Теперь мы можем сформулировать нашу общую теорему, которую будем называть в дальнейшем теоремой I. Пусть α и β будут два произвольных числа алгебраического поля K_0 степени ν (они могут и совпадать). Пусть также ζ и ζ_1 будут числами алгебраического поля K, меры которых относительно фиксированного базиса целых чисел этого поля $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ будут соответственно q и q_1, а ϑ и ϑ_1 будут два действительных числа, подчиняющихся условиям $\vartheta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \nu$, $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, но фиксировано. Тогда, если неравенство

$$|\alpha - \zeta| < q^{-\sigma\vartheta} \tag{11}$$

будет иметь решение ζ с мерой $q > q'[K_0, K, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta]$, то неравенство

$$|\beta - \zeta_1| < q_1^{-\sigma\vartheta_1} \tag{12}$$

не может иметь решений с мерой q_1 при условии, что

$$\ln q_1 \geqslant \left[\frac{\vartheta - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta\right] \ln q, \tag{13}$$

где δ — любая сколь угодно малая положительная постоянная[1]).

Соответствующим образом формулируется и P-адический аналог приведенной теоремы. Из приведенной теоремы также следует, полагая в ней $\vartheta = \vartheta_1$, что неравенство (2) при $\varepsilon > 0$ имеет лишь конечное число решений, когда $\vartheta = \sqrt{2\nu}$. Предельность нашей общей теоремы с точки зрения эффективности можно непосредственно установить в том случае, когда ζ и ζ_1 будут рациональными дробями, а $\alpha = \beta$. Действительно, если в условии теоремы $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$ можно было бы заменить $\varepsilon > 0$ на $-\varepsilon < 0$, то оно имело бы вид $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1-\varepsilon)$ и мы могли бы положить $\vartheta = 2\sqrt{1-\varepsilon} < 2$ и $\vartheta_1 = \nu\sqrt{1-\varepsilon} < \nu$. Но неравенство (11) при ζ рациональном, $\sigma = 1$ и $\vartheta < 2$ имело бы действительно бесконечное множество решений, значит, для знаменателей рациональных решений неравенства (12) нашлась бы

[1]) Частный случай этой теоремы, при $\alpha = \beta$, ζ — рациональной дроби, $\vartheta = \vartheta_1$ и без неравенства (13), независимо был доказан Дисоном.

эффективная граница в виде функции K_0, α, ε. Отсюда непосредственно уже следовало бы существование эффективной границы для величин решений уравнения (4). Наконец, можно сказать, что наша общая теорема остается в силе при замене меры чисел ζ на их высоты.

Доказательство этой теоремы основано на некотором усилении метода А. Туэ. Пользуясь нашей общей теоремой I, с помощью некоторых дополнительных рассмотрений можно доказать теорему II: пусть α, ζ_1, ζ_2, ..., ζ_s — алгебраические числа поля K. Пусть также произведение любых целых степеней чисел ζ_1, ζ_2, ..., ζ_s не может быть равно единице. Тогда неравенство

$$|\alpha-\zeta_1^{x_1}\zeta_2^{x_2}\ \ldots\ \zeta_s^{x_s}|<e^{-\varepsilon x},\ x=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|x_i| \tag{14}$$

и сравнение

$$\alpha\equiv\zeta_1^{y_1}\zeta_2^{y_2}\ \ldots\ \zeta_s^{y_s} \bmod \wp^m,\ m=[\delta y],\ y=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|y_i|, \tag{15}$$

как бы ни были малы числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, могут иметь только конечное число решений в целых рациональных числах x_1, x_2, ..., x_s и y_1, y_2, ..., y_s. $\wp$ есть простой идеал поля K. Мы приведем теперь два следствия теорем I и II. Прежде всего мы приведем применение теоремы I к теории алгебраических уравнений. Пусть система однородных форм $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_n(x, y)$ обладает следующими свойствами: их степени $m_1, m_2, \ldots, m_n$ выше первой, все коэффициенты многочленов $P_1(x, y), \ldots$ $\ldots$, $P_n(x, y)$ — целые рациональные числа, эти многочлены не имеют линейных делителей в рациональном поле, каждый действительный корень многочлена $t^{-m_k}P_k(t, tx)=$ $=R_k(x)$ принадлежит к алгебраическому полю K степени не выше ν и все такие корни различны между собой. Будем также называть степенью многочлена от $2n$ переменных $P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, имеющего целые рациональные коэффициенты, совокупность чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_i есть степень многочлена P по совокупности переменных x_i, y_i. Тогда будет иметь место теорема: уравнение

$$P_1(x_1, y_1)\ldots P_n(x_n, y_n)=P(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \tag{16}$$

будет иметь только конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, если только одновременно выполнены неравенства $m_k - s_k > \sqrt{2\nu}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\nu \geqslant 3$.

Из теоремы II также можно получить ряд следствий, но уже для показательных уравнений. Пусть, например, числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, \eta_1, \ldots, \eta_p$ будут целыми числами поля K; ни одно из них не будет алгебраической единицей; $A, B, C, ABC \neq 0$ будут числами того же поля K, числа

$$\zeta = \zeta_1 \ldots \zeta_n, \quad \psi = \psi_1 \ldots \psi_m, \quad \eta = \eta_1 \ldots \eta_p$$

будут взаимно просты. Тогда уравнение

$$A\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_n^{x_n} + B\psi_1^{y_1} \ldots \psi_m^{y_m} + C\eta_1^{z_1} \ldots \eta_p^{z_p} = 0 \qquad (17)$$

может иметь только конечное число неотрицательных решений в целых рациональных числах $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$. Далее, почти непосредственно из теоремы II, можно получить теорему относительно поведения линейных форм с целыми рациональными коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел.

Если алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ обладают тем свойством, что произведение любых целых степеней этих чисел не равно единице, то неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_s \ln \alpha_s| < e^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0, \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|, \qquad (18)$$

где логарифмы имеют любые, но фиксированные значения, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Как было показано Ю. В. Линником [1], это последняя теорема, при $s = 3$ дает возможность провести новое, не зависящее от аналитической теории $L(s, \chi)$-рядов доказательство конечности числа одноклассных квадратичных полей. Если бы можно было установить верхнюю границу величины решений неравенства (1) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, то из этого нового доказательства следовало бы непосредственно решение классической проблемы эффективизации в квадратических полях другими словами, возможность явного выражения границы для величины дискриминантов одноклассных полей. Этим устанавливается глубокая связь между неэффективностью в различных на первый взгляд проблемах теории чисел. Конечность числа решений неравенства (18) позволяет также делать заключения и о поведении решений алгебраических уравнений высших степеней с многими переменными. Действительно, например, из уравнения $N(x_1\omega_1+\ldots+x_s\omega_s)=1$, где числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ образуют базис кольца целых чисел, следует при условии $x_k=0$ уравнение в единицах поля K. Это уравнение будет вида (17) с большим числом членов. Все теоремы, приведенные в этом параграфе, обладают неэффективностью, другими словами, из-за использования двух решений соответствующих аппроксимативных неравенств они принципиально не в состоянии указать величины границ решений неравенств или уравнений и дают только их число.

В следующих параграфах этой главы будут изложены доказательства сформулированных выше теорем. Повидимому, в настоящее время только с помощью аналитических методов теории трансцендентных чисел можно ожидать эффективного решения аппроксимативных неравенств для алгебраических чисел, а тем самым и эффективного решения проблем теории диофантовых уравнений и полей.

§ 2. Вспомогательные леммы

В этом параграфе будут доказаны леммы, необходимые в дальнейшем.

Лемма I. *Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_m$ будут линейные формы с действительными коэффициентами a_i; $i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, \ldots, n\ (n>m)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, другими словами,*

$$L_i=a_{i,1}x_1+\ldots+a_{i,n}x_n,\quad \max_{i,k}|a_{i,k}|\leqslant a,$$

где a — целое число.

Тогда можно найти целые рациональные $x_1, x_2, \ldots x_n$, $|x_k|\leqslant x$, в совокупности отличные от нуля, такие, *что при N целом и $N > 1$*

$$|L_i| \leqslant \frac{1}{N}, \ i = 1, 2, \ldots, m; \ x < 2(naN)^{\frac{m}{n-m}}. \tag{19}$$

Доказательство. Заметим, что $|L_i| \leqslant nax$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В пространстве m измерений с координатами $L_1, L_2, \ldots, L_m$ мы будем иметь $(2x+1)^n$ точек, если будем давать всем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ целые значения, независимо друг от друга, не превышающие по модулю x. Все эти точки будут находиться в кубе со сторонами $2nax$. Каждое ребро куба мы разделим на $2Nanx$ равных частей. Длина каждой части будет N^{-1}. Весь наш куб разобьется тогда на $[2anxN]^m$ кубиков. Положив $x = [(naN)^{\frac{m}{n-m}}]$, мы можем непосредственно убедиться, что число точек $L_1, \ldots, L_m$, нами построенных, больше числа кубиков со стороной $\frac{1}{N}$. Значит, хотя бы в одном из кубиков найдется две наших точки $(L'_1, L'_2, \ldots, L'_m)$ и $(L''_1, L''_2, \ldots, L''_m)$, разность между координатами которых не превысит N^{-1}. Но тогда

$$L'_i - L''_i = \sum_1^n a_{i,k}(x'_k - x''_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$|x'_k - x''_k| \leqslant 2(anN)^{\frac{m}{n-m}},$$

что и доказывает нашу лемму.

Будем попрежнему *высотой алгебраического числа* ζ называть максимум абсолютной величины коэффициентов того неприводимого уравнения с целыми коэффициентами, с общим наибольшим делителем, равным 1, которому удовлетворяет ζ; другими словами, если ζ — корень неприводимого уравнения

$$H_0 + H_1\zeta + \ldots + H_h\zeta^h = 0, \ (H_0, H_1, \ldots, H_h) = 1;$$

$$H = \max_{0 \leqslant i \leqslant h} |H_i|,$$

где все $H_0, H_1, \ldots, H_h$ — целые рациональные числа, то H есть высота ζ.

Лемма II. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — числа алгебраического поля K степени ν, меры которых по отношению к фиксированному базису кольца целых чисел поля K будут $q_1, q_2, \ldots, q_s$, а $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ будет многочлен степеней n_i по отношению к x_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, $n = \sum\limits_1^s n_i$, то или*

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$$

или

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| > H^{-\nu+1} \prod_{i=1}^{s} q_i^{-\nu n_i} e^{-\gamma n}, \tag{20}$$

*где H — высота *) $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, а γ зависит только от поля K и фиксированного базиса кольца целых чисел этого поля.*

Доказательство. Так как по определению меры алгебраического числа число

$$\alpha \sum_{n=1}^{\nu} q_{n,i}\,\omega_n = \sum_{n=1}^{\nu} p_{n,i}\,\omega_i, \quad |p_{n,i}| \leqslant q_i, \quad |q_{n,i}| \leqslant q_i,$$

где $p_{n,i}$ и $q_{n,i}$ — целые числа, а $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ — выбранный базис кольца целых чисел K, будет целым алгебраическим, то произведение

$$C_1 = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{n=1}^{\nu} q_{n,i}\,\omega_n \right)^{n_i}$$

будет целым алгебраическим числом поля K, отличным от нуля, и его норма должна быть не меньше единицы. Поэтому мы получаем неравенство

$$\left| C_1 \prod_2^{\nu} C_k \right| \geqslant 1, \quad |C_k| < H \prod_{i=1}^{s} q_i^{n_i} e^{\gamma_0 n}, \quad 2 \leqslant k \leqslant \nu,$$

где C_k, $k = 2, 3, \ldots, \nu$, числа сопряженные C_1, а γ_0 зависит только от k. Из этих неравенств и следует непосредственно неравенство (20).

*) *Высотой многочлена* называется максимум модулей его коэффициентов.

Лемма III. *Пусть H и q будут высота и мера алгебраического числа ζ поля K, в котором $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ будут базисом кольца целых чисел. Мера числа определяется соотношением (10) § 1. Тогда между высотой и мерой будет существовать соотношение*

$$H > cq^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

где c не зависит от q и H и зависит только от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$.

Доказательство. Действительно, прежде всего, для числа $\zeta = \zeta_0$ и всех его сопряженных ζ_k, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s-1$, мы будем иметь неравенства, независимо от степени неприводимого уравнения, которому ζ удовлетворяет,

$$|\zeta_k|^s \leqslant H(|\zeta_k|^{s-1} + \ldots + 1), \ k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

откуда непосредственно следует, что

$$|\zeta_k| \leqslant H + 1. \tag{22}$$

С другой стороны, по определению меры q числа ζ

$$\zeta_k = \frac{p_1\omega_1^{(k)} + \ldots + p_s\omega_s^{(k)}}{q_0}, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1, \tag{23}$$

$$\max[|p_1|, \ldots, |p_s|] = p, \ p + q_0 > q, \ (p_1, p_2, \ldots, p_s, q_0) = 1,$$

где $\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_s^{(k)}$ — базис поля K_k, сопряженного K. Исключая из соотношений (23) отношения $\frac{p_i}{q_0}$ и пользуясь неравенством (22), мы видим, что

$$H > c_0 \frac{p}{q_0}, \tag{24}$$

где c_0 зависит только от базисов полей $K, K_1, \ldots, K_{s-1}$. По свойству базиса поля K и благодаря отсутствию общего делителя у целых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и q_0 мы можем утверждать, что коэффициент при старшей степени в неприводимом уравнении, которому ζ удовлетворяет, должен делиться на q_0. Отсюда следует, что $H \geqslant q_0$. Сопоставляя неравенства

$$p + q_0 \geqslant q, \quad H \geqslant q_0 > 0, \quad H > c_0 \frac{p}{q_0},$$

мы непосредственно получим основное неравенство нашей леммы.

Пусть $f(x)$ — любой многочлен степени n. Определим его высоту $H(f)$ соотношением

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k, \quad H(f) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |A_k|. \tag{25}$$

Лемма IV. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будут многочлены степеней n_1 и n_2 и высот H_1 и H_2. Тогда*

$$H(f_1^m) \geqslant \frac{1}{2mn} H_1^m \tag{26}$$

и

$$H(f_1 f_2) \geqslant 2^{-3n} H_1 H_2, \quad n = n_1 + n_2. \tag{27}$$

Доказательство. Докажем прежде всего неравенство (26). Для всякого многочлена степени n и высоты H справедливы неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 1} |f(e^{2\pi i \varphi})|^2 &\geqslant \int_0^1 |f(e^{2\pi i \varphi})|^2 \, d\varphi, \\ (n+1) H^2(f) \geqslant \int_0^1 &|f(e^{2\pi i \varphi})|^2 \, d\varphi \geqslant H^2(f). \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Кроме этих очевидных неравенств, из разложения в ряд Фурье непосредственно следует

$$|f(e^{2\pi i \varphi})|^2 = \left| \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 |f(e^{2\pi i \alpha})|^2 e^{2\pi i (\varphi - \alpha) k} \, d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant (2n+1) \int_0^1 |f(e^{2\pi i \alpha})|^2 \, d\alpha. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29) мы последовательно получим:

$$H^2(f_1^m) \geqslant \frac{1}{mn_1+1}\int\limits_0^1 |f^m(e^{2\pi i\varphi})|^2\,d\varphi \geqslant \frac{\max|f^m(e^{2\pi i\varphi})|^2}{(mn_1+1)(2mn_1+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4n_1^2m^2}\left[\int\limits_0^1 |f(e^{2\pi i\varphi})|^2\,d\varphi\right]^m \geqslant \frac{1}{4n_1^2m^2}H_1^{2m},$$

откуда и следует неравенство (26) нашей леммы. Для того чтобы доказать неравенство (27), докажем прежде всего неравенство

$$M = \max_{|z|=1}|f_1(z)f_2(z)| > 2^{-2n}\max_{|z|=1}|f_1(z)|\max_{|z|=1}|f_2(z)|, \quad (30)$$

где $n = n_1 + n_2$ и n_1, n_2 — степени многочленов $f_1(z)$, $f_2(z)$. Без нарушения общности можно предположить, что

$$\max_{|z|=1}|f_1(z)| = \max_{|z|=1}|f_2(z)| = 1. \quad (31)$$

Допустим, что имеет место неравенство $|f_1(z)f_2(z)| \leqslant 2^{-2n}$. Тогда для всякого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ должно быть верным, по крайней мере, одно из двух неравенств:

$$|f_1(e^{2\pi i\frac{k}{n+1}})| \leqslant 2^{-n}, \quad |f_2(e^{2\pi i\frac{k}{n+1}})| < 2^{-n}. \quad (32)$$

Так как k принимает n_1+n_2+1 значений, то очевидно, что или первое неравенство справедливо при n_1+1 значениях k или второе при n_2+1 значениях k. Пусть тогда например, первое неравенство справедливо при n_1+1 значениях k. Положим

$$\alpha_\nu = e^{2\pi i\frac{k_\nu}{n+1}},\ \nu = 0, 1, \ldots, n_1; \quad \alpha'_\mu = e^{2\pi i\frac{k'_\mu}{n+1}},\ \mu = 1, 2, \ldots, n_2;$$

где k_ν — те значения k, при которых выполняется наше неравенство, а k'_μ — все остальные значения k. Тогда по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{m} f(\alpha_\nu)\frac{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{n_1})}{(\alpha_\nu-\alpha_0)(\alpha_\nu-\alpha_1)\ldots(\alpha_\nu-\alpha_{n_1})(z-\alpha_\nu)}. \quad (33)$$

Непосредственно оценивая правую часть (33), умножая числитель и знаменатель ν-го члена правой части на $(\alpha_\nu-\alpha_1')\ldots(\alpha_\nu-\alpha_{n_2}')$, мы получим, что при $|z|=1$

$$|f_1(z)|\leqslant(n_1+1)\,2^{-n}\cdot 2^{n_1+n_2}(n+1)^{-1},$$

что противоречит условию (31). Таким образом, неравенство (30) доказано.

Далее, из неравенств (28), (29) и (30) мы последовательно получим:

$$H^2(f_1,f_2)\geqslant\frac{1}{n+1}\int\limits_0^1|f_1(e^{2\pi i\varphi})|^2|f_2(e^{2\pi i\varphi})|^2\,d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\max_{|z|=1}|f_1(z)f_2(z)|^2>$$

$$>\frac{2^{-4n}}{(n+1)(2n+1)}\max_{|z|=1}|f_1(z)|^2\max_{|z|=1}|f_2(z)|^2\geqslant$$

$$\geqslant 2^{-6n}\int\limits_0^1|f_1(e^{2\pi i\varphi})|^2\,d\varphi\int\limits_0^1|f_2(e^{2\pi i\varphi})|^2\,d\varphi\geqslant 2^{-6n}H_1^2H_2^2,$$

откуда и следует утверждение нашей леммы.

Лемма V. *Пусть α и β — два произвольных числа алгебраического поля степени ν. Пусть также n и $\mu\geqslant n$ — произвольные целые положительные числа и η, $0<\eta\leqslant\leqslant\frac{\nu}{2}$ — произвольное действительное число. Тогда можно построить многочлен относительно x и y с целыми рациональными коэффициентами $C_{k_1,k}$, в совокупности отличными от нуля,*

$$P(x,y)=\sum_{k=0}^{\tau}\sum_{k_1=0}^{\tau_1}C_{k_1,k}\,x^{k_1}y^k,\quad \max|C_{k_1,k}|<e^{n^{\frac{3}{4}}\mu},\tag{34}$$

где положено

$$\tau=\left[(n+\sqrt{n})\sqrt{\frac{\eta\nu}{2}}\right]-1,\quad \tau_1=\left[\frac{\nu(n+\sqrt{n})}{2(\tau+1)}\mu\right],\tag{35}$$

подчиняющийся условиям

$$\frac{\partial^{k_1+k}}{\partial x^{k_1}\,\partial y^k} P(\alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{k_1}{\mu} + \frac{k}{n} < 1 \tag{36}$$

при $n \geqslant n_0(\alpha, \beta)$.

Пусть $P(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степеней τ_1 и τ по x и y. Число его коэффициентов равно тогда $(\tau+1)(\tau_1+1)$ и

$$(\tau_1+1)(\tau+1) \geqslant \frac{\nu}{2}(n+\sqrt{n})\,\mu. \tag{37}$$

Как показывает легкий подсчет, число решений неравенства в условии (36) не превосходит величины

$$(\mu+1)\frac{n+1}{2}.$$

Если d — такое целое рациональное число, что $d\alpha$ и $d\beta$ будут целыми алгебраическими, то

$$\frac{d^{\tau_1+\tau}}{k_1!\,k!}\frac{\partial^{k_1+k}}{\partial x^{k_1}\,\partial y^k} P(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^{\nu} B_{k_1,\,k_s}\,\omega_s,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел поля, к которому принадлежат α и β, а $B_{k_1,\,k,\,s}$ — линейные формы от коэффициентов $C_{k_1,\,k}$ с целыми рациональными коэффициентами. Коэффициенты этих линейных форм $B_{k_1,\,k,\,s}$, как легко видеть, учитывая величину τ_1 и τ, не превосходят величины

$$e^{\gamma\mu}, \quad \gamma = \gamma(\alpha, \beta) > 0.$$

По лемме I всегда можно найти в совокупности отличные от нуля целые рациональные значения для $C_{k_1,\,k}$, при которых будут выполнены неравенства

$$|B_{k_1,\,k,\,s}| \leqslant \frac{1}{2}; \quad \frac{k_1}{\mu} + \frac{k}{n} < 1; \quad 1 \leqslant s \leqslant \nu,$$

$$\max|C_{k_1,\,k}| < 2\,(2re^{\gamma\mu})^{\frac{m}{r-m}},$$

где $r = (\tau+1)(\tau_1+1)$ — число переменных, а m — число неравенств.

Нетрудно видеть, что

$$m \leqslant \nu(\mu+1)\frac{n+1}{2}$$

и

$$\frac{\nu}{2}(n+\sqrt{n})\mu < r < \nu n\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{m}{r-m} < \frac{2\nu n\mu}{\nu(\sqrt{n}-1)\mu} \leqslant 4\sqrt{n}$$

при $n \geqslant 2$, откуда уже непосредственно следует неравенство (34) нашей леммы.

Таким образом, наша лемма полностью доказана.

Лемма VI. *Пусть $P(x, y)$ — многочлен, построенный при условиях леммы V, где положено $\mu = \left[\eta n \frac{\ln q_1}{\ln q}\right]$, а ζ_1 и ζ — два числа алгебраического поля K с целочисленным базисом $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, меры которых при этом базисе будут соответственно равны q_1 и q.*

Предположим также, что выполнены неравенства

$$\ln q \geqslant n^3{}_1 \quad \ln q_1 \geqslant \ln q, \quad n \geqslant n_1 \geqslant n_0, \tag{38}$$

где n_1 зависит только от n_0 и базиса поля K. Тогда существует целое число λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \left[\frac{\ln q_1}{\ln q}\right]+\tau+1$, такое, что

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} P(\zeta, \zeta_1) \neq 0. \tag{39}$$

Доказательство. Условимся, что в доказательстве этой леммы мы буквами $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будем обозначать величины, не зависящие от n, q_1, q. Многочлен $P(x, y)$ можно представить, прежде всего, в форме

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{\tau} \overline{P}_k(x) y^k, \quad \overline{P}_k(x) = \sum_{k_1=0}^{\tau_1} C_{k_1, k} x^{k_1}. \tag{40}$$

Выберем из числа многочленов $\overline{P}_k(x)$ r линейно независимых, через которые все остальные могут быть линейно выражены. Тогда мы будем иметь представление

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{r} P_k(x) Q_k(y), \qquad 1 \leqslant r \leqslant \tau + 1. \tag{41}$$

Все $Q_k(y)$ также линейно независимы в этом представлении, так как в $Q_k(y)$ обязательно входит та степень y, которая стояла множителем при $\overline{P}_k(x)$ в представлении (40) и кроме $Q_k(y)$ эта степень ни в какой другой многочлен $Q_i(y)$ не входит. Коэффициенты многочленов $P_k(x)$ и $Q_k(y)$ будут рациональными числами.

Введем в рассмотрение два многочлена $\Delta(x)$ и $D(y)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{1}{1!\,2!\ldots(r-1)!}\begin{vmatrix} P_1(x) & \ldots & P_r(x) \\ P_1'(x) & \ldots & P_r'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_1^{(r-1)}(x) & \ldots & P_r^{(r-1)}(x) \end{vmatrix}, \\ D(y) &= \frac{1}{1!\,2!\ldots(r-1)!}\begin{vmatrix} Q_1(y) & \ldots & Q_r(y) \\ Q_1'(y) & \ldots & Q_r'(y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_1^{(r-1)}(y) & \ldots & Q_r^{(r-1)}(y) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Коэффициенты этих многочленов будут рациональными числами, поэтому можно положить

$$\left.\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{a_1}{b_1} R(x), \quad (a_1, b_1) = 1; \\ D(y) &= \frac{a_2}{b_2} T(y), \quad (a_2, b_2) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где a_1, b_1 и a_2, b_2 — целые рациональные, все коэффициенты многочленов $R(x)$ и $T(y)$ — также целые рациональные, и общий наибольший делитель коэффициентов $R(x)$ и, соответственно, $T(y)$ есть единица.

Каждый из этих многочленов не равен нулю тождественно, так как равенство нулю одного из них влекло бы за собой линейную зависимость многочленов $P_k(x)$ или $Q_k(y)$.

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\Delta(x)\,D(y)=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{P(x,\,y)}{0!\,0!} & \dfrac{P'_y(x,\,y)}{0!\,1!} & \dots & \dfrac{P^{(r-1)}_{y^{r-1}}(x,\,y)}{0!\,(r-1)!} \\ \dfrac{P'_x(x,\,y)}{1!\,0!} & \dfrac{P''_{xy}(x,\,y)}{1!\,1!} & \dots & \dfrac{P^{(r)}_{xy^{r-1}}(x,\,y)}{1!\,(r-1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{P^{(r-1)}_{x^{r-1}}(x,\,y)}{(r-1)!\,0!} & \dfrac{P^{(r)}_{x^{r-1}y}(x,\,y)}{(r-1)!\,1!} & \dots & \dfrac{P^{(2r-2)}_{x^{r-1}y^{r-1}}(x,\,y)}{(r-1)!\,(r-1)!} \end{vmatrix}. \tag{44}$$

В правой части этого тождества состоит многочлен с целыми коэффициентами от x и y. Оценим высоту, другими словами, максимум модуля, H, его коэффициентов.

Прежде всего надо оценить высоту $H_{k_1,\,k}$ каждого элемента этого детерминанта. Непосредственно очевидно, так как $|C_{k_1k}|<\exp[n^{\frac{3}{4}}\mu]$, что

$$H_{k_1,\,k}=H\left(\frac{\partial^{k_1+k}}{\partial x^{k_1}\,\partial y^k}\frac{P(xy)}{k_1!\,k!}\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{n^{\frac{3}{4}}\mu}\left|\frac{\dfrac{d^{k_1}}{dx^{k_1}}(1+x)^{\tau_1}}{k_1!}\,\frac{\dfrac{d^k}{dy^k}(1+y)^{\tau}}{k!}\right|_{x=y=1}, \tag{45}$$

откуда следует далее, что

$$H_{k_1,\,k}<e^{n^{\frac{3}{4}}\mu}\cdot 2^{2(\tau_1+\tau)}<e^{\sigma_0 n^{\frac{3}{4}}\mu}, \tag{46}$$

так как $\tau_1+\tau<2\nu\mu$. Но тогда

$$H(\Delta(x)\cdot D(y))<(\tau+1)^{\tau+1}\,e^{\sigma_0 n^{\frac{7}{4}}\mu}<e^{\sigma_1 n^{\frac{7}{4}}\mu}. \tag{47}$$

Далее имеем:

$$R(x)\cdot T(y)=\frac{b_1}{a_1}\,\frac{b_2}{a_2}\,\Delta(x)\,D(y)=\frac{b}{a}\,\Delta(x)\,D(y), \tag{48}$$

$$(b,\,a)=1,$$

но коэффициенты $\Delta(x)\,D(y)$ — целые рациональные, а коэффициенты $R(x)$ и $T(y)$ — не только целые рациональные, но и не имеющие общего делителя. Поэтому $b=1$. Значит, имеют место неравенства

$$H_1 = H(R(x)) < e^{\sigma_1 n^{\frac{7}{4}}\mu}; \quad H_2 = H(T(y)) < e^{\sigma_1 n^{\frac{7}{4}}\mu}. \tag{49}$$

Покажем теперь, что $T(\zeta_1) \neq 0$. Действительно, если $T(\zeta_1)=0$, то тогда

$$T(y) = A(y)\cdot B(y),$$

где $A(y)$ — неприводимый многочлен высоты h и степени $s_0 \leqslant s$, которому ζ_1 удовлетворяет, а $B(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени не выше $\tau^2 - s_0$, высота которого не меньше единицы. По лемме III $h > cq_1^{\frac{1}{2}}$, а по лемме IV и условию (38)

$$H(T(y)) > 2^{-3\tau^2}h > e^{-3\nu^2 h^2} e^{\frac{1}{2\nu}n^2\mu} > e^{\sigma_3 n^2 \mu}, \quad \sigma_3 > 0. \tag{50}$$

Сопоставляя неравенства (49) и (50), мы видим, что при $n > n_0'(c, \nu, n_0)$ эти неравенства противоречивы и, значит, $T(\zeta_1) \neq 0$ при $n > n_0'$.

Из того, что $T(\zeta_1) \neq 0$ непосредственно следует, что числа $Q_1(\zeta_1), Q_2(\zeta_1), \ldots, Q_r(\zeta_1)$ в совокупности отличны от нуля.

Допустим теперь, что $P_x^{(\lambda)}(\zeta, \zeta_1) = 0$; $0 \leqslant \lambda \leqslant \left[\frac{\ln q_1}{\ln q}\right] + \tau + 1$. Тогда имеем систему уравнений:

$$P_1^{(\lambda)}(\zeta)\,Q_1(\zeta_1) + \ldots + P_r^{(\lambda)}(\zeta)\,Q_r(\zeta_1) = 0;$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \left[\frac{\ln q_1}{\ln q}\right] + \tau + 1.$$

Так как все $Q_i(\zeta_1)$ не могут быть равны нулю, то из этой системы следует, что

$$\Delta^{(\lambda)}(\zeta) = R^{(\lambda)}(\zeta) = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \left[\frac{\ln q_1}{\ln q}\right] = m. \tag{51}$$

Вследствие этого мы имеем представление

$$R(x) = A_1^{m+1}(x) \cdot B(x),$$

где $A_1(x)$ — неприводимый многочлен степени $s_1 \leqslant s$ и высоты h, которому удовлетворяет ζ, а $B(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степени не превосходящей $\tau\tau_1 - s_1(m+1)$.

По лемме III $h > cq^{\frac{1}{2}}$, а по лемме IV и условию (38)

$$H(R(x)) > \frac{2^{-3\tau\tau_1}}{2\tau_1\tau} c^{m+1} q^{\frac{m+1}{2}} > e^{\sigma_4 n^2 \mu}, \quad \sigma_4 > 0. \qquad (52)$$

Сопоставляя опять неравенства (49) и (52), мы непосредственно видим, что при $n > n_0''(n_0', c, \nu)$ они становятся противоречивыми.

Этим наша лемма полностью доказана.

Совершенно так же, без изменения хода рассуждения, с теми же самыми оценками, доказывается лемма VI′, являющаяся обобщением лемм V и VI.

Лемма VI′. *Пусть K — алгебраическое поле степени s, числа α и β принадлежат полю K_0, которое является расширением поля K от присоединения к нему алгебраического числа относительной степени ν, степень поля K_0 есть νs. Числа n, $q > e^{n^3}$, $q_1 \geqslant q$ — целые рациональные, η — действительное, $0 < \eta \leqslant \frac{\nu}{2}$. Тогда можно построить многочлен $P(x, y)$, коэффициенты которого будут целые числа поля K,*

$$P(x, y) = \sum_{k_1=0}^{\tau_1} \sum_{k=0}^{\tau} C_{k_1, k} x^{k_1} y^k,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\text{а)}\ \tau = \left[\sqrt{\frac{\nu\eta}{2}}(n + \sqrt{n})\right] - 1; \quad \tau_1 = \left[\frac{\nu}{2}\frac{n+\sqrt{n}}{\tau+1}\mu\right];$$

$$\text{б)}\ C_{k_1, k} = \sum_{1}^{s} C_{k_1, k, m}\omega_m; \quad |C_{k_1, k, m}| < e^{n^{\frac{3}{4}}\mu},$$

$$\mu = \left[\eta n \frac{\ln q_1}{\ln q}\right],$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — *базис кольца целых чисел поля* K;

в) $\dfrac{\partial^{k_1+k}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k}} P(\alpha, \beta) = 0, \qquad \dfrac{k_1}{\mu} + \dfrac{k}{n} < 1;$

г) *существует такое* λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\ln q_1}{\ln q} + \tau + 1$, *что* $\dfrac{\partial^{\lambda} P(\zeta, \zeta_1)}{\partial x^{\lambda}} \neq 0$, *где* ζ *и* ζ_1 — *два числа поля с мерами соответственно* q *и* q_1.

Заметим, наконец, что если α и β принадлежат полю, полученному от присоединения к полю Гаусса корня любого неприводимого в этом поле уравнения степени ν, то все предыдущие леммы просто останутся в силе, причем коэффициенты многочлена $P(x, y)$ в леммах V и VI следует выбирать в виде целых комплексных чисел поля Гаусса.

Аналогичная теорема будет иметь место и в более общем случае при замене поля Гаусса мнимым квадратичным полем.

§ 3. Основные теоремы

Доказанные леммы позволяют нам теперь доказать некоторые общие теоремы относительно аппроксимации алгебраических чисел. В этих теоремах числа α и β могут быть любыми, в частности рациональными, но степень поля K_0, к которому они принадлежат, предполагается не меньше 3.

Теорема 1. *Пусть* α *и* β — *два произвольных числа алгебраического поля* K_0 *степени* ν *(они могут и совпадать). Пусть также* ζ *и* ζ_1 *будут числами алгебраического поля* K, *меры которых относительно фиксированного базиса целых чисел этого поля* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ *будут соответственно* q *и* q_1, *а* ϑ *и* ϑ_1 — *две действительные постоянные* $2 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \nu$, $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *где* ε — *произвольно малое фиксированное число. Тогда, если неравенство*

$$|\alpha - \zeta| < q^{-s\vartheta} \tag{53}$$

будет иметь решение ζ *с мерой* $q > q'(K_0, K, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta)$, *то неравенство*

$$|\beta-\zeta_1| < q_1^{-s\vartheta_1} \tag{54}$$

не может иметь решений с мерой q_1 *при условии, что*

$$\ln q_1 \geqslant \left[\frac{\vartheta-1}{2(\sqrt{1+\varepsilon}-1)}+\delta\right]\ln q, \tag{55}$$

где δ — *любое, сколь угодно малое фиксированное число,* $\delta > 0$.

Этой теореме соответствует аналогичная теорема из $\wp$-адической области.

Пусть A — целый идеал некоторого поля алгебраических чисел, а α — число из этого поля. В дальнейшем мы условимся писать $\alpha \equiv 0 \pmod A$, если α можно представить в виде $\alpha=\frac{B}{C}$, где B и C — целые идеалы, причем идеал B делится на идеал A, а идеал C взаимно прост с идеалом A.

Пусть α и β принадлежат полю K_0 степени ν; ζ и ζ_1 принадлежат полю K степени s, а K_1 — поле степени $g \leqslant \nu s$, полученное из K путем присоединения к нему чисел α и β. Пусть $\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_\sigma$ будут идеалы поля K_1, все делители которых принадлежат соответственно различным простым рациональным числам $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$, а числа $f_1, f_2, \ldots, f_\sigma$ таковы, что p_i не делится на степень $\wp_i$ больше f_i. Пусть также попрежнему меры чисел ζ и ζ_1 по отношению к полю K будут q и q_1. Положим теперь

$$m_i=\left[\lambda_i s\vartheta f_i\frac{\ln q}{\ln p_i}\right], \quad m_i'=\left[\lambda_i s\vartheta_1 f_i\frac{\ln q_1}{\ln p_i}\right], \qquad i=1, \ldots, \sigma,$$

где все λ_i не меньше нуля и $\sum\limits_{i=1}^{\sigma}\lambda_i=1$, причем λ_i не зависят от q, q_1, n;

$$A_q=\prod_1^\sigma \wp^{m_i}, \quad A_{q_1}=\prod_1^\sigma \wp^{m_i'}.$$

Теорема II. *Сохраняя смысл обозначений теоремы* I, *можно утверждать, что если сравнение*

$$\alpha-\zeta\equiv 0\ (\operatorname{mod} A_q) \tag{56}$$

имеет решение при $q\geqslant q'(K_0, K, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta)$, *то сравнение*

$$\beta-\zeta_1\equiv 0\ (\operatorname{mod} A_{q_1}) \tag{57}$$

не может иметь решений при условии, что

$$\ln q_1\geqslant\left[\frac{\vartheta-1}{2(\sqrt{1+\varepsilon}-1)}+\delta\right]\ln q, \tag{58}$$

где $\delta>0$ *фиксировано, но сколь угодно мало.*

Сравнения (56) и (57), естественно, рассматриваются как сравнения в поле K_1. Естественно также, что ни один из делителей идеалов $\wp_1, \ldots, \wp_\sigma$ не входит в α ни в положительной, ни в отрицательной степени.

Во всех дальнейших доказательствах числа $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ будут зависеть только от $K, K_0, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta$ и не будут зависеть от n, q, q_1.

Доказательство теоремы I. Возьмем числа $\alpha, \beta, \zeta, \zeta_1, \vartheta, \vartheta_1\ \delta, \varepsilon$ и предположим, что они подчиняются всем условиям нашей теоремы, кроме одного, а именно, мы допустим, что $\ln q_1>\left[\frac{\vartheta-1}{2(\sqrt{1+\varepsilon}-1)}+\delta\right]\ln q$. По леммам V и VI, предполагая также, что $\ln q>n^3$, $n>n_1(K_0, K, \alpha, \beta)$, $\eta=\frac{\vartheta_1}{\vartheta}$, мы построим многочлен $P(x, y)$ и рассмотрим его производную порядка λ, которая отлична от нуля при $x=\zeta$, $y=\zeta_1$. Тогда

$$J=\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}P(\zeta, \zeta_1)=\sum_{k_1=\lambda}^{\tau_1}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{k_1!}{\lambda!\,(k_1-\lambda)}C_{k_1, k}\,\zeta^{k_1-\lambda}\zeta_1^k. \tag{59}$$

С другой стороны, по лемме V

$$J=\sum\frac{k_1!}{\lambda!\,(k_1-\lambda)!}\frac{\partial^{k_1+k}P(\alpha, \beta)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^k}\frac{(\zeta-\alpha)^{k_1-\lambda}}{k_1!}\frac{(\zeta_1-\beta)^k}{k!}, \tag{60}$$

$$\frac{k_1}{\mu}+\frac{k}{n}\geqslant 1,\quad k_1\geqslant\lambda.$$

Из этого последнего равенства, пользуясь оценкой (46), непосредственно получаем:

$$|J| < e^{\gamma_0 n^{\frac{3}{4}}\mu} \max_{\frac{k_1}{\mu}+\frac{k}{n}\geqslant 1} \left(|\alpha-\zeta|^{k_1-\lambda},\ |\beta-\zeta_1|^{k}\right), \tag{61}$$

и с помощью неравенств (53) и (54), что

$$|J| < e^{\gamma_0 n^{\frac{3}{4}}\mu} \max_{\frac{k_1}{\mu}+\frac{k}{n}\geqslant 1} \left(q^{-s\vartheta(k_1-\lambda)},\ q_1^{-s\vartheta_1 k}\right). \tag{62}$$

Преобразуя правую часть этого неравенства, пользуясь тем, что

$$\lambda \leqslant \left[\frac{\ln q_1}{\ln q}\right] + \tau + 1$$

и что при $r = \dfrac{\ln q_1}{\ln q}$,

$$\frac{1}{r} s\vartheta k_1 + s\vartheta_1 k \geqslant s\vartheta_1 n\left(\frac{k_1}{\mu+1}+\frac{k}{n}\right) > s\vartheta_1 n\left(1-\frac{2}{n}\right), \tag{63}$$

$$s\vartheta\lambda \ln q < ns\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta\vartheta_1}{2}}+\gamma_1 n^{-\frac{1}{2}}\right)\ln q_1; \qquad e^{\gamma_0 n^{\frac{3}{4}}\mu} < q_1^{\gamma_2 s n^{-1}},$$

мы будем окончательно иметь:

$$|J| < q_1^{-ns\left[\vartheta_1-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta\vartheta_1}{2}}-\gamma_3 n^{-\frac{1}{2}}\right]}. \tag{64}$$

Из соотношения (59), по лемме II, мы будем иметь, с другой стороны, что

$$|J| > q_1^{-s\tau} q^{-s(\tau_1-\lambda)} e^{-\gamma_5 n^{\frac{3}{4}}\mu}. \tag{65}$$

Отсюда, пользуясь неравенствами, аналогичными неравенствам (63), мы получим, что

$$|J| > q_1^{-sn\left[2\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}}-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}}+\gamma_4 n^{-\frac{1}{2}}\right]}. \tag{66}$$

Сопоставляя неравенства (66) и (64) и принимая во внимание, что

$$2\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}}-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}} < \vartheta_1-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta\vartheta_1}{2}}, \tag{67}$$

так как

$$\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon), \quad r = \frac{\ln q_1}{\ln q} \geqslant \frac{\vartheta - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta, \tag{68}$$

мы видим, что эти неравенства становятся противоречивыми при $n > n'(K, K_0, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta)$. Этим наша теорема доказана.

Доказательство теоремы II проводится так же, как и теоремы I.

По леммам V и VI, при тех же предположениях, что и в доказательстве теоремы I, строим многочлен $p(x, y)$. В дальнейшем $N(J)$ есть норма числа J в поле K.

Из представления (60), аналогично неравенству (61), мы получаем сравнение

$$N(J) \equiv 0 \pmod{p_1^{\eta_1} p_2^{\eta_2} \ldots p_\sigma^{\eta_\sigma}}, \tag{69}$$

где положено

$$\eta_i = \min_{\frac{k_1}{\mu} + \frac{k}{n} \geqslant 1} \left(\left[\lambda_i \vartheta_s \frac{\ln q}{\ln p_i} \right] (k_1 - \lambda) + \left[\lambda_i \vartheta_1 s \frac{\ln q_1}{\ln p_i} \right] k \right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, \sigma.$$

Число λ есть число, определяющееся по лемме VI, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$, как было уже определено, будут положительные числа, сумма которых равна единице.

Из сравнения (69) мы непосредственно получим, делая преобразования, аналогичные преобразованиям (62) и (63), что

$$N(J_1) \geqslant \prod_{i=1}^{\sigma} p_i^{\eta_i} > q_1^{ns\left[\vartheta_1 - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta\vartheta_1}{2}} + \gamma_s n^{-\frac{1}{2}}\right]}, \tag{70}$$

$$J_1 = \zeta''^{(\tau_1 - \lambda)} \zeta_1''^{\tau} J,$$

где положено

$$\zeta = \frac{\zeta'}{\zeta''}, \quad \zeta_1 = \frac{\zeta_1'}{\zeta_1''},$$

причем все величины $\zeta', \zeta'', \zeta_1', \zeta_1''$ будут целыми числами, а меры соответствующих представлений ζ и ζ_1 будут q

и q_1. Мы будем иметь прежде всего из представления (59), что

$$N(\zeta''^{(\tau_1-\lambda)}\zeta_1''^{\tau}J)=N(J_1)=$$
$$=N\left(\sum_{k_1=\lambda}^{\tau_1}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{k_1!}{\lambda!\,(k-\lambda)!}C_{k_1,k}\,\zeta^{k_1-\lambda}\zeta''^{\tau_1-\lambda}\zeta_1^{k}\zeta_1''^{\tau}\right). \qquad (71)$$

Пользуясь леммой II и оценками величин τ, τ_1, λ, q_1, q и $C_{k_1,k}$, мы из представления (71) будем иметь неравенство

$$N(J_1)<e^{\gamma_6 n^{\frac{3}{4}}\mu}\,q_1^{s\tau}\,q^{s(\tau_1-\lambda)} \qquad (72)$$

или, аналогично неравенству (66):

$$N(J_1)<q_1^{sn\left[2\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}}-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta_1}{2\vartheta}}+\gamma_7 n^{-\frac{1}{2}}\right]}. \qquad (73)$$

Но так как ζ'' и ζ_1'' — целые числа, то неравенство (70) нам дает, что

$$N(J_1)>q_1^{ns\left[\vartheta_1-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\nu\vartheta\vartheta_1}{2}}+\gamma_5 n^{-\frac{1}{2}}\right]}. \qquad (74)$$

Сопоставляя неравенства (73) и (74) и пользуясь неравенством (67) и соотношениями (68), мы опять получим, что при $n>n''(K, K_0, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta)$ наши неравенства противоречивы, что и доказывает теорему II. Полагая в наших теоремах, что $\alpha=\beta$ и $\vartheta_1=\vartheta$, мы получаем в этом частном случае теорему I′.

Теорема I′. *Неравенство*

$$|\alpha-\zeta|<q^{-s(\sqrt{2\nu}+\varepsilon)}, \qquad \varepsilon>0 \qquad (75)$$

и сравнение

$$\alpha-\zeta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ A_q), \quad A_q=\Pi\wp_i^{m_i}, \qquad (76)$$

где

$$m_i=\left[\lambda_i s f_i(\sqrt{2\nu+\varepsilon})\frac{\ln q}{\ln p_i}\right]; \qquad (77)$$

$$i=1, \ldots, \sigma;\ \sum\lambda_i=1;\ \lambda_i\geqslant 0,$$

а $\wp_i$ и f_i имеют прежние значения, те же, что и в теореме II, могут иметь только конечное число решений в числах ζ с мерой q поля K.

Совершенно так же, опираясь на лемму VI′, можно получить обобщения теорем I и II и, в частности, доказать теорему

Теорема I″. *Неравенство*

$$|\alpha-\zeta| < q^{-s(\sqrt{2\nu}+\varepsilon)}, \qquad \varepsilon > 0$$

и сравнение

$$\alpha-\zeta \equiv 0 \pmod{A_q}, \quad A_q = \prod_1^\sigma \wp_i^{m_i}$$

могут иметь только конечное число решений, если ζ — число поля K степени s, имеющее меру q, α — корень неприводимого в K уравнения степени ν с коэффициентами из этого поля, $\wp_1, \ldots, \wp_\sigma$ — идеалы поля K_0, полученного расширением поля K от присоединения к нему числа α, причем каждый идеал принадлежит одному простому рациональному числу, f_i — максимальная степень, в которой $\wp_i$ делит соответствующее простое p_i, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$ — любые фиксированные неотрицательные числа, $\sum_1^\sigma \lambda_i = 1$ и

$$m_i = \left[\lambda_i f_i (\sqrt{2\nu}+\varepsilon)\frac{\ln q}{\ln p_i}\right].$$

Число α фиксировано, ζ — переменное.

Доказательство этой теоремы повторяет полностью доказательство теорем I и II в частном случае $\vartheta = \vartheta_1$ и $\alpha = \beta$.

Основываясь на замечании относительно возможности расэматривать в леммах V и VI корни неприводимых в поле Гаусса уравнений без изменения формулировок этих лемм, можно также доказать теорему I‴.

Теорема I‴. *Формулировка теоремы останется без изменения, если α — число поля степени ν относительно поля Гаусса, а ζ — число степени s относительно того же поля Гаусса, простые идеалы $\wp_i$ определены* *попрежнему, число* f_i *есть наибольшая степень идеала* $\wp_i$, *на которую может делиться простое число гауссова поля, мера* q *числа* ζ *берется относительно базиса* $\omega_1 \ldots, \omega_s$ *в гауссовом поле, и, наконец,*

$$m_i = \left[\lambda_i f_i (\sqrt{2\nu}+\varepsilon)\frac{\ln q}{\ln|p_i|}\right], \quad i=1, 2, \ldots, \sigma.$$

Доказательство этой теоремы есть полное повторение доказательств теорем I и II, опять в частном случае $\alpha=\beta$ и $\vartheta=\vartheta_1$.

Следствием уже доказанных теорем являются две теоремы о приближениях алгебраических иррациональностей числами, состоящими из степеней одних и тех же заданных алгебраических чисел.

Будем называть алгебраические числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *мультипликативно-независимыми*, если соотношение

$$\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_n^{x_n} = 1$$

при целых рациональных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ возможно тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема III. *Пусть* $\alpha, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — *алгебраические числа поля* K_0 *и* $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ — *мультипликативно-независимы. Тогда неравенство*

$$|\alpha-\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_s^{x_s}| < e^{-\varepsilon x}, \quad x = \max_{1\leqslant i\leqslant s}|x_i| \tag{78}$$

и сравнение

$$\alpha \equiv \zeta_1^{y_1} \ldots \zeta_s^{y_s} (\operatorname{mod} \wp^m), \quad m=[\delta y], \quad y = \max_{1\leqslant i\leqslant s}|y_i|, \tag{79}$$

как бы ни были малы заданные числа $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *могут иметь только конечное число решений в целых рациональных числах* $x_1, \ldots, x_s$ *и* $y_1, \ldots, y_s$, $\wp$ — *есть простой идеал поля* K_0.

Доказательство. Для упрощения мы можем предположить, без нарушения общности доказательства, что простой идеал $\wp$ не входит в α ни в положительной, ни в отрицательной степени.

Будем считать также, что $\wp$ есть делитель простого числа p.

Для доказательства первой части нашей теоремы допустим, что неравенство (78) имеет бесчисленное множество решений

$$\psi_k = \zeta_1^{x_1^{(k)}} \ldots \zeta_s^{x_s^{(k)}}, \quad x^{(k)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i^{(k)}|, \tag{80}$$

которые мы будем считать расположенными в порядке возрастания чисел $x^{(k)}$.

Меры чисел ψ_k должны неограниченно расти (мы фиксируем какой-либо целочисленный базис поля K) с ростом чисел $x^{(k)}$, так как в противном случае в последовательности чисел ψ_k были бы одинаковые, что привело бы к мультипликативной зависимости чисел $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$.

Возьмем любое сколь угодно большое целое число N и рассмотрим сравнения

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k)} \equiv a_1^{(k)} \pmod N, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s^{(k)} \equiv a_s^{(k)} \pmod N, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant a_i < N. \tag{81}$$

Различных совокупностей чисел $a_1^{(k)}, \ldots, a_s^{(k)}$ не более N^s, а числа k пробегают весь натуральный ряд. Поэтому хотя бы одна совокупность остатков должна повторяться бесчисленное множество раз.

Возьмем теперь только те решения неравенства (78), в которых $x_1, \ldots, x_s$ имеют одни и те же остатки при делении на N. Таких решений будет бесчисленное множество, и они будут иметь вид:

$$\left[\zeta_1^{z_1^{(k)}} \ldots \zeta_s^{z_s^{(k)}}\right]^N \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_s^{a_s} = \sigma\eta_k^N \tag{82}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i^{(k)}| = z^{(k)} \leqslant \frac{x^{(k)}}{N} - \vartheta_k, \qquad 0 \leqslant \vartheta_k \leqslant 1.$$

Заметим, что мера числа η

$$\eta = \zeta_1^{z_1} \zeta_2^{z_2} \ldots \zeta_s^{z_s}, \quad z = \max |z_i|, \tag{83}$$

не превосходит числа $e^{\gamma_0 z}$, где γ_0 зависит только от поля K, выбранного в нем целочисленного базиса и чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\ldots, \zeta_s$.

Для последовательности решений (82) неравенство (78) примет вид

$$|\alpha' - \eta^N| < \frac{1}{|\sigma|} e^{-\varepsilon N z}, \quad \eta = \zeta_1^{z_1} \ldots \zeta_s^{z_s}, \quad z = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i|, \tag{84}$$

где σ фиксировано, а $\alpha' = \frac{\alpha}{\sigma}$. Это неравенство должно, как мы установили, иметь бесчисленное множество решений в целых рациональных числах $z_1, \ldots, z_s$. Неравенство (84) может быть переписано так:

$$\prod_{1}^{N} \left|\eta - \omega_k \alpha'^{\frac{1}{N}}\right| < \frac{1}{|\sigma|} e^{-\varepsilon N z}, \tag{85}$$

где $\alpha'^{\frac{1}{N}}$ есть какой-либо корень N-й степени из числа α', а $\omega_1, \ldots, \omega_N$ есть все корни N-й степени из единицы.

Для каждого из решений этого последнего неравенства один, по крайней мере, из сомножителей будет минимальным по величине. Для этого сомножителя, так как он наименьший,

$$|\alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_n - \eta| < |\sigma|^{-\frac{1}{N}} e^{-\varepsilon z}. \tag{86}$$

В силу этого для всякого $k \neq n$

$$|\alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_k - \eta| \geqslant |\alpha'^{\frac{1}{N}}| \, |\omega_n - \omega_k| - |\alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_n - \eta| >$$
$$> 2 \sin\frac{\pi}{N} |\alpha'^{\frac{1}{N}}| - \sigma^{-\frac{1}{N}} e^{-\varepsilon z}, \tag{87}$$

откуда окончательно получим, что

$$|\alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_k - \eta| > \sin\frac{\pi}{N} |\alpha'^{\frac{1}{N}}|, \qquad k \neq n \tag{88}$$

при $z \geqslant z_0(N)$.

Сопоставляя неравенства (85) и (88), мы получим, что для всякого решения η неравенства (85), при достаточно большом z, будет существовать свое n, при котором выполняется неравенство

$$|\alpha'^{\frac{1}{N}}\omega_n - \eta| < \frac{e^{-\varepsilon N z}}{|\sigma|\,|\alpha'|^{1-\frac{1}{N}}\sin^{N-1}\frac{\pi}{N}} < Ae^{-\varepsilon N z}. \tag{89}$$

Так как неравенство (85) имеет бесчисленное множество решений, а n может принимать только N значений, то для бесчисленного множества решений n одно и то же. Полагая при этом n

$$\alpha'^{\frac{1}{N}}\omega_n = \beta, \tag{90}$$

мы приходим к тому, что неравенство

$$|\beta - \eta| < Ae^{-\varepsilon N z} < e^{-\frac{\varepsilon}{2}Nz}, \quad z > z_1(N, A), \tag{91}$$

имеет бесчисленное множество решений.

Предположим для определенности, что степень поля K, к которому принадлежат числа $\alpha, \zeta_1, \ldots, \zeta_s$, будет μ. Тогда, очевидно, степень ν поля K_1, к которому должно принадлежать β, не превзойдет числа μN. Так как мера η не превосходит $e^{\gamma_0 z}$, то неравенство (91) может быть окончательно переписано так:

$$|\beta - \eta| < q^{-\frac{\varepsilon}{2\gamma_0}N}, \tag{92}$$

где q — мера η в поле K. Но по теореме I′ неравенство

$$|\beta - \eta| < q^{-\mu(\sqrt{2\nu}+1)} \tag{93}$$

может иметь лишь конечное число решений при любых числах η поля K с мерой q. Так как N — любое целое число, то, взяв N удовлетворяющим неравенству

$$N > \frac{32\gamma_0^2\mu^3}{\varepsilon^2},$$

мы получим, что будут справедливы неравенства

$$\frac{\varepsilon}{2\gamma_0}N > 2\mu\sqrt{2\mu N} > \mu(\sqrt{2\mu N}+1) \geqslant \mu(\sqrt{2\nu}+1), \tag{94}$$

откуда следует, что неравенство (92) имеет только конечное число решений. Так как мы пришли к противоречию, то первое утверждение теоремы III нами доказано.

Для доказательства второго утверждения нашей теоремы мы опять берем любое сколь угодно большое $N > p$ простое и выбираем из последовательности решений сравнения (79), которую мы предполагаем бесконечной, бесконечную подпоследовательность таких решений, у которых соответствующие $x_1, \ldots, x_s$ дают одни и те же остатки $a_1, \ldots, a_s$ при делении на N. Мы получим тогда из сравнения (79), что сравнение

$$\alpha' - \eta^N \equiv 0 \pmod{\wp^m}, \quad m = [\delta N z], \tag{95}$$

где положено

$$\eta = \zeta_1^{z_1} \ldots \zeta_s^{z_s}, \quad \alpha' = \alpha\zeta_1^{-a_1} \ldots \zeta_s^{-a_s}, \quad z = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |z_i|, \tag{96}$$

имеет бесконечное число решений. Заметим, что α' взаимно просто с простым идеалом $\wp$, так как этот идеал не входит, что можно допустить без нарушения общности, ни в одно из ζ.

Допустим обратное, именно, что простой идеал $\wp$ входит в состав $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$; другими словами, что

$$\zeta_1 = \lambda_1 \wp^{\tau_1}, \ \ldots, \ \zeta_k = \lambda_k \wp^{\tau_k}, \tag{97}$$

и не входит ни в какое другое ζ.

Из сравнения (79) и того обстоятельства, что $\wp$ не входит в α, следует, что $\wp$ ни для какого решения этого сравнения не входит в число

$$\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_k^{x_k} = \lambda_1^{x_1} \ldots \lambda_k^{x_k} \wp^{x_1\tau_1 + \ldots + x_k\tau_k}, \tag{98}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — некоторые идеалы, в которые $\wp$ не входит. Из равенства (98) следует, что для всякого решения сравнения (79) выполняется соотношение

$$x_1\tau_1 + \ldots + x_k\tau_k = 0. \tag{99}$$

Не всегда найдется целое число n, такое, что идеалы $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n$ будут главными. Выбирая из решений сравнения такую бесконечную подпоследовательность, для которых $x_1, \ldots, x_k$ будут давать при делении на n одни и те же остатки $a_1, \ldots, a_k$, мы будем иметь для этих решений, что

$$\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_k^{x_k} = \lambda_1^{nz_1} \ldots \lambda_k^{nz_k} \zeta_0, \qquad \zeta_0 = \lambda_1^{a_1} \ldots \lambda_k^{a_k}. \tag{100}$$

Полагая $\lambda_1^n = \zeta_1', \ldots, \lambda_k^n = \zeta_k'$ и замечая, что ζ_0 есть алгебраическое число, мы опять приходим к сравнению типа (79) с $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$, в которые $\wp$ не входит, и $\alpha = \alpha'\zeta_0^{-1}$.

Возвратимся теперь к сравнению (95). Числа $\alpha, \zeta_1, \ldots, \zeta_s$ и простой идеал $\wp$ принадлежат полю K_0 степени μ_0. Пусть p — рациональное простое число, которое делится на $\wp$, а f_0 — наибольшая степень $\wp$, на которую может делиться p. Обозначим $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ корни N-й степени из единицы, и пусть $K_1, \ldots, K_N$ будут алгебраические поля, образованные присоединением к полю K_0, соответственно, чисел

$$\alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_1, \ \ldots, \ \alpha'^{\frac{1}{N}} \omega_N.$$

Все поля $K_1, \ldots, K_N$ будут относительно сопряженными полями. Число N, которое предположено сколь угодно большим, простым и большим p, естественно, бесчисленным числом способов может быть выбрано так, чтобы степень поля K_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, была равна $\mu_0 N$, где μ_0 степень K_0. В поле K_i простой идеал $\wp$ будет иметь представление

$$\wp = \wp_{1,i}^{f_1} \ldots \wp_{\sigma,i}^{f_\sigma}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где $\wp_{1,i}, \ldots, \wp_{\sigma,i}$ будут простыми идеалами поля K_i. В поле K_1 сравнение (95) примет вид

$$(\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta)(\alpha'^{\frac{N-1}{N}} + \eta\alpha'^{\frac{N-2}{N}} + \ldots + \eta^{N-1}) \equiv \\ \equiv 0 \bmod \wp_{1,0}^{f_1 m}, \ldots, \wp_{\sigma,0}^{f_\sigma m}. \tag{101}$$

Если $\wp_0$ — один из простых идеалов модуля сравнения, то делиться на него может только один из множителей левой части этого сравнения. Действительно, допустив обратное, мы тем самым допустим, что имеют место одновременно два сравнения

$$\left.\begin{aligned} \alpha'^{\frac{1}{N}} &\equiv \eta \bmod \wp_0, \\ \alpha'^{\frac{N-1}{N}} + \eta\alpha'^{\frac{N-2}{N}} + \ldots + \eta^{N-1} &\equiv 0 \bmod \wp_0. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Исключая η из обоих сравнений, мы получим сравнение

$$N\alpha'^{\frac{N-1}{N}} \equiv 0 \bmod \wp_0. \qquad (103)$$

Это последнее сравнение невозможно, так как $\wp_0$ есть делитель $\wp$, $\wp$ делит p, а числа N и норма α' не делятся на p по условию.

Если мы допустим, что

$$\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta \not\equiv 0 \bmod \wp_{i,1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \sigma, \qquad (104)$$

то отсюда в каждом относительно сопряженном поле будет следовать, что

$$\alpha'^{\frac{1}{N}}\omega_k - \eta \not\equiv \bmod \wp_{i,k}; \quad 1 \leqslant i \leqslant \sigma, \quad 1 < k \leqslant N. \qquad (105)$$

Но из невозможности сравнений должно следовать, что и

$$N_{K_0}(\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta) = \alpha' - \eta^N \not\equiv 0 \bmod \wp, \qquad (106)$$

где N_{K_0} — относительная норма числа $\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta$ в поле K_0. Значит, хотя бы для одного значения i должно иметь место сравнение

$$\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta \equiv 0 \bmod \wp_{i,0}^{f_i m}. \qquad (107)$$

Окончательно полагая $\wp_{i,0} = \wp_0$, $f_i = f_1$, мы будем иметь сравнение

$$\alpha'^{\frac{1}{N}} - \eta \equiv 0 \bmod \wp_0^{f_1 m}, \quad m = \left[\frac{\varepsilon N}{\gamma_0}\ln q\right], \qquad (108)$$

где $\wp_0$ входит в $\wp$ в степени f_1, q — мера числа η, $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Очевидно, что в зависимости от η

может меняться этот простой идеал $\wp_0$. Но так как сравнение (98), по предположению, имеет бесчисленное множество решений, то можно выбрать такую бесконечную подпоследовательность этих решений, для которой $\wp_0$ — одно и то же, так как $\wp_0$ может принимать не более σ значений. В дальнейшем будем иметь дело только с этими решениями. Мы получаем, таким образом, из предположения о бесконечности числа решений сравнения (95) существование бесконечного числа решений сравнения (108) при одном и том же фиксированном $\wp_0$.

Так как простой идеал $\wp$ в поле K_0 входит в простое число p в степени f_0, а простой идеал $\wp_0$ входит в идеал $\wp$ в поле K_1 в степени f_1, то простой идеал $\wp_0$ в поле K_1 входит в простое число p в степени $f=f_0f_1$.

Так как степень поля K_0 есть μ_0, а степень ν поля K_1 не превосходит $N\mu_0$, $\nu \leqslant N\mu_0$, то по теореме I′, полагая в ней $\sigma=\lambda_1=\varepsilon=1$, мы получим, что сравнение

$$\alpha'^{\frac{1}{N}}\omega_1-\eta\equiv 0 \bmod \wp_0^{\left[\vartheta\mu_0 f\frac{\ln q}{\ln p}\right]}, \tag{109}$$

где $\vartheta=\sqrt{2\nu}+1\leqslant\sqrt{2\mu_0N}+1$, может иметь только конечное число решений в числах η поля K, если мера η по отношению к выбранному целочисленному базису поля K_0 есть q. Но взяв N достаточно большим,

$$N>\frac{\gamma_0^2\,(2\ln p+3\mu_0^{3/2}f_0)^2}{\varepsilon^2\ln^2 p},\qquad N>p,\qquad N\not\equiv 0 \bmod p,$$

мы легко получим, что

$$f_1\left[\frac{\varepsilon N}{\gamma_0}\ln q\right]>\left[\vartheta\mu_0 f_0 f_1\frac{\ln q}{\ln p}\right],$$

откуда следует, что сравнение (108) имеет только конечное число решений.

Так как мы пришли к противоречию, то тем самым второе утверждение теоремы III доказано.

Основная идея доказательства первой части теоремы III принадлежит К. Малеру, который доказал частный случай первой части теоремы III, именно, когда α — алгебраическое, а все $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ — рациональные числа.

Из теоремы III можно легко получить две теоремы о степени приближения к нулю линейных форм с целыми рациональными коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел.

Теорема IV. *Если алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ мультипликативно-независимы, неравенство*

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_s \ln \alpha_s| < e^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0, \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|, \tag{110}$$

где все $x_1, \ldots, x_s$ — целые рациональные числа, а число $\ln \alpha$ может быть любым, но фиксированным значением логарифма, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Доказательство. Действительно, если бы неравенство (110) имело бесчисленное множество решений, то, как легко видеть, и неравенство

$$|1 - \alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_s^{x_s}| = \left| 1 - e^{\sum_1^s x_k \ln \alpha_k} \right| < 2e^{-\varepsilon x}, \tag{111}$$

имело бы также бесконечное число решений, что невозможно по теореме III.

Теорема V. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — алгебраические мультипликативно-независимые числа и их логарифмы определены в $\mathfrak{P}$-адическом расширении того поля K, к которому они все принадлежат, то неравенство*

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_s \ln \alpha_s|_{\mathfrak{P}} < p^m, \quad m = [\varepsilon x], \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|, \tag{112}$$

может иметь лишь конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Доказательство. Действительно, если бы это неравенство имело бесчисленное множество решений, то и сравнение (79) теоремы III, как легко видеть, имело бы бесчисленное множество решений, что невозможно.

В частном случае, для $s = 2$ автором монографии была доказана теорема более точная, чем теорема IV: неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + x_2 \ln \alpha_2| < e^{-\ln^{2+\varepsilon} x} \tag{113}$$

имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах x_1, x_2.

Аналогичная теорема для $s=2$ была доказана и для случая теоремы V.

Доказательство этих теорем опиралось не на метод Туэ, а на другой, эффективный метод, который позволяет, например, установить верхнюю границу, в виде функции α_1, α_2 и ε, величины возможных решений неравенства (113). Этот метод будет изложен в главе III.

Из теоремы III также непосредственно следует теорема VI.

Теорема VI. *Если $\alpha, \eta_1, \ldots, \eta_\nu$ — фиксированные числа алгебраического поля K_1, $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ — мультипликативно-независимы, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ — любые целые идеалы этого поля, каждый из которых не есть единица, то сравнения*

$$\alpha-\eta_1^{x_1}\ldots\eta_\nu^{x_\nu}\equiv 0 \mod \zeta_1^{m_1}\ldots\zeta_s^{m_s},\ m_i=[\lambda_i\varepsilon x],\ \varepsilon>0, \quad (114)$$

где $x=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant\nu}|x_i|$, числа λ_i не отрицательны и $\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i=1$, причем λ_i любые и могут быть в некотором количестве равны нулю, имеют лишь конечное число решений в целых числах $x_1, \ldots, x_\nu$ в своей совокупности.

В противном случае, при наличии бесконечного множества решений у совокупности сравнений (114), очевидно, найдется бесконечная подпоследовательность этих решений, для которой какое-то одно определенное λ_n все время будет не меньше $\frac{1}{s}$ и мы придем к теореме III.

§ 4. Приложения основных теорем

Условимся говорить, что система однородных форм $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, $\ldots$, $P_n(x, y)$, имеющих степени соответственно $m_1, \ldots, m_n$, удовлетворяет условиям (A_ν), если выполнены следующие условия: все наши формы суть не имеющие линейных делителей в поле рациональных чисел многочлены степени выше первой с целыми рациональными коэффициентами, и каждый действительный корень уравнения $t^{-m_k}P_k(t, tx)=0$ принадлежит к алгебраическому полю K степени не выше ν, и эти корни различны между собой в каждом $P(x, y)$. Будем также называть степенью произвольного многочлена $2n$ переменных $P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ совокупность чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_i есть степень многочлена P по совокупности переменных x_i и y_i, другими словами, максимум k_1+k_2 для всех членов $x_i^{k_1}y_i^{k_2}$, входящих в состав P.

Теорема VII. *Уравнение*

$$P_1(x_1, y_1) \ldots P_n(x_n, y_n) = P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), \tag{115}$$

где система многочленов $P_1, \ldots, P_n$ степеней, соответственно $p_1, \ldots, p_n$, подчиняется условию (A_ν), степень многочлена P есть $(s_1, \ldots, s_n)$ и выполняются неравенства $p_k - s_k \geqslant \vartheta$, $k=1, 2, \ldots, n$, не может иметь бесчисленное множество решений в целых числах $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, если только $\vartheta = \sqrt{2\nu}+\varepsilon$, где $\nu \geqslant 3$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Допустим, что наше уравнение имеет бесчисленное множество решений. Естественно, здесь идет речь о решениях таких, что

$$(x_1^2+y_1^2) \ldots (x_n^2+y_n^2) \neq 0. \tag{116}$$

Рассмотрим уравнение (115). Для каждого его решения будет иметь место определенная система неравенств

$$|x_1| \lesseqgtr |y_1|, \ \ldots, \ |x_n| \gtreqless |y_n|. \tag{117}$$

Так как таких систем неравенств будет только 2^n, а число решений бесконечно, то существует бесчисленное множество решений, для которых справедлива одна какая-нибудь система. Поменяв соответствующим образом местами x и y, мы получим бесконечную систему решений такую, что $|y_1| \leqslant |x_1|, \ldots, |y_n| \leqslant |x_n|$. Поэтому мы можем допустить с самого начала существование бесконечного множества таких решений уравнения (115) и будем рассматривать в дальнейшем только эти решения. Если $P(x, y)$ — однородный многочлен с различными корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $|x| \geqslant |y|$, то, как легко видеть,

$$|P(x \cdot y)| > c\left|\alpha - \frac{y}{x}\right| |x|^n, \tag{118}$$

где n — степень многочлена, c не зависит от x и y, а α — тот из корней многочлена, для которого величина $|x\alpha - y|$ будет наименьшей. В силу этого соображения для каждого решения уравнения (115) будет иметь место благодаря условиям нашей теоремы неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\alpha_k - \frac{y_k}{x_k}\right| < C\left|\frac{P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}}\right| < \frac{c}{|x_1 x_2 \ldots x_n|^{\vartheta}}, \quad (119)$$

где c не зависит от $x_1, \ldots, x_n$, а α_k есть один из корней многочлена $P_k(x, y)$.

Так как число решений неравенства (119) бесконечно велико, то $|x_1|, \ldots, |x_n|$ в своей совокупности должны неограниченно расти. Поэтому можно выбрать бесконечную подпоследовательность решений (119), в которой какое-то из $|x|$, пусть это будет $|x_k|$, монотонно возрастает. Из этой подпоследовательности можно в свою очередь выбрать бесконечную подпоследовательность, в которой или все остальные $|x_i|$ имеют одно и то же значение a, или еще какое-то $|x_{k_1}|$ будет монотонно возрастать. Продолжая этот процесс, который имеет не более n шагов, мы придем к подпоследовательности, и притом бесконечной, решений (119), в которой $|x_k|, |x_{k_1}|, \ldots, |x_{k_{s-1}}|$ монотонно возрастают, а остальные значения $x_q = a$.

Меняя номера у чисел α, x, y, мы таким образом из неравенства (119) получим неравенство, имеющее бесконечное число решений

$$\prod_{k=1}^{s}\left|\alpha_k - \frac{y_k}{x_k}\right| \prod_{k=s+1}^{n}\left|\alpha_k - \frac{y_k}{x_k}\right| < \frac{c}{a^{(n-s)\vartheta}\,|x_1 \ldots x_s|^{\vartheta}}. \quad (120)$$

Но все α иррациональные, а каждое y, $|y| < |a|$ может принимать не более $2|a|+1$ значений. Поэтому для любой системы $y_{s+1}, \ldots, y_n$

$$\prod_{s+1}^{n}\left|\alpha_k - \frac{y_k}{a}\right| \geqslant d > 0, \quad (121)$$

где d — постоянная.

Отсюда следует неравенство

$$\prod_{k=1}^{s}\left|\alpha_k-\frac{y_k}{x_k}\right|<\frac{c_1}{|x_1\ldots x_s|^{\vartheta}}, \qquad (122)$$

имеющее бесконечное число решений и в котором все $|x_1|, \ldots, |x_s|$ монотонно растут. Из этого следует, что для всякой системы решений верно хотя бы одно из неравенств

$$\left|\alpha_k-\frac{y_k}{x_k}\right|\leqslant\frac{c^{\frac{1}{s}}}{|x_k|^{\vartheta}}. \qquad (123)$$

Но совокупность чисел α_k может иметь не более $p_1\ldots p_n$ значений, а решений неравенства (122) бесчисленное множество. Значит, хотя бы для одного из корней наших многочленов α неравенство (ν — степень α)

$$\left|\alpha_k-\frac{y_k}{x_k}\right|<\frac{c_0}{|x_k|^{\vartheta}}, \qquad \vartheta=\sqrt{2\nu}+\varepsilon, \qquad (124)$$

имеет бесчисленное множество решений. Но из теоремы I′, если положить в ней $s=1$, следует, что это неравенство имеет только конечное число решений и наша теорема доказана при $\nu\geqslant 3$. Когда $\nu=2$, невозможность существования бесчисленного множества решений (124) очевидна.

Теорема VIII. *Пусть числа* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, \eta_1, \ldots, \eta_p$ *будут целыми числами поля* K, *ни одно из них не будет алгебраической единицей*, A, B, C, $ABC\neq 0$ *будут числами того же поля, числа*

$$\zeta=\zeta_1\ldots\zeta_n, \quad \psi=\psi_1\ldots\psi_m, \quad \eta=\eta_1\ldots\eta_p \qquad (125)$$

будут взаимно просты. Тогда уравнение

$$A\zeta_1^{x_1}\ldots\zeta_n^{x_n}+B\psi_1^{y_1}\ldots\psi_m^{y_m}+C\eta_1^{z_1}\ldots\eta_p^{z_p}=0 \qquad (126)$$

может иметь только конечное число решений в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p$.

Доказательство. Действительно, допустим, что это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Мы можем выбрать из них тогда такую бесконечную подпоследовательность, в которой одно и то же переменное, например z_1, будет в данном решении не меньше всех остальных. Из уравнения (126) мы будем тогда иметь сравнение

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{\psi_1^{y_1} \ldots \psi_m^{y_m}}{\zeta_1^{x_1} \ldots \zeta_n^{x_n}} \left(\operatorname{mod} \frac{C}{B}\, \eta_1^{z_1}\right). \tag{127}$$

Но это сравнение может иметь только конечное число решений по теореме III. Этим наша теорема доказана.

Неравенство (110) дает возможность дать новое доказательство конечности числа одноклассных полей.

Теорема IX. *Верхняя граница модулей фундаментальных дискриминантов $-D<0$, для которых поле $K(\sqrt{-D})$ имеет один класс идеалов, конечна.*

Приведем краткое доказательство этой теоремы. Пусть $D>163$ — фундаментальный одноклассный дискриминант. Хорошо известно, что D — простое число. Рассмотрим примитивный действительный характер модуля D, обозначив его $\chi(n)$. Тогда $\chi(-1)=-1$. Пусть $D_1<D^{\frac{1}{3}}$ — какое-нибудь простое число, а $\chi_1(n)$ — действительный характер модуля D_1. Тогда будет иметь место соотношение

$$L(s, \chi_1)\, L(s, \chi_1\chi) = \zeta(2s)\left(1-\frac{1}{D_1^{2s}}\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{D_1}\,\frac{D_1^2-D_1^{2s}}{D_1^{2s}}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s}\zeta(2s-1)+R(s), \tag{128}$$

где $|R(s)|<e^{-c_1\frac{D^{\frac{1}{2}}}{D_1}}$ при $|s|<3$ (в дальнейшем $c_1, c_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ — эффективно вычисляемые положительные постоянные). Соотношение (128) есть непосредственное обобщение формулы М. Деуринга (M. Deuring) с заменой $\zeta(s)\,L(s, \chi)=\frac{1}{2}\zeta_Q(s)$ на $L(s, \chi_1)\,L(s, \chi_1\chi)$.

Положив в (128) $s=1$ и воспользовавшись хорошо известными соотношениями

$$\lim_{s\to 1}(D_1^2-D_1^{2s})\,\zeta(2s-1) = -D_1^2 \ln D_1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

мы получим, что

$$L(1, \chi_1) L(1, \chi_1\chi) = \zeta(2)\left(1 - \frac{1}{D_1^2}\right) - \frac{2\pi \ln D_1}{D_1 \sqrt{D}} + R_1, \quad (129)$$

где $|R_1| < e^{-c_1 \frac{D^{\frac{1}{2}}}{D_1}}$.

Отсюда, деля на $L(1, \chi_1) = c_2$, находим нужную для дальнейшего оценку

$$|L(1, \chi_1\chi)| < K_1. \quad (130)$$

Для исключения множителя $\zeta(2)$ берем $D_2 < D^{\frac{1}{3}}$, $D_2 \neq D_1$, пишем для этого числа D_2 равенство, аналогичное (129), умножаем его и равенство (129) соответственно на $\left(1 - \frac{1}{D_1^2}\right)$ и $\left(1 - \frac{1}{D_2^2}\right)$ и вычитаем полученные соотношения одно из другого. Мы будем иметь тогда, что

$$\left(1 - \frac{1}{D_2^2}\right) L(1, \chi_1) L(1, \chi_1\chi) - \left(1 - \frac{1}{D_1^2}\right) L(1, \chi_2) L(1, \chi_2\chi) =$$
$$= \frac{2\pi}{D_2}\left(1 - \frac{1}{D_1^2}\right) \frac{\ln D_2}{\sqrt{D}} - \frac{2\pi}{D_1}\left(1 - \frac{1}{D_2^2}\right) \frac{\ln D_1}{\sqrt{D}} + R_3, \quad (131)$$
$$|R_3| \leqslant |R_2| + |R_1|.$$

Будем считать теперь D_1 и D_2 фиксированными, $D_1 < k_2$, $D_2 < k_2$ и притом такими, что $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = 1$ (например, $D_1 = 5$, $D_2 = 13$). Воспользуемся теперь хорошо известными в теории чисел соотношениями

$$L(1, \chi_1\chi) = \frac{\pi}{2\sqrt{DD_1}} H_1, \quad L(1, \chi_2\chi) = \frac{\pi}{2\sqrt{DD_2}} H_2,$$

где H_1 и H_2 — целые рациональные и удовлетворяющие вследствие (130) неравенствам

$$|H_i| < k_3 \sqrt{D}, \qquad i = 1, 2. \quad (132)$$

Далее, если $\alpha_i = t_i + u_i \sqrt{D}$ — основные пеллевские единицы полей $K(\sqrt{D_i})$ $i = 1, 2$, то, как известно,

$$L(1, \chi_i) = \frac{h_i \ln \alpha_i}{2\sqrt{D_i}}; \qquad 0 < h_i < k_4, \quad i = 1, 2,$$

где h_i — целые числа.

Подставляя полученные для значений функций L выражения в соотношение (131), сокращая равенство на $\frac{\pi}{\sqrt{D}}$ и умножая его на общий целый рациональный знаменатель, мы приходим к неравенству

$$|x_1 \ln \alpha_1 + x_2 \ln \alpha_2 + x_3 \ln \alpha_3| < e^{-c_3 \sqrt{D}}, \tag{133}$$

где α_1 и α_2 — фиксированные алгебраические числа, α_3 — рациональное число с абсолютно ограниченными числителем и знаменателем и x_1, x_2, x_3 — целые рациональные числа,

$$|x_i| < k_5 \sqrt{D}, \qquad i = 1,\ 2, \quad |x_3| < k_5, \tag{134}$$

причем c_3 и k_5 не зависят от D.

Предполагая, что D может принимать сколь угодно большие значения, мы придем в противоречие с теоремой IV, что и доказывает теорему IX.

В заключение этой главы можно отметить, что признаки трансцендентности числа, опирающиеся на характер приближения числа рациональными дробями или алгебраическими числами, могут быть непосредственно использованы только для доказательства трансцендентности чисел, представляющихся быстро сходящимися рядами, члены которых обладают достаточно хорошими арифметическими свойствами. Для доказательства трансцендентности чисел, определяемых как значения аналитических функций при алгебраических значениях аргумента необходимы уже достаточно сложные аналитические методы, к изложению которых мы и переходим в следующих главах.

Ввиду конструктивной сложности этих методов каждый раз их точному изложению будет предпосылаться краткая схема структуры соответствующего рассуждения, что, как мы считаем, должно облегчить понимание основных идей метода.

ГЛАВА II

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ТЕЙЛОРА КОТОРЫХ ИМЕЮТ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

§ 1. Введение. Теоремы Эрмита и Линдемана

Как уже говорилось выше (§ 1 гл. I), впервые Л. Эйлер поставил ряд вопросов о трансцендентности, другими словами о неалгебраичности, некоторых общих классов чисел. Примеры трансцендентных чисел были построены впервые благодаря неравенству Лиувилля

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^{\nu}}, \qquad (p,\ q)=1,$$

где α—алгебраическое степени ν, а c не зависит от q.

Уже давно, задолго до работы Лиувилля, стояли вопросы об арифметической природе классических констант e и π. Вопрос об арифметической природе числа π был тем более интересен, что от арифметической природы числа π зависело положительное или отрицательное решение проблемы квадратуры круга, которой занималась еще древнегреческая математика. Проблема квадратуры круга, т. е. проблема построения с помощью циркуля и линейки квадрата, площадь которого равна площади заданного круга, получала бы отрицательное решение в случае трансцендентности числа π, так как, как было показано в прошлом столетии, строить с помощью циркуля и линейки можно только корни некоторых классов алгебраических уравнений, коэффициенты которых целые числа. Числа π и e связаны между собой знаменитой эйлеровской формулой. Впервые во второй половине прошлого века, в 1873 г. Ш. Эрмит [1] связал арифметическую природу значения функции в алгебраической точке с ее аналитическим поведением и арифметической природой ее коэффициентов. Связь эта у Эрмита дана в очень частной форме и во всей полноте была им еще не осознана. Ш. Эрмит дал доказательство трансцендентности числа e, основания натуральных логарифмов.

Доказательство Эрмита основано на одном тождестве для функции e^x. Пусть $f(x)$ будет любой многочлен относительно x,

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x).$$

Очевидно, что $F(x)$—тоже многочлен той же степени. Тогда с помощью интегрирования по частям непосредственно может быть получено тождество

$$e^x F(0)-F(x)=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt. \tag{1}$$

Действительно, интегрируя по частям, мы будем иметь, что

$$e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=-e^{-t}f(t)\Big|_0^x e^x+e^x\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt=$$

$$=f(0)\,e^x-f(x)+e^x\int_0^t e^{-t}f'(t)\,dt.$$

Продолжая интегрирование по частям, мы, очевидно, после конечного числа шагов придем к соотношению (1). Допустим теперь, что число e удовлетворяет алгебраическому уравнению с целыми рациональными коэффициентами

$$a_0+a_1e+\ldots+a_ne^n=0, \qquad a_0\neq 0.$$

Полагая в тождестве (1) $x=k$, умножая полученное равенство на a_k и складывая такие равенства, мы будем иметь соотношение

$$F(0)\sum_{k=0}^{n} a_k e^k - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t)\, dt,$$

или вследствие того, что e удовлетворяет нашему уравнению, равенство

$$a_0 F(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k F(k) = -\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t)\, dt. \qquad (2)$$

Выберем теперь $f(t)$, положив

$$f(t) = \frac{1}{(p-1)!}\, t^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (k-t)^p, \qquad p > n + |a_0|,$$

где p—простое число. Покажем прежде всего, что левая часть равенства (2) есть целое, отличное от нуля число. Так как $f(t)$ имеет при $t=0$ нуль кратности $p-1$, то, пользуясь формулой для производной от произведения, мы будем иметь, что

$$f^{(p-1)}(0) = (n!)^p; \qquad f^{(k)}(0) = 0, \qquad k < p-1;$$
$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(p-1)!\,(k-p+1)!} \frac{d^{k-p+1}}{dt^{k-p+1}} \prod_{k=1}^{n} (k-t)^p \Big|_{t=0}, \quad k \geqslant p. \qquad (3)$$

Итак, мы видим, что при любом k $f^{(k)}(0)$ — целое число, причем $f^{(p-1)}(0)$ не делится на p, так как p простое, $p > n$, а $f^{(k)}(0)$, $k \geqslant p$, делится на p, так как при дифференцировании произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} (k-t)^p$ число p обязательно войдет в качестве сомножителя в целое число $f^{(k)}(0)$. Поэтому число $F(0)$ будет целым и, так как все слагаемые в сумме, которой оно представляется, кроме одного, $f^{(p-1)}(0)$, делятся на p, отличным от нуля.

Докажем; что второе слагаемое в левой части равенства (2) также целое число, делящееся на p. Действительно, так как $f(t)$ при $t=m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, m—целое число, имеет нуль порядка p, то $f^{(k)}(m)=0$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, и при $k \geqslant p$

$$f^{(k)}(m) = -p\frac{k!}{p!\,(k-p)!}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\left[\frac{t^{p-1}\prod\limits_{s=1}^{n}(s-t)^p}{(m-t)^p}\right]\Bigg|_{t=m}. \qquad (4)$$

Из этой последней формулы и следует непосредственно наше утверждение, так как все слагаемые $F(m)$—целые, кратные p числа. Но так как $|a_0| < p$, то $a_0F(0)$—целое, не делящееся на простое p число, а сумма

$$\sum_{1}^{n} a_kF(k)$$

—целое, делящееся на p число, то левая часть равенства (2) есть также целое, не делящееся на p, другими словами отличное от нуля, число. Так как левая часть (2)—целое, отличное от нуля число, то по абсолютной величине она должна быть больше или равна единице при любом, достаточно большом p, $p > n + |a_0|$.

Но правая часть (2), как легко показать, с ростом простого числа p стремится к нулю. Действительно,

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k e^k \int_{0}^{k} e^{-t} f(t)\,dt\right| < e^n \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right) \int_{0}^{n} |f(t)|\,dt <$$

$$< \frac{ne^n \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{(p-1)!}(2n)^{(n+1)p} = \frac{Ca^p}{(p-1)!}, \qquad (5)$$

где C и a от p не зависят. Но из этого неравенства уже видно, что правая часть равенства (2) с ростом p стремится к нулю, так как $(p-1)!$ растет скорее, чем любая постоянная в степени p. Выбирая p настолько большим, чтобы правая часть (2) была по модулю меньше $\frac{1}{2}$, мы приходим к противоречию, так как левая часть этого равенства должна быть не меньше единицы по абсолютной величине. Это противоречие, к которому мы пришли, предположив, что e—алгебраическое число, и доказывает его трансцендентность.

Через некоторое время после работы Ш. Эрмита, в 1882 г. Линдеман [1], [2] использовал тождество Эрмита для доказательства общей теоремы относительно природы значений функции e^x при алгебраических значениях аргумента, носящей его имя. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ будут произвольные, попарно различные алгебраические числа, а $A_1, A_2, \ldots, A_s$—произвольные, отличные от нуля алгебраические же числа. Тогда соотношение

$$A_1e^{\alpha_1}+A_2e^{\alpha_2}+\ldots+A_se^{\alpha_s}=0 \tag{6}$$

невозможно. Из этой теоремы следует сразу трансцендентность числа π и, тем самым, отрицательное решение проблемы квадратуры круга, так как предположение алгебраичности π приводит благодаря тождеству Л. Эйлера, $e^{2\pi i}=1$, к соотношению типа (6).

Ход доказательства этой общей теоремы тот же самый, что и доказательства теоремы Ш. Эрмита и отличается от него только техническими усложнениями.

Докажем теперь теорему Линдемана. Заметим прежде всего, что если все числа A_k, $1\leqslant k\leqslant n$, и B_s, $1\leqslant s\leqslant m$, отличны от нуля, а числа α_k, $1\leqslant k\leqslant n$, попарно различны, так же как и числа β_s, $1\leqslant s\leqslant m$, то в равенстве

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_ke^{\alpha_kx}\right)\left(\sum_{s=1}^{m} B_se^{\beta_sx}\right)=\sum_{r=1}^{p} C_re^{\gamma_rx}, \tag{7}$$

$$\gamma_r=\alpha_k+\beta_s,$$

в котором сделано приведение подобных членов и все γ_r различны между собой, хотя бы одно C_r отлично от нуля. Действительно, без нарушения общности можно считать, что числа α_k, так же как и β_s, расположены в порядке возрастания их действительных частей, а при равных действительных частях—в порядке возрастания коэффициентов при i. В таком же порядке мы можем считать расположенными и числа γ_r. Тогда $\gamma_p=\alpha_n+\beta_m$, и другого члена с таким же показателем в правой части (7) быть не может, так так любая сумма вида $\alpha_k+\beta_s$, где или k или s соответственно меньше n или m, или имеет действительную часть, меньшую, чем действительная часть $\alpha_n+\beta_m$, или, при одинаковых действительных частях, коэффициент при i меньший, чем у $\alpha_n+\beta_m$. Поэтому $C_p=A_nB_m\neq 0$.

Допустим теперь, что теорема Линдемана не верна, другими словами, что имеет место соотношение (6) при алгебраических отличных от нуля A_k и различных между собой алгебраических α_k. Числа A_k мы можем считать всегда целыми алгебраическими, так как в противном случае мы могли бы умножить левую часть (6) на такое целое рациональное A, что числа AA_k, $k=1, 2, \ldots, s$ стали бы целыми алгебраическими. Целые алгебраические числа A_k, $k=1, \ldots, s$ будут элементами кольца целых чисел некоторого алгебраического поля K_0 степени ν. Обозначая $A_k^{(q)}$ элемент сопряженного с K_0 поля K_q, сопряженный $A_k=A_k^{(0)}$, мы будем иметь, что в произведении

$$\prod_{n=0}^{\nu-1}\sum_{k=1}^{s}A_k^{(n)}x_k=\sum_{k_1+\ldots+k_s=\nu}\ldots\sum B_{k_1,\ldots,k_s}x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}, \tag{8}$$

коэффициенты $B_{k_1,\ldots,k_s}$ будут целыми рациональными числами, так как все $A_k^{(n)}$—целые алгебраические и все $B_{k_1,\ldots,k_s}$—симметрические функции корней уравнения, которому удовлетворяет элемент, порождающий алгебраическое поле K_0. Полагая в тождестве (8) $x_k=e^{\alpha_k}$, $k=1, 2, \ldots, s$, мы на основании соотношения (6) и того, что в равенстве (7) $C_p\neq 0$, получаем, что

$$\prod_{n=0}^{\nu-1}\sum_{k=1}^{s}A_k^{(n)}e^{\alpha_k}=\sum_{k=1}^{m}B_ke^{\beta_k}=0, \tag{9}$$

где все β_k—алгебраические, различные попарно, и хотя бы одно $B_k\neq 0$, причем все B_k целые рациональные.

Таким образом, предположив, что равенство (6) имеет место при алгебраических A_k, мы пришли к такому же равенству (9) при целых B_k. Поэтому мы будем теперь предполагать, допустив, что теорема Линдемана не верна, что равенство (6) имеет место при целых рациональных, отличных от нуля A_k и различных между собой алгебраических α_k, $k=1, 2, \ldots, s$. Кроме того, если не все α_k в равенстве (6) целые алгебраические, то можно найти такое целое положительное q, что числа $\beta_k = q\alpha_k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, будут целыми алгебраическими числами. Поэтому нам достаточно доказать, что равенство

$$\sum_1^s A_k e^{\frac{\beta_k}{q}} = 0 \tag{10}$$

при целых рациональных, не равных нулю A_k и различных между собой целых алгебраических β_k невозможно. Допустим опять, что равенство (10) имеет место. Все различные числа β_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, можно считать корнями одного и того же алгебраического уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k = 0, \qquad a_m = 1, \tag{11}$$

с целыми рациональными коэффициентами a_k. Можно также считать, что это уравнение не имеет равных корней, так как, для того чтобы все целые алгебраические, различные между собой β_k удовлетворяли подобному уравнению, достаточно, чтобы его левая часть, будучи представлена в виде произведения неприводимых многочленов, содержала только первые степени различных неприводимых многочленов, у которых одинаковых корней, как хорошо известно, не может быть. Составим все возможные размещения из m корней этого уравнения по s элементов в каждом. Число таких размещений будет $m(m-1)\ldots(m-s+1)$.

Обозначая корни уравнения (11) $z_1, \ldots, z_m$, рассмотрим произведение $m(m-1)\ldots(m-s+1) = \mu$ сомножителей

$$\prod \sum_{k=1}^{s} A_k e^{\frac{1}{q} z_{n_k}} = \sum_{\sum\limits_{k=1}^{m} h_k = \mu} B_{h_1, \ldots, h_m} e^{\frac{h_1 z_1 + \ldots + h_m z_m}{q}} = 0, \tag{12}$$

взятое по всем возможным размещениям $z_{n_1}, \ldots, z_{n_s}$ корней уравнения (11). Это произведение действительно равно нулю, так как среди размещений корней содержится и размещение $\beta_1, \ldots, \beta_s$, а значит, один из множителей произведения совпадает с левой частью (11).

Заметим теперь, что коэффициент B при степени e с показателем $\frac{h_1 z_1 + \ldots + h_m z_m}{q}$ совпадает с коэффициентом при e в степени $(h_{n_1} z_1 + \ldots + h_{n_m} z_m) \frac{1}{q}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_m$—любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, m$. Это простое следствие того, что левая часть (12) не меняется при замене z_k на z_i и z_i на z_k. Поэтому левая часть равенства (12) может быть записана в форме

$$\sum_{k=1}^{r} C_k \sum e^{\frac{1}{q}(h_1 z_{n_1} + \ldots + h_m z_{n_m})} = 0, \tag{13}$$

где C_k—целые рациональные числа, r—число систем $h_1, \ldots, h_m$

$$\sum_{i=1}^{m} h_i = \mu = m(m-1) \ldots (m-s+1),$$

не приводящихся одна к другой простой перестановкой чисел $h_1, h_2, \ldots, h_m$, внешняя сумма взята по всем различным в этом смысле системам $h_1, \ldots, h_m$, занумерованным в каком-то порядке, а внутренняя сумма взята по всем перестановкам m корней уравнения (11). Левая часть равенства (13) может быть, очевидно, также записана и в форме

$$\sum_{k=1}^{N} D_k e^{\frac{\lambda_k}{q}} = 0, \tag{14}$$

где все D_k—целые рациональные, отличные от нуля, а λ_k—различные между собой целые алгебраические числа. То, что левая часть равенства (13) после преобразования будет содержать хотя бы один член $D_k e^{\frac{\lambda_k}{q}}$, где $D_k \neq 0$, есть прямое следствие замечания, связанного с равенством (7).

Равенство (13) показывает, что если в равенство (14) входит целый алгебраический показатель λ_k, удовлетворяющий неприводимому уравнению $\varphi(x)=0$ степени ν, то все остальные корни этого уравнения также входят с тем же $D_k\neq 0$ в качестве показателей в левую часть (14). Действительно, так как $\lambda_k=h_1z_1+\ldots+h_mz_m$ и произведение

$$\prod\left[z-(h_1z_1+\ldots+h_mz_m)\right],$$

взятое по всем перестановкам корней уравнения (11), есть многочлен с целыми рациональными коэффициентами, то все сопряженные λ_k будут корнями этого уравнения и, тем самым, с той же частотой, что и λ_k, будут входить в качестве показателей во внутреннюю сумму равенства (13). Отсюда уже следует, что

$$f(z)=q^N\prod_{k=1}^{N}\left(z-\frac{\lambda_k}{q}\right),$$

будет многочленом с целыми рациональными коэффициентами и не будет иметь равных корней, так как все λ_k различны и его правая часть есть симметрическая функция всех корней ряда различных неприводимых многочленов. Положим теперь

$$f_i(z)=\frac{1}{(p-1)!}\frac{[f(z)]^p}{z-\frac{\lambda_i}{q}}=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{r,\,s}b_{r,\,s}\lambda_i^r z^s, \tag{15}$$

где $p>q$ — любое простое число. Коэффициенты $b_{r,\,s}$ в равенстве (15), очевидно, будут целыми рациональными числами. В этом легко убедиться простым делением. Заменяя $f(t)$ в тождестве Эрмита на $f_i(t)$, мы получаем тождество

$$\left.\begin{aligned}e^xF_i(0)-F_i(x)&=e^x\int_0^x e^{-t}f_i(t)\,dt;\\ F_i(x)&=\sum_0^\infty f_i^{(k)}(x).\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Полагая в этом тождестве $x=\frac{\lambda_k}{q}$, умножая обе его части на D_k и суммируя по k, мы получим, вследствие (14), тождество

$$\sum_{k=1}^{N} D_k F_i\left(\frac{\lambda_k}{q}\right) = -\sum_{1}^{N} e^{\frac{\lambda_k}{q}} \int_{0}^{\frac{\lambda_k}{q}} e^{-t} f_i(t)\,dt. \qquad (17)$$

Но, аналогично равенствам (3),

$$\left.\begin{aligned} &f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) = q^p \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} (\lambda_i-\lambda_k)^p; \quad f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right)=0, \quad k<p-1;\\ &f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) = \frac{q^{Np}\,k!}{(p-1)!\,(k-p+1)!}\frac{d^{k-p+1}}{dt^{k-p+1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(t-\frac{\lambda_k}{q}\right)^p\Bigg|_{t=\frac{\lambda_i}{q}},\\ &\qquad k\geqslant p, \end{aligned}\right\} (18)$$

откуда непосредственно следует, что при $k\neq p-1$ $f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right)$ и $\frac{1}{p}f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right)$ будут многочленами с целыми рациональными коэффициентами относительно λ_i. Значит,

$$F_i\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) = f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) + p\gamma(\lambda_i), \qquad (19)$$

где $\gamma(x)$—многочлен с целыми рациональными коэффициентами относительно x.

Далее, аналогично соотношениям (4), мы будем иметь, что $f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_s}{q}\right)=0$; $0\leqslant k\leqslant p-1$; $s\neq i$, и при $k\geqslant p$

$$\frac{1}{p}f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_s}{q}\right) = \frac{k!\,(p-1)!}{p!\,(k-p)!}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\frac{f_i(t)}{\left(t-\frac{\lambda_s}{q}\right)^p}\Bigg|_{t=\frac{\lambda_s}{q}} = P_k(\lambda_s, \lambda_i), \quad (20)$$

где $P_k(x, y)$—многочлен с целыми рациональными коэффициентами. Поэтому

$$F_i\left(\frac{\lambda_s}{q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_s}{q}\right) = pQ(\lambda_s, \lambda_i), \tag{21}$$

где $Q(x, y)$—многочлен с целыми рациональными коэффициентами. Но если $F_i\left(\frac{\lambda_k}{q}\right)$ входит в левую часть (17) с коэффициентом $D_k \neq 0$, то, как мы установили выше, $F_i\left(\frac{\bar{\lambda}_k}{q}\right)$, где $\bar{\lambda}_k$—любой другой корень неприводимого уравнения, которому удовлетворяет целое алгебраическое число λ_k, будет входить в левую часть (17) с тем же коэффициентом D_k. Но $F_i(x)$ есть многочлен с рациональными коэффициентами относительно x и λ_i. Поэтому равенство

$$\sum_{k=1}^{N} D_k F_i\left(\frac{\lambda_k}{q}\right) = \sum D \sum F_i\left(\frac{\lambda_k}{q}\right) = R(\lambda_i), \tag{22}$$

где внутренняя сумма взята по всем корням одного и того же неприводимого уравнения, показывает, что $R(\lambda_i)$ есть многочлен с рациональными коэффициентами относительно λ_i. С другой стороны, как мы уже установили,

$$R(\lambda_i) = f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) + p\omega_i, \tag{23}$$

где ω_i—целое алгебраическое число, так как $\frac{1}{p} f_i^{(k)}\left(\frac{\lambda_s}{q}\right)$, $(k-p+1)^2+(s-i)^2 \neq 0$—целые алгебраические, $f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right)$—целое алгебраическое число, а все D_k—целые рациональные.

Из тождества (17) непосредственно следует, что

$$|R(\lambda_i)| < \frac{Ca^p}{(p-1)!}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

где C и a—положительные постоянные, не зависящие от p, i. Отсюда следует, что

$$|L| = \left|\prod_{i=1}^{N} R(\lambda_i)\right| < \frac{C^N a^{Np}}{[(p-1)!]^N}. \tag{24}$$

Но произведение $\prod_{1}^{N} R(\lambda_i)$, будучи произведением многочленов с рациональными коэффициентами от всех корней ряда неприводимых уравнений должно быть рациональным числом. С другой стороны, число L, будучи произведением целых алгебраических чисел, должно быть целым алгебраическим числом. Значит L, будучи одновременно и рациональным и целым алгебраическим, должно быть целым рациональным числом.

Наконец, положив

$$L_0 = \prod_{1}^{N} f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right)$$

и замечая, что L_0 как произведение многочленов с целыми рациональными коэффициентами, взятое по всем корням неприводимых уравнений, должно быть целым числом, мы легко убеждаемся в том, что целое число $L - L_0$,

$$L - L_0 = \prod_{1}^{N}\left[f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right) + p\omega_i\right] - \prod_{1}^{N} f_i^{(p-1)}\left(\frac{\lambda_i}{q}\right), \tag{25}$$

должно делиться на p. Действительно, из (25) непосредственно видно, что $\frac{1}{p}[L - L_0]$ будет целым алгебраическим числом и, как отношение целых чисел, просто целым рациональным числом. Но из (18), так как $\lambda_i \neq \lambda_k$, видно, что целое число L_0 не равно нулю. Поэтому мы можем утверждать, что если простое $p > N + |L_0^{\frac{1}{p}}|$, то $L_0^{\frac{1}{p}}$ не может делиться на p. Так как $L - L_0$ на p делится, то отсюда следует, что целое число L не может быть нулем и, значит, $|L| \geqslant 1$. Неравенство (24) теперь переходит в верное при $p > N + |L_0^{\frac{1}{p}}|$ неравенство

$$1 < \frac{C^N a^{Np}}{[(p-1)!]^N},$$

которое, при достаточно большом простом p становится неверным, так как C и a от p не зависят. Итак, предположив, что равенство (6) имеет место, мы пришли к противоречию и доказали тем самым теорему Линдемана.

§ 2. Дальнейшее развитие идей Эрмита и Линдемана

После работ Эрмита и Линдемана появился ряд работ, принадлежавших самым крупным математикам, которые давали различные новые доказательства теорем Эрмита и Линдемана, не меняя по существу основ метода. Из этих работ можно отметить работу академика А. А. Маркова [1], так как в ней доказательство теоремы Линдемана проведено технически весьма совершенно и основная идея дана очень выпукло. Приведенное выше доказательство является переработкой его. Тождество Эрмита, лежащее в основе общей теоремы Линдемана, специфично для функции e^z; для других функций того же типа, например для функций Бесселя, аналогичного тождества построить, повидимому, нельзя. Более общий метод, позволяющий исследовать арифметическую природу значений достаточно широкого класса целых функций, имеющих алгебраические коэффициенты ряда Тейлора в нуле и удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, был опубликован К. Зигелем [3] в 1929—1930 гг. Этот метод является естественным продолжением работ Эрмита и Линдемана. Общая теорема об алгебраической независимости, им доказанная, представляет собой прямое обобщение теоремы Линдемана. Существенную роль играет в этом методе одна общая идея относительно определения нижних границ линейных форм с целыми или алгебраическими коэффициентами от степеней одного или нескольких чисел, представляющая собой развитие идеи А. Туэ в теории аппроксимации алгебраических чисел рациональными дробями.

Для выяснения основ этого общего метода мы в весьма общих чертах приведем схему доказательства этим методом теоремы Линдемана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся две леммы, которые мы здесь и приведем.

Пусть число a принадлежит алгебраическому полю K степени ν и числа $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ будут числами, ему сопряженными. Условимся в дальнейшем обозначать значком $\overline{|a|}$ наибольшее из чисел $|a|, |a_1|, \ldots, |a_{\nu-1}|$.

Лемма I. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — заданные числа алгебраического поля K степени ν, а $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ — многочлен степени n по совокупности переменных, с целыми коэффициентами из поля K, то или $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$, или*

$$|P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)| > H^{-\nu+1}e^{-\gamma n}, \qquad \gamma > 0, \tag{26}$$

где $H \geqslant \overline{|A_{k_1, \ldots, k_s}|}$, а $A_{k_1, \ldots, k_s}$ суть коэффициенты $P(x_1, \ldots, x_s)$, постоянная же γ не зависит от H и n.

Эта лемма есть тривиальное следствие того, что норма целого алгебраического числа не меньше 1 и представляет простое обобщение леммы II § 2 гл. I.

Лемма II. *Пусть коэффициенты $a_{k,s}$ линейных форм*

$$L_k = a_{k,1}x_1 + \ldots + a_{k,q}x_q, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p,$$

будут целыми числами алгебраического поля K степени ν и $\overline{|a_{k,s}|} < A$. Тогда существует решение системы уравнений $L_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, в целых, в совокупности отличных от нуля, числах поля K, причем

$$\overline{|x_k|} < C\,(CqA)^{\frac{p}{q-p}}, \tag{27}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от A, p и q.

Доказательство. Пусть $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots, \omega_\nu^{(0)}$ будет какой-нибудь базис кольца целых чисел поля K и

$\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, \ldots, \omega_\nu^{(m)}$ — базис кольца целых чисел поля K_m, сопряженного полю K, $m=1, 2, \ldots, \nu-1$. Полагая

$$\left.\begin{aligned} a_{k,s}^{(m)} &= \sum_{r=1}^{\nu} a_{k,s,r}\,\omega_r^{(m)}, \qquad & a_{k,s}^{(0)} &= a_{k,s}; \\ x_s^{(m)} &= \sum_{r=1}^{\nu} x_{s,r}\,\omega_r^{(m)}, \qquad & x_s^{(0)} &= x_s; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$1 \leqslant k \leqslant p, \quad 1 \leqslant s \leqslant q, \quad 0 \leqslant m \leqslant \nu-1,$$

где $a_{k,s}^{(m)}$ и $x_s^{(m)}$ — числа, сопряженные $a_{k,s}$ и x_s, а $a_{k,s,r}$ — заданные и $x_{s,r}$ — произвольные целые рациональные числа, мы будем иметь вследствие условий леммы, что

$$\left|\sum_{r=1}^{\nu} a_{k,s,r}\,\omega_r^{(m)}\right| \leqslant A, \qquad 0 \leqslant m \leqslant \nu-1.$$

Отсюда непосредственно, так как определитель $|\omega_r^{(m)}|$ системы отличен от нуля, следует, что при любых k, s и r

$$|a_{k,s,r}| < C_0 A, \tag{29}$$

где C_0 зависит только от K.

Вставляя выражения $a_{k,s}$ и x_s из (28) в формы L_k, мы будем иметь, что

$$L_k = \sum_{r=1}^{\nu} \left[\sum_{s=1}^{q} b_{k,s,r} x_{s,r}\right] \omega_r, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p, \tag{30}$$

где $b_{k,s,r}$ — целые рациональные числа, удовлетворяющие вследствие (29) неравенству

$$|b_{k,s,r}| < C_1 A \tag{31}$$

при любых k, s и r, причем C_1 зависит только от K. Представление (30) показывает, что для выполнения условий $L_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, при целых рациональных $x_{s,r}$ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$L_{k,r} = \sum_{s=1}^{q} b_{k,s,r} x_{s,r} = 0; \qquad 1 \leqslant k \leqslant p, \quad 1 \leqslant r \leqslant \nu. \tag{32}$$

Число уравнений этой системы есть νp, а число переменных $\nu q > \nu p$. Воспользовавшись леммой I § 2 гл. I, полагая в этой лемме $N=2$, $n=\nu q$, $m=\nu p$, мы можем утверждать, что существует система целых чисел $x_{s,r}$, $1 \leqslant s \leqslant q$, $1 \leqslant r \leqslant \nu$, в совокупности отличных от нуля, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_{s,r}| < 2[C_1 \nu q A]^{\frac{p}{q-p}}, \tag{33}$$

которые удовлетворяют также системе неравенств

$$|L_{k,r}| \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant p, \quad 1 \leqslant r \leqslant \nu. \tag{34}$$

Но так как $b_{k,s,r}$ и $x_{s,r}$ — целые, то из неравенств (34) непосредственно следует, что $L_{k,r}=0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant r \leqslant \nu$, при этих значениях $x_{s,r}$. Наконец, из неравенств (33) и соотношений (28) непосредственно следует неравенство (27) нашей теоремы с постоянной C, не зависящей от A, p и q.

Пусть числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ образуют базис кольца целых чисел алгебраического поля K. Допустим, что существует соотношение

$$T_1 = \sum_{k_1=0}^{\sigma} \ldots \sum_{k_\nu=0}^{\sigma} A_{k_1,\ldots,k_\nu} e^{\frac{k_1\omega_1+\ldots+k_\nu\omega_\nu}{d}} = 0, \tag{35}$$

$$|A_{k_1,\ldots,k_\nu}| < A,$$

где d, $A_{k_1,\ldots,k_\nu}$ — целые рациональные числа, в совокупности отличные от нуля. Если мы докажем невозможность такого соотношения, то отсюда будет следовать, как мы видели ранее, с помощью весьма несложных, чисто алгебраических соображений, теорема Линдемана.

Мы расчленим ход доказательства невозможности соотношения (35) на ряд этапов.

Этап первый. Перенумеруем $q=(p+1)^\nu$ чисел

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_\nu\omega_\nu, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant p, \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu,$$

где p — любое достаточно большое число, в каком-либо порядке и запишем их в виде последовательности

$d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots, d\lambda_q$, причем первые $\tau=(\sigma+1)^\nu$ из них пусть совпадают с совокупностью чисел $k_1\omega_1+\ldots+k_\nu\omega_\nu$; $0\leqslant k_i\leqslant\sigma$; $1\leqslant i\leqslant\nu$. Тогда соотношение (35) может быть переписано в форме

$$T_1=\sum_1^q A_{k,1}e^{\lambda_k},\quad A_{k,1}=0,\quad k>\tau,\quad |A_{k,1}|\leqslant A. \tag{36}$$

Нетрудно заметить, что, умножая равенство (35) на

$$e^{\frac{1}{d}(k_1\omega_1+\ldots+k_\nu\omega_\nu)},\quad 0\leqslant k_i\leqslant p-\sigma,\quad 1\leqslant i\leqslant\nu,$$

мы будем получать новые соотношения типа (36)

$$T_s=\sum_1^q A_{k,s}e^{\lambda_k}=0,\quad |A_{k,s}|\leqslant A,\quad 1\leqslant s\leqslant(p+1-\sigma)^\nu, \tag{37}$$

причем, очевидно, линейные формы T_s от величин e^{λ_k} будут линейно независимы между собой. Число их будет $(p+1-\sigma)^\nu$. Итак, из предположения верности соотношения (35) мы получили много линейных форм от величин e^{λ_k}, линейно независимых между собой.

Этап второй. Пусть $N>e^{q^2\ln^2 q}$ будет достаточно большое целое число. Рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_1^q P_m(z)\,e^{\lambda_m z},\quad P_m(z)=N!\sum_{k=0}^N C_{k,m}\frac{z^k}{k!}. \tag{38}$$

Почти непосредственным следствием леммы II является существование таких целых алгебраических чисел поля K, в совокупности отличных от нуля, $C_{k,m}$, $\overline{|C_{k,m}|}<e^{\gamma_0 Nq^2}$, где γ_0 не зависит ни от N, ни от q, что разложение функции $f(z)$ в нуле в ряд Тейлора будет начинаться со степени z, не меньшей, чем $N(q-1)+2q$. Мы легко получаем, рассматривая выбранную таким образом функцию $f(z)$, что

$$f(z)=z^{N(q-1)+2q}\varphi(z),\quad |\varphi(z)|<e^{-\gamma_1 N(q-2)\ln N} \tag{39}$$

при $|z|\leqslant 4$, где γ_1 опять не зависит от N и q.

Этап третий. Дифференцируя функцию $f(z)$, мы получаем систему линейных форм от $e^{\lambda_k z}$, $k=1, 2, \ldots, q$,

$$\left.\begin{aligned} L_s(z) = f^{(s)}(z) = \sum_1^q U_{m,s}(z)\, e^{\lambda_m z}, \\ U_{m,s}(z) = d^{-s} \sum_{k=0}^{N} C_{m,s,k} z^k, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

где все числа $C_{m,k,s}$ будут целыми алгебраическими, причем по модулю $\overline{|C_{m,k,s}|}$ не будут превосходить N^{3N} при $s \leqslant N$ и $N > N_0$. Так как функция $f(z)$ имеет в начале нуль не ниже, чем порядка $N(q-1)+2q$, то, как легко убедиться последовательным дифференцированием и исключением показательных функций $e^{\lambda_k z}$, ни один из многочленов $P_m(z)$ в представлении (38) функции $f(z)$ не может тождественно равняться нулю. Вследствие этого и того обстоятельства, что функция, состоящая из суммы произведений многочленов на различные $e^{z\lambda_m}$, никогда не может быть тождественным нулем, мы можем утверждать, что линейные формы $L_0(z), \ldots, L_{q-1}(z)$ линейно независимы, другими словами, что определитель

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} U_{1,0}(z) & \ldots & U_{q,0}(z) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{1,q-1}(z) & \ldots & U_{q,q-1}(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(z)\, U_{2,0}(z) & \ldots & U_{q,0}(z) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{(q-1)}(z)\, U_{2,q-1}(z) & \ldots & U_{q,q-1}(z) \end{vmatrix} = z^{N(q-1)+q+1}\psi(z) \quad (41)$$

не равен тождественно нулю. Так как степень этого определителя относительно z не превышает Nq, то, имея вначале нуль порядка не ниже $N(q-1)+q+1$, он ни при каком значении z, отличном от нуля, не может иметь нуль порядка выше $N-q-1$.

Этап четвертый. Выбирая из $N+1$ линейных форм $L_0(z), \ldots, L_N(z)$ произвольным образом q форм с индексами $s_1, s_2, \ldots, s_q$ и рассматривая определители таких систем $\Delta(z, s_1, \ldots, s_q)$, мы можем утверждать, что хотя бы один из этих определителей не будет нулем при $z=1$. В противном случае $\Delta(z)$ в точке $z=1$ имел бы нуль порядка не ниже $N-q$, что невозможно. Принимая во внимание ранее приведенную оценку коэффициентов форм $L_s(z)$ при $s \leqslant N$, оценку (39) и меняя нумерацию наших форм, мы можем теперь утверждать существование системы q линейных форм от q величин e^{λ_k}, $k=1, 2, \ldots, q$, определитель которых не равен нулю и таких, что

$$L_i = \sum_{s=1}^{q} C_{i,\,s} e^{\lambda_s}, \quad \overline{|C_{i,\,s}|}\, d^N < N^{4N}, \quad |d^N L_i| < e^{-\gamma_2 N (q-3) \ln N},$$

где все $C_{i,\,s} d^N$ — целые алгебраические и $\gamma_2 > 0$ не зависит от q и N. Вспоминая, что мы располагаем $r = (p+1-\sigma)^\nu$ линейно независимыми формами $T_1, \ldots, T_r$ от тех же величин e^{λ_k}, мы можем выбрать, очевидно, из q форм L $q-r$ форм, образующих вместе с r формами T систему линейно независимых форм. Ввиду возможности изменения нумерации форм L мы можем считать, что формы $L_1, L_2, \ldots, L_{q-r}, T_1, \ldots, T_r$ линейно независимы. Определитель этой системы форм $D \neq 0$ будет иметь вид

$$D = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \ldots & B_{1,q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q-r,1} & B_{q-r,2} & \ldots & B_{q-r,q} \\ A_{1,1} & A_{2,1} & \ldots & A_{q,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,r} & A_{2,r} & \ldots & A_{q,r} \end{vmatrix}, \quad B_{i,s} = C_{n_i,s}.$$

Этап пятый. Этот отличный от нуля определитель D может быть оценен по модулю снизу благодаря лемме I и оценкам величин A и $\overline{|C|}$ и сверху, так как нам известны оценки модулей величин форм L. Эти оценки нам дают неравенства

$$A^{-\nu r} e^{-4\nu (q-r) N \ln N - \gamma_3 N q} < |D| <$$
$$< [e^{-\gamma_2 N (q-3) \ln N} + |T_1|]\, e^{\gamma_4 (q-r) N \ln N} A^{\nu r}, \quad (42)$$

где γ_3 и γ_4 зависят только от K. Так как $q-r=$ $=(p+1)^\nu-(p+1-\sigma)^\nu<\nu\sigma q^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, то можно выбрать p столь большим, чтобы было верно неравенство $(\gamma_4+5\nu)(q-r)<$ $<\gamma_2(q-3)$. Выбрав, таким образом, p и полагая $T_1=0$ (наше основное предположение), мы при достаточно большом N, которое можно неограниченно увеличивать, придем к противоречию, так как правая часть неравенства (42) станет меньше левой. Этим теорема Линдемана доказана.

Неравенство (42) позволяет не только доказать эту, последнюю, теорему, но и установить нижнюю границу формы (35) в зависимости от ее высоты A и степени σ. К вопросу о таких нижних границах мы вернемся позже.

Рассматривая этапы, на которые разбито доказательство теоремы Линдемана, можно сказать следующее. Первый этап заключается в том, что из одного алгебраического соотношения с целыми коэффициентами для степеней $e^{\omega_1}, e^{\omega_2}, \ldots, e^{\omega_\nu}$ получается много соотношений, тоже с целыми коэффициентами. Мы получаем здесь, таким образом, не менее чем $q-\sigma\nu q^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ линейно независимых форм от q чисел e^{λ_k}, высота которых фиксирована. Этап второй заключается в построении функции, сконструированной из функций, порождающих при $z=1$ наши числа e^{λ_k}, которая, имея относительно малые целые коэффициенты из поля K, мала как алгебраически, так как ее тейлорово разложение начинается с высокой степени z, так и по модулю на конечном расстоянии от начала. Эта функция служит основой для построения системы линейно независимых функциональных форм. Этап третий состоит в построении системы функциональных линейных форм, причем то обстоятельство, что построенная нами функция мала алгебраически, служит основанием для присутствия в этих формах всех степеней $e^{\lambda_k z}$ и тем самым для линейной независимости q подряд идущих функций. Определитель этой системы не может делиться на $z-1$ в степени выше $N-q-1$ по той же причине. Самым существенным обстоятельством при этом является то, что при дифференцировании этих форм мы получаем снова формы от тех же функций попрежнему с алгебраическими коэффициентами. Это является следствием того, что основные наши функции удовлетворяют системе алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами, коэффициенты которых в свою очередь — алгебраические числа. Когда мы имеем дело с функциями, этим последним свойством не обладающими, то изложенный метод по существу неприменим, и задача исследования арифметической природы их значений становится неизмеримо более трудной. Этап четвертый состоит в выборе из полученных N функциональных форм q числовых, линейно независимых форм, получающихся из функциональных при $z=1$. Комбинируя эти формы с ранее имевшимися, мы получаем опять q числовых линейно независимых форм, из которых не менее $q-\sigma\nu q^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, т. е. основная масса, по модулю равны нулю и имеют фиксированные коэффициенты. Пятый и последний этап заключается в оценке определителя этой комбинированной системы форм как сверху, так и снизу, что при достаточно больших значениях параметров q и N приводит к противоречию. Этот метод, границы применимости которого уже достаточно видны, позволил К. Зигелю доказать ряд теорем трансцендентности. Мы сформулируем некоторые из них.

Пусть ζ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ будут алгебраическими числами, причем пусть ζ не равно нулю, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будут различны между собой. Пусть также $P_1(x, y), \ldots, P_n(x, y)$ будут многочленами с алгебраическими коэффициентами, в совокупности не равными нулю тождественно. Тогда

$$P_1[J_0(\zeta),\ J_0'(\zeta)]\, e^{\alpha_1} + \ldots + P_n[J_0(\zeta),\ J_0'(\zeta)]\, e^{\alpha_n} \neq 0,$$

где $J_0(x)$ — хорошо известная функция Бесселя. В случае, когда левая часть состоит из одного многочлена

$P(x, y)$, ζ есть алгебраическое число степени m, а высота и степень многочлена $P(x, y)$ суть H и p, то имеет место неравенство

$$|P[J_0(\zeta), \quad J_0'(\zeta)]| > CH^{-123p^2m^3}, \tag{43}$$

причем коэффициенты $P(x, y)$ — целые рациональные. Класс функций, к которым применим его метод, может быть, в частности, описан следующим образом: функция $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{z^n}{n!}$ принадлежит к этому классу, если: 1) все числа a_n суть целые числа одного и того же поля K, причем модули как самих чисел a_n, так и всех их сопряженных растут медленнее любой сколь угодно малой степени $n!$; 2) все знаменатели b_n суть целые рациональные, причем общее наименьшее кратное первых n знаменателей растет медленнее любой сколь угодно малой степени $n!$; 3) функция $y = y(z)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами, имеющими в свою очередь алгебраические числовые коэффициенты. Если подобная функция y удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению степени s, то весь ход рассуждений в доказательстве теоремы Линдемана к ней применим, вообще говоря, причем роль функций $e^{\lambda_k z}$ будут играть функции $y^{k_1}[y']^{k_2} \ldots [y^{(s-1)}]^{k_s}$.

Чисто качественные факты трансцендентности числа α или алгебраической независимости в поле рациональных чисел системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ получают количественную характеристику, если мы введем в рассмотрение так называемую *меру трансцендентности* числа α или, более общо, меру взаимной трансцендентности системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Мерой взаимной трансцендентности системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ мы будем называть функцию $\Phi(H, n_1, \ldots, n_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$

$$\Phi(H, n_1, \ldots, n_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \min |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)|, \tag{44}$$

где $P(x_1, \ldots, x_s)$ есть многочлен с целыми рациональными коэффициентами, высота его не превышает H, степени его по $x_1, x_2, \ldots, x_s$ не превышают $n_1, n_2, \ldots, n_s$, а минимум в правой части взят по всем многочленам, удовлетворяющим этим условиям. Иногда удобно рассматривать степень многочлена $P(x_1, \ldots, x_s)$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_s$. Обозначая эту степень n, мы будем записывать тогда нашу меру трансцендентности в виде $\Phi(H, n; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Основные неравенства, которым всегда удовлетворяет мера трансцендентности, будут следующие:

$$\Phi(H, n_1, \ldots, n_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) < e^{\lambda \sum\limits_1^s n_i} H^{-\tau(n_1+1)\ldots(n_s+1)+1} \tag{45}$$

и, аналогично,

$$\Phi(H, n; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) < e^{\lambda n} H^{-\tau \frac{(n+s)!}{n!s!}+1}, \tag{46}$$

где $\lambda > 0$ не зависит от высоты H и степеней $n_1, \ldots, n_s$ или n, а τ равно 1, если все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ действительны, и $\frac{1}{2}$, если хотя бы одно из них комплексное число. Доказываются эти неравенства непосредственно с помощью леммы I (принцип Дирихле) § 2 гл. I.

На поведении меры трансцендентности основаны различные классификации трансцендентных чисел, как, например, классификация Д. Д. Мордухая-Болтовского или К. Малера. Мы не будем останавливаться на этих классификациях ввиду их недостаточной эффективности или отсутствия реальных критериев принадлежности чисел к тому или иному классу. Мы приведем здесь только определение числа Лиувилля с помощью понятия меры трансцендентности. Число α *называется числом Лиувилля*, если оно иррациональное и

$$\lim_{H\to\infty} \frac{\ln \Phi(H, 1; \alpha)}{\ln H} = -\infty. \tag{47}$$

Исследованием поведения меры трансцендентности занимались весьма многие математики, в частности Д. Д. Мордухай-Болтовской [1, 2], который впервые дал оценку меры трансцендентности $\Phi(H, n; e^{\omega_1}, \ldots, e^{\omega_\nu})$ и

$\Phi(H, n;\ \ln\alpha)$, К. Зигель, К. Малер, А. Гельфонд, Н. Фельдман и многие другие. Мы приведем здесь только некоторые наиболее точные из известных результатов относительно нижней границы меры трансцендентности. К. Малер [2] доказал, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — алгебраические числа и линейно независимы в поле рациональных чисел, то имеет место неравенство

$$\Phi(H, n_1 \ldots, n_s;\ e^{\alpha_1}, \ \ldots, e^{\alpha_s}) > H^{-\lambda n_1 \ldots n_s}, \quad H > H_0, \qquad (48)$$

где λ не зависит от $H, n_1, \ldots, n_s$. Им же были даны более точные неравенства

$$\Phi(H,\ n;\ e) > H^{-n-\frac{C_0 n^2 \ln(n+1)}{\ln\ln H}}; \ \Phi(H, n;\ \ln\alpha) > H^{-C^n}, \qquad (49)$$

где C_0 — абсолютная постоянная, α — алгебраическое число, а $C > 1$ — любое число. Эти последние неравенства по существу получены для n фиксированного и растущего H. Метод получения всех этих неравенств для меры является количественным оформлением идей Эрмита-Зигеля. Соответствующая оценка меры для значений цилиндрических функций в алгебраических точках была приведена ранее (неравенство (43)). Неравенство для меры трансцендентности числа π значительно более точное, когда n растет вместе с H, чем неравенство (49), было получено сравнительно недавно Н. И. Фельдманом. Метод его получения существенно отличен от методов, изложенных в настоящем параграфе, и о нем будет идти речь в следующей главе. Н. И. Фельдман [1] установил неравенства

$$\Phi(H,\ n;\ \pi) > e^{-\gamma_0 n N},\ N = \max[\ln H \ln\ln H,\ n \ln^2 n], \qquad (50)$$

и при α алгебраическом $\alpha \neq 0,\ 1$

$$\begin{gathered}\Phi(H,\ n;\ \ln\alpha) > e^{-\gamma n^2 (1+\ln n) N}, \\ N = \max[\ln H \ln\ln H,\ n\ln^2 n],\end{gathered} \qquad (51)$$

где $\gamma_0 > 0$ — абсолютная постоянная, а γ зависит только от $\ln\alpha$. При $n \gg \ln\ln H$ неравенства (50) и (51) существенно точнее всех ранее существовавших и значительно ближе подходят к естественной границе сверху для меры трансцендентности, даваемой неравенствами (45) и (46). Существенным преимуществом неравенств (50) и (51) перед ранее имевшимися, является то, что они верны при любых n и H.

В следующих параграфах мы дадим полное изложение метода, развитого К. Зигелем, применимого для доказательств трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, определение которых будет дано ниже, при алгебраических значениях аргумента.

§ 3. Вспомогательные предложения и определения

Будем называть целую аналитическую функцию $f(z)$,

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!},$$

E-функцией, если выполнены следующие условия:

1) *все коэффициенты C_n функции $f(z)$ принадлежат к конечному алгебраическому полю K;*

2) *каково бы ни было $\varepsilon>0$, $\overline{|C_n|}=O(n^{n\varepsilon})$;*

3) *если $q_n>0$ наименьшее целое рациональное число, такое, что числа $C_k q_n$, $k=0, 1, \ldots, n$, будут целыми алгебраическими, то $q_n=O(n^{n\varepsilon})$ при любом $\varepsilon>0$.*

Функция $e^{\omega z}$ при алгебраическом ω будет, очевидно, E-функцией. E-функцией также будет функция

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\left[\frac{n}{k}\right]!\right)^k} z^n,$$

если a_n — целые рациональные и $a_n=O(n^{n\varepsilon})$ при любом $\varepsilon>0$.

Любой многочлен с алгебраическими коэффициентами будет, очевидно, E-функцией, так как все условия для E-функции в этом случае тривиально выполняются. Если мы в дальнейшем будем рассматривать совокупность конечного числа E-функций, то мы будем заранее предполагать, что их коэффициенты принадлежат к одному и тому же конечному алгебраическому полю K, в которое вложены поля коэффициентов всех этих функций.

Если $f_k(z)=\sum_{s=0}^{\infty} a_{k,s}\frac{z^s}{s!}$, $1\leqslant k\leqslant m$, E-функции и $q_{k,n}$ — такие целые числа, что $q_{k,n}a_{k,s}$ — целые алгебраические при $s\leqslant n$, то, очевидно, положив $q_n=q_{1,n}\ldots$ $\ldots q_{m,n}$, мы будем иметь, что $q_n=O(n^{n\varepsilon})$ и что $q_n a_{k,s}$ — целые алгебраические при $1\leqslant k\leqslant m$, $s\leqslant n$. Другими словами, если мы имеем дело с конечным числом E-функций, то последовательность чисел q_n, от умножения на которые коэффициенты $a_{k,s}$, $s\leqslant n$, делаются целыми алгебраическими, может быть выбрана стандартной, не зависящей от k.

Мы можем также утверждать, что сумма и произведение конечного числа E-функции будут также E-функциями.

Достаточно доказать это утверждение только для суммы и произведения двух E-функций. Действительно, если $f_1(z)$ и $f_2(z)$,

$$f_1(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,\quad f_2(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n,$$

суть E-функции, то существуют две последовательности целых рациональных чисел q_n и p_n таких, что числа $q_n a_k$, $0\leqslant k\leqslant n$, и $p_n b_k$, $0\leqslant k\leqslant n$, будут целыми алгебраическими. Но тогда числа $r_n=p_n q_n=O(n^{\varepsilon n})$ будут такими, что числа $r_n(a_k+b_k)$, $0\leqslant k\leqslant n$, и числа $r_n a_s b_k$, $0\leqslant s$, $k\leqslant n$, окажутся целыми алгебраическими.

Поэтому функции

$$F_1(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}z^n=f_1(z)+f_2(z),\quad A_n=a_n+b_n,$$

$$F_2(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n=f_1(z)\,f_2(z),\qquad B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}a_k b_{n-k},$$

будут E-функциями, так как

$$\overline{|A_n|} \leqslant \overline{|a_n|} + \overline{|b_n|} = O(n^{\varepsilon n}),$$

$$\overline{|B_n|} \leqslant \sum_{0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overline{|a_k|}\,\overline{|b_{n-k}|} = 2^n O_1(n^{2\varepsilon}) = O(n^{\delta n})$$

при любом $\delta > 0$.

Наконец, можно утверждать, что любая производная E-функции есть E-функция. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что первая производная E-функции есть опять E-функция. Действительно, коэффициенты a_n функции $f'(z)$, где $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$, где $f(z)$ есть E-функция, будут иметь вид $a_n = c_{n+1}$, откуда непосредственно следует, что они удовлетворяют всем условиям для E-функций. Объединяя все сказанное выше, мы можем теперь утверждать, что $F^{(s)}(z)$, если

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(z) f_k(z),$$

где $P_k(z)$ — многочлены с алгебраическими коэффициентами и $f_k(z)$ — E-функции, будет также E-функцией.

В дальнейшем мы будем рассматривать и изучать арифметические свойства только таких совокупностей E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$f_s'(z) = \sum_{k=1}^{m} Q_{k,\,s}(z) f_k(z), \quad 1 \leqslant s \leqslant m, \tag{52}$$

где $Q_{k,\,s}(z)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant m$, — рациональные функции с алгебраическими коэффициентами у их числителей и знаменателей.

Как мы уже видели на частном примере, когда рассматривали ход доказательства теоремы Линдемана методом К. Зигеля, весьма существенную роль в исследовании арифметической природы E-функций играют линейные формы от E-функций с полиномиальными коэффициентами, разложение которых в ряд Тейлора начинается с очень высокой степени z. Возможность построения подобных линейных форм, которые мы будем называть приближающими формами, в общем случае дается леммой III.

Лемма III. *Пусть $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$—$E$-функции с коэффициентами из конечного алгебраического поля K и n — любое большое целое число. Тогда существуют m многочленов $P_1(z), \ldots, P_m(z)$, степени которых не превышают $2n-1$, таких, что выполняются следующие условия:*

1) *коэффициенты многочленов $P_1(z), \ldots, P_m(z)$ — целые числа поля K, в совокупности отличные от нуля, причем эти коэффициенты $A_{i,k}$, $P_k(z) = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} A_{i,k} z^i$, удовлетворяют условиям*

$$\overline{\left| A_{i,k} \right|} = O\left[n^{(2+\varepsilon)n}\right], \quad \varepsilon > 0, \tag{53}$$

при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по i и k, $k \leqslant m$, $i \leqslant 2n-1$.

2) *Коэффициенты a_ν линейной формы*

$$R(z) = \sum P_k(z) f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!} \tag{54}$$

обращаются в нуль при $\nu \leqslant 2mn - n - 1$, другими словами,

$$a_\nu = 0, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2mn - n - 1, \tag{55}$$

и, при $\nu \geqslant 2mn - n$ равномерно по ν,

$$|a_\nu| = \nu^{\varepsilon\nu} O(n^{2n}), \quad \varepsilon > 0, \quad n > n_0(\varepsilon), \tag{56}$$

где ε сколь угодно мало.

Доказательство. Пусть

$$\begin{gathered} f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{k,\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}, \\ P_k(z) = (2n-1)! \sum_{\nu=0}^{2n-1} g_{k,\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{57}$$

где $g_{k,\,\nu}$ — некоторые целые числа поля K. Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} P_k(z)\,f_k(z) &= (2n-1)!\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{k,\,\nu}\frac{z^{\nu}}{\nu!};\\ d_{k,\,\nu} &= \sum_{p=0}^{\nu}\frac{\nu!}{p!\,(\nu-p)!}\,g_{k,\,p}C_{k,\,\nu-p}, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где $g_{k,\,p}=0$ при $p>2n-1$, мы получаем, что

$$a_{\nu}=(2n-1)!\sum_{s=1}^{m} d_{s,\,\nu}.$$

Так как все функции $f_k(z)$ принадлежат к классу E-функций, то существует последовательность целых рациональных положительных чисел q_n таких, что произведения $q_nC_{k,\,\nu}$, $\nu\leqslant n$, будут целыми алгебраическими числами. Из определения E-функции следует, что

$$\overline{|C_{k,\,\nu}|}=O(\nu^{\varepsilon\nu}),\quad q_n=O(n^{\varepsilon n}),\quad \varepsilon>0. \tag{59}$$

Для выполнения условия (55) нашей леммы необходимо, чтобы выполнялась система линейных относительно $g_{k,\,\nu}$ уравнений

$$\frac{q_{\nu}a_{\nu}}{(2n-1)!}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{\nu!}{s!\,(\nu-s)!}\,q_{\nu}C_{k,\,\nu-s}g_{k,\,s}=0, \tag{60}$$

$$0\leqslant\nu\leqslant 2mn-n-1.$$

Эту систему уравнений с $2mn$ неизвестными $g_{k,\,s}$ можно решить в целых алгебраических числах $g_{k,\,s}$ благодаря лемме II § 2 настоящей главы.

По этой лемме всегда существует совокупность целых алгебраических чисел $g_{k,\,\nu}$, $1\leqslant k\leqslant m$, $0\leqslant\nu\leqslant 2n-1$, таких, что выполняются условия (60) и

$$\overline{|g_{k,\,\nu}|}<C[CmnA]^{\frac{p}{q-p}}=O(n^{2\varepsilon mn})=O(n^{\delta n}), \tag{61}$$

при любом $\delta > 0$, так как в нашем случае $p = 2mn - n$, $q = 2mn$, $\frac{p}{q-p} = 2m - 1$ и $A = O(n^{\delta n})$ вследствие неравенств

$$q_\nu \frac{\nu!}{s!\,(\nu - s)!} \left|\overline{C_{k,\,\nu-s}}\right| < O(\nu^{\varepsilon\nu})\, 2^\nu O(\nu^{\varepsilon\nu}) = O(\nu^{3\varepsilon\nu}) \leqslant$$
$$\leqslant O\left[(2mn)^{2\varepsilon mn}\right] = O(n^{\delta n}), \quad \nu < 2mn,$$

при любом $\delta > 0$ и $n > n_0$. Так как коэффициентами $P_k(z)$ будут числа $\frac{(2n-1)!}{s!} g_{k,\,s}$ и $(2n-1)! = O(n^{2n})$, то из неравенств (61) следует условие (53) нашей леммы. Эти же неравенства и оценка $\left|\overline{C_{k,\,\nu}}\right| = O(\nu^{\varepsilon\nu})$ доказывают и условие (56).

Пусть m E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ образуют решение системы дифференциальных уравнений

$$f_k'(z) = \sum_{s=1}^{n} Q_{k,\,s}(z) f_s(z), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{62}$$

где $Q_{k,\,s}(z)$ — рациональные функции z с коэффициентами целыми числами из алгебраического поля K степени ν. Числами этого же поля мы будем предполагать и коэффициенты наших E-функций. Пусть также $T(z)$ будет многочлен наименьшей степени с целыми алгебраическими коэффициентами из поля K такой, что все произведения $T(z)\, Q_{k,\,s}(z)$ будут многочленами с целыми алгебраическими коэффициентами. Эти обозначения и условия останутся без изменений в этом и следующем параграфе настоящей главы.

Положим

$$\left.\begin{aligned} R(z) = R_1(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z), \\ R_s(z) = \sum_{k=1}^{m} P_{s,\,k}(z) f_k(z), \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где $P_k(z) = P_{1,\,k}(z)$ — заданные многочлены с коэффициентами из поля K и при $s>1$

$$R_s(z)=T(z)R'_{s-1}(z)=T(z)\Big[\sum_{k=1}^{m}P'_{s-1,k}(z)f_k(z)+\\
+\sum_{k=1}^{m}P_{s-1,k}(z)f'_k(z)\Big]=\sum_{k=1}^{m}\Big[T(z)P'_{s-1,k}(z)+\\
+\sum_{q=1}^{m}P_{s-1,q}(z)T(z)Q_{q,k}(z)\Big]f_k(z), \tag{64}$$

откуда непосредственно следует, что $P_{s,k}(z)$ — многочлены с целыми коэффициентами из K, так как $f_1(z),\ \dots,\ f_m(z)$— решение системы (62). Рассматривая функции $R_1(z)$, $R_2(z),\ \dots,\ R_m(z)$ как линейные формы от функций $f_1(z),\ \dots$ $\dots,\ f_m(z)$, нам в дальнейшем будет очень важно знать, при каких условиях определитель $\Delta(z)$ этой системы

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} P_{1,1}(z) & P_{1,2}(z) & \dots & P_{1,m}(z)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m,1}(z) & P_{m,2}(z) & \dots & P_{m,m}(z)\end{vmatrix} \tag{65}$$

не будет тождественно равен нулю, предполагая при этом, что многочлены $P_1(z),\ \dots,\ P_m(z)$ в совокупности не равны нулю тождественно. Для ответа на этот вопрос рассмотрим матрицу коэффициентов системы (62), $Q=\|Q_{k,s}(z)\|$. Эта матрица Q после перестановки строк и столбцов, которую мы будем считать уже осуществленной, может оказаться распавшейся на ряд квадратных ящиков, расположенных вдоль главной диагонали, причем все элементы Q вне ящиков будут нулями. Каждый из ящиков будет матрицей W_t порядка m_t, $\sum_{t=1}^{r}m_t=m$, где r — число независимых ящиков-матриц. Предполагая, что r — наибольшее из возможных, мы непосредственно видим, что при таком наибольшем r разбиение матрицы Q на ящики будет единственным с точностью до перестановок ящиков вдоль диагонали. Конечно, при этом не исключен случай, что $r=1$; другими словами, Q сама является, как мы будем говорить, примитивной матрицей. Итак, предположим, что Q распалась на r примитивных матриц порядков $m_1, m_2, \ldots, m_r$, причем r — наибольшее из возможных. В соответствии с распадением Q наша линейная система первого порядка (62) распадается на r независимых подсистем

$$U'_{k,t}(z)=\sum_{s=1}^{m_t} Q_{k,s,t}(z)\,U_{s,t}(z), \quad 1\leqslant k\leqslant m_t, \tag{66}$$

где t пробегает значения $1, 2, \ldots, r$, $\sum_{t=1}^{r} m_t=m$, и функции $Q_{k,s,t}(z)$ иначе занумерованные $Q_{k,s}(z)$. Вводя в рассмотрение фундаментальную систему решений линейной системы (66), матрицу которой обозначим $\overline{W}_t$,

$$\overline{W}_t=\left|\begin{matrix} U_{1,1,t}(z) & \ldots & U_{m_t,1,t}(z)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ U_{1,m_t,t}(z) & \ldots & U_{m_t,m_t,t}(z)\end{matrix}\right|,$$

мы можем на основании известных теорем об общем решении системы (66) утверждать, что

$$f_{k,t}(z)=\sum_{s=1}^{m_t} C_{s,t}U_{k,s,t}(z), \quad 1\leqslant k\leqslant m_t, \quad 1\leqslant t\leqslant r, \tag{67}$$

где $f_{k,t}(z)$, $1\leqslant k\leqslant m_t$, $1\leqslant t\leqslant r$ — иначе занумерованные наши E-функции, а $C_{s,t}$ — некоторые постоянные.

Будем говорить, что матрицы $W_1, W_2, \ldots, W_r$ линейно независимы в поле рациональных функций, или просто, для сокращения, независимы, если соотношение

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{s=1}^{m_t}\sum_{k=1}^{m_t} p_{k,t}(z)\,C_{s,t}U_{k,s,t}(z)=0, \tag{68}$$

где $p_{k,t}(z)$ — произвольные многочлены, а $C_{s,t}$ — произвольные постоянные, возможно в том и только в том случае, когда все произведения $C_{s,t}p_{k,t}(z)$ равны тождественно нулю. Очевидно, что это определение независимости матриц W_k не зависит от выбора фундаментальных систем решений уравнений (66). Из этого определения и соотношений (67) уже непосредственно следует, что функция $R(z)$,

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z),$$

где $P_k(z)$ — многочлены, в совокупности отличные от нуля, а $f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_m(z)$ — произвольное решение системы (62), не равна тождественно нулю. Более того, независимость примитивных матриц системы (62) дает возможность весьма просто сформулировать условия необращения в нуль тождественно определителя (65).

Лемма IV. *Если все примитивные матрицы системы* (66) *независимы и для каждого* $t=1,\ 2,\ \ldots,\ r$ *хотя бы один из многочленов* $P_{k,\,t}(z)$ *не равен нулю тождественно, то определитель* $\Delta(z)=|P_{s,\,k}(z)|_{1,\,2,\,\ldots,\,m}^{1,\,2,\,\ldots,\,m}$ *системы*

$$R_s(z)=\sum_{k=1}^{m} P_{s,\,k}(z) f_k(z), \quad 1\leqslant s\leqslant m; \tag{69}$$

$$R_1(z)=R(z)=\sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z)=\sum_{t=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_t} P_{k,\,t}(z) f_{k,\,t}(z),$$

$$R_{s+1}(z)=T(z)\,R_s'(z),$$

где $P_{k,\,t}(z)$ — *иначе занумерованные, в соответствии с распадением матрицы* Q *системы* (62) *на примитивные, многочлены* $P_k(z)=P_{1,\,k}(z)$, *а* $\{f_{k,\,t}(z)\}$ — *решение системы* (62), *не равен нулю тождественно.*

Доказательство. Пусть $f_1(z),\ \ldots,\ f_m(z)$ — произвольное решение системы (62). Допустим, что $\Delta(z)\equiv 0$. Тогда, как известно из линейной алгебры, можно найти такие многочлены $q_1(z),\ \ldots,\ q_\nu(z)$, $\nu\leqslant m$, что будет тождественно выполняться соотношение

$$\sum_{s=1}^{\nu} q_s(z)\,R_s(z)=0, \quad q_\nu(z)\not\equiv 0.$$

Отсюда следует благодаря соотношениям (69), что

$$\left.\begin{aligned} B_1(z)\,R^{(\nu-1)}(z)+\ldots+B_\nu(z)\,R(z)\equiv 0,\\ B_1(z)=[T(z)]^{\nu-1}\,q_\nu(z), \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

где $B_1(z),\ \ldots,\ B_\nu(z)$ — многочлены, $B_1(z)\not\equiv 0$.

Эти коэффициенты $B_k(z)$, очевидно, не зависят от выбранного нами произвольного решения $f_1(z),\ \ldots,\ f_m(z)$ и зависят только от коэффициентов системы (62) и многочленов $P_k(z)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Так как система (62), по предположению, разбилась на r независимых систем с матрицами $W_1,\ \ldots,\ W_r$, то наше произвольное решение $f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_m(z)$ системы (62) является совокупностью r произвольных решений $U_{s,\,t}(z)$, $1\leqslant s\leqslant m_t$ независимых систем (66), $1\leqslant t\leqslant r$. При дифференцировании функции $U_{s,\,t}(z)$ переходят в линейные комбинации функций $U_{s,\,t}(z)$ при том же t.

Поэтому, так как

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m}P_k(z)\,f_k(z)=\sum_{t=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_t}P_{k,\,t}(z)\,U_{k,\,t}(z),$$

то, положив $U_{k,\,s}(z)\equiv 0$, $s\neq t$, $s=1,\ 2,\ \ldots,\ r$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m_s$, мы получим, что функции

$$R_t(z)=\sum_{k=1}^{m_t}P_{k,\,t}(z)\,U_{k,\,t}(z),\quad 1\leqslant t\leqslant r,$$

должны удовлетворять уравнению (70), если $U_{k,\,t}(z)$, $1\leqslant k\leqslant m_t$, образуют любое решение системы (66). Но, вставляя вместо $U_{k,\,t}(z)$, $1\leqslant k\leqslant m_t$, каждое решение из фундаментальной системы решений (66) $U_{k,\,s,\,t}(z)$, $1\leqslant k\leqslant m_t$, мы отсюда заключаем, что функции

$$R_{s,\,t}(z)=\sum_{k=1}^{m_t}P_{k,\,t}(z)\,U_{k,\,s,\,t}(z),\quad 1\leqslant s\leqslant m_t,\quad 1\leqslant t\leqslant r,$$

должны удовлетворять уравнению (70). Так как мы имеем

$m = \sum_{t=1}^{r} m_t$ решений $R_{s,t}(z)$ линейного уравнения (70), а степень этого уравнения есть $\nu - 1 < m$, то эти решения должны быть линейно зависимы в обычном смысле, другими словами, должно иметь место соотношение

$$\sum A_{s,t} R_{s,t}(z) = \sum_{k,\,s,\,t} A_{s,t} P_{k,t}(z)\, U_{k,s,t}(z) \equiv 0, \qquad (71)$$

при постоянных, $A_{s,t}$, $1 \leqslant s \leqslant m_t$, $1 \leqslant t \leqslant r$, в совокупности отличных от нуля. В этой сумме хотя бы одно произведение $A_{s,t} P_{k,t}(z) \not\equiv 0$, так как если $A_{q,t} \neq 0$, то найдется, по условию леммы, такое k, что $P_{k,t}(z) \not\equiv 0$. Но тогда соотношение (71) противоречит условию независимости примитивных матриц системы (62) и, значит, $\Delta(z) \not\equiv 0$.

Введем теперь определение нормальной системы E-функций.

Систему m E-функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ мы будем называть *нормальной*, если:

1) *ни одна из функций не равна нулю тождественно*;

2) *эта система функций является решением линейной системы дифференциальных уравнений* (62) *при условиях, что все функции* $Q_{k,s}(z)$ *этой системы уравнений — рациональные функции* z *с числовыми коэффициентами, принадлежащими к конечному алгебраическому полю, а все примитивные матрицы этой системы независимы.*

Пусть система E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ будет нормальной. С помощью леммы III построим приближающую форму

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z), \qquad (72)$$

где все $P_k(z)$ — многочлены, отличные от нуля в совокупности, степени которых не превышают $2n-1$, а $R(z)$ имеет при $z=0$ нуль порядка не ниже $2nm-n$.

Если матрица системы линейных уравнений (62) распадается на примитивные матрицы $W_1, \ldots, W_r$ степеней $m_1, \ldots, m_r$, то равенство (72) может быть записано в форме

$$R(z)=\sum_{t=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_t}P_{k,\,t}(z)\,f_{k,\,t}(z), \tag{72'}$$

где совокупность $f_{k,\,t}(z)$, $1\leqslant k\leqslant m_t$ есть решение системы с примитивной матрицей W_t, $t=1, 2, \ldots, r$, а совокупность многочленов $P_{k,\,t}(z)$ совпадает с совокупностью многочленов $P_k(z)$.

Покажем, что если $R(z)$ — приближающая форма, другими словами, удовлетворяет высказанным выше условиям, то, каково бы ни было t, $1\leqslant t\leqslant r$ хотя бы для одного k, $1\leqslant k\leqslant m_t$, $P_{k,\,t}(z)\not\equiv 0$, если $n\geqslant p+q\dfrac{m\,(m-1)}{2}$.

Действительно, допустим, что можно сделать без нарушения общности, что при каждом t, $1\leqslant t\leqslant \mu$, $\mu<m$ хотя бы для одного k $P_{k,\,t}(z)\not\equiv 0$, а при $t>\mu$ все $P_{k,\,t}(z)\equiv 0$, $1\leqslant k\leqslant m_t$. Тогда функции $f_{k,\,t}(z)$, $1\leqslant t\leqslant \mu$, $1\leqslant k\leqslant m_t$, образуют нормальную систему E-функций, а

$$R(z)=\sum_{t=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{m_t}P_{k,\,t}(z)\,f_{k,\,t}(z).$$

Если мы положим $m_0=\sum\limits_{1}^{\mu}m_t$, $m_0<m$, то по лемме IV определитель $\Delta_0(z)$ системы m_0 линейных форм $R_1(z), \ldots, R_{m_0}(z)$; $R_{k+1}(z)=T(z)\,R_k'(z)$; $R_1(z)=R(z)$, не будет равен нулю тождественно. Обозначим q — наибольшую из всех степеней m^2+1 многочленов $T(z)$ и $T(z)\,Q_{k,\,s}(z)$; $1\leqslant k\leqslant m$; $1\leqslant s\leqslant m$, где $Q_{k,s}(z)$ — коэффициенты системы (62). Тогда, если

$$R_k(z)=\sum_{s=1}^{m}P_{k,\,s}(z)\,f_s(z),$$

то наибольшая возможная степень $P_{k,\,s}(z)$, $1\leqslant s\leqslant m$, не превысит величины $2n-1+(k-1)\,q$. Отсюда следует, что степень определителя $\Delta_0(z)$, многочлена относительно z, не превысит величины

$$(2n-1)\,m_0+q\,\frac{m_0\,(m_0-1)}{2}. \tag{73}$$

С другой стороны, так как $R(z)$ имеет в начале нуль порядка не ниже $2mn-n$, то и $R_k(z)$ вследствие соотношений $R_{k+1}(z)=T(z)R'_k(z)$ должно иметь в начале нуль порядка не ниже $2m-n-k+1$. Умножая первый столбец $\Delta_0(z)$ на $f_{1,1}(z)$ и складывая его с остальными, умноженными на соответствующие $f_{k,s}(z)$, мы получим, что все элементы первого столбца $f_{1,1}(z)\Delta_0(z)$ будут делиться на z в степени $2mn-n-m_0+1$. Обозначая теперь через p наибольший порядок нуля в начале, который могут иметь функции нашей системы $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, мы видим, что $\Delta_0(z)$ должно делиться нацело на z^k, $k=2mn-n-m-p+1$. Поэтому должно иметь место, вследствие $\Delta_0(z)\not\equiv 0$, неравенство

$$(2n-1)m_0+q\frac{m_0(m_0-1)}{2}\geqslant 2mn-n-m_0-p+1,$$

или неравенство

$$p+q\frac{m_0(m_0-1)}{2}\geqslant[2(m-m_0)-1]n+1. \qquad (74)$$

Допустив теперь, что

$$n\geqslant p+q\frac{m(m-1)}{2}, \qquad (75)$$

что возможно, так как n можно брать независимо от m сколь угодно большим, мы видим, что если $m_0<m$, то неравенство (74) неверно. Значит, при выполнении неравенства (75) для каждого t, $1\leqslant t\leqslant r$ в соотношении (72′) найдется хотя бы одно $P_{k,t}(z)\not\equiv 0$, $1\leqslant k\leqslant m_t$. Отсюда уже непосредственно следует, что если система E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ нормальна, а $R(z)$ — приближающая форма, удовлетворяющая условиям (55) леммы III, и степени многочленов в ней не превосходят $2n-1$, то при выполнении неравенства (75) будут выполнены условия леммы IV и, значит, определитель системы линейных относительно $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ форм

$$R_k(z) = T(z)\,R'_{k-1}(z),\ R_1(z)=R(z),\ k=1, 2, \ldots, m,$$

не будет тождественным нулем. Другими словами, если $R(z)$ — приближающая форма и выполнено неравенство (75), то $\Delta(z) \not\equiv 0$. Это последнее обстоятельство позволяет перейти от линейных функциональных приближающих форм для функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ к линейным приближающим числовым формам от $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$, где $\alpha \neq 0$ — уже фиксированное число.

Лемма V. *Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ образуют нормальную систему E-функций и удовлетворяют системе* (62). *Пусть также $T(z)$ будет общее наименьшее кратное знаменателей $Q_{k,s}(z)$ в системе* (62), *q — верхняя грань степеней $T(z)$ и $T(z)Q_{k,s}(z)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant m$, и p — наивысший порядок нуля при $z=0$ у функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$. Наконец, пусть*

$$R(z) = \sum_1^m P_k(z) f_k(z),$$

где многочлены $P_k(z)$ степеней не выше $2n-1$ выбраны так, чтобы выполнялись все условия леммы III *и*

$$R_s(z) = \sum_{k=1}^m P_{s,k}(z) f_k(z),$$

$$R_{s+1}(z) = T(z) R_s'(z), \quad R_1(z) = R(z), \quad P_{1,k}(z) = P_k(z).$$

Тогда, если α не нуль и не совпадает ни с одним корнем $T(z)$, и выполнено неравенство (75), *то ранг матрицы*

$$\left\| \begin{matrix} P_{1,1}(\alpha) & P_{1,2}(\alpha) & \ldots & P_{1,m}(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m+t,1}(\alpha) & P_{m+t,2}(\alpha) & \ldots & P_{m+t,m}(\alpha) \end{matrix} \right\|, \tag{76}$$

где $t = n + p + q\frac{m(m-1)}{2} - 1$ *есть* m.

Доказательство. Как мы уже видели выше, определитель $\Delta(z)$ системы форм $R_1(z), \ldots, R_m(z)$ при выполнении условий нашей леммы не тождественный нуль. Степень многочлена $\Delta(z)$, как мы уже выяснили, по формуле (73), при $m_0 = m$, не превысит $(2n-1)m + q\frac{m(m-1)}{2}$. С другой стороны, по условиям выбора

$P_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, m$ как мы уже видели, $\Delta(z)$ должен иметь при $z=0$ нуль порядка не ниже $2mn-n-m-p+1$. Поэтому

$$\Delta(z) = z^{2mn-n-m-p+1}\,\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ — многочлен степени не выше t,

$$t = (2n-1)\,m + q\,\frac{m(m-1)}{2} - 2mn + n + m + p - 1 = \\ = n + p + q\,\frac{m(m-1)}{2} - 1.$$

Поэтому в точке $z=\alpha \neq 0$ $\Delta(z)$ не может иметь нуль порядка выше t. Другими словами, $\Delta^{(\mu)}(\alpha) \neq 0$ при некотором μ, $0 \leqslant \mu \leqslant t$.

Вводя обозначение

$$\Delta(z;\, n_1, \ldots, n_m) = \begin{vmatrix} P_{n_1, 1}(z) & P_{n_1, 2}(z) & \ldots & P_{n_1, m}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n_2, 1}(z) & P_{n_2, 2}(z) & \ldots & P_{n_2, m}(z) \\ P_{n_m, 1}(z) & P_{n_m, 2}(z) & \ldots & P_{n_m, m}(z) \end{vmatrix},$$

где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, и воспользовавшись формулами (64), мы непосредственно получаем соотношение

$$T(z)\,\Delta'(z;\, n_1, \ldots, n_m) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \Delta(z;\, n_1, \ldots, n_{k-1},\, n_k+1,\, n_{k+1}, \ldots, n_m) - \\ - T(z) \sum_{k=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} P_{n_k, q}(z) \sum_{r=1}^{m} Q_{q, r}(z)\, \Delta_{k, r}(z;\, n_1, \ldots, n_m),$$

где $\Delta_{k, r}(z;\, n_1, \ldots, n_m)$ — алгебраическое дополнение элемента $P_{n_k, r}(z)$ в $\Delta(z;\, n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Меняя в последней сумме порядки суммирования, суммируя сначала по k, и отбрасывая определители, имеющие равные столбцы, мы получим окончательно соотношение

$$\Delta'(z;\ n_1,\ \ldots,\ n_m) = \\ = \frac{1}{T(z)} \sum_{k=1}^{m} \Delta(z;\ n_1,\ \ldots,\ n_{k-1},\ n_k+1,\ n_{k+1},\ \ldots,\ n_m) - \\ - \Delta(z;\ n_1,\ \ldots,\ n_m) \sum_{r=1}^{m} Q_{r,\,r}(z). \qquad (77')$$

Если мы допустим, что ранг матрицы (76) меньше m, то $\Delta(\alpha;\ n_1,\ \ldots,\ n_m) = 0$ при $n_m \leqslant m+t$. Из соотношений (77) следует тогда вследствие $T(\alpha) \neq 0$, что $\Delta'(\alpha;\ n_1,\ \ldots,\ n_m) = 0$ при $n_m \leqslant m+t-1$. Дифференцируя соотношение (77), мы последовательно приходим из получающихся при этом соотношений к тому, что $\Delta^{(\mu)}(\alpha;\ n_1,\ \ldots,\ n_m) = 0$ при $n_m \leqslant m+t-\mu$. Но при некотором μ, $\mu \leqslant t$,

$$\Delta^{(\mu)}(\alpha) = \Delta^{(\mu)}(\alpha;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \neq 0.$$

Значит, при некотором $\mu \leqslant t$ должно выполняться неравенство $m > m+t-\mu$, что невозможно в силу неравенства $\mu \leqslant t$. Этим наша лемма доказана.

Мы условимся теперь считать, что во всех дальнейших леммах и основной теореме этой главы сохраняются определения и свойства величин, участвующих в формулировке леммы V.

Докажем необходимые в дальнейшем оценки величин $|R_k(\alpha)|$ и $\overline{|P_{k,\,s}(\alpha)|}$, предполагая, что число $\alpha \neq 0$ и все коэффициенты функции $f_1(z),\ \ldots,\ f_m(z)$, $T(z)$, $Q_{k,\,s}(z)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant m$, и многочленов $P_{1,\,s}(z) = P_s(z)$, $1 \leqslant s \leqslant m$, в силу их выбора по лемме III принадлежат к конечному алгебраическому полю K степени ν.

Лемма VI. *Пусть α принадлежит полю K и $k \leqslant m+t$.*

Тогда

$$\left.\begin{aligned} R_k(\alpha) &= O\left[n^{-(2m-5-\varepsilon)\,n}\right], \\ \overline{|P_{k,\,s}(\alpha)|} &= O\left[n^{(3+\varepsilon)\,n}\right], \quad 1 \leqslant s \leqslant m, \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Условимся при одновременном выполнении неравенств $|a_k| \leqslant b_k$, $b_k \geqslant 0$ $k=0, 1, 2, \ldots,$ писать $f_1(z) \ll f_2(z)$, если

$$f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{и} \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

и, если

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^k,$$

то

$$\bar{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| z^k.$$

Прежде всего, так как $R(z)$ выбрано по лемме III, то вследствие условий (54), (55) и (56) этой леммы

$$R(z) \ll \overline{R}(z) = \sum_{0}^{\infty} |a_k| \frac{z^k}{k!} = \sum_{\nu=(2m-1)n}^{\infty} \nu^{\varepsilon\nu} O(n^{2n}) \frac{z^\nu}{\nu!}, \tag{79}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$.

Далее,

$$T(z) \ll C(1+z)^q; \; T(z)\, Q_{k,\,s}(z) \ll C(1+z)^q,$$

где C и q — постоянные, от n не зависящие.

Отсюда следует, что

$$T'(z) \ll Cq(1+z)^q$$

и что, вследствие соотношения

$$R_{k+1}(z) = T(z)\, R_k'(z),$$

$$\overline{R}_2(z) \ll C(1+z)^q\, \overline{R}'(z);$$

$$\overline{R}_3(z) \ll C^2(1+z)^{2q}\,[q\overline{R}'(z) + \overline{R}''(z)] =$$

$$= C^2(1+z)^{2q} \frac{d}{dz}\left(q + \frac{d}{dz}\right)\overline{R}(z),$$

и, по индукции,

$$\overline{R}_{k+1}(z) \ll C^k (1+z)^{kq} \prod_{s=0}^{k-1} \left(sq + \frac{d}{dz}\right) \overline{R}(z). \tag{80}$$

Совершенно так же, вследствие соотношения

$$P_{k+1,\,s}(z) = T(z)\, P'_{k,\,s}(z) + \sum_{r=1}^{m} P_{k,\,r}(z)\, T(z)\, Q_{r,\,s}(z),$$

по индукции доказывается неравенство

$$P_{k+1,\,s}(z) \ll C^k (1+z)^{kq+2n-1} \prod_{r=0}^{k-1} (rq+m+2n-1)\, O\left[n^{(2+\varepsilon)n}\right], \tag{81}$$

так как коэффициенты $P_{k,\,s}(z)$, $s=1, \ldots, m$, удовлетворяют условиям леммы III. Заметим, что в силу условий этой леммы наше последнее неравенство останется верным, если у всех многочленов $P_{k,\,s}(z)$, $T(z)$ и $T(z)\,Q_{k,\,s}(z)$ коэффициенты из поля K заменить одновременно на числа, им сопряженные, из поля K', сопряженного K. Так как при $k \leqslant m+t = n+n_0$, $n_0 = O(1)$,

$$\prod_{s=0}^{k-1}\left(sq+\frac{d}{dz}\right)\overline{R}(z) \ll (kq)^k \left(1+\frac{d}{dz}\right)^k \overline{R}(z) \ll$$

$$\ll (kq)^k O\left(n^{2n}\right)\left(1+\frac{d}{dz}\right)^k \sum_{s=(2m-1)n}^{\infty} s^{\varepsilon s}\frac{z^s}{s!} \ll$$

$$\ll (2kq)^k O\left(n^{2n}\right) \sum_{s=(2m-2)n-n_0}^{\infty} (s+n+n_0)^{\varepsilon(s+n+n_0)}\frac{z^s}{s!} \ll$$

$$\ll O\left[n^{(3+\varepsilon)n}\right] \sum_{s=(2m-2)n-n_0}^{\infty} \frac{z^s}{s^{(1-3\varepsilon)s}},$$

при любом ε, $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$, то, полагая $|\alpha| = \rho$, мы получаем окончательно из неравенства (80), что

$$|R_{k+1}(\alpha)| < C^k (1+\rho)^{kq} O\left[n^{(3+\varepsilon)n}\right] \sum_{\nu=(2m-2)n-n_0}^{\infty} \frac{\rho^\nu}{\nu^{(1-3\varepsilon)\nu}} <$$
$$< O\left[n^{(3+2\varepsilon)n}\right] n^{-(1-4\varepsilon)(2m-2)n} = O\left[n^{-(2m-5-\varepsilon')n}\right]$$

при любом $\varepsilon' > 8m\varepsilon$ и $n > n_2(\varepsilon')$, так как ε сколь угодно мало.

Далее, из неравенства (81), полагая в нем $z=\alpha'$, где α' — сопряженное α в поле K', сопряженном K, и заменяя коэффициенты $P_s(z)$, $T(z)$ и $Q_{k,s}(z)$ их сопряженными из K', мы будем иметь для всех $k \leqslant m+t = n+n_0$, $n_0 = O(1)$, что

$$\left|\overline{P_{k+1,s}(\alpha)}\right| < n^{\varepsilon n} n^{(1+\varepsilon)n} O\left[n^{(2+\varepsilon)n}\right] < O\left[n^{(3+\delta)n}\right],$$

при любом $\delta > 0$ и $n > n_3(\delta)$, так как ε может быть взято сколь угодно малым. Этим наша лемма полностью доказана.

Введем определение *ранга совокупности*, вообще говоря комплексных, чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ относительно данного конечного алгебраического поля K. Мы будем говорить, что совокупность m чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ имеет в поле K ранг r, если среди этих m чисел имеется r, и только r, чисел, линейно независимых в поле K. Другими словами, если система $\omega_1, \ldots, \omega_m$ имеет в поле K ранг r, то ее элементы удовлетворяют $m-r$, и только $m-r$, независимым линейным соотношениям

$$\sum_{s=1}^{m} C_{k,s}\,\omega_s = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-r,$$

где все $C_{k,s}$ — элементы поля K.

Лемма VII. *Допустим, что α и все коэффициенты m E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ принадлежат конечному алгебраическому полю K степени ν и система этих E-функций нормальна. Тогда, если $\alpha T(\alpha) \neq 0$, то ранг числовой системы $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ относительно K не меньше, чем* $\frac{m}{2\nu}$.

Доказательство. Так как, по предположению, α не является полюсом ни одной из функций $Q_{k,s}(z)$, то α — регулярная точка для системы (62) и хотя бы одно из чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ должно быть отлично от нуля, другими словами, без нарушения общности можно допустить, что $f_1(\alpha) \neq 0$. Если ранг системы $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ относительно поля K будет r, то должны иметь место соотношения

$$L_k = \sum_{s=1}^{m} A_{k,s} f_s(\alpha) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-r, \tag{82}$$

$$|A_{k,s}^{(i)}| \leqslant A; \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu; \quad 1 \leqslant k \leqslant m-r; \quad 1 \leqslant s \leqslant m,$$

где L_k — линейно независимые формы величин $f_1(\alpha), \ldots$ $\ldots, f_m(\alpha)$, числа $A_{k,s}$ — целые числа поля K, числа $A_{k,s}^{(i)}$ — сопряженные $A_{k,s} = A_{k,s}^{(1)}$, принадлежащие полю K_i, сопряженному полю K, и A — некоторая постоянная. По лемме V мы можем построить линейные формы

$$U_k = \sum_{s=1}^{m} P_{k,s}(\alpha) f_s(\alpha), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m+t, \tag{83}$$

где $P_{k,s}(z)$ — многочлены степени не выше, как нетрудно подсчитать, чем $2n-1+q(k-1)$, коэффициенты которых — целые числа поля K, причем ранг матрицы системы (83) есть m. Поэтому можно из системы (83) выбрать m линейно независимых линейных форм

$$U_{k_\sigma} = \sum_{s=1}^{m} P_{k_\sigma,s}(\alpha) f_s(\alpha), \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant m, \tag{84}$$

причем $k_\sigma \leqslant m+t$, $1 \leqslant \sigma \leqslant m$. Так как формы (82) в числе $m-r$ линейно независимы, то из числа m линейно независимых форм U_{k_σ} можно выбрать r форм, которые вместе со всеми формами (82) будут образовывать систему уже m линейно независимых форм от величин $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$. Пусть это будут формы $U_{k_1}, \ldots, U_{k_r}$. Положив $N = 2n-1+q(m+t-1) = (q+2)n+O(1)$ и

$$a^N P_{k_\sigma,s}(\alpha) = A_{m-r+\sigma,s}, \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant r, \quad 1 \leqslant s \leqslant m,$$

где a — целое, $a > 0$, такое, что $a\alpha$ — целое алгебраическое, мы будем иметь, что линейные формы

$$L_k = \sum_{s=1}^{m} A_{k,s} f_s(\alpha), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

будут линейно независимыми. Все числа $A_{k,s}$, $m-r+1 \leqslant k \leqslant m$, будут теперь целыми алгебраическими из поля K, и вследствие леммы VI будут выполнены неравенства

$$\left|\overline{A_{k,s}}\right| < a^N O\left[n^{(3+\varepsilon)n}\right] = O\left[n^{(3+\delta)n}\right] \tag{85}$$

при любом $\delta > 0$ и $1 \leqslant s \leqslant m$, $m-r+1 \leqslant k \leqslant m$.

Так как формы L_k линейно независимы относительно $f_1, f_2, \ldots, f_m$, то определитель этой системы D

$$D = D_1 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,m} \end{vmatrix} \tag{86}$$

не равен нулю и будет целым алгебраическим числом. Умножая первый столбец на $f_1(\alpha) \neq 0$ и складывая с ним остальные столбцы, умноженные на соответствующие $f_k(\alpha)$, мы получим равенство

$$f_1(\alpha) D_1 = \begin{vmatrix} L_1 & A_{1,2} & \ldots & A_{1,m} \\ L_2 & A_{2,2} & \ldots & A_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_m & A_{m,2} & \ldots & A_{m,m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но миноры элементов первого столбца при $k > m-r$ не превосходят по модулю, вследствие (85), величины $m^m A^{m-r} O\left[n^{(3+\delta)(r-1)n}\right]$. Поэтому вследствие условий (78) леммы VI имеет место неравенство

$$\begin{gathered} |D_1| < \lambda m^m A^{m-r} O\left[n^{(3+\delta)(r-1)n}\right] \sum_{k=m-r+1}^{m} |L_k| < \\ < \lambda m^{m+1} A^{m-r} O\left[n^{(3+\delta)(r-1)n}\right] O\left[n^{-(2m-5-\varepsilon)n}\right] < \\ < O\left[n^{-(2m-3r-2-\varepsilon_1)n}\right], \end{gathered} \tag{87}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно мало и $\lambda = \dfrac{1}{|f_1(\alpha)|}$. Если в определителе D_1 заменить все элементы сопряженными, принадлежащими полю K_i, сопряженному полю K, то мы получим определитель D_i, сопряженный D_1,

$$D_i = \begin{vmatrix} A_{1,1}^{(i)} & \ldots & A_{1,m}^{(i)} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ A_{m,1}^{(i)} & \ldots & A_{m,m}^{(i)} \end{vmatrix},$$

причем $D_i \neq 0$, и целое алгебраическое число. Оценивая модуль D_i, мы в силу неравенств (82) и (85) получаем, что

$$|D_i| < m^m A^{m-r} O\left[n^{(3+\delta)rn}\right] = O\left[n^{(3+\delta_1)rn}\right], \tag{88}$$

где $\delta_1 > 0$ сколь угодно мало и $2 \leqslant i \leqslant \nu$.

Но норма целого алгебраического числа, не равного нулю, всегда не меньше 1. Поэтому в силу неравенств (87) и (88)

$$1 \leqslant \prod_{i=1}^{\nu} |D_i| < O\left[n^{(3+\delta_1)(\nu-1)rn}\right] O\left[n^{-(2m-3r-2-\varepsilon_1)n}\right] <$$
$$< O\left[n^{(3\nu r+2-2m+\varepsilon_0)n}\right],$$

где $\varepsilon_0 > 0$ сколь угодно мало. Из этого неравенства, которое должно быть верно при достаточно большом n, уже следует неравенство $3\nu r - 2m + 2 + \varepsilon_0 > 0$, или, так как ε_0 может быть взятым сколь угодно малым, неравенство

$$r \geqslant \frac{2m-2}{3\nu}.$$

Мы доказали, таким образом, нашу лемму для $m \geqslant 4$, так как в этом случае $2m - 2 \geqslant \frac{3}{2} m$. Если $m = 3$, то $r \geqslant \frac{4}{3\nu}$, другими словами, $r \geqslant 1$, $\nu > 1$ и $r \geqslant 2$, $\nu = 1$. В случае же $m = 1, 2$; $r \geqslant 1$. Эти же границы даются и нашей леммой. Лемма доказана теперь полностью.

§ 4. Общая теорема об алгебраической независимости значений E-функций и следствия из нее

Нетрудно заметить, что если m функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение линейной системы (62) с рациональными $Q_{k,s}(z)$, коэффициенты которых алгебраические числа, то и μ функций $F(z)$, $\mu = \frac{(m+N)!}{m!\,N!}$,

$$F(z) = f_1^{N_1}(z) \ldots f_m^{N_m}(z), \quad \sum_{k=1}^{m} N_k \leqslant N,$$

где $N_1, \ldots, N_m$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяют системе типа (62) при $m = \mu$ и некоторых рациональных коэффициентах $Q_{k,s}(z)$, числовые коэффициенты которых в свою очередь принадлежат к конечному алгебраическому полю. Действительно, дифференцируя $F(z)$, мы будем иметь соотношения

$$F'(z) = \sum_{k=1}^{m} N_k f_1^{N_1}(z) \ldots f_m^{N_m}(z) \frac{f_k'(z)}{f_k(z)},$$

из которых и будет следовать наше утверждение, если заменить $f_k'(z)$ с помощью (62). Пользуясь этим обстоятельством и последней леммой предыдущего параграфа, мы можем доказать уже одну общую теорему.

Основная теорема. *Предположим, что m E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ образуют нормальную систему и $\alpha T(\alpha) \neq 0$, где α — алгебраическое число, а $T(z)$ — общее наименьшее кратное знаменателей рациональных $Q_{k,s}(z)$ из системы (62), решением которой являются наши E-функции. Если тогда при любом N $\mu = \frac{(m+N)!}{m!\,N!}$ функций $f_1^{N_1}(z) \ldots f_m^{N_m}(z)$, $N_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $\sum_{i=1}^{m} N_i \leqslant N$, образуют нормальную систему E-функций, то числа $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ не могут быть связаны между собой никаким алгебраическим соотношением с алгебраическими коэффициентами, отличными от нуля в совокупности.*

Доказательство. Пусть $S[f_1, f_2, \ldots, f_m]$ будет многочлен относительно $f_1, f_2, \ldots, f_m$ степени s, по совокупности переменных, с коэффициентами из алгебраического поля K степени ν, к которому принадлежат и все коэффициенты функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Пусть число N будет целым, $N \geqslant s$. Рассмотрим $\mu_{N-s} = \frac{(m-s+N)!}{m!\,(N-s)!}$ многочленов

$$L(z) = f_1^{N_1}(z) \ldots f_m^{N_m}(z)\, S[f_1(z), \ldots, f_m(z)], \qquad (88')$$

$$\sum_{i=1}^{m} N_i \leqslant N - s,$$

где N_i — любые целые неотрицательные числа. Если рассматривать эти многочлены L как линейные формы относительно переменных $f_1^{N_1} \ldots f_m^{N_m} = t_{N_1,\ldots,N_m}$, то, очевидно, эти μ_{N-s} линейных форм будут линейно независимы. Так как μ_N функций $f_1^{N_1}(z) \ldots f_m^{N_m}(z)$, $\sum_{k=1}^{m} N_k \leqslant N$, образуют нормальную систему E-функций и α удовлетворяет условиям леммы VII, то ранг r системы μ_N чисел $f_1^{N_1}(\alpha) \ldots f_m^{N_m}(\alpha)$ относительно поля K степени ν не может быть меньше $\frac{\mu_N}{2\nu}$; другими словами, эти числа не могут быть связаны между собой более чем $\mu_N - r \leqslant \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right)\mu_N$ независимыми линейными соотношениями с коэффициентами из поля K. Но если имеет место равенство

$$S[f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)] = 0, \qquad (89)$$

то из (88′) мы получаем ровно μ_{N-s} линейных независимых соотношений между нашими μ_N числами. Поэтому должно выполняться неравенство $\mu_{N-s} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right)\mu_N$, или неравенство

$$\frac{(N+m-s)!}{m!\,(N-s)!} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right)\frac{(N+m)!}{m!\,N!}.$$

Но из этого неравенства, так как N по условию теоремы можно брать сколь угодно большим, следует, что для сколь угодно большого N верно неравенство

$$\frac{1}{m!}N^m+O(N^{m-1})\leqslant\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\frac{1}{m!}N^m+O(N^{m-1}),$$

что, очевидно, невозможно. Этим и доказывается невозможность соотношения (89).

Благодаря доказанной основной теореме доказательство алгебраической независимости значений E-функций в конечном алгебраическом поле при алгебраических значениях аргумента сводится на доказательство нормальности конечной совокупности произведений степеней этих функций. Из этой теоремы уже непосредственно следует теорема Линдемана. Действительно, пусть алгебраические числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ конечного поля K будут линейно независимы в рациональном поле. Тогда m функций $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_m z}$, которые, очевидно, будут E-функциями, образуют нормальную систему E-функций, так как являются решением распавшейся системы

$$f_k'(z)=\alpha_k f_k(z), \qquad 1\leqslant k\leqslant m$$

и линейное соотношение между ними с полиномиальными коэффициентами невозможно. Более того, $\mu_N=\frac{(N+m)!}{m!N!}$ функций $e^{\gamma z}$, $\gamma=\sum_{k=1}^{m}N_k\alpha_k$, $\sum_{1}^{m}N_k\leqslant N$ также будут решением такой же распавшейся системы и ввиду того, что все γ различны, линейное соотношение между ними с полиномиальными коэффициентами невозможно. Поэтому будут выполнены для функций $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_m z}$ условия основной теоремы, при $\alpha=1$, что и доказывает теорему Линдемана.

Покажем теперь, как из этой общей теоремы следует трансцендентность значений цилиндрических функций.

Рассмотрим функцию $K_\lambda(z)$,

$$K_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{90}$$

при рациональном $\lambda \neq -m$, $m=1, 2, \ldots$ Будем считать также, что $\lambda \neq \frac{2m-1}{2}$, где m — любое целое число, так как в противном случае, как легко показать, $K_\lambda(z)$ сводится к простейшей линейной комбинации показательных функций и многочленов.

Покажем, что $K_\lambda(z)$ — E-функция. Положим $\lambda = \frac{m}{q}$, $(m, q)=1$, $q \geqslant 1$, где m и q — целые числа. Тогда, если

$$K_\lambda(z) = \sum (-1)^n a_{2n} \frac{z^{2n}}{2n!},$$

то

$$a_{2n} = \frac{2^{-2n} q^n (2n)!}{n!\,(m+q)\ldots(m+nq)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Если простое число p делит q, то $(p, m)=1$, откуда следует, что $(m+nq, p)=1$, $n \geqslant 0$. Поэтому если $2^{2n} a_{2n} = \frac{A}{Q}$, где A и Q — целые рациональные числа, $(A, Q)=1$, то $(p, Q)=1$. Найдем в какой наибольшей степени простое число p, $(p, q)=1$, может делить Q. Пусть эта степень будет ν_p. Как хорошо известно из элементарной теории чисел, простое число p входит в отношение $\frac{(2n)!}{n!}$ в степени μ_p

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left\{ \left[\frac{2n}{p^k} \right] - \left[\frac{n}{p^k} \right] \right\}.$$

Рассмотрим сравнение

$$m + qk \equiv 0 \bmod p.$$

Пусть k_1 будет наименьшее неотрицательное решение этого сравнения. Число k_1 всегда существует, так как $(q, p)=1$ и, очевидно, $k_1 < p$. Тогда, как известно, все положительные решения k этого сравнения будут иметь вид $k = k_1 + rp$, $r = 0, 1, \ldots$ Поэтому число чисел в ряду $m+q$, $m+rq, \ldots, m+nq$, делящихся на p, будет $\sigma_1 + 1$, где σ_1 определится из неравенства $k_1 + \sigma_1 p \leqslant n$.

Отсюда $\sigma_1 = \left[\frac{n-k_1}{p}\right]$. Конечно, если $k_1 > n$, то $\sigma_1 = -1$. Совершенно так же число чисел в ряду $m+q, \ldots, m+nq$, делящихся на p^ν, которое мы обозначим $\sigma_\nu + 1$, будет равно $1+\left[\frac{n-k_\nu}{p^\nu}\right]$, $0 \leqslant k_\nu < p$. Поэтому число p будет входить в произведение $(m+q)(m+2q)\ \ldots\ (m+nq)$ в степени, не превосходящей

$$\sum_{\nu=1}^{t}\left(1+\left[\frac{n-k_\nu}{p^\nu}\right]\right) < t + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}\left[\frac{n}{p^\nu}\right],\quad t = \left[\frac{\ln(m+nq)}{\ln p}\right].$$

Отсюда уже следует, что степень p, делящая Q, не превосходит

$$\left[\frac{\ln(m+nq)}{\ln p}\right] + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{2\left[\frac{n}{p^\nu}\right] - \left[\frac{2n}{p^\nu}\right]\right\} \leqslant \left[\frac{\ln(m+nq)}{\ln p}\right],$$

так как $2\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{2n}{s}\right] \leqslant 0$.

Теперь уже ясно, что если мы положим

$$\Omega_n = \prod_{p \leqslant m+nq} p^{\left[\frac{\ln(m+nq)}{\ln p}\right]},$$

то мы будем иметь неравенство

$$\Omega_n \leqslant \prod_{p \leqslant m+nq}(m+nq) = e^{\pi(m+nq)\ln(m+nq)} < e^{2(m+nq)},$$

вследствие хотя бы простейшей чебышевской оценки $\pi(x)\ln x < 2x$.

Так как $2^{2n}\Omega_n a_{2k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ будут целыми числами и $2^{2n}\Omega_n = O(n^{\varepsilon n})$, то действительно $K_\lambda(z)$ будет наравне с $K'_\lambda(z)$ E-функцией.

Дифференцируя $K_\lambda(z)$, мы для этой функции будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка

$$K''_\lambda(z) + \frac{2\lambda+1}{z}K'_\lambda(z) + K_\lambda(z) = 0. \tag{91}$$

Полагая $K_\lambda(z)=f_1(z)$, $K'_\lambda(z)=f_2(z)$, мы получим для E-функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейную систему

$$\left.\begin{aligned} f_1'(z) &= f_2(z), \\ f_2'(z) &= -\frac{2\lambda+1}{z}f_2(z)-f_1(z). \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Для того чтобы доказать нормальность совокупности E-функций $f_1^{n_1}(z)\,f_2^{n_2}(z)$, $n_1+n_2\leqslant N$, нам понадобятся вспомогательные чисто аналитические рассмотрения. Прежде всего нам надо будет доказать отсутствие алгебраических соотношений между функциями

$$y=J_\lambda(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda K_\lambda(x), \quad y' \text{ и } x.$$

Отсутствие подобных соотношений между y', y, x эквивалентно в силу рациональности λ отсутствию алгебраических соотношений между x, $K_\lambda(x)$ и $K'_\lambda(x)$, а все рассуждения удобнее вести с функцией $J_\lambda(x)$. Функция $y=J_\lambda(x)$, являющаяся цилиндрической функцией, удовлетворяет уравнению

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y=0, \tag{93}$$

причем λ не равно целому отрицательному числу или половине любого нечетного числа. Допустим, что y есть какое-нибудь фиксированное нетривиальное решение уравнения (93), удовлетворяющее, кроме (93), еще и уравнению

$$P(x, y, y')=\sum_{k=0}^{m} P_k(x, y, y')=0, \tag{94}$$

где $P(x, y, y')$ — не равный тождественно нулю многочлен относительно x, y, y', а $P_k(x, y, y')$ — однородные, измерения k, многочлены относительно y и y'. Многочлен $P(x, y, y')$ можно без нарушения общности предполагать неприводимым и считать, что $P_m(x, y, y')\not\equiv 0$, $m\geqslant 1$. Нетрудно заметить, что y' должно входить в $P(x, y, y')$. В противном случае уравнение (94) показывало бы, что y — алгебраическая функция. Но тогда y на бесконечности разлагалось бы в ряд по рациональным, с одним и тем же знаменателем, убывающим степеням x. Легко видеть, что любое такое разложение, будучи подставлено вместо y в (93), не может обратить левую часть тождественно в нуль, так как его единственный старший член останется единственным после дифференцирований и в левой части (93). Поэтому y не может быть алгебраической функцией и y' входит в $P(x, y, y')$. Из неприводимости и последнего рассуждения следует, что любой другой многочлен $R(x, y, y')$, обращающийся тождественно в нуль при подстановке в него выбранного нами решения y уравнения (93), должен нацело, алгебраически, как многочлен от x, y, y', делиться на $P(x, y, y')$. В противном случае можно было бы из двух уравнений исключить y' и мы опять пришли бы к тому, что y — алгебраическая функция. Продифференцируем по x уравнение (94) и воспользуемся уравнением (93). Мы получим новое уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}y'-\frac{\partial P}{\partial y'}\left[\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\left\{\frac{\partial P_k}{\partial x}+\frac{\partial P_k}{\partial y}y'-\frac{\partial P_k}{\partial y'}\left[\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y\right]\right\}=0, \tag{95}$$

причем, очевидно, k-й член суммы опять будет однородным относительно y' и y многочленом измерения k. Так как уравнение (95) опять дает алгебраическую связь между y, y', x, то его левая часть должна делиться на $P(x, y, y')$, причем, так как степени обоих многочленов относительно совокупности y и y' одинаковы, их отношение должно зависеть только от x и, как легко видеть, должно иметь вид $a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$, где a, b и c постоянные. Более того, так как измерения членов сумм в (94) и (95) одинаковы при одном и том же k, то для $P_m(x, y, y')\not\equiv 0$ мы будем иметь тождество по переменным x, y, y'

$$\frac{\partial P_m}{\partial x}+\frac{\partial P_m}{\partial y}y'-\frac{\partial P_m}{\partial y'}\left[\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y\right]=$$
$$=\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)P_m. \tag{96}$$

Но левая часть (96), так как (96) тождество по x, y, y', есть при любом решении y уравнения (93) $\frac{dP_m(x)}{dx}$. Поэтому

$$\frac{dP_m(x, y, y')}{dx}=\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)P_m(x, y, y'),$$

если y — любое решение (93) и после интеграции

$$P_m(x, y, y')=\theta x^b e^{ax-\frac{c}{x}}, \tag{97}$$

где θ — постоянная, зависящая только от выбранного решения y. Пусть y_1 и y_2 — два любых линейно независимых решения уравнения (93). Полагая $y=t_1y_1+t_2y_2$ и подставляя в уравнение (97), мы получаем, что $\theta=\theta(t_1, t_2)$ должна быть однородным многочленом измерения m от t_1 и t_2, так как таким многочленом является левая часть (97). Но тогда $\theta(t_1, t_2)=t_2^m\theta\left(\frac{t_1}{t_2}\right)$, откуда следует, что t_1 и t_2 можно выбрать в совокупности отличными от нуля и такими, чтобы $\theta(t_1', t_2')$ обращалась в нуль. Для выбранного, таким образом, решения $y_0=t_1'y_1+t_2'y_2$ мы получаем уравнение

$$P_m(x, y_0, y_0')=y_0^mR(x, t)\equiv 0, \tag{98}$$

где $t=\frac{y_0'}{y_0}$ и $R(x, t)$ — многочлен, так как $P_m(x, y, y')$ однородный относительно y, y' многочлен. Так как $y_0'\not\equiv 0$, то уравнение (98) показывает, что t — алгебраическая функция x. Нетрудно показать, что t удовлетворяет уравнению первого порядка. Действительно, пользуясь уравнением (93), мы будем иметь уравнение

$$\frac{dt}{dx}=\frac{y_0''y_0-y_0'^2}{y_0^2}=-\frac{\frac{1}{x}y_0'y_0+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y_0^2+y_0'^2}{y_0^2}, \tag{99}$$

или

$$\frac{dt}{dx}+\frac{1}{x}t+t^2+1-\frac{\lambda^2}{x^2}=0. \tag{100}$$

Так как t есть алгебраическая функция x, то при больших значениях x t должно разлагаться в ряд по убывающим, целым или рациональным, с одним и тем же знаменателем, степеням x,

$$t=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha_k}, \quad a_0\neq 0,\ \alpha_k>\alpha_{k+1}. \tag{101}$$

Подставляя это разложение в (100), мы должны получить в левой его части тождественный нуль. Так как в (100) есть t^2, то $\alpha_0\leqslant 0$, а ввиду присутствия 1, $\alpha_0\geqslant 0$. Поэтому, сравнивая нулевые степени x, мы получаем, что $a_0^2+1=0$, или $a_0=\pm i$. Следующими по величине степенями x в левой части (100) будут a_0x^{-1} и $2a_0a_1x^{\alpha_1}$. Так как остальные степени меньше, то $\alpha_1=-1$ и $a_0(1+2a_1)=0$. Отсюда $a_1=-\frac{1}{2}$. Далее, если мы допустим, что все α_k, $k=1, \ldots, n$, — целые отрицательные числа, то член $2a_0a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}$, который входит в левую часть (100) из t^2, может сократиться только со степенями x с показателями, не превышающими α_{n+1} и, следовательно, вида -2, α_k-1, $\alpha_k+\alpha_s$; $1\leqslant k\leqslant n$, $0\leqslant s\leqslant n$. Так как все эти показатели, по предположению, — целые отрицательные числа, то и α_{n+1} — тоже целое отрицательное число. Так как $\alpha_0=0$, $\alpha_1=-1$, то, по индукции, мы можем утверждать, что все α_k, $k\geqslant 1$ — целые отрицательные числа. Отсюда следует, что

$$t=\sum_{0}^{\infty} a_k x^{-k};$$

другими словами, что $t=t(x)$ регулярна в бесконечности. Так как особыми точками уравнения (93), как нетрудно видеть, могут быть только точки 0 и ∞, то $t=\frac{y_0'}{y_0}$ не может иметь точек ветвления нигде, кроме 0 и ∞. Но мы доказали, что в бесконечности $t(x)$ регулярна и, значит, она и в нуле не может иметь точки ветвления. Но алгебраическая функция без точек ветвления должна быть рациональной и, значит, $t(x)$ — рациональная функция x.

Поэтому $t(x)$ при $x=0$ может быть разложена в ряд Лорана; другими словами,

$$t=\sum_{k=-m}^{\infty} C_k x^k.$$

Вставляя это разложение в уравнение (100) и приводя подобные члены, мы сразу, из-за присутствия t^2, получаем, что $m \leqslant 1$ и, из-за члена $-\lambda x^{-2}$, что $m=1$ и $-C_{-1}+ +C_{-1}^2+C_{-1}-\lambda^2=0$. Отсюда $C_{-1}=\pm\lambda$. Легко видеть, делая подстановку

$$y=(x-x_0)^m y_1(x),\ x_0\neq 0,\ y_1(x_0)\neq 0,$$

где $y_1(x)$ регулярна в точке x_0, в уравнение (93), что полюса в этой точке у решения не может быть, а нуль y_0 не может быть порядка выше единицы. Поэтому полюса рациональной функции $t(x)=\frac{y_0'}{y_0}$ будут всегда полюсами первого порядка с вычетами 1. Так как мы уже знаем вид $t(x)$ вначале, то мы имеем право записать теперь $t(x)$ в форме

$$t(x)=\pm i\pm\frac{\lambda}{x}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x-x_k},$$

где x_k не равны нулю и различны. Пользуясь этим видом $t(x)$, мы можем записать ее разложение на бесконечности в форме

$$t(x)=\pm i+[\pm\lambda+m]\,x^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k x^{-k}.$$

Сравнивая полученное значение a_1 с ранее найденным, мы видим, что λ должно удовлетворять условию

$$\lambda=\pm\left(m-\frac{1}{2}\right)=\pm\frac{2m-1}{2},$$

где m — целое число. Но по условию это невозможно. Значит, и соотношение (94) также невозможно.

Пользуясь полученными результатами, мы можем доказать лемму VIII.

Лемма VIII. *Пусть y_0 и y_1 будут любые два линейно независимых решения уравнения* (93) *и λ не равно половине нечетного числа. Тогда не существует алгебраического соотношения между x, y_0, y_0' и y_1.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что имеет место соотношение

$$P(x, y_0, y_0', y_1) = f(x, y_0, y_0') y_1^n + \ldots = 0, \tag{102}$$

где $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — многочлен относительно x_1, x_2, x_3, x_4, а $f(x, y_0, y_0')$ — коэффициент при старшей степени y_1, входящей в $P(x, y_0, y_0', y_1)$. Функция $f(x, y_0, y_0')$, конечно, многочлен. Число $n \geqslant 1$, так как в противном случае соотношение (102) было бы алгебраическим соотношением между x, y_0, y_0', невозможность которого доказана выше. Мы предположим также, что $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — неприводимый многочлен. Если бы $P(x_1, \ldots, x_4)$ был произведением более чем одного неприводимого множителя, то, приравнивая нулю какой-то из них, мы получили бы для x, y_0, y_0', y_1 соотношение типа (102) с неприводимым P. Поэтому, если $R(x, y_0, y_0', y_1) = 0$ — любое другое алгебраическое соотношение между x, y_0, y_0', y_1, то многочлен $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$ должен делиться на $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$. В противном случае мы могли бы из двух соотношений исключить y_1 и получить алгебраическое соотношение между x, y_0, y_0', что невозможно. Дифференцируя (102) по x, получаем:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{df}{dx} y_1^n + nf y_1^{n-1} y_1' + \ldots = 0.$$

Но между y_0 и y_1, так как они линейно независимы и являются решениями линейного уравнения (93), по теореме Лиувилля существует зависимость

$$y_0 y_1' - y_1 y_0' = \frac{a}{x}, \qquad a \neq 0, \tag{103}$$

откуда

$$\frac{dP}{dx} = \left[\frac{df}{dx} + nf \frac{y_0'}{y_0}\right] y_1^n + \ldots = 0, \tag{104}$$

причем левая часть есть опять многочлен степени n относительно y_1 типа $y_0^{-1} P(x, y_0, y_0', y_1)$, так как во всех элементах левой части можно y_0'' заменить $-\frac{1}{x} y_0' - \left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right) y_0$. Так как левая часть (104), умноженная на y_0, должна нацело делиться на P, то мы можем записать тождественное в x, y_0, y_0', y_1 соотношение

$$\frac{P'}{P}=\frac{1}{f}\left(f'+nf\frac{y_0'}{y_0}\right)=\frac{f'}{f}+n\frac{y_0'}{y_0}, \tag{105}$$

где, если y_0, y_1 решения (93), то P' и f' будут производными по x. Но так как это тождество, то оно будет верным, каковы бы ни были линейно независимые решения y_0, y_1 (93), так как тогда будет иметь место (103), причем наше тождество от a не зависит. Поэтому, заменяя в (105) y_1 на $y_1+\sigma y_0$, где σ — произвольная постоянная, и интегрируя, мы будем иметь, что

$$P(x, y_0, y_0', y_1+\sigma y_0)=\gamma(\sigma) f(x, y_0, y_0') y_0^n,$$

где $\gamma(\sigma)$ — многочлен с постоянными коэффициентами степени n относительно σ. Если продифференцировать это соотношение по σ и положить $\sigma=0$, то мы получим, что

$$y_0[nfy_1^{n-1}+\ldots]-C_1 f y_0^n=0, \tag{106}$$

где C_1 — постоянная и следующие члены в скобках имеют относительно y_1 степени не выше $n-2$. Но, как мы уже знаем, левая часть (106) должна как многочлен от x, y_0, y_0', y_1 делиться на $P(x, y_0, y_0', y_1)$, что невозможно, так как степень левой части (106) не больше $n-1$ (степень P по отношению к y_1 равна $n \geqslant 1$). Поэтому в левой части все коэффициенты при y_1^{n-1}, y_1^{n-2}, ..., y_1 должны быть равны нулю. Но так как равенство $f(x, y_0, y_0')=0$, по доказанному, невозможно, то мы заключаем из (106), что $n=1$. Поэтому $P(x, y_0, y_0', y_1)$ должен быть первой степени относительно y_1, откуда

$$y_1=\frac{U_1(x, y_0, y_0')}{U_2(x, y_0, y_0')},$$

где U_1 и U_2 — многочлены относительно x, y_0, y_0', не имеющие общих делителей. Подставляя это представление y_1 в уравнение (103), мы получаем в силу (93) соотношение

$$\frac{y_0}{U_2^2}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_1}{\partial y_0}y_0'-\frac{\partial U_1}{\partial y_0'}\left(\frac{y_0'}{x}+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y_0\right)\right)U_2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y_0}y_0'-\frac{\partial U_2}{\partial y_0'}\left(\frac{y_0'}{x}+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y_0\right)\right)U_1\right]-\frac{U_1}{U_2}y_0'=\frac{a}{x}. \tag{107}$$

Это равенство, так как нетривиальное соотношение между x, y_0, y_0' невозможно, должно быть тождеством по переменным x, y_0, y_0'. Пусть d_1 будет наибольшая сумма показателей членов $y_0^{n_1}y_0'^{n_2}$, $n_1+n_2=d_1$, действительно входящих в U_1, а d_2 — в U_2. Соберем все члены степени d_1, входящие в U_1, и все члены степени d_2, входящие в U_2, и обозначим их суммы V_1 и V_2. Назовем размерностью рациональной функции $\frac{U_1}{U_2}$ разность $d=d_1-d_2$. Тогда, очевидно, размерность функции $\frac{U_1}{U_2}-\frac{V_1}{V_2}$ будет меньше d. Положив также $W=\frac{V_1}{V_2}$, мы видим, что W будет отношением однородных относительно y_0 и y_0' многочленов, причем размерность W есть d. Так как

$$y_1'=W'+\frac{d}{dx}\left[\frac{U_1}{U_2}-W\right], \tag{108}$$

то благодаря однородности (93) после замены $y_0''=-\frac{1}{x}y_0'-\left(1-\frac{\lambda^2}{x_2}\right)y_0$, измерение W', как отношения однородных по y_0, y_0' многочленов, остается равным d, а размерность другого слагаемого в (108) меньше d. Так как правая часть тождества (107) имеет нулевую размерность, член $y_0W'-y_0'W$ в левой части имеет размерность $d+1$, а размерность оставшихся членов меньше $d+1$, то $d+1\geqslant 0$. В противном случае (107) не могло бы быть тождеством. Если $d+1>0$, то член в левой части (107), $y_0W'-y_0'W$, не может сократиться ни с каким другим, будучи отношением однородных многочленов и имея высшую размерность. Отсюда следует, что $y_0W'-y_0'W=0$ или $W=Cy_0$, где C — постоянная. Так как, в силу невозможности алгебраических соотношений между x, y_0, y_0', $W=Cy_0$ — тождество в x, y_0, y_0', то в этом случае размерность W есть 1. Если же $d+1=0$, то, по тем же соображениям,

$$y_0W'-y_0'W=\frac{a}{x}, \qquad a\neq 0, \tag{109}$$

причем это тождество в переменных x, y_0, y', а W — отношение однородных относительно y_0, y_0' многочленов и размерность W есть $d=-1$. Заметим, что первый случай, когда $d=1$, приводится заменой, что всегда возможно, y_1 на y_1-Cy_0 ко второму случаю. Итак, всегда существует функция W размерности $d=-1$, обладающая высказанными выше свойствами и тождественно в переменных x, y_0, y_0' удовлетворяющая (109). Но, что крайне легко проверить, если W удовлетворяет (109), то W есть линейно независимое с y_0 решение (93). Так как (109) — тождество в переменных x, y_0, y_0' и W' остается производной по x от W при замене y_0 на любое другое решение (93), то (109) остается в силе при замене y_0 на любое другое решение (93). Заменяя y_0 на $t_0z_0+t_1z_1$, где z_0 и z_1 — любые линейно независимые решения (93), а t_0, t_1 — постоянные, мы можем теперь утверждать, что

$$W=W(x,\, t_0z_0+t_1z_1,\, t_0z_0'+t_1z_1')=T_0z_0+T_1z_1, \tag{110}$$

где T_0 и T_1 — некоторые постоянные, зависящие только от t_0 и t_1, так как W есть решение (93), а z_0 и z_1 линейно независимы. Вычисляя выражения $Wz_0'-W'z_0$ и $Wz_1'-W'z_1$ путем замены в них W на $T_0z_0+T_1z_1$ и пользуясь соотношением (103), мы будем иметь соотношения

$$Wz_1'-W'z_1=\frac{C_0}{x}\,T_1,\quad Wz_0'-W'z_0=-\frac{C_0}{x}\,T_0,$$

где C_0 — не зависящая от t_0 и t_1 постоянная. Эти соотношения показывают, что T_0 и T_1 суть однородные рациональные функции t_0 и t_1 размерности -1. Поэтому можно найти такие значения t_0 и t_1, отличные от нуля в совокупности и конечные, что хотя бы одно из чисел T_1 или T_2 обратится в бесконечность. Но тогда из (110) и линейной независимости z_0 и z_1 уже следует, что

$$W_1 = \frac{1}{W(x,\ z_2,\ z_2')} = 0,\ \ z_2 = t_0' z_0 + t_1' z_1,$$

где W_1 — рациональная однородная функция z_2, z_2' размерности 1. Но подобное алгебраическое соотношение, как было уже доказано, невозможно, и тем самым доказана невозможность соотношения (102).

Для доказательства алгебраической независимости в любом конечном алгебраическом поле чисел $K_\lambda(\alpha)$ и $K_\lambda'(\alpha)$ при $\alpha \neq 0$ алгебраическом и рациональном $\lambda \neq \frac{2n-1}{2}$, где n — целое, достаточно доказать, что система E-функций

$$f_1^{k_0}(z)\, f_2^{k_1}(z), \quad k_0 + k_1 \leqslant N, \quad f_1(z) = K_\lambda(z), \quad f_2(z) = K_\lambda'(z)$$

нормальна при любом N. Это прямое следствие основной теоремы, так как $f_1(z)$ и $f_2(z)$ образуют решение системы (92).

Полагая $F_{k,\,q}(z) = f_1^k(z)\, f_2^{q-k}(z)$, беря производную от $F_{k,\,q}(z)$ и пользуясь системой (92), мы получаем уравнения

$$F_{k,\,q}'(z) =$$
$$= kF_{k-1,\,q}(z) - (q-k)\,\frac{2\lambda+1}{x}\,F_{k,\,q}(z) - (q-k)\,F_{k+1,\,q}(z),$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ q, \tag{111}$$

где условимся считать $F_{-1,\,q} = F_{q+1,\,q} = 0$. Решением этой линейной системы является совокупность $q+1$ функций $F_{0,\,q}, \ldots, F_{q,\,q}$. Совокупность таких систем при $q = 0, 1, \ldots \ldots, N$ имеет решением совокупность функций $F_{k,\,q}(z)$, $0 \leqslant k \leqslant q$, $0 \leqslant q \leqslant N$, число которых $\mu_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$. Мы видим, что система линейных дифференциальных уравнений для μ_N функций распалась на $N+1$ примитивных систем (111). Если мы положим, что матрица фундаментальной системы решений системы (111) будет состоять из элементов $U_{k,s,q}(z)$, $0\leqslant k\leqslant q$, $0\leqslant s\leqslant q$, то доказательство нормальности системы наших μ_N функций $F_{k,q}(z)$ будет заключаться в доказательстве невозможности соотношения

$$T=\sum_{q=0}^{N}\sum_{k=0}^{q}\sum_{s=0}^{q}P_{k,q}(x)\,C_{s,q}U_{k,s,q}(x)\equiv 0, \qquad (112)$$

где $P_{k,q}(x)$ — отличные от нуля в совокупности многочлены, а $C_{s,q}$ — постоянные, также отличные от нуля в совокупности. Допустим, что соотношение (112) имеет место. Так как функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ удовлетворяют системе (92), то, заменяя $f_1(z)$ на V, а $f_2(z)$ на V', где V есть любое решение уравнения

$$V''+\frac{2\lambda+1}{x}V'+V=0, \qquad (113)$$

мы видим, что функции $F_{k,q}=V^kV'^{q-k}$, $0\leqslant k\leqslant q$ опять являются решением системы (111). Полагая $V=t_0V_0+$ $+t_1V_1$, где V_0 и V_1 — линейно независимые решения (113), а t_0, t_1 — постоянные, мы можем определить $q+1$ функций $U_{k,s,q}(z)$ соотношениями, тождественными по t_0, t_1

$$V^k(V')^{q-k}=\sum_{s=0}^{q}t_0^st_1^{q-s}U_{k,s,q}(x), \quad 0\leqslant k\leqslant q. \qquad (114)$$

То, что функции $U_{k,s,q}$, $0\leqslant k\leqslant q$, образуют решение системы (111), следует из возможности s-кратного дифференцирования $V^k(V')^{q-k}$ по t_0 и возможности после этого положить $t_0=0$, $t_1=1$. Такие действия с системой функций $V^k(V')^{q-k}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ q$, в силу линейности (111) приводят к системе функций, которая опять является решением (111). Линейная независимость $q+1$ решений $U_{0,s,q}$, $U_{1,s,q}$, $\ldots$, $U_{q,s,q}$ при $s=0,1,\ldots,q$ следует хотя бы из того, что любое линейное с постоянными коэффициентами соотношение между $U_{q,s,q}=$

$=\frac{q!}{s!\,(q-s)!}V_0^sV_1^{q-s}$, $0\leqslant s\leqslant q$, привело бы к алгебраическому уравнению для $\frac{V_0}{V_1}$. Это же невозможно в силу линейной независимости V_0 и V_1.

Положим

$$y_0=x^\lambda V_0,\ y_1=x^\lambda V_1.$$

Тогда y_0 и y_1 будут два линейно независимых решения уравнения (93) и, кроме того,

$$V_i'=x^{-\lambda}\left(y_i'-\frac{\lambda}{x}y_i\right),\quad i=0,\,1;\quad y_0y_1'-y_1y_0'=\frac{a}{x},\ (115)$$

где a — постоянная, $a\neq 0$. Делая простые преобразования, мы также получим, что

$$t_0V_0+t_1V_1=x^{-\lambda}(t_0y_0+t_1y_1),$$

$$t_0V_0'+t_1V_1'=x^{-\lambda}\left[t_0y_0'+t_1y_1'-\frac{\lambda}{x}(t_0y_0+t_1y_1)\right]=$$

$$=x^{-\lambda}\left[\left(\frac{y_0'}{y_0}-\frac{\lambda}{x}\right)(t_0y_0+t_1y_1)+\frac{at_1}{xy_0}\right]$$

в силу (115), откуда уже следует, что

$$\sum_{s=0}^{q}t_0^st_1^{q-s}U_{k,\,s,\,q}(x)=$$

$$=x^{-\lambda q}(t_0y_0+t_1y_1)^k\left[\left(\frac{y_0'}{y_0}-\frac{\lambda}{x}\right)(t_0y_0+t_1y_1)+\frac{at_1}{xy_0}\right]^{q-k}.\ (116)$$

Отсюда следует, что $x^{q(p+1)}y_0^{q-k}U_{k,\,s,\,q}(x)$ есть многочлен относительно y_0, y_0', y_1 и $x^{\frac{1}{r}}$, если $\lambda=\frac{p}{r}$. Умножая левую часть (112) на $y_0^Nx^{N(p+1)}$, предполагая, естественно, что не все произведения $P_{k,\,q}C_{s,\,q}=0$ и вставляя вместо $U_{k,\,s,\,q}(x)$ их значения из (116), мы получаем соотношение между $x^{\frac{1}{r}}$, y_0, y_0', y_1. Если при этом левая часть (112) не будет тождественным нулем по переменным $x^{\frac{1}{r}}$, y_0,

y_0', y_1, то, вставляя вместо $x^{\frac{1}{r}}$ произведение $\omega_k x^{\frac{1}{r}}$, где ω_k корень r-й степени из единицы, $\omega_1=1$, и перемножая полученные при $k=1, 2, \ldots, r$ выражения, мы приходим к нетривиальной алгебраической связи между x, y_0, y_0', y_1, что невозможно по лемме VIII. Итак, левая часть (112) после подстановки вместо $U_{k, s, q}$ их значений должна быть тождественным нулем в переменных x, y_0, y_0', y_1. Допустим теперь, что все произведения $P_{k, q} C_{s, q}=0$ для k, s; $1\leqslant k\leqslant q$, $1\leqslant s\leqslant q$ и $q=n+1, \ldots, N$.

Определим теперь из соотношения (116) вид $U_{k, s, n}(x)$. Мы будем иметь, что

$$U_{k, s, n}(x)=\frac{n!}{s!\,(n-s)!}\,x^{-\lambda n}\left(\frac{y_0'}{y_0}-\frac{\lambda}{x}\right)^{n-k} y_0^s y_1^{n-s}.$$

Вставляя эти выражения в левую часть (112) и собирая в ней все члены степени n по отношению к совокупности переменных y_0, y_0', y_1, мы получим, что их сумма должна быть тождественным нулем, так как (112) есть тождество по всем входящим в него переменным и члены одной степени относительно переменных y_0, y_0', y_1 не могут интерферировать с членами других степеней. Мы получили, таким образом, тождество

$$y_0^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} P_{k, n}(x)\, C_{s, n}\frac{n!}{s!\,(n-s)!}\left(\frac{y_0'}{y_0}-\frac{\lambda}{x}\right)^{n-k}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{n-s}\equiv 0,$$

в переменных $\frac{y_0'}{y_0}$ и $\frac{y_1}{y_0}$. Отсюда уже непосредственно следует, что

$$P_{k, n}(x)\, C_{s, n}=0 \text{ при } 0\leqslant k\leqslant n,\ 0\leqslant s\leqslant n.$$

Итак, мы доказали, что соотношение (112) не может иметь места, если хотя бы одно из произведений $C_{s, q} P_{k, q}(x)$ отлично от нуля.

Этим доказана нормальность системы E-функций $F_{k, q}(z)$, $0\leqslant k\leqslant q$, $0\leqslant q\leqslant N$, при любом N, откуда уже следует на основании основной теоремы этого параграфа, что числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K_\lambda'(\alpha)$ алгебраически независимы в любом конечном алгебраическом поле и, в частности трансцендентны, если $\alpha \neq 0$ алгебраическое, а λ рационально и не равно половине нечетного числа или отрицательному целому числу. Таким же путем можно доказать, что $2m$ чисел

$$K_\lambda(\alpha_1),\ K'_\lambda(\alpha_1),\ \ldots,\ K_\lambda(\alpha_m),\ K'_\lambda(\alpha_m)$$

при $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ различных, не равных нулю и алгебраических, и λ рациональном, но не равном половине нечетного числа, алгебраически независимы в любом конечном алгебраическом поле. Отметим, что доказательство нормальности системы E-функций представляет большие трудности, если эти функции являются произведениями степеней некоторой функции и ее производных, причем основная функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами степени выше второй.

§ 5. Вопросы трансцендентности и алгебраической независимости в рациональном поле чисел, заданных бесконечными рядами или являющихся корнями алгебраических или трансцендентных уравнений

Будем говорить, что число η алгебраически не выражается через числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, если между числами η, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ нет алгебраических соотношений в рациональном поле. Введя понятие алгебраической невыражаемости, Д. Д. Мордухай-Болтовской впервые поставил вопрос о признаках, позволяющих судить об алгебраической невыражаемости числа η через числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ по характеру приближения числа η рациональными дробями или, более общо, алгебраическими числами. Условимся, что (в последующем изложении это относится ко всему параграфу) $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ всегда будет многочленом с целыми рациональными коэффициентами, неприводимым в рациональном поле и действительно содержащим x и хотя бы одно y. Д. Д. Мордухай-Болтовской [1, 2] доказал следующие две теоремы об алгебраической невыражаемости.

Если η — корень уравнения

$$P(x, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) = 0, \tag{117}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — алгебраические числа, линейно независимые в рациональном поле, или η — корень уравнения

$$P(x, \ln \alpha) = 0, \tag{118}$$

где $\alpha \neq 0, 1$ алгебраическое, то существует целое число $\nu > 0$ такое, что при $q > q_0$ будет выполняться неравенство

$$\left| \eta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\nu!}}, \tag{119}$$

где p и q — целые рациональные числа, а ν не зависит от p и q. Обе теоремы обобщаются также на случай аппроксимации числа η алгебраическими числами.

Невыполнение неравенства (119) и является условием невыражаемости числа η через числа $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$ или число $\ln \alpha$. В основе доказательства приведенных теорем лежит тождество Ш. Эрмита и теорема о конечном приращении функции.

Неравенство (119) в этих теоремах может быть значительно улучшено с помощью более поздних оценок меры трансцендентности соответствующих чисел. Из неравенств (48) и (49) § 2 почти непосредственно следует, что неравенство (119) в теоремах Д. Д. Мордухай-Болтовского можно заменить неравенством

$$\left| \eta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\nu}}, \qquad \nu = \nu(\eta), \tag{120}$$

Из этого последнего неравенства следует, что числа Лиувилля не выражаются алгебраически через $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ или $\ln \alpha$. Примером такого числа может служить число

$$\omega = \sum_{1}^{\infty} 2^{-n!}.$$

Определение чисел Лиувилля было дано в § 2 (определение (47)).

Д. Д. Мордухай-Болтовской дает и некоторые обобщения вышеприведенных теорем.

Можно дать, пользуясь различными неравенствами для меры трансцендентности различных чисел, и другие признаки алгебраической невыражаемости чисел.

Пусть η будет некоторым действительным числом, p и q, $(p, q) = 1$, — целыми рациональными, а $\varphi(t)$ — монотонно растущей положительной функцией t. Допустим, что для числа η выполняется условие

$$\lim_{H\to\infty} \frac{\ln \Phi(H, 1, \eta)}{\varphi(H)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\min\limits_{q_0<q} \ln \left| \eta - \frac{p}{q_0} \right|}{\varphi(q)} = -\infty. \qquad (121)$$

Если $\varphi(q) = \ln q\,[\ln\ln q]^{\lambda}$, $\lambda > 2$, то η алгебраически не выражается через α^{β}, а если $\varphi(q) = [\ln q]^{\lambda}$, $\lambda > 2$, то η не выражается и через $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ при α и β алгебраических. Это является прямым следствием неравенств (116), (117) гл. III. Если $\varphi(q) = \ln q$, другими словами, η будет числом Лиувилля, то η не выражается алгебраически через $J_0(\alpha)$, $J_0'(\alpha)$, где $J_0(x)$ — цилиндрические функции, а α — алгебраическое число. Это прямое следствие неравенства (43) § 2.

Наконец, если $\lim \frac{\ln\varphi(t)}{\ln t} = \infty$, то, как доказал Д. Д. Мордухай-Болтовской [6], число η не может быть корнем уравнения

$$P(x, a_1^x, \ldots, a_n^x) = 0, \qquad (122)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — алгебраические числа. Он доказал существование такого целого $\nu > 0$, что $\left|\eta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\nu!}}$. Это можно получить с помощью леммы 1 § 2.

В той же работе Д. Д. Мордухай-Болтовской утверждает, что теорема имеет место и тогда, когда a будут, более общо, корнями уравнений типа (118) при одном и том же $\ln\alpha$. Действительно, подсчет показывает, что из неравенства (51) § 2, верного при любых n и H, следуют для η неравенство

$$\left|\eta - \frac{p}{q}\right| > \exp\left[-q^{3n}\ln^3 q\right],$$

где n — число показательных функций в уравнении (122) и $q > q_0$.

Наконец, Д. Д. Мордухай-Болтовской ввел понятие и доказал существование гипертрансцендентных чисел.

Будем называть *просто трансцендентным* числом трансцендентное значение, при алгебраическом значении аргумента, всякой функции $F(x)$, которая является решением любого алгебраического дифференциального уравнения с постоянными и целыми коэффициентами, определяющейся алгебраическими начальными данными. *Гипертрансцендентными числами* назовем все остальные комплексные числа. Существование гипертрансцендентных чисел есть следствие счетности множества чисел просто трансцендентных и несчетности множества всех действительных или комплексных чисел.

Отметим еще, что трансцендентность корней уравнения при алгебраических и линейно независимых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n$,

$$P\left(x, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\right) = 0,$$

есть следствие общей теоремы Линдемана.

ГЛАВА III

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ АРГУМЕНТЕ, ПРОБЕГАЮЩЕМ ТОЧКИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОЛЯ, И ПРОБЛЕМЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ

§ 1. Целочисленность аналитических функций

Между ростом целой аналитической функции и арифметической природой ее значений при аргументе, принимающем значения из данного алгебраического поля, существует весьма существенная связь. Если мы предположим, что значения функции также принадлежат при этом к какому-нибудь определенному алгебраическому полю, причем все сопряженные каждого значения в этом поле не будут слишком быстро расти, то это сразу накладывает ограничение на рост функции снизу, другими словами, он не может быть слишком мал. Это обстоятельство и его аналоги для мероморфных функций могут быть с успехом использованы для решения проблемы трансцендентности. Первой теоремой, относящейся к связи между ростом и арифметикой значений функции, была теорема Г. Полиа [1]. Он доказал, что если целая аналитическая функция принимает целые значения при целых рациональных и положительных значениях аргумента, а рост ее ограничен неравенством

$$|f(z)| < C2^{\alpha |z|},\ \alpha < 1,$$

то она должна быть многочленом. Из дальнейших результатов в этом направлении, ряд из которых принадлежит и автору этой книги, мы приведем только одну общую теорему, которой и ограничимся, так как эти вопросы непосредственно не входят в тему книги.

Предположим, что значения целой аналитической функции при аргументе, пробегающем некоторое счетное множество E, принадлежат к конечному алгебраическому полю. Тогда нет даже необходимости предполагать, что множество E само, например, состоит из всех целых чисел конечного алгебраического поля, для того чтобы на рост целой функции накладывались определенные ограничения, невыполнение которых влечет принадлежность функции к тому или иному подклассу класса целых функций. Для этого достаточно предположить, что E обладает некоторыми групповыми структурными свойствами. Пусть максимум модуля целой функции будет $M(r)$, а множество E имеет только одну предельную точку в бесконечности. Будем называть целую функцию $f(z)$ *нормально целочисленной*, если значения $f(z)$ при $z \in E$ будут целыми числами алгебраического поля K степени ν и если при этом из $\alpha \in E$, при любом $\delta > 0$ и C_0, не зависящем от α, вытекает

$$\overline{|f(\alpha)|} < C_0 \ [M(|\alpha|)]^{1+\delta}, \qquad C_0 = C_0(\delta). \tag{1}$$

Число ν будем называть *степенью целочисленности* $f(z)$. Предположим также, что множество E состоит из всех сумм вида $\alpha_k + \beta_s$, где α_k, $|\alpha_k| \leqslant |\alpha_{k+1}|$, $k = 0, 1, \ldots$, — точки счетного множества E_1, а β_k, $|\beta_k| \leqslant |\beta_{k+1}|$, — точки счетного множества E_2, и введем в рассмотрение функции $N_1(r)$, $N_2(r)$ и $N(r)$, положив

$$N_1(r) = \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} 1, \qquad N_2(r) = \sum_{|\beta_k| \leqslant r} 1, \tag{2}$$

$$N(r) = \min [N_1(r), \ N_2(r)].$$

Будем называть $N(r)$ *аддитивной плотностью множества* E. Заметим, что множества E_1 и E_2 могут и совпадать. Тогда может быть доказана теорема.

Т е о р е м а I. *Если целая функция $f(z)$ с максимумом модуля $M(r)$ нормально целочисленна на множестве E, $E = E_1 + E_2$, с* **аддитивной плотностью** *$N(r)$, ее* *значения на E принадлежат полю K степени ν, то можно указать такие два числа θ и λ, например, $\theta > 2+\sqrt{2}$ и $\lambda < \frac{1}{8\nu} \ln \frac{(\theta-1)^2-1}{2\theta-2}$, ν степень целочисленности, что при выполнении неравенства*

$$\ln M(\theta r) < \lambda N(r) \tag{3}$$

$f(z)$ должна быть решением функционального уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} A_k f(z+\beta_k) = 0, \qquad m > 1, \tag{4}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — алгебраические числа поля K, в совокупности отличные от нуля.

Доказательство. В дальнейших рассуждениях числа a_1, a_2, ... будут постоянными, не зависящими от ρ, действительное число $\rho > 0$ мы будем предполагать достаточно большим, а величину его определим в дальнейшем.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(z)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(z+\beta_k), \qquad n = N(\rho). \tag{5}$$

По лемме II § 2 гл. II числа A_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, можно выбрать целыми алгебраическими числами поля K, в совокупности отличными от нуля, так, чтобы выполнялось $m+1$ равенств

$$F(\alpha_k) = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m, \qquad m = \left[\frac{n-1}{2}\right], \tag{6}$$

и $n+1$ неравенств

$$\overline{|A_k|} < a_0 n [M(2\rho)]^{1+\delta}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{7}$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ и a_0, зависящем только от δ. Действительно, так как $|\alpha_k + \beta_s| \leqslant 2\rho$ при $k \leqslant n$, $s \leqslant n$ и $\overline{|f(\alpha_k+\beta_s)|} < a_0 [M(2\rho)]^{1+\delta}$ на основании неравенства (1), то наше утверждение непосредственно следует из леммы II вследствие того, что $F(\alpha_k)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, являются линейными формами относительно A_k.

Выберем теперь число $0<\delta<1$ в условии (1) и $\varepsilon>0$, удовлетворяющими неравенствам

$$0<\varepsilon<\frac{(\theta-1)^2-1}{\theta}, \quad 2+\delta<\frac{1}{4\nu\lambda}\ln\frac{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}{(\theta-1)(2+\varepsilon)}, \tag{8}$$

что возможно, так как θ и λ удовлетворяют условиям нашей теоремы.

Так как целая функция $F(z)$ имеет нули в точках α_k, $0\leqslant k\leqslant m$, то, воспользовавшись известными свойствами функций Бляшке, по принципу максимума мы будем иметь, что при $|z|\leqslant R$, $R=(\theta-1)\rho$,

$$|F(z)|<a_2N^2(\rho)\,[M(2\rho)]^{1+\delta}M(R+\rho)\prod_{k=0}^{m}\frac{R\,|z-\alpha_k|}{|R^2-z\bar{\alpha}_k|}, \tag{9}$$

откуда, если $|z|\leqslant\rho_1=(1+\varepsilon)\rho$, следует вследствие (3) неравенство

$$|F(z)|<a_2N^2(\rho)\,[M(\theta\rho)]^{2+\delta}\left[\frac{(\theta-1)(2+\varepsilon)}{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}\right]^m<$$
$$<a_3\exp\left\{\left[\lambda(2+\delta)-\frac{1}{2}\ln\frac{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}{(\theta-1)(2+\varepsilon)}\right]N(\rho)+2\ln N(\rho)\right\}. \tag{10}$$

Но из условий (1) и неравенств (7) при $|\alpha_k|\leqslant\rho_1$ следуют неравенства

$$\overline{|F(\alpha_k)|}<a_0N(\rho)\,[M(2\rho)]^{1+\delta}\sum_{s=0}^{n}\overline{|f(\alpha_k+\beta_s)|}<$$
$$<a_4N^2(\rho)\,[M(2\rho)\,M(\rho_1+\rho)]^{1+\delta}, \tag{11}$$

где a_4 не зависит ни от ρ_1 ни от ρ, или при $\rho_1=(1+\varepsilon)\rho$

$$\overline{|F(\alpha_k)|}<a_4N^2(\rho)\,\{M[(2+\varepsilon)\rho]\}^{2+2\delta}<$$
$$<a_4\exp[2\lambda(1+\delta)N(\rho)+2\ln N(\rho)]. \tag{12}$$

Так как все числа $F(\alpha_k)$, по предположению, целые алгебраические, то, предположив, что $F(\alpha_k)\neq 0$ при каком-нибудь k, мы приходим к неравенству

$$1 \leqslant |F(\alpha_k)| \prod_{1}^{\nu-1} |F_s(\alpha_k)|, \tag{13}$$

где произведение взято по всем $\nu-1$, сопряженным с $F(\alpha_k)$ числам. Воспользовавшись неравенствами (10) и (12), мы получаем отсюда неравенство

$$1 \leqslant a_5 \exp\left\{\left[2\lambda\nu(2+\delta) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\ln\frac{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}{(\theta-1)(2+\varepsilon)}\right] N(\rho) + 2\nu \ln N(\rho)\right\}, \tag{14}$$

где $a_5 = a_2 a_4^{\nu-1}$. Но в силу неравенств (8) при $N(\rho)$ стоит отрицательный коэффициент. Значит, при $\rho > \rho_0$ и $|\alpha_k| \leqslant (1+\varepsilon)\rho$ правая часть неравенства (14) станет меньше 1. Поэтому при $\rho > \rho_0$

$$F(\alpha_k) = 0, \quad |\alpha_k| \leqslant (1+\varepsilon)\rho_0.$$

Но чисел α_k, по модулю не превосходящих ρ_1, не меньше, чем $N(\rho_1) = N[(1+\varepsilon)\rho]$. Воспользовавшись опять неравенством (9) при $m = m_1 = N(\rho_1)$ и положив $\rho_2 = (1+\varepsilon)\rho_1$, мы получим, что при $|z| \leqslant \rho_2$, $R = (\theta-1)\rho_1$ имеет место неравенство

$$|F(z)| < a_2 N^2(\rho_1)[M(\theta\rho_1)]^{2+\delta}\left[\frac{(\theta-1)(2+\varepsilon)}{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}\right]^{m_1} <$$
$$< a_3 \exp\left\{\left[\lambda(2+\delta) - \ln\frac{(\theta-1)^2-1-\varepsilon}{(\theta-1)(2+\varepsilon)}\right] N(\rho_1) + 2\ln N(\rho_1)\right\}. \tag{15}$$

Далее, при $|\alpha_k| \leqslant \rho_2$ будет, очевидно, иметь место неравенство (12), с заменой в нем ρ на ρ_1. Отсюда, воспользовавшись неравенством (13) при предположении, что $F(\alpha_k) \neq 0$ для какого-нибудь k, $|\alpha_k| \leqslant \rho_2$, мы получаем опять неравенство (14) с заменой в нем ρ на ρ_1. Но $\rho_1 > \rho \geqslant \rho_0$, откуда следует опять, что

$$F(\alpha_k) = 0, \quad |\alpha_k| \leqslant \rho_2.$$

Продолжая этот процесс накопления нулей $F(z)$ неограниченно, что возможно, так как постоянные в наших неравенствах не зависят от ρ и ρ_1, мы приходим к тому, что $F(\alpha_k)=0$ для всех $k=0, 1, \ldots$, так как $\rho_n=(1+\varepsilon)^n\rho$. Но

$$|F(z)|<C(\rho)M(r+\rho), \quad |z|=r.$$

Поэтому, воспользовавшись опять функциями Бляшке и положив $R=(\theta-1)r$, где r сколь угодно велико, мы получаем при $|z|\leqslant 1$, что

$$|F(z)|<C(\rho)M(R+\rho)\prod_{|\alpha_k|\leqslant r}\frac{R|z-\alpha_k|}{|R^2-\bar{\alpha}_k z|}<$$

$$<C(\rho)M(\theta r)\left[\frac{(\theta-1)r(1+r)}{(\theta-1)^2r^2-r}\right]^{N(r)},$$

откуда уже следует, что

$$\ln|F(z)|<\ln M(\theta r)-\ln\left(\theta-1-\frac{\theta}{r}\right)N(r)+C_1(\rho)<$$

$$<-\left[\ln(\theta-1)-\lambda-\frac{\theta}{r}\right]N(r)+C_1(\rho).$$

Это последнее неравенство, в котором r можно брать сколь угодно большим, показывает, так как по условиям теоремы $\lambda<\ln(\theta-1)$, что

$$F(z)\equiv 0.$$

Этим наша теорема доказана. Заметим, что границы для величин постоянных θ и λ могут быть улучшены.

По теореме Шюрера, если целая функция $f(z)$ первого порядка минимального типа есть решение уравнения (4), то $f(z)$ должна быть многочленом, а если $f(z)$ — функция первого порядка и нормального типа, то $f(z)$ должна быть конечной суммой произведений многочленов на показательные функции [1]).

Следовательно, всякая целая функция, растущая не скорее показательной и удовлетворяющая условиям

[1]) См., например, А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, 1952 г., стр. 290, теорема VIII.

нашей теоремы, должна принадлежать или к классу многочленов или к классу линейных форм от показательных функций с полиномиальными коэффициентами. Кроме того, если мы сделаем какие-либо арифметические предположения относительно арифметической природы чисел α_k и β_s, то при известных предположениях $f(z)$ может быть только постоянной. Приведенная теорема показывает, что предположение об алгебраичности значений аналитической функции, в частности целой функции, при аргументе, пробегающем значения, принадлежащие множеству, обладающему простейшим структурным свойством и достаточной плотностью, уже накладывает ограничения на функцию $f(z)$. Связи этого типа с успехом можно использовать для решения проблем, относящихся к арифметической природе чисел. Впервые подобные связи были использованы в области проблем трансцендентности автором настоящей монографии.

§ 2. Проблема Эйлера-Гильберта

Проблема трансцендентности или рациональности логарифмов рациональных чисел при рациональном же основании, высказанная Л. Эйлером в 1748 г., была сформулирована Д. Гильбертом в значительно более общей форме и введена им под номером семь в число 23 проблем, к которым не видно было подхода в самом конце девятнадцатого века. Д. Гильберт высказал предположение о трансцендентности или рациональности логарифмов алгебраических чисел при алгебраическом основании, что эквивалентно предположению трансцендентности чисел вида α^β, $\alpha \neq 0, 1$, при алгебраическом α и алгебраическом и иррациональном β.

В 1929 г. было дано частичное решение проблемы Эйлера-Гильберта. Автором настоящей монографии было доказано, что при α алгебраическом, число $\alpha^{i\sqrt{p}}$, $\alpha \neq 0, 1$, $p > 0$, где p—целое рациональное, не являющееся точным квадратом, будет всегда числом трансцендентным. Для выяснения метода доказательства вкратце проведем доказательство трансцендентности $(-1)^{-i} = e^\pi$. Перенумеруем все точки кольца целых чисел гауссова поля, другими словами, числа $m+ni$ при n и m целых рациональных. Нумерацию будем производить в порядке роста модулей целых комплексных чисел, а в случае одинаковых модулей — в порядке роста аргументов их. Тогда мы можем записать множество целых комплексных чисел в виде последовательности $z_0=0,\ z_1,\ z_2, \ldots$ Разложим целую аналитическую функцию $e^{\pi z}$ в интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ Тогда мы будем иметь, как хорошо известно, разложение

$$e^{\pi z}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)\ldots(z-z_{n-1}),$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\pi\xi}d\xi}{(\xi-z_0)\ldots(\xi-z_n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{\pi z_k}}{(z_k-z_0)\ldots(z_k-z_n)}. \qquad (16)$$

Чрезвычайно легко доказывается, что ввиду сравнительно малого роста нашей функции и относительно большой плотности узлов интерполяции ряд Ньютона при любом z сходится к этой функции. Рассмотрим теперь общее наименьшее кратное целых комплексных чисел

$$t_{n,k}=(z_k-z_0)\ldots(z_k-z_n), \quad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Воспользовавшись весьма простыми соображениями из теории распределения простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$, мы легко можем установить, что это общее наименьшее кратное Ω_n удовлетворяет условиям

$$|\Omega_n|=e^{\frac{1}{2}n\ln n+O(n)}, \quad |C_{n,k}|=\left|\frac{\Omega_n}{t_{n,k}}\right|=e^{O(n)}. \qquad (17)$$

В силу того, что Ω_n есть общее наименьшее кратное чисел $t_{n,k}$, мы можем утверждать, что все числа $C_{n,k}$ будут целыми комплексными числами. Далее, так как $e^{\pi z_k}=$ $=e^{\pi(m_1+m_2 i)}=\pm e^{\pi m_1}, \quad 0\leqslant m_1<2\sqrt{k}$, мы видим, что $\Omega_n A_n$ будет многочленом относительно e^{π} степени не выше $2\sqrt{n}$ с целыми комплексными коэффициентами. Предположив алгебраичность e^{π} и воспользовавшись оценкой (17) и леммой I § 2 гл. II, мы непосредственно получаем, что или $A_n = 0$ или

$$|\Omega_n A_n| > e^{-O(n)}. \tag{18}$$

С другой стороны, рассматривая интегральное представление (16) и беря в качестве контура C окружность $|\xi| = n$, мы непосредственно получаем оценку

$$|\Omega_n A_n| < e^{-\frac{1}{2} n \ln n + O(n)}. \tag{19}$$

При достаточно большом n оценки (18) и (19) становятся противоречивы, откуда следует, что $A_n = 0$ при $n > n_0$. Но в правой части разложения (16) будет тогда стоять многочлен, а в левой—целая трансцендентная функция $e^{\pi z}$. Итак, из предположения алгебраичности e^{π} следует, что $e^{\pi z}$ должна быть многочленом. Отсюда и следует трансцендентность e^{π}.

Р. О. Кузьмин [1] перенес этот метод доказательства трансцендентности чисел, с небольшими изменениями, на случай действительных показателей и доказал, что при алгебраическом, не равном нулю или единице α число $\alpha^{\sqrt{p}}$, где $p > 0$ — целое рациональное и не равно квадрату целого числа, будет числом трансцендентным. В частности, это относится к числу $2^{\sqrt{2}}$.

К. Зигель [4] использовал этот метод для доказательства трансцендентности хотя бы одного периода эллиптической функции $\wp(z)$:

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \tag{20}$$

если ее инварианты g_2 и g_3—алгебраические числа. Для показателей β алгебраических, но степени выше второй, К. Боле [1] установил, что по крайней мере одно из чисел $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{\nu-1}}$, где $\alpha \neq 0, 1$—алгебраическое, а β—корень неприводимого уравнения с целыми коэффициентами степени ν, будет числом трансцендентным. Доказательство этого предложения было проведено тем же методом, что и в случае квадратичной иррациональности. Полное решение проблемы Эйлера-Гильберта было дано автором монографии другим методом в 1934 г. [5].

В этом новом методе прежняя интерполяционная идея была дополнена идеей аналитико-арифметического продолжения. Для выяснения основных элементов этого метода мы приведем схему доказательства трансцендентности отношения логарифмов двух алгебраических чисел, когда это отношение иррационально. Мы разобьем это доказательство на ряд этапов. Пусть α и β будут алгебраическими числами конечного поля K, $a=\ln\alpha$, $b=\ln\beta$, $\eta=\frac{b}{a}$ и логарифмы пусть будут произвольными, но определенными логарифмами чисел α и β. Пусть также целое число $N>0$ будет неограниченно велико. Предположим также, что η — алгебраическое иррациональное число.

Этап первый. Положим $r_1=\left[\frac{N^2}{\ln N}\right]$, $r_2=[\ln\ln N]$. Тогда будут существовать такие целые числа конечного алгебраического поля K, в совокупности отличные от нуля, $C_{k,l}$, $\overline{|C_{k,l}|}<e^{2N^2}$, $N>N_0$, что функция $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}C_{k,m}\alpha^{kz}\beta^{mz}=\sum_{0}^{N}\sum_{0}^{N}C_{k,m}e^{(ak+bm)z}, \tag{21}$$

будет иметь в точках $0, 1, \ldots, r_2$ нули кратности r_1, другими словами, что

$$f^{(s)}(t)=a^s\sum_{0}^{N}\sum_{0}^{N}C_{k,m}(k+\eta m)^s\alpha^{kt}\beta^{mt}=0, \tag{22}$$

$$0\leqslant t\leqslant r_2,\quad 0\leqslant s\leqslant r_1.$$

Так как α, β и η—алгебраические числа, то это утверждение может быть легко доказано с помощью леммы II § 2 гл. II.

Этап второй. Благодаря большому количеству нулей у $f(z)$ и интегральному представлению

$$f^{(s)}(t)=$$
$$=\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{d\xi}{(\xi-t)^{s+1}}\int\limits_{C_2}\left[\frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-r_2)}{z(z-1)\ldots(z-r_2)}\right]^{r_1+1}\frac{f(z)}{z-\xi}dz, \tag{23}$$

где C_1 — окружность $|\xi| = N^{\frac{3}{4}}$, а C_2 — окружность $|z| = N$, мы легко получаем оценку при $N > N_1$

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{10}N^2 \ln\ln N}, \ |t| \leqslant [\sqrt{N}] = r_4, \ \ s \leqslant r_1. \quad (24)$$

Из этих оценок, опять с помощью леммы I § 2 гл. II, следует, так как α, β и η алгебраические, что

$$f^{(s)}(t) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant r_4, \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1. \quad (25)$$

Этап третий. Воспользуемся снова интегральным представлением (23), в котором мы можем заменить r_2 на r_4, так как функция наша имеет теперь больше нулей и выполняются условия (25). Оценивая с помощью этого нового интегрального представления $f^{(s)}(t)$, мы получаем, что верны неравенства

$$|f^{(s)}(0)| < e^{-\frac{1}{5}N^{\frac{5}{2}}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant (N+1)^2. \quad (26)$$

Из этих последних неравенств, опять с помощью леммы I § 2 гл. II, следует, что

$$a^{-s} f^{(s)}(0) = \sum_0^N \sum_0^N C_{k,m}(k + \eta m)^s = 0, \ \ 0 \leqslant s \leqslant (N+1)^2. \quad (27)$$

Этап четвертый. Так как чисел $C_{k,m}$ всего $(N+1)^2$, то, рассматривая первые $(N+1)^2$ равенств (27), мы получаем систему $(N+1)^2$ однородных уравнений с $(N+1)^2$ неизвестными $C_{k,m}$. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда. Он может быть равен нулю тогда и только тогда, когда будет иметь место равенство $\eta m_1 + k_1 = \eta m_2 + k_2$ хотя бы один раз. Но такое равенство вообще невозможно, так как η иррационально. Значит, определитель системы отличен от нуля и все $C_{k,m}$ равны нулю. Мы приходим к противоречию с условием выбора $C_{k,m}$ и тем самым трансцендентность числа η доказана.

Этап первый состоит в построении функции, являющейся линейной комбинацией степеней α^z и β^z, которая при не слишком больших целых коэффициентах имеет очень много нулей. Это построение возможно только благодаря алгебраичности α, β и, по предположению, η. Эта функция не может быть тождественным нулем, так как η иррационально.

Этап второй состоит в доказательстве существования еще большего количества нулей у нашей функции, расположенных в большем, чем раньше, круге. Это возможно благодаря тому, что функция, не слишком большая по модулю в некотором круге и имеющая там достаточно много нулей, должна быть мала в большем по радиусу круге. На этом этапе еще нельзя, вообще говоря, обеспечить достаточную малость $(N+1)^2$ производных в начале, из которой следовали бы условия (27).

Этап третий состоит в новом накоплении нулей нашей функции, число которых становится достаточным для выполнения условий (27).

Этап четвертый состоит в использовании большого числа нулей у нашей функции в начале для доказательства, что она тождественно равна нулю. Это же невозможно в силу выбора ее коэффициентов и иррациональности отношения логарифмов. Этот процесс накопления нулей функции состоит из трех этапов. При получении возможно более точных результатов относительно нижних границ меры трансцендентности число этапов накопления может неограниченно расти.

Приведем теперь полное доказательство трансцендентности чисел a^b при $a \neq 0$, 1 алгебраическом и b алгебраическом иррациональном.

Теорема II. *Число a^b при a алгебраическом, $a \neq 0$, 1 и b алгебраическом иррациональном трансцендентно.*

Доказательство. Допустим обратное, именно, что число $c = a^b = e^{b \ln a}$, где $\ln a$ есть любое, но фиксированное значение логарифма, будет алгебраическим числом. Пусть числа a, b и c будут числами алгебраического поля степени ν. Положим $\eta = \ln a$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q} \sum_{s=0}^{q} A_{k,\,s} e^{\eta(k+bs)z}, \tag{28}$$

где $A_{k,s}$ — любые целые числа поля K, а $q>q_0$ — любое целое число. Пусть $d>0$ — целое рациональное, причем da, db и dc будут целыми алгебраическими и $q_1=\left[\frac{q^2}{\ln q}\right]$. По лемме II § 2 гл. II числа $A_{k,n}$, $0\leqslant k\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant q$, можно выбрать в совокупности отличными от нуля и удовлетворяющими двум группам соотношений:

$$f^{(s)}(t)=0, \tag{29}$$

$$0\leqslant s\leqslant q_1-1,\quad t=0,1,\ldots,t_1,\quad t_1=\left[\frac{1}{2}\ln q\right],$$

и

$$\overline{|A_{k,n}|}=e^{O(q^2)},\quad 0\leqslant k\leqslant q,\quad 0\leqslant n\leqslant q. \tag{30}$$

Действительно, рассматривая при целых t выражения

$$\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(t)=\sum_{k=0}^{q}\sum_{r=0}^{q}A_{k,r}\,a^{kt}c^{rt}(k+br)^s d^{3q^2} \tag{31}$$

как линейные формы относительно $(q+1)^2$ переменных $A_{k,r}$, полагая в лемме II § 2 гл. II $n=(q+1)^2$, $m=q_1(t_1+1)$, мы непосредственно получаем доказательство существования чисел $A_{k,n}$, удовлетворяющих соотношениям (29) и (30), так как

$$\overline{|U_{s,t,r,k}|}=\overline{|d^{3q^2}(k+br)^s a^{kt}c^{rt}|}=e^{O(q^2+s\ln q+qt)}=e^{O(q^2)} \tag{32}$$

при $s\leqslant q_1$, $t\leqslant q$ и $U_{s,t,r,k}$ — целые алгебраические числа.

Выбрав числа $A_{k,n}$, мы выбрали, таким образом, не равную тождественно нулю из-за иррациональности b целую функцию $f(z)$, для которой выполняются условия (29) и (30). В силу условий (29) мы будем иметь при $|t|\leqslant[q^{\frac{1}{2}}]=t_2$ интегральное представление

$$f^{(s)}(t)=\frac{s!}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|z|=R_1}\frac{dz}{(z-t)^{s+1}}\int\limits_{|\xi|=R_0}\prod_{r=0}^{t_1}\left(\frac{z-r}{\xi-r}\right)^{q_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi, \tag{33}$$

где $R_1=q^{\frac{3}{4}}$, $R_0=q$. Оценивая интеграл в правой части по модулю и предполагая, что $s\leqslant q_1$, мы получаем неравенство

$$|\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(t)| < |\eta^{-q_1}|\, d^{3q^2} q_1^{q_1}(R_1 - t_1)^{-q_1}\left[\frac{R_1+t_1}{q-t_1}\right]^{q_1 t_1} e^{O(q^2)} <$$
$$< e^{-\frac{1}{8}q^2\ln q + O(q^2)}. \tag{34}$$

Далее, из соотношений (30) и (32) следует при $s \leqslant q_1$ и целых t, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, что

$$\overline{|\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(t)|} \leqslant \sum_{k=0}^{q}\sum_{n=0}^{q}\overline{|A_{k,n}|}\,\overline{|U_{s,t,n,k}|} \leqslant$$
$$\leqslant e^{O(q^2+s\ln q+qt)} \leqslant e^{O(q^2)}. \tag{35}$$

Так как при целых t, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, $0 \leqslant s \leqslant q_1$, числа $\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(t)$ — целые алгебраические, то, предполагая, что хотя бы одно $f^{(s)}(t) \neq 0$ при $0 \leqslant s \leqslant q_1$, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, мы приходим, в силу того, что норма целого алгебраического числа по модулю должна быть не меньше единицы и соотношений (34) и (35), к неравенству

$$1 < e^{-\frac{1}{8}q^2\ln q + O(q^2) + \nu O(q^2)} = e^{-\frac{1}{8}q^2\ln q + O(q^2)}.$$

Но это неравенство при $q > q'$ не может иметь места. Поэтому при $q > q'$ будут иметь место равенства

$$f^{(s)}(t) = 0; \quad 0 \leqslant s \leqslant q_1; \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2 = [\sqrt{q}], \tag{36}$$

где t — числа натурального ряда.

Заметим, что при действительных b и $\eta = \ln a$ равенства (36) уже доказывают нашу теорему. Действительно, в этом случае числа $A_{k,s}$ также будут действительными и $f(z)$, что крайне легко доказать простым последовательным дифференцированием, не может иметь более $(q+1)^2 - 1$ действительных нулей, учитывая и их кратность. Но тогда равенства (36), так как

$$(q_1+1)(t_2+1) > \sqrt{q}\,\frac{q^2}{\ln q} > (q+1)^2$$

при $q > e^6$, показывают, что $f(z) \equiv 0$. Это же противоречит иррациональности b и характеру выбора чисел $A_{k,s}$.

Для того чтобы получить из соотношений (36) противоречие в общем случае, достаточно, например, доказать, что $f(z)$ должна иметь в начале нуль кратности, большей, чем $(q+1)^2$. При выполнении условий (36) функция $f(z)$ будет в точках $z=0, 1, \ldots, t_2$ иметь нули кратности q_1+1, откуда следует, что интегральное представление (33) будет иметь место, если заменить t_1 на t_2. Произведя эту замену в (33), положив в нем также $R_1=1$, $R_0=q$ и оценивая по модулю правую часть (33), мы получаем неравенство

$$|\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(0)| < e^{s\ln s+O(s)+O(q^2)}\left[\frac{\sqrt{q}+1}{q-\sqrt{q}}\right]^{q_1t_2} <$$
$$< e^{2q^2\ln q+O(q^2)-\frac{1}{2}q^{\frac{5}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}q^{\frac{5}{2}}+O(q^2\ln q)} \tag{37}$$

при $s\leqslant(q+1)^2$.

Но из оценок (30) и (32) опять следует неравенство

$$\overline{|\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(0)|} < \sum_{k=0}^{q}\sum_{n=0}^{q}\overline{|A_{k,n}|}\,\overline{|U_{s,0,n,k}|} <$$
$$< e^{O(q^2+s\ln q)} < e^{O(q^2\ln q)}, \tag{38}$$

при $s\leqslant(q+1)^2$. Но все числа $\eta^{-s}d^{3q^2}f^{(s)}(0)$, $s\leqslant 3q^2$, целые алгебраические, откуда, если $f^{(s)}(0)\neq 0$ и $s\leqslant(q+1)^2$, снова следует неравенство

$$1\leqslant e^{-\frac{1}{2}q^{\frac{5}{2}}+(\nu+1)O(q^2\ln q)}\leqslant e^{-\frac{1}{2}q^{\frac{5}{2}}+O(q^2\ln q)}.$$

Это последнее неравенство будет противоречивым, если $q\geqslant q''>q'>10$ и, значит, при $q\geqslant q''$, $f^{(s)}(0)=0$, $s=0, 1, \ldots, (q+1)^2-1$, или

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{n=0}^{q}A_{k,n}(k+bn)^s=0, \quad 0\leqslant s\leqslant(q+1)^2-1. \tag{39}$$

Система равенств (39) является линейной однородной системой $(q+1)^2$ уравнений относительно $(q+1)^2$ неизвестных $A_{k,n}$. Определитель этой системы Δ будет определителем Вандермонда и $\Delta\neq 0$, так как $k_1+n_1b\neq k_2+n_2b$ при $(k_2-k_1)^2+(n_2-n_1)^2\neq 0$ вследствие иррациональности b. Значит, единственным решением системы (33) может быть только тривиальное решение

$$A_{k,n}=0, \quad 0\leqslant k\leqslant q, \quad 0\leqslant n\leqslant q,$$

что противоречит условию выбора $A_{k,n}$, которые были выбраны отличными от нуля в совокупности. Это противоречие и доказывает нашу теорему.

Т. Шнейдер [2], давший независимо другое, по форме более близкое к идеям К. Зигеля доказательство этой теоремы уже после опубликования полного решения проблемы Эйлера-Гильберта автором настоящей монографии, применил вышеизложенный метод для доказательства трансцендентности некоторых постоянных, связанных с эллиптическими функциями и абелевыми интегралами. Мы приведем здесь полное доказательство одного из наиболее интересных результатов, им полученных.

Предварительно напомним читателю некоторые необходимые для дальнейшего факты из теории эллиптических функций. Если ω_1 и ω_2 — два произвольных числа, отношение которых $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ не есть действительное число, то эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ определяется равенством

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m_1,\,m_2}{}' \left[\frac{1}{(z-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^2}-\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right], \tag{40}$$

где сумма взята по всем целым как положительным, так и отрицательным значениям m_1 и m_2 с пропуском $m_1^2+m_2^2=0$. Эта функция $\wp(z)$ четная двояко периодическая, с периодами ω_1 и ω_2, другими словами,

$$\wp(z+k_1\omega_1+k_2\omega_2)=\wp(z),$$

где k_1 и k_2 — любые целые числа. Функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\wp'(z)]^2=4[\wp(z)]^3-g_2\wp(z)-g_3, \tag{41}$$

где g_2 и g_3 — инварианты, связанные с периодами соотношениями

$$g_2=60\sum{}'\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^4}, \quad g_3=140\sum{}'\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^6}, \tag{42}$$

где суммы опять взяты по всем целым, в совокупности отличным от нуля значениям m_1 и m_2. Для функции $\wp(z)$ имеет место так называемая теорема сложения

$$\wp(x+y)+\wp(x)+\wp(y)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right]^2, \qquad (43)$$

где x и y — два произвольных комплексных числа. Далее, дифференцируя (41), мы получаем важное соотношение

$$\wp''(z)=6[\wp(z)]^2-\frac{1}{2}g_2. \qquad (44)$$

Из соотношений (43) и (44) непосредственно следует, что $\wp(kz)$ при любом целом рациональном k есть рациональная функция от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, причем коэффициенты этой рациональной функции будут многочленами с рациональными коэффициентами от g_2 и g_3. Известно также, что

$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=\wp'\left(\frac{\omega_2}{2}\right)=\wp'\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=0. \qquad (45)$$

Единственными особенностями $\wp(z)$ на конечной части плоскости будут полюса второго порядка в точках $z=$ $=m_1\omega_1+m_2\omega_2$. Если заданы инварианты g_2 и g_3 и дискриминант $\Delta=g_2^3-27g_3^2\neq 0$, то существует эллиптическая функция $\wp(z)$ с этими инвариантами. Если мы положим $\omega_1'=\lambda\omega_1$, $\omega_2'=\lambda\omega_2$ и обозначим g_2' и g_3' инварианты эллиптической функции $\wp_1(z)$ с периодами ω_1' и ω_2', то из выше приведенных формул будут непосредственно следовать соотношения

$$\wp_1(z)=\lambda^{-2}\wp\left(\frac{z}{\lambda}\right), \quad g_2'=\lambda^{-4}g_2, \quad g_3'=\lambda^{-6}g_3. \qquad (46)$$

С помощью $\wp(z)$ определяется эллиптическая функция $\zeta(z)$

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\int_0^z\left[\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right]dz, \quad \zeta'(z)=-\wp(z), \qquad (47)$$

где интеграл берется по любому пути, не проходящему через полюса $\wp(z)$. Для этой функции также имеет место теорема сложения, именно

$$\zeta(x+y)=\zeta(x)+\zeta(y)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}, \qquad (48)$$

из которой опять непосредственно следует, что $\zeta(kz)$ при любом целом рациональном k есть рациональная функция с рациональными коэффициентами от величин $\zeta(z)$, $\wp(z)$, $\wp'(z)$ и g_2, g_3.

Далее, имеют место соотношения

$$\zeta(z+\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1, \quad \zeta(z+\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2, \tag{49}$$

$$\eta_1=\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \eta_2=\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

где η_1 и η_2—постоянные, связанные равенством

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=(-1)^{\mu}\frac{\pi i}{2}, \tag{50}$$

где $\mu=0$ или $\mu=1$ в зависимости от того, будет ли $I\frac{\omega_2}{\omega_1}>0$ или $I\frac{\omega_2}{\omega_1}<0$.

Все эти сведения читатель может найти в любом курсе теории эллиптических функций, например в книге Н. И. Ахиезера «Элементы теории эллиптических функций».

Введем теперь в рассмотрение функцию $f(z)$, положив

$$f(z)=t_1z+t_2\zeta(z), \tag{51}$$

где t_1 и t_2—какие-либо фиксированные постоянные, не равные одновременно нулю. На основании соотношения (48) для $f(z)$ опять будет иметь место теорема сложения

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{t_2}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}. \tag{52}$$

Из этой теоремы опять непосредственно следует, что при любом целом рациональном k функция $f(kz)$ есть рациональная с рациональными коэффициентами, функция от $f(z)$, $\wp(z)$, $\wp'(z)$, g_2, g_3 и t_2.

Докажем отсутствие алгебраических соотношений между $f(z)$ и $\wp(z)$. Допустим обратное, именно, что имеет место тождество по z

$$[f(z)]^n+A_1(z)[f(z)]^{n-1}+\ldots+A_n(z)=0, \tag{53}$$

где $A_1(z), \ldots, A_n(z)$—рациональные функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$.

Если k_1 и k_2—целые рациональные числа, то из соотношений (49) и (51) мы будем иметь тождества

$$f(z+k_1\omega_1+k_2\omega_2)=$$
$$=f(z)+t_1(k_1\omega_1+k_2\omega_2)+2t_2(k_1\eta_1+k_2\eta_2). \quad (54)$$

Но при не равных одновременно нулю t_1 и t_2 и любых ω_1, ω_2, η_1, η_2 можно выбрать такие целые k_1 и k_2, чтобы число $\theta=t_1(k_1\omega_1+k_2\omega_2)+2t_2(k_1\eta_1+k_2\eta_2)$ не равнялось нулю. В противном случае числа t_1 и t_2 были бы решением линейной системы уравнений

$$\omega_1 t_1+2\eta_1 t_2=0, \quad \omega_2 t_1+2\eta_2 t_2=0,$$

определитель которой в силу (50) был бы отличен от нуля и t_1, t_2 обращались бы в нуль. Выбрав при заданных t_1 и t_2 целые числа k_1 и k_2 так, чтобы $\theta\neq 0$, и положив $\lambda=k_1\omega_1+k_2\omega_2$, мы в силу (54) при любом целом рациональном t будем иметь тождество

$$f(z+\lambda t)=f(z)+t\theta.$$

Заменяя в соотношении (53) z на $z+\lambda t$, мы видим, что $A_i(z)$, $1\leqslant i\leqslant n$ не изменятся, так как $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ имеют ω_1 и ω_2 своими периодами. Поэтому мы получаем новое соотношение

$$[f(z)+t\theta]^n+A_1(z)[f(z)+t\theta]^{n-1}+\ldots+A_n(z)=0.$$

Но это последнее соотношение верно при любом целом t. Взяв конечную разность порядка n по t от его левой части, мы приходим к равенству $n!\,\theta^n=0$, что невозможно, так как $\theta\neq 0$ по выбору k_1 и k_2. Итак, соотношение (53) невозможно.

Приведенные выше сведения о функциях $\wp(z)$ и $f(z)$ позволяют доказать следующую теорему.

Теорема III. *Если t_1 и t_2 не равны нулю одновременно и $z_1\neq k_1\omega_1+k_2\omega_2$ при k_1 и k_2 целых рациональных, то хотя бы одно из шести чисел g_2, g_3, t_1, t_2, $\wp(z_1)$ и $f(z_1)$ должно быть трансцендентным. Числа ω_1 и ω_2—периоды $\wp(z)$, $f(z)=t_1 z+t_2\zeta(z)$.*

Доказательство. Предположим обратное, именно, что семь чисел

$$g_2,\ g_3,\ t_1,\ t_2,\ \wp(z_1),\ \wp'(z_1),\ f(z_1)$$

будут числами алгебраического поля K степени ν (алгебраичность $\wp'(z_1)$ следует из (41)). Положим $q=8\nu-3$ и $z_k=s_k z_1$, $k=1, 2, \ldots, q$, где $s_k>s_{k-1}$, $s_1=1$ и s_k—целые рациональные числа, выбранные так, чтобы $z_k s_k \neq \neq k_1\omega_1+k_2\omega_2$ при целых рациональных k_1 и k_2. В частности, если $z_1\neq m_1\omega_1+m_2\omega_2$ при рациональных m_1 и m_2, то $s_k=k$.

Тогда на основании теорем сложения для функций $\wp(z)$ и $f(z)$ мы можем утверждать, что все $3q$ чисел $\wp(s_k z_1)$, $\wp'(s_k z_1)$, $f(s_k z_1)$—также числа поля K.

Эти $3q$ чисел, а также числа t_1, t_2, g_2 и g_3, естественно, не обязаны быть целыми числами поля K. Поэтому мы выберем два отличных от нуля целых рациональных числа a и b так, чтобы $3q+4$ числа

$$\frac{1}{2}a^4 g_2,\ a^6 g_3,\ bat_1,\ ba^{-1}t_2,\ a^2\wp(z_k),\ bf(z_k),\ a^3\wp'(z_k),$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

были целыми числами поля K. Такие числа a и b всегда можно выбрать. Но теперь, заменив ω_1, ω_2, t_1 и t_2 соответственно на $\frac{\omega_1}{a}$, $\frac{\omega_2}{a}$, bat_1, $ba^{-1}t_2$, мы получим, что $\wp(z)$, $\wp'(z)$, $f(z)$ и g_2, g_3 соответственно перейдут, в силу (46), в $a^2\wp(az)$, $a^3\wp'(az)$, $bf(az)$, $a^4 g_2$ и $a^6 g_3$. Поэтому значения этих новых функций при $z=\frac{z_k}{a}$ будут не только алгебраическими из поля K, но и целыми алгебраическими числами. Благодаря соотношениям (41) и (44) для $\wp_1(z)=a^2\wp(az)$ мы видим также, что $\wp_1^{(s)}\left(\frac{z_k}{a}\right)$ будут целыми алгебраическими, а благодаря уравнению

$$f_1'(z)=t_1'-t_2'\wp_1(z),$$

где

$$f_1(z)=af(az),\quad t_1'=bat_1,\quad t_2'=ba^{-1}t_2,$$

мы можем утверждать, что $f_1^{(s)}\left(\frac{z_k}{a}\right)$ будут также целыми алгебраическими при любом s и $1 \leqslant k \leqslant q$.

Это показывает, что с самого начала мы можем считать наши $3q+4$ числа

$$\frac{1}{2}g_2,\ g_3,\quad t_1,\ t_2;\quad \wp(z_k),\ \wp'(z_k),\quad f(z_k);\quad 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{55}$$

целыми числами поля K, так как к этому частному предположению сводится общее предположение алгебраичности этих чисел простой заменой периодов и без изменения алгебраической природы этих чисел и числа z_1. Поэтому мы будем считать числа (55) целыми алгебраическими.

Положим

$$f_{m,n}(z) = [\wp(z)]^m [f(z)]^n, \quad 0 \leqslant m \leqslant N, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{56}$$

где N — любое целое число. Тогда, как мы уже видели, из предположения, что числа (55) — целые алгебраические, следует, что числа $\wp^{(s)}(z_k)$ и $f^{(s)}(z_k)$, а значит, и числа $f_{m,n}^{(s)}(z_k)$, $1 \leqslant k \leqslant q$, при любом s будут целыми алгебраическими из поля K.

Из интегрального представления

$$f_{m,n}^{(s)}(z_k) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f_{m,n}(z)}{(z-z_k)^{s+1}}\,dz, \tag{57}$$

где ε столь мало, что в кругах $|z-z_k| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant k \leqslant q$, нет полюсов $\wp(z)$, непосредственно следует оценка

$$|f_{m,n}^{(s)}(z_k)| \leqslant s^s e^{O(N+s)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant q. \tag{58}$$

Условимся обозначать $\overline{a}$ число поля $\overline{K}$, сопряженного полю K, если $\overline{a}$ сопряжено числу a поля K. Для получения оценки чисел $\overline{f^{(s)}(z_k)}$ применим следующий прием. Фиксируем какое-либо поле $\overline{K}$, сопряженное K. Так как

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0,$$

то и число

$$\overline{\Delta} = \overline{g}_2^3 - 27\overline{g}_3^2 \neq 0.$$

По инвариантам $\overline{g}_2$ и $\overline{g}_3$ вследствие $\overline{\Delta} \neq 0$ можно построить эллиптическую функцию $\overline{\wp}(z)$ с периодами ω_1' и ω_2', в каком-то смысле сопряженными ω_1 и ω_2.

Определим теперь q чисел z_k', лежащих в основном параллелограмме периодов $\overline{\wp}(z)$, соотношениями

$$\overline{\wp}(z_k') = \overline{\wp(z_k)}, \quad \overline{\wp}'(z_k') = \overline{\wp'(z_k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant q. \tag{59}$$

Как известно, соотношения (59) однозначно определяют числа z_k', $1 \leqslant k \leqslant q$, если они должны лежать в основном параллелограмме периодов функции $\overline{\wp}(z)$. Положив также

$$\overline{f}_k'(z) = \overline{t}_1 - \overline{t}_2 \overline{\wp}(z) \quad \text{и} \quad \overline{f}_k(z_k') = \overline{f(z_k)},$$

мы определим при данном k однозначно $\overline{f}_k(z)$. Но тогда $\overline{f}_k^{(s)}(z_k') = \overline{f_k^{(s)}(z_k)}$, $\overline{\wp}^{(s)}(z_k') = \overline{\wp^{(s)}(z_k)}$ вследствие того, что соотношения, связывающие $\overline{f}_k^{(s)}(z)$ и $\overline{\wp}^{(s)}(z)$ с $\overline{f}(z)$, $\overline{\wp}(z)$ и $\overline{\wp}'(z)$, отличаются от соотношений, связывающих $f^{(s)}(z)$ и $\wp^{(s)}(z)$ с $f(z)$, $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, только заменой входящих в них постоянных на сопряженные им числа из поля $\overline{K}$. Но тогда и

$$\overline{f}_{k,m,n}^{(s)}(z_k') = \overline{f_{m,n}^{(s)}(z_k)}, \quad \overline{f}_{k,m,n}(z) = \overline{\wp}^m(z)\ \overline{f}_k^n(z).$$

Поэтому, так как для чисел $\overline{f}_{k,m,n}^{(s)}(z)$ справедливо интегральное представление (57), а следовательно, и оценка (58), мы и получаем, что

$$\overline{\left| f_{m,n}^{(s)}(z_k) \right|} \leqslant s^s e^{O(N+s)}, \ 1 \leqslant k \leqslant q, \ m \leqslant N, \ n \leqslant N. \tag{60}$$

Напомним, что $\overline{|a|}$ есть максимум модулей a и всех $\nu - 1$ чисел, сопряженных a, а $O(N+s) < C(N+s)$, где C не зависит от k, s, N.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} A_{n_1, n_2} f_{n_1, n_2}(z), \tag{61}$$

где $A_{m,n}$, $0 \leqslant m \leqslant N$, $0 \leqslant n \leqslant N$,—целые числа поля K, в совокупности отличные от нуля, а $f_{n_1, n_2}(z)$ определены соотношениями (56). По лемме II § 2 гл. II мы выбираем целые в совокупности отличные от нуля числа A_{n_1, n_2} поля K так, чтобы выполнялись соотношения

$$F^{(s)}(z_k) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant q, \quad 0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{N^2}{2q}\right] - 1 = t - 1, \tag{62}$$

и

$$\overline{|A_{n_1, n_2}|} \leqslant t^t e^{O(t)}. \tag{63}$$

Действительно, число линейных уравнений относительно A_{n_1, n_2} есть $q\left[\frac{N^2}{2q}\right] \leqslant \frac{1}{2} N^2$ и имеют место оценки (60). Подставляя эти данные в лемму II, мы и получаем условия (62) и (63).

Функция $F(z)$, выбранная таким образом окончательно, не может быть тождественным нулем, так как числа A_{n_1, n_2} отличны от нуля в совокупности и соотношение (53) невозможно. Поэтому существует такое целое r, что

$$F^{(s)}(z_k) = 0, \; 1 \leqslant k \leqslant q, \; 0 \leqslant s \leqslant r - 1$$

и

$$\lambda = F^{(r)}(z_{k_0}) \neq 0, \quad 1 \leqslant k_0 \leqslant q.$$

По условиям выбора $F(z)$ $r \geqslant t$. Так как

$$\overline{|F^{(r)}(z_{k_0})|} \leqslant \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \overline{|A_{n_1, n_2}|}\, \overline{|f^{(r)}_{n_1, n_2}(z_{k_0})|},$$

то в силу (60) и (63)

$$\overline{|\lambda|} = \overline{|F^{(r)}(z_{k_0})|} \leqslant r^{2r} e^{O(r)}, \tag{64}$$

так как $r \geqslant t > N$ при $N > N_0$. Но учитывая, что норма целого алгебраического числа, не равного нулю, не меньше 1, мы из (64) непосредственно получаем неравенство

$$|\lambda| = |F^{(r)}(z_{k_0})| \geqslant e^{-2(\nu-1) r \ln r + O(r)}. \tag{65}$$

Положим

$$n = \left[\sqrt{\frac{qr}{N}}\right], \; n \geqslant \left[\left(\frac{qt}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \geqslant \sqrt{\frac{N}{2}} + O(1), \tag{66}$$

так как $r \geqslant t$. Пусть также N столь велико, что в параллелограмме с границей C, с вершинами в точках $\eta_{i,j}$; $i=0,\ 1,\quad j=0,\ 1,$

$$\eta_{i,j}=[(-1)^i\omega_1+(-1)^j\omega_2]\,n+\frac{\omega_1+\omega_2}{2},$$

на плоскости z, где ω_1 и ω_2—периоды $\wp(z)$, находятся все точки z_k, $1 \leqslant k \leqslant q$. Функция $F(z)$ имеет особенности только в точках $k_1\omega_1+k_2\omega_2$, где k_1 и k_2—целые, причем, так как в этих точках у $\wp(z)$ полюса второго порядка, а у $\zeta(z)$—первого порядка, то особые точки $F(z)$ могут быть только полюсами порядка не выше $3N$ в силу определения $F(z)$. Поэтому и в силу определения числа r должно иметь место интегральное представление

$$\lambda=F^{(r)}(z_{k_0})=\frac{r!}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_0}\frac{d\xi}{(\xi-z_{k_0})^{r+1}}\times$$

$$\times\int\limits_C\frac{\prod\limits_{k_1=-n}^{n}\ \prod\limits_{k_2=-n}^{n}(z-k_1\omega_1-k_2\omega_2)^{3N}\prod\limits_{k=1}^{q}(\xi-z_k)^r}{\prod\limits_{k_1=-n}^{n}\ \prod\limits_{k_2=-n}^{n}(\xi-k_1\omega_1-k_2\omega_2)^{3N}\prod\limits_{k=1}^{q}(z-z_k)^r}\,\frac{F(z)}{z-\xi}\,dz,\qquad(67)$$

где C—периметр выше определенного параллелограмма, а C_0—окружность $|z-z_{k_0}|=\varepsilon$, причем это $\varepsilon>0$ то же самое, что и в интеграле (57). Оценим модуль интеграла (67). Если z—точка контура C, то

$$\sum_{k_1=-n}^{n}\ \sum_{k_2=-n}^{n}\ln\left|\frac{z-k_1\omega_1-k_2\omega_2}{\xi-k_1\omega_1-k_2\omega_2}\right|=$$

$$=\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}\ln\left|\frac{\dfrac{z}{n}-\dfrac{k_1}{n}\,\omega_1-\dfrac{k_2}{n}\,\omega_2}{\dfrac{\xi}{n}-\dfrac{k_1}{n}\,\omega_1-\dfrac{k_2}{n}\,\omega_2}\right|=O(n^2),$$

$$\prod_{k=1}^{q}|z-z_k|^r=e^{qr\ln n+O(r)},\qquad \prod_{k=1}^{q}|\xi-z_k|^r=e^{O(r)}$$

и, наконец,

$$|F(z)|<e^{O(N\ln n+N^2)}=e^{O(\sqrt{r}\ln n+r)}$$

в силу периодичности $\wp(z)$, соотношений (54) для $f(z)$ и неравенства $2qr \geqslant 2qt \geqslant N^2$. Поэтому, оценивая по модулю правую часть (67), мы получаем неравенство

$$|\lambda| \leqslant r^r e^{O(r)-qr\ln n+O(\sqrt{r}\ln n+n^2N+r)}. \tag{68}$$

Но так как $r \geqslant t > \frac{N^2}{2q}-1$, то $N < \sqrt{2qr}+2q$ и, значит,

$$\ln n > \ln \sqrt{\frac{qr}{N}}-1 > \ln \sqrt{\frac{qr}{\sqrt{2qr}+2q}}-1 > \frac{1}{4}\ln r + O(1),$$

$$Nn^2 \leqslant qr,$$

то

$$|\lambda| < r^r e^{-\frac{1}{4}qr\ln r+O(r)}.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (65), мы получаем неравенство

$$e^{-\frac{1}{4}qr\ln r+O(r)} \geqslant e^{-(2\nu-1)r\ln r+O(r)}.$$

Но так как $q=8\nu-3$, то $\frac{1}{4}q=2\nu-\frac{3}{4}>2\nu-1$, что делает последнее неравенство противоречивым при достаточно большом N, а значит, и r, так как $r>\frac{N^2}{2q}-1$. Это противоречие и доказывает теорему III.

Из теоремы III можно получить ряд более конкретных следствий. Допустим, например, что при алгебраических инвариантах g_2 и g_3 число $\frac{k_1\omega_1+k_2\omega_2}{2}=z_1$ (k_1 и k_2 — целые рациональные, $k_1^2+k_2^2 \neq 0$, $(k_1, k_2, 2)=1$) будет алгебраическим. Положим также $t_1=1$, $t_2=0$, где t_1 и t_2 входят в $f(z)$. Тогда в силу (45), (41) и периодичности $\wp'(z)$ будут выполнены условия теоремы III, и мы получаем противоречие с основным утверждением этой теоремы. Поэтому число $k_1\omega_1+k_2\omega_2$ ($k_1^2+k_2^2\neq 0$ и ω_1, ω_2 — периоды $\wp(z)$) при алгебраических инвариантах должно быть трансцендентным. Отсюда уже непосредственно следует трансцендентность периодов ω_1, ω_2 при алгебраических инвариантах. Полагая опять $t_1=1$, $t_2=0$ и предполагая z_1

алгебраическим, мы получаем, что $\wp(z_1)$ трансцендентно при алгебраических g_2 и g_3. Полагая $t_1=0$, $t_2=1$, мы получаем, что при любом $z_1 \neq k_1\omega_1+k_2\omega_2$, k_1 и k_2 — целые, хотя бы одно из двух чисел $\wp(z_1)$ и $\xi(z_1)$ должно быть трансцендентным. Далее, Т. Шнейдер [3] доказал трансцендентность значений эйлеровой функции $B(p, q)$ при рациональных, но не целых p и q. Вышеприведенный метод доказательства теоремы III был использован также Д. Риччи [1] для доказательства трансцендентности чисел вида α^β при α и β, принадлежащих к различным классам чисел типа лиувиллевских, и К. Малером для доказательства P-адического аналога теоремы о трансцендентности чисел вида α^β.

§ 3. Вопросы меры трансцендентности и дальнейшее развитие метода

В этом параграфе мы прежде всего покажем, каким образом метод, изложенный в § 2, может быть использован в проблемах меры трансцендентности. Мы подробно разберем в качестве примера вопрос о приближении отношения логарифмов рациональными дробями в $\wp$-адически расширенном алгебраическом поле. Мы останавливаемся специально на этом вопросе, так как возможность или невозможность той или иной аппроксимации, в этом смысле, отношения логарифмов рациональными дробями соответствует разрешимости или неразрешимости в алгебраическом поле показательных сравнений по высокой степени простого идеала, и тем самым этот пример показывает, как аналитические методы теории трансцендентных чисел могут быть использованы в классической теории делимости.

Пусть $\wp$ есть простой идеал алгебраического поля K степени ν, p — простое целое рациональное число, $N(\wp)=p^\sigma$, $p \equiv 0 \bmod \wp^\mu$, причем μ наибольшее возможное. Если идеал $\wp$ входит в степени n в число a поля K, другими словами, если n есть разность показателей степеней идеала $\wp$, на которые (степени) делятся целые числа a_1 и a_2, $a=\frac{a_1}{a_2}$, то $\wp$-адической нормой числа a

является $\wp^{-n}$, что записывается в виде

$$|a|_{\wp}=\wp^{-n}. \tag{69}$$

Целое число n, конечно, может быть и положительным, и отрицательным, и нулем. Если $n_1 > n_2$ и

$$|a_1|_{\wp}=\wp^{-n_1}, \quad |a_2|_{\wp}=\wp^{-n_2},$$

то

$$|a_1|_{\wp}<|a_2|_{\wp}.$$

Далее, если

$$|a_k|_{\wp}=\wp^{-n_k} \text{ и } \lim_{k\to\infty} n_k=\infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|_{\wp}=0. \tag{70}$$

$\wp$-адическая норма подчиняется законам

$$|ab|_{\wp}=|a|_{\wp}|b|_{\wp}, \quad |a+b|_{\wp}\leqslant \max\,[|a|_{\wp}, \; |b|_{\wp}]. \tag{71}$$

В $\wp$-адической метрике, благодаря (70) и (71) ряд

$$a=\sum_{0}^{\infty} a_k, \quad \lim|a_k|_{\wp}=0, \tag{72}$$

где a_k — элементы поля K, будет сходящимся, причем полученные таким образом формально элементы a, не являющиеся, вообще говоря, числами поля K, будут подчиняться всем законам действий над обычными комплексными числами. Если мы присоединим к полю K все элементы (72), то мы получим $\wp$-адическое расширение поля K, являющееся в свою очередь полем, которое мы будем обозначать $K(\wp)$. Элементы $K(\wp)$ называются $\wp$-адическими числами. Среди различных классов функций от $\wp$-адического переменного из $K(\wp)$ особый интерес представляет класс нормальных функций, введенных в рассмотрение К. Малером и Т. Сколемом.

Мы будем называть $f(z)$ нормальной функцией $\wp$-адического переменного z, если

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k;\ |f_k|_\wp \leqslant 1,\ k=0, 1, \ldots,\ \lim_{k\to\infty} |f_k|_\wp = 0. \quad (73)$$

Вследствие (72) ряд (73) будет сходиться для всякого z, $|z|_\wp \leqslant 1$. В области $|z|_\wp \leqslant 1$ ряд (73) можно интегрировать и дифференцировать вследствие его равномерной сходимости в $\wp$-адическом смысле. Кроме того, в области $|z|_\wp \leqslant 1$ и $|f(z)|_\wp \leqslant 1$. Совершенно очевидно также, что функция $F(z)$, если $|z_0|_\wp \leqslant 1$,

$$F(z)=\frac{1}{k!} f^{(k)}(z+z_0),$$

будет нормальной. Так как

$$n! = A_n p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots},\ (A_n, p)=1,\ \sum \left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \left[\frac{n}{p-1}\right],$$

то функция

$$e^{p^k z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{kn}}{n!} z^n, \quad (74)$$

где $k=1$ при $\wp$, делящем простое нечетное, и $k=2$ при $\wp$, делящем 2, будет нормальной, причем она сохраняет алгебраические свойства показательных функций. Совершенно так же

$$\ln(1-pz) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{p^k}{k} z^k,\ e^{\ln(1-pz)} = 1-pz, \quad (75)$$

так как $\left|\frac{p^k}{k}\right|_p < 1$, будет нормальной функцией, причем алгебраические свойства логарифма сохраняются. Если a — элемент $K(\wp)$ и $|a|_\wp = 1$, то $a = a_0 + a_1$, где a_0 — число поля K, $|a_0|_\wp = 1$ и $|a_1|_\wp < \wp^{-3\mu}$. По теореме Эйлера для алгебраических полей $a_0^\lambda \equiv 1 \bmod \wp^{3\mu}$,

$\lambda = p^{3\sigma\mu} - p^{(3\mu-1)\sigma}$, откуда

$$a^{\lambda} = (a_0 + a_1)^{\lambda} \equiv 1 \mod \wp^{3\mu}.$$

Поэтому для числа a^{λ} мы можем определить натуральный логарифм η,

$$\eta = \ln a^{\lambda} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a^{\lambda})^k}{k}, \quad \lambda = p^{3\sigma\mu} - p^{(3\mu-1)\sigma}, \tag{76}$$

причем $|\eta|_{\wp} \leqslant \wp^{-2\mu}$ и в силу (74) $e^{\eta} = a^{\lambda}$.

Заметим теперь, что если a — любое целое число поля K и $\overline{|a|} \leqslant A$, то

$$|a|_{\wp} \geqslant \wp^{-m}, \quad m = \mu\left[\nu \frac{\ln A}{\ln p}\right]. \tag{77}$$

Действительно, если a_i сопряжено a, $a_1 = a$, то

$$\prod_{1}^{\nu} |a_i| = n \leqslant A^{\nu},$$

где n — целое рациональное число. Но поэтому n не может делиться на p в степени, большей $\left[\frac{\nu \ln A}{\ln p}\right]$, что и доказывает наше утверждение. Далее, если $x_1, x_2, \ldots, x_{r_2}$, $x_k|_{\wp} \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant r_2$, — различные элементы поля $K(\wp)$ и нормальная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям

$$f^{(s)}(x_k) = 0; \ 0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1; \ 0 \leqslant k \leqslant r_2,$$

то

$$f(z) = [(z - x_0) \ \ldots \ (z - x_{r_2})]^{r_1} f_1(z), \tag{78}$$

где $f_1(z)$ — опять нормальная функция. Действительно, в этом случае

$$f(z) = \sum_{n=r_1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n =$$

$$= (z - x_0)^{r_1} \sum_{n=r_1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^{n-r_1} = (z - x_0)^{r_1} f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — нормальная функция, так как

$$|a_n|_\wp = \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|_\wp = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} f_m x_0^{m-n} \leqslant \max_{m \geqslant n} |f_m|_\wp,$$

откуда и следует нормальность $f_1(z)$. Так как $x_i \neq x_k$, $i \neq k$, то, продолжая процесс отделения степеней линейных функций, мы и придем к утверждению (78).

Наконец, если многочлен $P(z)$ степени $r_1 r_2 - 1$ определяется условиями

$$P^{(s)}(x_k) = a_{s,k}, \quad |a_{s,k}|_\wp \leqslant \wp^{-\mu m}, \quad x_k = pk, \tag{79}$$

$$0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant r_2 - 1, \quad r_2 \geqslant 4,$$

где $a_{s,k}$ — элементы $K(\wp)$, то

$$P(z) = p^{m - 3r_1 r_2} P_1(z), \tag{80}$$

причем многочлен $P_1(z)$ — нормальная функция в том смысле, что его коэффициенты степенного разложения имеют $\wp$-адические нормы, не превышающие единицы.

Запишем в явном виде интерполяционный многочлен $P(z)$, определяемый условиями (79). Воспользовавшись формулой Эрмита[1])

$$P(z) = \sum_{k=0}^{r_2-1} \sum_{n=0}^{r_1-1} \sum_{s=0}^{n} \frac{a_{n,s}}{(r_1-n-1)!\,(n-s)!} \times$$

$$\times \frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}} \left[\frac{(z-x_k)^{r_1}}{Q(z)}\right]\Bigg|_{z=x_k} Q_{s,k}(z), \tag{81}$$

$$Q_{s,k}(z) = \frac{Q(z)}{(z-x_k)^{s+1}}, \quad Q(z) = \prod_{k=0}^{r_2-1} (z-x_k)^{r_1},$$

мы для доказательства нашего утверждения должны определить наибольшую степень $\wp$, на которую должны делиться все коэффициенты нормальных функций

---

[1]) См. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, 1952, Гостехиздат, стр. 58.

$(z-x_k)^{-s-1}Q(z)$. Дифференцируя, мы получаем, что

$$A_{n,k,s}=\frac{1}{(r_1-n-1)!\,(n-s)!}\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}\left[\frac{(z-x_k)^{r_1}}{Q(z)}\right]\Bigg|_{z=x_k}=$$

$$=\pm\frac{1}{(r_1-n-1)!\,(n-s)!}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\sum\nu_i=n-s\\ \nu_{k+1}=0}}\frac{(n-s)!}{\nu_1!\ldots\nu_{r_2}!}\frac{p^{-(r_2-1)r_1-n+s}}{[k!\,(r_2-k-1)!]^{r_1}}\frac{(r_1!)^{r_2-1}}{(r_1-\nu_1)!\ldots(r_1-\nu_{r_2})!}\times$$

$$\times\frac{1}{k^{\nu_1}\ldots(k-r_2+1)^{\nu_{r_2}}}. \qquad (82)$$

Но наибольшая степень p, на которую может делиться целое число, не превосходящее r_2, будет $p^{\left[\frac{\ln r_2}{\ln p}\right]}$. Отсюда следует, что наибольшая степень p, которая может делить $k^{\nu_1}\ldots(k-r_2)^{\nu_{r_2}}$, не превосходит $p^{r_1\left[\frac{\ln r_2}{\ln p}\right]}$, так как $\sum_{i=1}^{r_2}\nu_i\leqslant r_1$. Далее, наибольшая степень p, делящая $[k!\,(r_2-1-k)!]^{r_1}$, не превосходит наибольшей степени p, делящей $[r_2!]^{r_1}$, которая, как мы уже видели выше, не превосходит $p^{r_1\left[\frac{r_2}{p-1}\right]}<p^{r_1r_2}$. Поэтому

$$|p^{3r_1r_2}A_{n,k,s}|_{\wp}\leqslant 1;\quad 0\leqslant n\leqslant r_1-1;\quad 0\leqslant s\leqslant r_2-1,$$

так как $2r_1r_2+r_1\left[\frac{\ln r_2}{\ln p}\right]+r_1<3r_1r_2$ при $r_2\geqslant 4$. Отсюда и следует непосредственно условие (80). Пользуясь сделанными замечаниями, мы можем доказать теперь теорему о приближении отношения логарифмов алгебраических чисел рациональными дробями в $\wp$-адическом смысле.

Теорема IV. *Пусть a и b будут числа алгебраического поля K, $a^{n_1}\neq b^{n_2}$, $n_1^2+n_2^2\neq 0$, ни при каких целых рациональных n_1, n_2 и $\wp$ — простой идеал поля K, причем $N(\wp)=p^{\sigma}$, $p\equiv 0 \bmod \wp^{\mu}$. Тогда если $|a|_{\wp}=1$,*

$|b|_\wp = 1$, *то неравенство*

$$|\ln a^\lambda - \frac{n_1}{n_2}\ln b^\lambda|_\wp < \wp^{-m_0}, \quad \lambda = p^{3\sigma\mu} - p^{(3\mu-1)\sigma}, \tag{83}$$

$$0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 2N, \; m_0 = [\ln^7 N], \; (n_1, n_2) = 1,$$

где n_1, n_2 — целые рациональные числа, не может иметь решений при $N > N_0$, причем N_0 может быть эффективно вычислено как функция a, b и $\wp$.

Заметим, что эту теорему можно доказать и при $m_0 = [\ln^{2+\varepsilon} N]$, где $\varepsilon > 0$ — любое, что потребует только некоторых технических усложнений в доказательстве. Мы дадим доказательство этой теоремы в терминах $O(x)$, так как это его упростит, а вычисление N_0 вполне доступно и при этом доказательстве, но не является необходимым для дальнейшего.

Доказательство. Положим $\ln a^\lambda = \eta_1$, $\ln b^\lambda = \eta_2$, где логарифмы понимаются в смысле (75), предполагая, что $|\eta_1|_\wp \leqslant |\eta_2|_\wp$, что можно сделать, не нарушая общности доказательства, и будем считать, что неравенство (83) выполняется для некоторого $N > N_0$, причем значение этого N_0 мы определим в ходе доказательства невозможности (83). Пусть также d — целое рациональное число, такое, что da^λ и db^λ — целые числа поля K.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} A_{k_1,k_2} e^{(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2)z}, \quad q = [\ln^{\frac{3}{2}} N], \tag{84}$$

где A_{k_1,k_2} — целые числа поля K, в совокупности отличные от нуля. Функция $f(z)$ в силу линейной независимости η_1 и η_2 в рациональном поле не может быть тождественным нулем и будет на основании вышеизложенных соображений нормальной функцией.

Введем в рассмотрение вспомогательные линейные относительно A_{k_1,k_2} формы

$$U_{s,t} = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} A_{k_1,k_2} \left(\frac{n_1}{n_2}k_1 + k_2\right)^s e^{(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2)pt}, \tag{85}$$

где n_1 и n_2 определены в неравенстве (83) и t — целое число. Заметим, что из предположения $|\eta_1|_\wp \leqslant |\eta_2|_\wp$, условия $(n_1, n_2) = 1$ и неравенства (83) следует $(n_2, p) = 1$.

Так как $|n_i| < 2N$, $i = 1, 2$, и $N < e^{O\left(q^{\frac{2}{3}}\right)}$, то при $0 \leqslant s \leqslant \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\, r$, $0 \leqslant t \leqslant r$, мы, очевидно, будем иметь неравенства

$$\overline{\left| n_2^s d^{2pqt} \left(\frac{n_1}{n_2} k_1 + k_2\right)^s a^{\lambda k_1 pt} b^{\lambda k_2 pt} \right|} \leqslant e^{O(rq)}, \qquad (86)$$

каково бы ни было целое рациональное $r \geqslant 1$, причем числа, модули которых мы этими неравенствами оцениваем, будут целыми алгебраическими из поля K. На основании этих неравенств мы можем, полагая $r = r_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{5}{6}}\right]$, по лемме II § 2 гл. II выбрать числа A_{k_1, k_2}, $0 \leqslant k_1 \leqslant q$, $0 \leqslant k_2 \leqslant q$, отличными от нуля в совокупности и целыми числами поля K, так, чтобы выполнялись условия

$$U_{s,t} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\, r_0, \qquad (87)$$

и

$$\overline{\left| A_{k_1, k_2} \right|} < e^{O\left(q^{\frac{11}{6}}\right)}, \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant q, \quad 0 \leqslant k_2 \leqslant q. \qquad (88)$$

Выбрав таким образом A_{k_1, k_2}, рассмотрим разности

$$f^{(s)}(pt) - \eta_2^s U_{s,t}.$$

На основании неравенства (83) мы непосредственно получаем неравенства

$$|f^{(s)}(pt) - \eta_2^s U_{s,t}|_\wp =$$

$$= \left| \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} \left[(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2)^s - \left(\eta_2 \frac{n_1}{n_2} k_1 + \eta_2 k_2\right)^s \right] \times \right.$$

$$\times [a^{k_1} b^{k_2}]^{\lambda pt} \Big|_\wp \leqslant \wp^{-m_0}, \qquad (89)$$

верные при любых целых рациональных $s \geqslant 0$ и t, так так $(n_2, p) = 1$ и $|a|_{\wp} = |b|_{\wp} = 1$.

Пусть теперь $r > 1$ будет такое целое число, что

$$U_{s,t} = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\, r, \quad 0 \leqslant t \leqslant r, \tag{90}$$

и $U_{s_0, t_0} \neq 0$ при некоторых t_0 и s_0, $t_0 \leqslant r+1$, $s_0 \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\,(r+1)$. На основании (87) $r_0 \leqslant r$ и $r < (q+1)^2$, так как линейная относительно A_{k_1,k_2} система $(q+1)^2$ уравнений

$$U_{0,t} = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} A_{k_1,k_2} e^{(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2) p t} = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant (q+1)^2 - 1$$

имеет определитель, отличный от нуля вследствие линейной независимости η_1 и η_2 в поле рациональных чисел. Воспользовавшись условиями (90) и неравенствами (89), мы будем иметь неравенства

$$|f^{(s)}(pt)|_{\wp} \leqslant \wp^{-m_0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\, r, \quad 0 \leqslant t \leqslant r. \tag{91}$$

Построим интерполяционный многочлен $P(z)$, определяемый условиями

$$P^{(s)}(pt) = f^{(s)}(pt), \quad 0 \leqslant s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}]\, r, \quad 0 \leqslant t \leqslant r. \tag{92}$$

Воспользовавшись соотношением (80), мы получаем благодаря неравенствам (91) представление

$$P(z) = p^{\left[\frac{m_0}{\mu}\right] - 3\left[q^{\frac{1}{3}}\right] r^2} P_1(z), \tag{93}$$

где $P_1(z)$ — нормальная функция. Так как $r < (q+1)^2$ и $m_0 = [\ln^7 N]$, то

$$3\,[q^{\frac{1}{3}}]\, r^2 < 3q^{\frac{1}{3}} (q+1)^4 < 4q^{\frac{13}{3}} < 4 \ln^{\frac{13}{2}} N < \left[\frac{m_0}{2\mu}\right] - 1 \tag{94}$$

при $N \geqslant N_1$, откуда следует, что при $N \geqslant N_1$

$$P(z) = p^{\left[\frac{m_0}{2\mu}\right] + 1} P_2(z), \tag{95}$$

где $P_2(z)$ — опять нормальная функция. Если мы положим

$$f_1(z) = f(z) - P(z),$$

то в силу условий (92) и представления (78)

$$f(z) = P(z) + f_1(z) =$$

$$= p^{\left[\frac{m_0}{2\mu}\right]+1} P_2(z) + [z(z-p)\ldots(z-rp)]^{\left[q^{\frac{1}{3}}\right]r+1} f_2(z), \quad (96)$$

где $f_2(z)$ и $P_2(z)$ — нормальные функции. Но тогда для любых s и t, $s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}](r+1)$, $t \leqslant r+1$, будет иметь место оценка

$$|f^{(s)}(pt)|_{\wp} < \max\left[\wp^{-\mu\left[\frac{m_0}{2\mu}\right]-\mu}, \quad \wp^{-\mu\left[q^{\frac{1}{3}}\right]r(r+1)+\mu(s-r)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \max\left[\wp^{-\mu\left[\frac{m_0}{2\mu}\right]-\mu}, \quad \wp^{-\mu\left[q^{\frac{1}{3}}\right]r^2}\right] \leqslant \wp^{-\mu\left[q^{\frac{1}{3}}\right]r^2}, \quad N \geqslant N_1. \quad (97)$$

Воспользовавшись теперь неравенствами (89), мы из неравенств (97) получаем неравенства

$$|U_{s,t} n_2^s d^{2pqt}|_{\wp} \leqslant |\eta^{-s}|_{\wp} \wp^{-\mu[q^{\frac{1}{3}}]r^2} <$$

$$< \wp^{-\mu[q^{\frac{1}{3}}]r^2 + m_1}, \quad m_1 = O(q^{\frac{1}{3}}r), \quad (98)$$

в силу (94) верные для любых s и t, $s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}](r+1)$, $t \leqslant r+1$. Из неравенств (86) и (88) непосредственно следует также, что

$$\overline{\left|n^s d^{2pqt} U_{s,t}\right|} \leqslant e^{\Theta(rq + q^{\frac{11}{6}})}, \; s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}](r+1), \; 0 \leqslant t \leqslant r+1. \quad (99)$$

Если $U_{s,t}$ для каких-нибудь s_0 и t_0, $s_0 \leqslant [q^{\frac{1}{3}}](r+1)$, $t_0 \leqslant r+1$, то из неравенств (99) и (77) следует неравенство

$$|U_{s_0,t_0}|_{\wp} \geqslant \wp^{-m_2}, \quad m_2 = O(rq + q^{\frac{11}{6}}) = O(rq), \quad (100)$$

так как $r \geqslant r_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{5}{6}}\right]$. Сопоставляя неравенства (98) и (100), мы видим, что при $N \geqslant N_1$ должно выполняться неравенство

$$\mu\,[q^{\frac{1}{3}}]\,r_2^2 - m_1 \leqslant m_2 = O(rq),$$

или, что то же самое, неравенство

$$[q^{\frac{1}{3}}]\,r^2 < C_0 r\,[q^{\frac{1}{3}}]^3, \tag{101}$$

при $N \geqslant N_1$, где C_0 — эффективно вычисляемая постоянная, не зависящая от r и q. Но из (101) следует, что $r < C_0 q^{\frac{2}{3}}$, а с другой стороны, $r > r_0 > \frac{1}{2} q^{\frac{5}{6}}$. Но при $N \geqslant N_0 \geqslant N_1$ эти неравенства будут противоречивы. Это приводит нас к заключению, что при $N \geqslant N_0$, $U_{s,t} = 0$ для всех s и t, $0 \leqslant s \leqslant [q^{\frac{1}{3}}](r+1)$; $0 \leqslant t \leqslant r+1$. Мы пришли, таким образом, к противоречию с условиями выбора числа r, что и доказывает нашу теорему.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если a и b — алгебраические числа поля K, $\wp$ — простой идеал этого поля, $|a|_\wp = |b|_\wp = 1$ и $a^{x_1} \neq b^{x_2}$ ни для каких отличных от нуля в совокупности целых рациональных x_1 и x_2, то сравнение

$$a^{x_1} - b^{x_2} \equiv 0 \bmod \wp^m, \quad |x_1| + |x_2| \leqslant x, \quad m = [\ln^7 x], \tag{102}$$

при $x > x_0$, где x_1, x_2 — целые рациональные числа и $x_0 = x_0(a, b, \wp)$ — эффективно вычисляемая постоянная, невозможно. Неравенства для меры трансцендентности в обычном, не $\wp$-адическом смысле, для чисел вида a^b или $\frac{\ln a}{\ln b}$ при a и b алгебраических будут доказаны ниже. Мы приведем здесь только один частный случай подобных неравенств. Как будет доказано ниже, неравенство

$$|x_1 \ln a + x_2 \ln b| < e^{-\ln^{2+\varepsilon} x}, \quad x \geqslant |x_1| + |x_2|, \quad \varepsilon > 0, \tag{103}$$

не имеет решений в целых рациональных x_1, x_2 при $x > x_0$, $x_0 = x_0(a, b)$, причем x_0 может быть эффективно вычислено. Это неравенство является частным случаем неравенства (110) § 3 гл. I, существенная роль которого в теории диофантовых уравнений и алгебраических полей была там же установлена. В нашем частном случае при бинарной форме граница величины возможных решений неравенства (103), как уже было сказано, может быть найдена вполне эффективно благодаря применению вполне эффективных аналитических методов. Поэтому можно считать основной задачей аналитической теории трансцендентных чисел задачу такого усиления аналитических методов в теории трансцендентных чисел, при котором станет возможным применение их к исследованию поведения линейных форм от n логарифмов алгебраических чисел. Неравенство же (103) позволяет подойти к вопросу о границах решений некоторых классов кубических уравнений, поля которых имеют одну единицу. Из наших неравенств следует также, что уравнение

$$\alpha^x + \beta^y = \gamma^z \tag{104}$$

при алгебраических α, β и γ и условии, что хотя бы одно из них не есть алгебраическая единица и γ не есть степень двойки, имеет только конечное число решений в целых рациональных числах x, y, z. Граница величины возможных решений здесь может быть эффективно вычислена. Из тех же неравенств (83) и (103) следует конечность числа решений довольно широкого класса трансцендентных уравнений с двумя переменными. Возвращаясь опять к вопросу о мере трансцендентности, мы приведем еще некоторые результаты относительно меры трансцендентности некоторых классов чисел, связанных с эллиптическими функциями. Впервые результаты в этом направлении были получены Н. И. Фельдманом [1], который пользовался в основном методом, который будет изложен ниже.

Пусть инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\wp(z)$ будут алгебраическими числами, ω — ее период, а $\varepsilon > 0$ произвольно мало и действительно. Тогда мы будем иметь неравенство

$$\Phi(H, n; \omega) > \exp\{-n^{4+\varepsilon} \max[\ln H (\ln\ln H)^{4+\varepsilon},\ n \ln^{5+\varepsilon} n]\},$$

$$\max[H, n^n] \geqslant C(\varepsilon, g_2, g_3).$$

Пусть инварианты $\wp(z)$ — попрежнему алгебраические числа, а α — корень уравнения $\wp(\alpha)=a$, где a — алгебраическое число. Пусть также $0<\delta<1$ и $\varepsilon>0$. Тогда мы будем иметь неравенство

$$\Phi(H, n; \alpha) >$$
$$> \exp\left\{-\max\left[\ln H e^{n(\ln\ln H)^{\frac{1}{2}+\delta}},\ e^{n^{2+\delta}+n^{2+\frac{\delta}{2}+3\varepsilon}}\right]\right\},$$
$$\max\left[H, e^{e^{n^{2+\delta}}}\right] > C(g_2, g_3, \alpha, \delta, \varepsilon).$$

Проблема алгебраической независимости в рациональном поле чисел вида α^β и, тем более, логарифмов алгебраических чисел, неизмеримо труднее проблемы алгебраической независимости значений E-функций, о которой шла речь в главе II.

Трудность этих проблем связана, повидимому, со следующими обстоятельствами. Прежде всего видно, что при дифференцировании функций типа α^z при α алгебраическом быстро растут степени трансцендентного числа $\ln\alpha$, что препятствует построению линейных форм от произведения степеней этих логарифмов, имеющих не слишком большие показатели. Далее, сразу видно, что получающиеся при дифференцировании формы не имеют стандартно и достаточно просто связанных с простыми функциями коэффициентов. Наконец, можно заметить, что замена действия взятия производной при образовании нужных линейных форм действием прибавления к z единицы или каких-либо алгебраических чисел вызывает слишком большой рост коэффициентов этих форм, что также препятствует получению нужного результата. Благодаря всем этим обстоятельствам долгое время не удавалось добиться движения вперед в решении вопросов взаимной трансцендентности, о которых идет речь. В настоящий момент можно указать один новый метод [12], который позволяет решать некоторые из этих вопросов пока еще частного характера, хотя можно надеяться, что этот метод может быть значительно усилен. Мы покажем его основные черты на примере доказательства одной достаточно общей теоремы о взаимной трансцендентности или, что то же самое, алгебраической независимости в рациональном поле одного класса чисел. Мы ограничимся здесь только изложением хода доказательства, разбив его на отдельные этапы, и докажем теорему, что если a — число алгебраическое, $a \neq 0, 1$ а α — кубическая иррациональность, которую можно, без нарушения общности, считать целым числом, то между числами a^{α} и a^{α^2} нет алгебраических соотношений в рациональном поле. Допустим, что такое соотношение существует, другими словами, что имеет место уравнение $P(\omega, \omega_1) = 0$, где $\omega = a^{\alpha} = e^{\alpha \ln a}$, $\omega_1 = a^{\alpha^2} = e^{\alpha^2 \ln a}$ и многочлен $P(x, y)$ неприводим в рациональном поле и имеет целые рациональные коэффициенты. Трансцендентность числа ω будем считать уже доказанной. В дальнейшем целое число q будет неограниченно велико, а константы λ с любыми индексами не будут зависеть от q.

Этап первый. Можно найти такие целые рациональные, в совокупности отличные от нуля числа C_{k_0, k_1, k_2, k_3} и $\lambda_0 > 0$, что для функции $f(z)$

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} \sum_{k_3=0}^{q} A_{k_1, k_2, k_3} e^{(k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2)\eta z}, \tag{105}$$

$$\eta = \ln a, \; A_{k_1, k_2, k_3} = \sum_{k_0=0}^{q'} C_{k_0, k_1, k_2, k_3} \omega^{k_0}, \; q' = [q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q],$$

будут выполнены условия

$$|C_{k_0, k_1, k_2, k_3}| < e^{2q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q} \tag{106}$$

и

$$f^{(s)}(t) = 0; \quad t = p_1 + p_2\alpha + p_3\alpha^2, \quad 0 \leqslant p_i \leqslant q_1 = [q^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q],$$

$$i = 1, 2, 3; \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0 = [\lambda_0 q^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{3}{4}} q], \quad \lambda_0 > 0. \tag{107}$$

Эта функция легко может быть построена с помощью леммы II § 2 гл. II.

Этап второй. Можно доказать, что наша функция $f(z)$ обладает тем свойством, что среди чисел $f^{(s)}(t)$,

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant s \leqslant s_1 = [4q^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{3}{4}} q]; \\ &t = \sum_{k=0}^{2} p_k \alpha^k, \quad 0 \leqslant p_i \leqslant q_1; \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

найдется хотя бы одно число, отличное от нуля.

Для доказательства этого предложения запишем нашу функцию в форме

$$f(z) = \sum_{0}^{N-1} B_k e^{\tau_k z}, \quad \tau_k = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2, \quad N = (q+1)^3,$$

$$B_n = A_{k_1,\, k_2,\, k_3}, \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant N-1} |B_k| = |B_\nu| \neq 0,$$

и положим $Q(x) = \prod\limits_{i=0}^{N-1} (x - \tau_i)$, $\sum\limits_{s=0}^{N-1} C_{k,\,s} x^s = Q(x)(x - \tau_k)^{-1}$.

Предположим, что все числа $f^{(s)}(t)$ в границах, указываемых неравенствами (108), равны нулю. Тогда мы будем иметь интегральное представление

$$-B_\nu = \frac{(4\pi^2)^{-1}}{Q'(\tau_\nu)} \sum_{s=0}^{N-1} s!\, C_{\nu,\,s} \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} \prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1} \left[\frac{x - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}{z - k \quad - k_2\alpha - k_3\alpha^2}\right]^{s_1} \times$$
$$\times \frac{f(z)\,dz\,dx}{x^{s+1}(z-x)},$$

где Γ_0 есть окружность $|x| = 1$, а Γ_1 — окружность $|z| = \frac{N}{q}$. Оценивая правую часть по модулю и принимая во внимание, что $|k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2| > \lambda_1 k^{-2}$, $|k_i| \leqslant k$, $i = 1, 2, 3$, в силу того, что α — кубическая иррациональность, мы получим неравенство

$$1 \leqslant \exp[-q^3(\ln q - \lambda_2 \ln\ln q)],$$

откуда и следует верность нашего утверждения при $q > q_0$.

Этап третий. Воспользовавшись представлением чисел

$$f^{(s)}(t) = \frac{-s!}{(2\pi)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} \prod_{0}^{q_1} \prod_{0}^{q_1} \prod_{0}^{q_1} \left[\frac{x - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}{z - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}\right]^{s_0} \times$$

$$\times \frac{f(z)\,dz\,dx}{(x-t)^{s+1}(z-x)}, \qquad (109)$$

где Γ есть окружность $|x| = \sqrt{q \ln q}$, а Γ_1 — окружность $|z| = q^2$, имеющим место в силу условий, которым с самого начала, по построению, удовлетворяет функция $f(z)$, мы доказываем, что для этой функции выполняются условия

$$|\eta^{-s} f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{2}\lambda_0 q^3 \ln q}, \qquad (110)$$

$$0 \leqslant s \leqslant [4q^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{3}{4}} q], t = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2, 0 \leqslant k_i \leqslant q, i = 1, 2, 3.$$

Это легко может быть получено, если оценить по модулю интеграл в правой части (109).

Этап четвертый. Комбинируя результат, полученный на втором этапе, с неравенством (110) и исключая ω с помощью $P(\omega, \omega_1) = 0$, мы доказываем, что, каково бы ни было целое число $q > q_0$, всегда существует многочлен $P_q(x)$ с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H такой, что

$$0 < |P_q(\omega)| < e^{-\frac{1}{4}\lambda_0 q^3 \ln q}, \quad \max[n, \ln H] < \lambda_3 q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q, \quad (111)$$

где $\lambda_3 > 0$ и $\omega = a^\alpha$.

Этап пятый. Из факта существования многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (111) для любого q, мы устанавливаем существование для бесчисленного множества значений q неприводимого, с целыми без общего делителя коэффициентами, многочлена $R(\omega)$, подчиняющегося условиям

$$0 \leqslant |R(\omega)| < e^{-\lambda_4 \sigma^2 \sqrt{\ln q}}, \quad \max[n_1, \ln H_1] < \sigma < \lambda_5 q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q,$$

где $\lambda_4 > 0$, $\lambda_5 > 0$, а n_1 и H_1 — степень и высота многочлена $R(x)$. Подбирая многочлен $P(\omega)$, подходящий по величине, и составляя результант двух многочленов $P(\omega)$ и $R(\omega)$, мы приходим к противоречию ввиду того, что $P(x)$ можно подобрать не делящимся на $R(x)$ и малости $|P(\omega)|$ и $|R(\omega)|$.

Этап первый состоит в построении функции $f(z)$, имеющей очень много нулей большой кратности в точках вида $k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2$. Коэффициенты функции выбираются в виде многочленов не слишком большой степени с целыми, в свою очередь не слишком большими коэффициентами. Подобный выбор возможен ввиду того, что при предположении алгебраической зависимости между числами ω и ω_1 число условий, определяющих коэффициенты многочленов от ω может быть взято значительно меньшим числа этих коэффициентов.

Этап второй состоит в том, что доказывается невозможность для функции $f(z)$ иметь слишком много нулей. Это обстоятельство связано с тем, что функция $f(z)$ есть линейная комбинация показательных. Весьма существенным обстоятельством при этом является неравенство

$$|k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2| > \lambda k^{-2}, \quad |k_i| \leqslant k, \qquad i = 1, 2, 3,$$

которое в свою очередь имеет место из-за того, что α — кубическая иррациональность.

Этап третий заключается в доказательстве достаточной малости значений функции $f(z)$ и ее производных вплоть до очень большого порядка.

Этап четвертый состоит в доказательстве существования, для весьма плотной последовательности целых чисел σ и многочленов $P(z)$, высоты и степени которых не превышают величин e^σ и σ, удовлетворяющих неравенствам $-\sigma^2\sqrt{\ln q} > \ln|P(\omega)|$. Это возможно благодаря тем фактам, которые были установлены на этапах втором и третьем.

Этап пятый заключается в доказательстве того, что не существует никакого трансцендентного числа ω, которое удовлетворяло бы условиям, полученным на предыдущем этапе.

Приведенный ход рассуждения непосредственно, почти без изменений, приводит и к более общему утверждению. Пусть α_1, α_2, α_3 будут числами алгебраического поля степени ν, линейно независимыми в рациональном поле, β_1, β_2, β_3 линейно независимы в рациональном поле. Тогда между 9 числами $e^{\alpha_k \beta_i}$, $k=1, 2, 3$, $i=1, 2, 3$ не может существовать алгебраических соотношений в рациональном поле, с помощью которых эти числа могут быть выражены алгебраически через одно.

В частности, если α — алгебраическая иррациональность степени не ниже третьей, а $a \neq 0$, 1 алгебраическое, то четыре числа a^{α}, a^{α^2}, a^{α^3}, a^{α^4} не могут одновременно быть выражены алгебраически в рациональном поле через одно из них. Несколько изменив метод, можно, например, доказать, что числа e^{e^k}, $e^{e^{2k}}$, $e^{e^{3k}}$ не могут одновременно быть выражены алгебраически через e и, в частности, хотя бы одно из них должно быть трансцендентным числом при любом целом рациональном $k>0$. Совершенно так же одно из двух чисел e^{ie^i}, $e^{ie^{2i}}$ должно быть трансцендентным числом.

В следующих параграфах мы дадим полное изложение этого метода.

§ 4. Формулировки основных теорем и вспомогательные предложения

В этом параграфе мы приведем формулировки трех основных теорем и докажем вспомогательные предложения, нужные для их доказательства.

Для сокращения изложения мы введем несколько обозначений и определений, которые будут в дальнейшем иметь один и тот же смысл. Многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$ всегда будет многочленом с целыми рациональными коэффициентами, общий наибольший делитель которых равен единице, неприводимым в рациональном поле. Этот многочлен будет предполагаться отличным от постоянной. Мы будем говорить, что два многочлена Q_1 и Q_2 различны, если $Q_1 \neq \pm Q_2$, и что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ алгебраически независимы в рациональном поле, если равенство $Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)=0$ невозможно ни при каком $Q(x_1, x_2, \ldots, x_s)\not\equiv 0$. Далее мы будем говорить, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ выражаются алгебраически через одно из них, например, α_i, если имеют место s уравнений

$$Q_k(\alpha_k, \alpha_i)=0, \quad k=1, 2, \ldots, s,$$

где все $Q_k(x, \alpha_i)\not\equiv 0$. Наконец, расширим рациональное поле присоединением к нему одного трансцендентного числа, а полученное поле R_0 расширим в свою очередь присоединением к нему корня алгебраического уравнения с коэффициентами из поля R_0. Любое такое поле или просто конечное алгебраическое поле мы будем называть полем R_1. Очевидно, что если мы расширим любое алгебраическое поле присоединением к нему чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, то мы получим поле R_1 тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ алгебраически выражаются через одно из них.

Теорема I. *Пусть числа η_0, η_1, η_2, так же как и числа $1, \alpha_1, \alpha_2$, будут линейно независимы в рациональном поле, и неравенство*

$$|x_0\eta_0+x_1\eta_1+x_2\eta_2|>e^{-\tau x\ln x}, \ |x_i|\leqslant x, \ i=1, 2, 3, \quad (112)$$

где $\tau>0$ — некоторая постоянная, а x_0, x_1, x_2, $\sum\limits_1^3|x_i|>0$ — целые рациональные числа, будет иметь место при $x>x'$. Тогда расширение рационального поля путем присоединения к нему 11 чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, e^{\eta_i\alpha_k}, \quad i=0, 1, 2; \quad k=0, 1, 2, \alpha_0=1, \quad (113)$$

никогда не может дать поля R_1.

Следствия из теоремы I.

1) При $\eta_0=\ln a$, $\eta_1=\alpha\ln a$, $\eta_2=\alpha^2\ln a$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\alpha^2$, где α и $a\neq 0, 1$ алгебраические числа, причем α степени не ниже третьей, мы получаем, что числа a^α, a^{α^2}, a^{α^3}, a^{α^4} не могут быть алгебраически выражены через одно из них. В частности, когда α — кубическая иррациональность, a^α и a^{α^2} алгебраически независимы в рациональном поле.

2) При $\eta_0=\ln a$, $\eta_1=e^{\nu}\ln a$, $\eta_2=e^{2\nu}\ln a$, $\alpha_1=e^{\nu}$, $\alpha_2=e^{2\nu}$, где $a\neq 0$, 1 алгебраическое, а $\nu\neq 0$ рациональное, мы получаем, что четыре числа $a^{e^{\nu}}$, $a^{e^{2\nu}}$, $a^{e^{3\nu}}$, $a^{e^{4\nu}}$ не могут быть алгебраически выражены через число e и, в частности, хотя бы одно из этих чисел должно быть трансцендентным числом.

3) При $\eta_1=\alpha\eta_0$, $\eta_2=\alpha^2\eta_0$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\alpha^2$, $\eta_0\neq\alpha^{-k}\ln a$, $k=0,\ 1,\ 2$, где $a\neq 0$, 1 и α алгебраические, причем α — кубическая иррациональность, мы получаем, что η_0 не может быть общим корнем двух уравнений

$$Q_1(e^{\eta},\ e^{\alpha\eta},\ e^{\alpha^2\eta})=0,\quad Q_2=(e^{\eta},\ e^{\alpha\eta},\ e^{\alpha^2\eta})=0,$$

где Q_1 и Q_2 различны.

Теорема II. *Пусть* $\eta_0\neq 0$, $\frac{\eta_1}{\eta_0}$ *иррационально, числа* 1, α_1, α_2 *линейно независимы в рациональном поле и при* $x>x'$ *выполняется неравенство*

$$\left|x_0+x_1\frac{\eta_1}{\eta_0}\right|>e^{-\tau x^2\ln x},\quad \tau>0,\quad |x_0|+|x_1|\leqslant x, \tag{114}$$

где τ — *постоянная, а* x_0 и x_1 — *целые рациональные числа. Тогда расширение рационального поля путем присоединения к нему* 10 *чисел*

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ e^{\eta_i\alpha_k};\quad i=0,\ 1;\quad k=0,\ 1,\ 2;\quad \alpha_0=1 \tag{115}$$

никогда не может быть полем R_1.

Следствия из теоремы II.

1) При $\eta_0=1$, $\eta_1=e^{\nu}$, $\alpha_1=e^{\nu}$, $\alpha_2=e^{2\nu}$, где $\nu\neq 0$ рациональное число, мы получаем, что три числа $e^{e^{\nu}}$, $e^{e^{2\nu}}$, $e^{e^{3\nu}}$ не могут быть алгебраически выражены через число e и хотя бы одно из них трансцендентно.

2) При $\eta_0=\ln a$, $\eta_1=\ln^{\nu+1}a$, $\alpha_1=\ln^{\nu}a$, $\alpha_2=\ln^{2\nu}a$, где $a\neq 0$, 1 — алгебраическое число, а $\nu\neq 0$ — рациональное, мы получаем, что три числа $a^{\ln^{\nu}a}$, $a^{\ln^{2\nu}a}$, $a^{\ln^{3\nu}a}$ не могут быть алгебраически выражены через $\ln a$ и хотя бы одно из них трансцендентно.

Из первых двух теорем можно получить и ряд других следствий.

Далее мы докажем одну общую теорему о мере трансцендентности a^b и $\frac{\ln a}{\ln b}$ при алгебраических a и b.

Теорема III. *Пусть* α, β, b *и* $\alpha \neq 0, 1$ *будут алгебраические числа, а* b *и* $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ *иррациональны. Пусть также степень и высота многочлена* $P(x)$, *имеющего целые рациональные коэффициенты, будут* $s > 0$ *и* $H \geqslant 1$. *Тогда при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и* $H > H_0$ *будут иметь место неравенства*

$$|P(a^b)| > e^{-\frac{s^3}{1+\ln^3 s}(s+\ln H)\ln^{2+\varepsilon}(s+\ln H)} \tag{116}$$

и

$$\left|P\left(\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\right)\right| > e^{-s^2(s+\ln H)^{2+\varepsilon}}. \tag{117}$$

Доказательства этих теорем будут даны в следующем параграфе. Заметим, что неравенство (103) предшествующего параграфа есть частный случай неравенства (117) при $s=1$.

Поле R_1, нами уже определенное, будет всегда образовано числами ω и ω_1, где ω_1 — корень алгебраического уравнения с коэффициентами из поля R_0, другими словами, из расширенного путем присоединения к нему ω рационального поля. Число ω_1, степень которого будет ν в R_0, мы будем предполагать целым числом, называя целым числом корень уравнения в R_0, старший коэффициент которого 1, а остальные коэффициенты многочлены с целыми рациональными коэффициентами от ω. В частном случае ω_1 может быть и алгебраическим числом. Целым числом поля R_1 мы будем называть любой многочлен с целыми рациональными коэффициентами от ω и ω_1, его высотой, если его степень относительно ω_1 не превосходит $\nu - 1$ — максимум модуля его коэффициентов, а степенью в том же случае, степень относительно ω.

Эти обозначения и условия остаются в силе во всех дальнейших рассмотрениях. В дальнейшем также целые положительные числа N, q и p будут предполагаться сколь угодно большими числами, величина которых ограничена снизу конечным числом неравенств, а числа

γ и λ с любыми индексами не будут зависеть от этих чисел N, q, p. Эти условия и стабильные обозначения являются дополнением к тем условиям и обозначениям, которые были введены нами выше.

Мы докажем теперь ряд лемм, необходимых для доказательства основных теорем.

Лемма I. *Пусть мы имеем систему m линейных уравнений с n неизвестными, $n > m$,*

$$L_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad |a_{i,k}| \leqslant a, \tag{118}$$

где все $a_{i,k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$ — целые рациональные числа. Тогда будет существовать решение этой системы в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отличных от нуля в совокупности, величина которых ограничена сверху неравенствами

$$|x_k| < 2(2na)^{\frac{m}{n-m}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{119}$$

Эта лемма есть частный случай леммы II § 2 гл. II и доказывается применением леммы I § 2 гл. I.

Лемма II. *Пусть $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_s), \ldots, P_m(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ будут произвольными многочленами от s переменных с высотами $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Обозначая высоту и степени многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_s) = P_1(x_1, \ldots, x_s) \ldots P_m(x_1, \ldots, x_s)$ через H и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_s$, мы будем иметь неравенство*

$$H \geqslant e^{-n} H_1 H_2 \ldots H_m, \quad n = \sum_{i=1}^{s} n_i. \tag{120}$$

Высота многочлена, как и всегда, будет максимумом модуля его коэффициентов. Эта лемма является обобщением леммы III § 2 гл. I.

Доказательство. Пусть M будет максимум $|P(x_1, x_2, \ldots, x_s)|$, когда $|x_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$, другими словами,

$$M = \max_{|x_i|=1} |P(x_1, x_2, \ldots, x_s)|. \tag{121}$$

Положим теперь $x_k = e^{2\pi i \varphi_k}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Тогда очевидно, что

$$M^2 \geqslant \int_0^1 \ldots \int_0^1 |P(x_1, \ldots, x_s)|^2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \ldots d\varphi_s. \quad (122)$$

Пусть теперь $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ будут многочленами степеней $p_1, p_2, \ldots, p_m$ с максимумами $M_1, \ldots, M_m$ при $|x| = 1$ одного переменного x. Положим $P(x) = P_1(x) P_2(x) \ldots P_m(x)$. Тогда степень $P(x)$ будет $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. Некоторые из этих p_i могут быть и нулями. Пусть какой-либо многочлен $R(x)$, $R(0) \neq 0$, степени n имеет при $|x| = 1$ максимум, равный единице. Тогда при $x = e^{2\pi i \varphi}$

$$|R(x)|^2 = \prod_{k=1}^{n} |a_k + b_k x|^2 =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^2 \prod_{k=1}^{n} |1 - t_k + t_k e^{-2\pi i \alpha_k} x|^2, \quad (123)$$

$$t_k = \frac{|b_k|}{|a_k| + |b_k|}, \quad 2\pi i \alpha_k = i \arg \frac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Но так как

$$\prod_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^2 \geqslant |R(x)|^2, \quad |x| = 1, \quad (124)$$

то

$$\prod_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^2 \geqslant 1, \quad (125)$$

и, следовательно,

$$|R(x)|^2 \geqslant \prod_{k=1}^{n} |1 - t_k + t_k e^{2\pi i (\varphi - \alpha_k)}|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n} [(1 - 2t_k)^2 + 4t_k(1 - t_k) \cos^2 \pi (\varphi - \alpha_k)]. \quad (126)$$

Каждый множитель в правой части неравенства (126) достигает своего минимума при $t_k = \frac{1}{2}$, откуда следует неравенство

$$|R(x)|^2 \geqslant 2^{-2n} \prod_{k=1}^{n} |x + x_k|^2, \quad x_k = e^{2\pi i a_k}. \tag{127}$$

Если $R(0) = 0$, то число n в неравенстве (127) заменилось бы на число $n' < n$. Применяя неравенства (127) и (122) к многочленам $P_k(x)$, мы получаем неравенства

$$|P_k(x)|^2 \geqslant 2^{-2p'_k} M_k^2 \prod_{\nu=1}^{p'_k} |x + x_{k,\nu}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2^{-2p'_k} \prod_{\nu=1}^{p'_k} |x + x_{k,\nu}|^2 \int_0^1 |P_k(x)|^2 \, d\varphi, \tag{128}$$

где $p'_k \leqslant p_k$, $x = e^{2\pi i \varphi}$. Далее, из неравенств (128) следует, при почленном их перемножении, что

$$|P(x)|^2 \geqslant 2^{-2p'} \prod_{k=1}^{p'} |x + x_k|^2 \int_0^1 \ldots$$
$$\ldots \int_0^1 |P_1(x_1) \ldots P_m(x_m)|^2 \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m, \tag{129}$$

где опять $p' \leqslant p$. Интегрируя по φ обе части неравенства (129), мы получим, что

$$\int_0^1 |P(x)|^2 \, d\varphi \geqslant$$
$$\geqslant 2^{-2p+1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |P_1(x_1) \ldots P_m(x_m)|^2 \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m, \tag{130}$$

так как, если $p' \geqslant 1$, то

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{p'} |x+x_k|^2 \, d\varphi \geqslant 2,$$

а если $p'=0$, то неравенство (130) очевидно. Неравенство (130) удобно переписать в форме

$$\int_0^1 |P(x)|^2 \, d\varphi \geqslant 2^{-2p+1} \prod_{k=1}^{m} \int_0^1 |P_k(x)|^2 \, d\varphi. \tag{130$'$}$$

Пусть теперь $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_s), \ldots, P_m(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ будут многочлены уже от s переменных, а

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_s) = P_1(x_1, x_2, \ldots, x_s) \ldots P_m(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

будет многочлен степеней $n_1, n_2, \ldots, n_s$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Полагая

$$x_{k,\nu} = e^{2\pi i \varphi_{k,\nu}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant m,$$

$$x_k = e^{2\pi i \varphi_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s,$$

и фиксируя произвольно $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, \ x_{p+1,\nu}, \ x_{p+2,\nu}, \ldots, x_{s,\nu}$; $\nu = 1, 2, \ldots, m$, мы получаем из неравенства (130) неравенства

$$\int_0^1 \prod_{\nu=1}^{m} |P_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1,\nu}, \ldots, x_{s,\nu})|^2 \, d\varphi_p \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-2n_p+1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{\nu=1}^{m} |P_\nu(x_1, x_2, \ldots$$

$$\ldots, x_{p-1}, x_{p,\nu}, x_{p+1,\nu}, \ldots, x_{s,\nu})|^2 \, d\varphi_{p,1} \ldots d\varphi_{p,m} \tag{131}$$

$$p = 1, 2, \ldots, s,$$

так как степень многочлена в левой части неравенства по x_p не превысит n_p.

Допустим теперь, что при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant s$, верно неравенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |P(x_1, \ldots, x_{q-1} x_q, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_q \ldots d\varphi_s \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-2\sum\limits_{\nu=q}^{s} n_\nu + s - q + 1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{\nu=1}^{m} |P_\nu(x_1, \ldots$$

$$\ldots, x_{q-1}, x_{q,\nu}, \ldots, x_{s,\nu})|^2 \prod_{k=q}^{s} \prod_{\nu=1}^{m} d\varphi_{k,\nu}, \qquad (132)$$

где справа стоит $(s-q+1)m$-кратный интеграл.

Проинтегрировав обе части неравенства (132) по φ_{q-1} и воспользовавшись неравенством (131) при $p=q-1$, мы непосредственно получаем неравенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |P(x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_{q-1} d\varphi_q \ldots d\varphi_s \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-2\sum\limits_{\nu=q-1}^{s} n_\nu + s - q + 2} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{\nu=1}^{m} |P_\nu(x_1, \ldots$$

$$\ldots, x_{q-2} x_{q-1,\nu}, \ldots, x_{s,\nu})|^2 \prod_{k=q-1}^{s} \prod_{\nu=1}^{m} d\varphi_{k,\nu}, \qquad (133)$$

где справа стоит уже $(s-q+2)m$-кратный интеграл.

Итак, если неравенство (132) верно при $q>1$, то оно верно и при $q-1$. Когда $q=s$, то неравенство (132) совпадает с неравенством (131) при $p=s$. Отсюда следует, что неравенство (132) верно при любом $q \geqslant 1$, и, в частности, при $q=1$. Полагая в неравенстве (132) $q=1$, мы получаем непосредственно основное неравенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |P(x_1, x_2, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_s \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-2n+s} \prod_{\nu=1}^{m} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |P_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_s, \tag{134}$$

так как $n = \sum_{k=1}^{s} n_k$. Это последнее неравенство есть обобщение неравенства (130′) на случай s переменных.

Далее, если H_ν — высота многочлена $P_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, то очевидно, что

$$H_\nu^2 \leqslant \int_0^1 \ldots \int_0^1 |P_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_s; \tag{135}$$

и если H и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — высота и степени многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, то также очевидно, что

$$H^2 \geqslant \prod_{k=1}^{s} (1+n_k)^{-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |P(x_1, x_2, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_s. \tag{136}$$

Сопоставляя неравенства (134), (135) и (136), мы приходим к неравенству

$$H \geqslant 2^{\frac{s}{2}} \prod_{k=1}^{s} (1+n_k)^{-\frac{1}{2}} 2^{-n} H_1 H_2 \ldots H_m, \tag{137}$$

откуда, так как $e^p > \sqrt{\frac{p+1}{2}}\, 2^p$ при $p \geqslant 1$, мы окончательно получаем неравенство нашей леммы, именно, что

$$H > e^{-n} H_1 H_2 \ldots H_m. \tag{138}$$

Докажем теперь лемму, дополняющую лемму II.

Лемма II. 1. *Если $P(x_1, \ldots, x_s)$ — многочлен степеней $n_1, n_2, \ldots, n_s$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_s$ высоты h, а многочлен $R(x_1, x_2, \ldots, x_s) = P^m(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ имеет высоту H, то*

$$H \geqslant \prod_{\nu=1}^{s} (1 + 2mn_\nu)^{-1} h^m. \tag{139}$$

Доказательство. При доказательстве мы сохраним те обозначения, которыми мы пользовались, доказывая лемму II. Разложим $|R^2(x_1, x_2, \ldots, x_s)|$ в ряд Фурье. Мы получаем соотношение

$$|R(x_1, x_2, \ldots, x_s)|^2 = \sum_{k_1=-p_1}^{p_1} \ldots \sum_{k_s=-p_s}^{p_s} e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{s} k_\nu \varphi_\nu} \int_0^1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 |R(x_1, \ldots, x_s)|^2 e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{s} k_\nu \varphi_\nu} d\varphi_1 \ldots d\varphi_s,$$

$$p_i = mn_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

откуда следует неравенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |R(x_1, \ldots, x_s)|^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_s \geqslant \prod_{\nu=1}^{s} (1 + 2p_\nu)^{-1} M^{2m},$$

где M определено равенством (121). Пользуясь неравенством (136), мы получаем отсюда неравенство

$$H^2 \geqslant \prod_{\nu=1}^{s} (1 + 2p_\nu)^{-2} M^{2m},$$

и далее, с помощью неравенств (122) и (135), неравенство

$$H^2 \geqslant \sum_{\nu=1}^{s} (1 + 2p_\nu)^{-2} \left[\int_0^1 |P(x_1, \ldots, x_s)^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_s \right]^m \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{\nu=1}^{s} (1 + 2p_\nu)^{-2} h^{2m},$$

что и доказывает лемму.

Любопытно отметить, что неравенство (137) асимптотически достижимо.

Положим $n = sm$, $s = \left[p^{\frac{2}{3}} \ln^{-\varepsilon} p \right]$, $m = \left[p^{\frac{1}{3}} \ln^{\varepsilon} p \right]$,

$$P(x) = x^n - 1, \quad P_k(x) = \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(x - e^{2\pi i \frac{ks+\nu}{n}} \right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Тогда $H = 1$, $H_k = 2^{s + O(\ln n)}$, и следовательно,

$$H = 2^{-n + O\left(n^{\frac{1}{3}} \ln^{1+\varepsilon} n\right)} H_1 H_2 \ldots H_m.$$

Частный случай этой леммы был доказан в главе I.

Лемма III. *Пусть $p, q, p < q^{\gamma}, r, r_1$ — целые рациональные большие нуля числа, $\varepsilon > 0$ и γ фиксированы, а все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, так же как и числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, различны между собой и расположены в порядке неубывания модулей, другими словами, $|\alpha_k| \leqslant |\alpha_{k+1}|$ и $|\beta_k| \leqslant \leqslant |\beta_{k+1}|$. Положим $|\alpha_q| = \alpha$, $|\beta_r| = \beta$ и допустим, что существуют такие постоянные $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 + \gamma_0 < 1$, что $\alpha < (pq)^{\gamma_1}$, $\beta < (pq)^{\gamma_0}$. Допустим также существование постоянной γ_2, такой, что выполняются неравенства*

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{q} |\alpha_i - \alpha_k| > e^{-\gamma_2 q \ln pq}, \quad |\alpha_i - \alpha_k| > e^{-\gamma_2 q \ln pq}, \tag{140}$$

$$1 \leqslant i \leqslant q, \quad 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Тогда, если функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s=1}^{q} A_{k,s} z^k e^{\alpha_s z}, \tag{141}$$

где числа $A_{k,s}$ в совокупности отличны от нуля, то по крайней мере одно из чисел

$$f^{(s)}(\beta_k), \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \tag{142}$$

$$r_1 r \geqslant [\lambda pq], \qquad \lambda = \frac{1 + \gamma_1 + 2\gamma_2 + \varepsilon}{1 - \gamma_1 - \gamma_0},$$

отлично от нуля при достаточно большом pq.

Доказательство. Заметим, что без нарушения общности нашей леммы можно считать $|A_{k,s}| \leqslant 1$, причем хотя бы один коэффициент нашей функции равен по модулю единице. Для этого мы всегда можем разделить все коэффициенты на наибольший по модулю коэффициент, который отличен от нуля по предположению. Положим, для сокращения записи, $m = pq$, $\varepsilon = 3\delta$ и допустим, что

$$f^{(s)}(\beta_k) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \tag{142'}$$

$$r_1 r \geqslant [\lambda m], \qquad \lambda = \frac{1 + \gamma_1 + 2\gamma_2 + \varepsilon}{1 - \gamma_1 - \gamma_0}.$$

Тогда мы будем иметь представление

$$f^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^{s+1}} \int\limits_{\Gamma_1} \left[\frac{(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_r)}{(\zeta-\beta_1)\ldots(\zeta-\beta_r)}\right]^{r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{143}$$

где контур Γ — окружность $|z| = 1$, а контур Γ_1 — окружность $|\zeta| = m^{1-\gamma_1}$. Оценивая при $s \leqslant m$ интеграл в правой части этого равенства по модулю, мы непосредственно получаем неравенство

$$|f^{(s)}(0)| < \exp\{[1 + \delta - \lambda(1 - \gamma_1 - \gamma_0)]\, m \ln m\}, \quad s \leqslant m. \tag{144}$$

Построим теперь многочлен $P(z)$ степени $m - 1 = pq - 1$, удовлетворяющий условиям

$$P^{(k)}(\alpha_s) = 0, \quad (k-\nu)^2 + (s-n)^2 \neq 0, \quad P^{(\nu)}(\alpha_n) = 1, \tag{145}$$
$$s = 1, 2, \ldots, q, \;\; k = 0, 1, \ldots, p-1, \;\; \nu \leqslant p - 1, \;\; n \leqslant q.$$

Такой многочлен степени $pq - 1$, когда все α_s различны, определяется единственным способом с помощью условий (145) из уравнения

$$\int\limits_{|\zeta| = 2\alpha} \left[\frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_q)}{(\zeta-\alpha_1)\ldots(\zeta-\alpha_q)}\right]^p \frac{P(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \quad |z| \leqslant \alpha. \tag{146}$$

Решая это уравнение, мы получим, что

$$P_{\nu,n}(z) = \frac{[(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_q)]^p}{\nu!\,(p-\nu-1)!} \times$$
$$\times \left| \frac{d^{p-\nu-1}}{d\zeta^{p-\nu-1}} \frac{-(\zeta-\alpha_n)^p}{[(\zeta-\alpha_1)\ldots(\zeta-\alpha_q)]^p(\zeta - z)} \right|_{\zeta=\alpha_n}, \tag{147}$$

и далее, что

$$P_{\nu, n}(z) = \frac{(-1)^{p+\nu}}{\nu!} \left[\frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_q)}{(\alpha_n-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_q)} \right]^p \times$$

$$\times \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_q= \\ =p-\nu-1}} (\alpha_n - z)^{-\nu_n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{p} \frac{(p+\nu_k-1)!}{(p-1)!\,\nu_k!} (\alpha_n-\alpha_k)^{-\nu_k}. \quad (148)$$

С другой стороны, мы будем иметь представление

$$P_{\nu, n}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k z^k, \quad m = pq. \quad (149)$$

Коэффициенты C_k можно непосредственно оценить по модулю, если принять во внимание условия (140) и неравенство $|\alpha_i| < m^{\gamma_1}$. Мы получаем тогда оценку

$$|C_k| < \exp[(\gamma_1 + 2\gamma_2 + \delta)\, m \ln m] \quad (150)$$

равномерно по ν и n.

Заметив теперь, что

$$\frac{d^k}{dz^k} z^r e^{\alpha_s z}\Big|_{z=0} = k(k-1)\,\ldots\,(k-r+1)\,\alpha_s^{k-r} = \frac{d^r}{dz^r} z^k\Big|_{z=\alpha_s}, \quad (151)$$

мы получаем соотношение

$$P_{\nu, n}^{(r)}(\alpha_s) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k \frac{d^k}{dz^k} z^r e^{\alpha_s z}\Big|_{z=0}, \quad (152)$$

откуда следует непосредственно, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k f^{(k)}(0) = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=1}^{q} A_{r, s} P_{\nu, n}^{(r)}(\alpha_s) = A_{\nu, n}. \quad (153)$$

Так как хотя бы одно $A_{\nu, n}$ равно по модулю единице, то, оценивая по модулю левую часть равенства (153), с помощью неравенств (144) и (150) и принимая во внимание, что $\lambda(1-\gamma_1-\gamma_0) = 1+\gamma_1+2\gamma_2+\varepsilon$, мы получаем неравенство

$$1 \leqslant m e^{-(\varepsilon-2\delta)\, m \ln m} = m e^{-\delta m \ln m}, \quad (154)$$

которое и приводит нас к противоречию при достаточно большом m.

Условие $p < q^{\gamma}$, входящее в формулировку леммы, служит только для упрощения доказательства и может быть заменено более слабым условием. Величина числа λ может также быть уменьшена. Лемма IV, которую мы сейчас докажем, служит дополнением к лемме III.

Лемма IV. *Пусть числа* $\eta \neq 0$, α, ε, $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$, *заданы,* α — *иррациональное число, для которого выполняется при* $x > x'$ *неравенство*

$$|x_0 \alpha + x_1| > e^{-\tau x}, \quad x = |x_0|, \tag{155}$$

где x_0 *и* x_1 — *целые рациональные числа, а* $\tau > 0$ — *постоянная. Пусть также* $N > 0$ *и* q, $N \geqslant q \geqslant \ln^{1+\varepsilon} N$ — *целые рациональные числа, причем* N *будет достаточно велико. Тогда если* $f(z)$ *имеет вид*

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{N} A_{k_1, k_2} e^{\eta (k_1 \alpha + k_2) z}, \quad f(z) \not\equiv 0, \tag{156}$$

$$|A_{k_1, k_2}| < e^{Nq}, \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant q, \quad 0 \leqslant k_2 \leqslant N,$$

и имеют место неравенства

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-Nq \ln q}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1, \quad t = 0, 1, \ldots, r, \tag{157}$$

где или

$$r = [\sqrt{q \ln N}], \quad r_1 = \left[\frac{4}{\varepsilon} N \sqrt{\frac{q}{\ln N}}\right], \quad \text{при } q \leqslant N,$$

или при $q = N$,

$$\sqrt{N} \leqslant r \leqslant N^{1-\varepsilon}, \quad r_1 = \left[\frac{4}{\varepsilon} \frac{N^2}{r}\right],$$

то

$$|A_{k_1, k_2}| < e^{-\frac{1}{4} Nq \ln q}, \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant q, \quad 0 \leqslant k_2 \leqslant N. \tag{158}$$

Доказательство. Условие (155) этой леммы тривиально выполняется, если α или алгебраическое или равно иррациональному отношению логарифмов алгебраических чисел при одном и том же основании. Положим $m=(q+1)(N+1)$, $\beta=|\alpha|+1$ и запишем $f(z)$ в форме

$$f(z)=\sum_{1}^{m} A_k e^{\alpha_k z}, \quad \alpha_k=\eta(k_1\alpha+k_2), \quad 0\leqslant k_1\leqslant q, \quad 0\leqslant k_2\leqslant N.$$

Оценим теперь величину $|f^{(s)}(0)|$ при $s\leqslant m$.

Рассмотрим прежде всего представление $f(z)$ при $|z|=\frac{1}{2}+r$, где r определено в условиях леммы,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{z(z-1)\ldots(z-r)}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-r)}\right]^{r_1+1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{r_1}\sum_{t=0}^{r}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\int\limits_{\Gamma_t}\left[\frac{z(z-1)\ldots(z-r)}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-r)}\right]^{r_1+1}\frac{(\zeta-t)^k}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

где контур Γ есть окружность $|\zeta|=q$, а контуры Γ_t суть окружности $|\zeta-t|=\frac{1}{4}$, $t=0, \ldots, r$.

Оценивая непосредственно правую часть этого неравенства по модулю и принимая во внимание неравенства (156), мы получаем неравенство

$$|f(z)|<e^{-\frac{4}{\varepsilon}m\ln\frac{q}{r}+\gamma_3 m}+e^{-m\ln q+\gamma_4 m}, \quad |z|=\frac{1}{2}+r. \qquad (159)$$

Рассмотрим теперь многочлен $P_n(z)$

$$P_n(z)=\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_m)}{(z-\alpha_n)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{m}(\alpha_n-\alpha_i)}=\sum_{k=0}^{m-1}C_{k,n}z^k; \qquad (160)$$

$$P_n(\alpha_k)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

Тогда, так же как и в лемме III,

$$A_n=\sum_{k=0}^{m-1}C_{k,n}f^{(k)}(0).$$

При $s \leqslant m$ из неравенства (159) следует, что

$$|f^{(s)}(0)| = \frac{s!}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}+r} \frac{f(z)}{z^{s+1}}\,dz\right| <$$

$$< e^{s\ln s - s\ln r + \gamma_5 m}\left[e^{-\frac{4}{\varepsilon} m \ln\frac{q}{r}} + e^{-m\ln q}\right]. \qquad (161)$$

Найдем теперь верхнюю границу модулей $C_{k,n}$. Прежде всего, так как $s!(N-s)! > 2^{-N} N!$, мы будем иметь при любом a оценку

$$\prod_{k=p}^{N+p} |a-k| > (a)\, 2^{-N-1} N!, \qquad (162)$$

где p — произвольное целое число, а символ (a) определяется соотношением

$$(a) = \min|a-k|, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (163)$$

Отсюда следует неравенство

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{m} |\alpha_n - \alpha_k| = |\eta|^{m-1} \prod_{\substack{k_1=0 \\ (k_1-p_1)^2+(k_2-p_2)^2\neq 0}}^{q} \prod_{k_2=0}^{N} |p_1\alpha + p_2 - k_1\alpha - k_2| >$$

$$> |\eta|^{m-1} \prod_{\substack{k_1=0\\k_1\neq p_1}}^{q} ([p_1-k_1]\,\alpha)\, 2^{-m} N!^{q+1},$$

где $0 < |p_1 - k_1| \leqslant q$. В силу условия (155) мы получаем окончательно, что

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{m} |\alpha_n - \alpha_k| > e^{m\ln N - \gamma_6 m}.$$

Далее, мы имеем непосредственно, что

$$(z-\alpha_1)\ \ldots\ (z-\alpha_m) \ll (z+\beta N)^m,$$

откуда и следует оценка

$$|C_{k,n}| < e^{(m-k)\ln N - m\ln N + \gamma_7 m} = e^{-k\ln N + \gamma_7 m}; \qquad (164)$$
$$0 \leqslant k \leqslant m.$$

Объединяя неравенства (161) и (164), мы получаем оценку

$$|A_n| < me^{m\ln q - m\ln r + \gamma_8 m}\left[e^{-\frac{4}{\varepsilon}m\ln\frac{q}{r}} + e^{-m\ln q}\right]. \quad (165)$$

Так как, по условиям леммы,

$$\frac{4}{\varepsilon}\frac{\ln q - \ln r}{\ln q} + \frac{\ln r}{\ln q} - 1 \geqslant \frac{1}{2}; \quad \frac{\ln r}{\ln q} \geqslant \frac{1}{2},$$

то из неравенства (165) следует, что

$$|A_n| < 2me^{-\frac{1}{3}m\ln q} < e^{-\frac{1}{4}m\ln q},$$

что и доказывает нашу лемму.

Заметим теперь, что если неравенства (157) заменить условиями $f^{(s)}(t) = 0$, где s и t изменяются в прежних границах, то мы можем разделить $f(z)$ на $\max|A_{k_1, k_2}|$, и тогда неравенства (158) приведут нас к противоречию. Отсюда следует, что хотя бы одно $f^{(s)}(t)$ при s и t, изменяющихся в указанных в лемме границах, будет отлично от нуля.

Лемма V. *Пусть α будет фиксированное трансцендентное число, числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ образуют базис кольца целых чисел алгебраического поля K_ν, $P(x)$ и $R(x)$ — многочлены степеней, не превосходящих соответственно p и r с коэффициентами — целыми числами поля K_ν, другими словами,*

$$P(x) = \sum_{s=0}^{p} H_s x^s; \quad H_s = \sum_{i=1}^{\nu} H_{s,i}\,\omega_i; \ \max|H_{s,i}| \leqslant H,$$

$$R(x) = \sum_{s=0}^{r} h_s x^s; \quad h_s = \sum_{i=1}^{\nu} h_{s,i}\,\omega_i; \ \max|h_{s,i}| \leqslant h,$$

где все $H_{s,i}$ и $h_{s,i}$ — целые рациональные. Тогда, если будет выполнено неравенство

$$|P(\alpha)| + |R(\alpha)| < (a\beta)^{-\nu(p+r)}h^{-\nu p}H^{-\nu r}(p+r)^{-\nu(p+r)}, \quad (166)$$

$$a = \nu \max_{1 \leqslant k,\, s \leqslant \nu} |\omega_k^{(s)}|, \quad \beta = 1 + |\alpha|,$$

где $\omega_k^{(1)} = \omega_k$, *а* $\omega_k^{(2)}, \ldots, \omega_k^{(\nu)}$ — *его сопряженные, то при* $p + r \geqslant 2$ *многочлены* $P(x)$ *и* $R(x)$ *должны иметь общий корень, и если* $R(x)$ *неприводим в поле* K_ν, *то* $P(x)$ *делится нацело на* $R(x)$. *В случае* $\nu = 1$ *число* $a = 1$.

Доказательство. Без нарушения общности можно предположить, что $P(0) \neq 0$, $R(0) \neq 0$, $H_p \neq 0$, $h_r \neq 0$, так как правая часть (166) есть убывающая функция p и r.

Допустим, что $R(x)$ и $P(x)$ не имеют общего корня. Тогда D_1, результант двух многочленов $R(x)$ и $P(x)$, будет целым алгебраическим числом поля K_ν, отличным от нуля. Этот результант является определителем порядка $p + r$ и имеет вид

$$D_1 = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & \ldots & H_{p-1} & H_p & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & H_{p-r} & H_{p-r+1} & H_{p-r+2} & \ldots & H_p \\ h_0 & h_1 & \ldots & h_{p-1} & h_p & h_{p+1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_r \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P(\alpha) & H_1 & \ldots & H_{p-1} & H_p & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{r-1} P(\alpha) & 0 & \ldots & H_{p-r} & H_{p-r+1} & H_{p-r+2} & \ldots & H_p \\ R(\alpha) & h_1 & \ldots & h_{p-1} & h_p & h_{p+1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{p-1} R(\alpha) & 0 & \ldots & h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_r \end{vmatrix}, \quad (167)$$

где $H_k = 0$ при $k < 0$, $k > p$; $h_k = 0$ при $k < 0$, $k > r$. Оценивая по модулю с помощью неравенства Адамара как D_1, так и все ему сопряженные числа $D_2, D_3, \ldots, D_\nu$, мы получаем непосредственно, что

$$1 \leqslant \prod_{k=1}^{\nu} |D_k| \leqslant [|P(\alpha)| + |R(\alpha)|](\alpha\beta)^{\nu(p+r)} H^{\nu r} h^{\nu p} (p+r)^{\frac{p+r}{2}\nu} \leqslant$$

$$\leqslant (p+r)^{-\frac{p+r}{2}\nu} \quad (168)$$

в силу условий (166). Это доказывает лемму.

Лемма VI. *Пусть α фиксировано и трансцендентно, а $P(x)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами, общий делитель которых единица, высоты H_0 и степени n_0. Если имеют место неравенства*

$$|P(\alpha)| < H^{-\lambda n}, \ \lambda > 6, \ \ln H \geqslant n, \ H_0 \leqslant H, \ n_0 \leqslant n, \tag{169}$$

то существует делитель $P(x)$, $P_1(x)$, являющийся степенью неприводимого в рациональном поле многочлена, причем степень n_1, высота H_1 и величина в точке α этого делителя $P_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$|P_1(\alpha)| < H^{-(\lambda-6)n}, \quad H_1 \leqslant He^n, \quad n_1 \leqslant n. \tag{170}$$

Доказательство. Заметим, что если $P(x) = R_1(x) R_2(x)$, где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами и $|R_1(\alpha)| \geqslant |R_2(\alpha)|$, то

$$H^{-3n} < |R_1(\alpha)|. \tag{171}$$

Действительно, если высоты и степени $R_1(x)$ и $R_2(x)$ будут h_1, h_2 и n_1, n_2, то $n_1 + n_2 = n$ и в силу леммы II $h_1 h_2 < He^n$. Отсюда следует, что при $H > H'(\alpha)$

$$(1+|\alpha|)^n n^n h_1^{n_2} h_2^{n_1} < (1+|\alpha|)^n n^n (h_1 h_2)^n < \frac{1}{2} H^{3n}. \tag{172}$$

Значит, если неравенство (171) не имеет места, то выполнены условия леммы V при $\nu = 1$, и многочлены $R_1(x)$ и $R_2(x)$ имеют общий делитель.

Представим теперь $P(x)$ в виде произведения степеней различных неприводимых многочленов с целыми коэффициентами

$$P(x) = P_1(x) \ \ldots \ P_s(x), \ |P_1(\alpha)| \leqslant |P_2(\alpha)| \leqslant \ldots \leqslant |P^s(\alpha)|. \tag{173}$$

Неравенство

$$|P_1(\alpha) \ \ldots \ P_k(\alpha)| > |P_{k+1}(\alpha) \ \ldots \ P_s(\alpha)| \tag{174}$$

не может иметь места в силу условий (173) уже при

$k \geqslant s-k$. Значит, существует такое $\nu < \frac{s}{2}$, что

$$\left.\begin{aligned} |P_1(\alpha) \ldots P_{\nu-1}(\alpha)| \geqslant |P_\nu(\alpha) P_{\nu+1}(\alpha) \ldots P_s(\alpha)|, \\ |P_1(\alpha) \ldots P_\nu(\alpha)| \leqslant |P_{\nu+1}(\alpha) \ldots P_s(\alpha)|. \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

Но тогда, с одной стороны, в силу условия (169) и неравенства (171)

$$|P_\nu(\alpha) P_{\nu+1}(\alpha) \ldots P_s(\alpha)| < H^{-(\lambda-3)n}, \tag{176}$$

а с другой стороны,

$$|P_{\nu+1}(\alpha) \ldots P_s(\alpha)| > H^{-3n}. \tag{177}$$

Отсюда непосредственно следует неравенство

$$|P_1(\alpha)| \leqslant |P_\nu(\alpha)| < H^{-(\lambda-6)n}. \tag{178}$$

Но из леммы II следует, что высота $P_1(x)$ не превышает He^n, что и доказывает полностью нашу лемму.

Лемма VI. 1. *При выполнении условий леммы* VI *многочлен* $P(x)$ *имеет неприводимый делитель* $Q(x)$ *(общий делитель целых коэффициентов* $Q(x)$ *— единица), удовлетворяющий условиям*

$$|Q(\alpha)| < H^{-\frac{\lambda-6}{s}n}, \quad H^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2n}{s}} > h_2, \quad \frac{n}{s} \geqslant n_2, \tag{179}$$

где h_2 *и* n_2 *— высота и степень* $Q(x)$, *а* s *— некоторое целое число.*

Эта лемма непосредственно следует из неравенств (170) и леммы II, так как $P_1(x) = Q^s(x)$, где $Q(x)$ неприводим.

Лемма VII. *Пусть* $\alpha \neq 0$, $a_0 > 1$, $\sigma(x) > x$ *и* $\theta(x) > 0$ *будут заданы, причем* $\sigma(x)$ *и* $\theta(x)$ *будут при* $x > x_0 > 0$ *монотонно и неограниченно расти вместе с* x *и* $a_0\sigma(x) \geqslant \geqslant \sigma(x+1)$. *Тогда, если для каждого целого* $N > N_0 > 0$ *существует многочлен* $P(x) \not\equiv 0$, *с целыми рациональными коэффициентами, высоты* H *и степени* n, *такой, что выполняются условия*

$$|P(\alpha)| < e^{-\sigma^2(N)\theta(N)}, \quad \max[n, \ln H] \leqslant \frac{1}{3}\sigma(N), \tag{180}$$

то α *должно быть алгебраическим числом.*

Доказательство. Допустим, что α трансцендентно. Тогда $P(\alpha) \neq 0$. Из леммы VI, 1 и условий (180) следует существование для каждого целого $q > q_0$ неприводимого многочлена $Q_q(x)$ с целыми рациональными взаимно простыми коэффициентами, высоты H_q и степени $n_q \neq 0$, удовлетворяющего условиям:

$$0 < |Q_q(\alpha)| < e^{-\frac{1}{2s}\sigma^2(q)\theta(q)}, \tag{181}$$

$$\max[n_q, \ln H_q] \leqslant \frac{1}{s}\ \sigma(q),$$

$$s \leqslant \sigma(q).$$

Определим теперь число x_q из уравнения

$$s_q = \max[n_q, \ln H_q] = \sigma(x_q), \quad x_q = \sigma_{-1}(s_q), \tag{182}$$

где $\sigma_{-1}[\sigma(x)] = x$, что можно сделать единственным образом в силу монотонного роста $\sigma(x)$ и того обстоятельства, что s_q неограниченно растет вместе с q вследствие неравенств (181).

Неравенства (181) могут теперь быть заменены неравенствами

$$0 < |Q_q(\alpha)| < e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(x_q)\theta(q)}, \tag{183}$$

$$\max[n_q, \ln H_q] = \sigma(x_q), \qquad x_q \leqslant q.$$

Определим монотонно растущую функцию $\psi(x)$ следующим образом:

$$\psi(x) = \min\left\{\sqrt{\sigma(x)},\ \ \sqrt{\theta\left[\sigma_{-1}\left(\sqrt{\sigma(x)}\right)\right]}\right\}. \tag{184}$$

Далее, если $y = y(x)$ определено уравнением

$$\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{\psi(x)}, \tag{185}$$

то вследствие (184) $\sigma(y) \geqslant \sqrt{\sigma(x)}$, $y \geqslant \sigma_{-1}\left[\sqrt{\sigma(x)}\right]$, и

$$\varphi(x) = \frac{\theta(y)}{\psi(x)} \geqslant \frac{\theta\left(\sigma_{-1}\left[\sigma^{\frac{1}{2}}(x)\right]\right)}{\theta^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_{-1}\left[\sigma^{\frac{1}{2}}(x)\right]\right)} = \theta^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_{-1}\left[\sigma^{\frac{1}{2}}(x)\right]\right) \tag{186}$$

стремится к бесконечности с ростом x.

Найдем теперь целое число N из условий

$$\sigma(N-1) < \frac{\sigma(x_q)}{\sqrt{\psi(x_q)}} \leqslant \sigma(N). \tag{187}$$

Тогда, так как $\theta(N) > \theta(y_q)$, $\sigma_{-1}\left[\frac{\sigma(x_q)}{\psi(x_q)}\right] = y_q$,

$$\sigma^2(N)\,\theta(N) > \sigma^2(x_q)\frac{\theta(y_q)}{\psi(x_q)} = \sigma^2(x_q)\,\varphi(x_q), \tag{188}$$

и

$$\sigma(N) \leqslant a_0\sigma(x_q)\,[\psi(x_q)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Для этого $N = N(x_q)$ при достаточно большом x_q, по условиям нашей леммы, будет существовать многочлен с целыми коэффициентами $P_N(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющий условиям

$$0 < |P(\alpha)| \leqslant e^{-\sigma^2(N)\theta(N)} \leqslant e^{-\sigma^2(x_q)\varphi(x_q)}, \tag{189}$$

$$\max[n, \ln H] \leqslant \frac{1}{3}\sigma(N) \leqslant \frac{a_0}{3}\frac{\sigma(x_q)}{\sqrt{\psi(x_q)}},$$

где n и H — степень и высота $P_N(x)$.

Из неравенств (183) и (189) мы легко получаем неравенства

$$(1+|\alpha|)^{n+n_q}(n+n_q)^{n+n_q}H_q^nH^{n_q} <$$
$$< \exp\left[3\sigma^{\frac{3}{2}}(x_q) + a_0\sigma^2(x_q)\,\psi^{-\frac{1}{2}}(x_q)\right] < e^{\sigma^2(x_q)}, \tag{190}$$

при $x_q > x'$ и

$$0 < |P_N(\alpha)| + |Q_q(\alpha)| <$$
$$< 2\exp\left[-\sigma^2(x_q)\min\left\{\frac{1}{2}\theta(x_q),\ \varphi(x_q)\right\}\right] < e^{-\sigma^2(x_q)} \tag{191}$$

при $x_q > x''$, так как $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ растут неограниченно.

Неравенства (190) и (191) показывают, что выполнены условия леммы V при $\nu = 1$, другими словами, $P_N(x)$ и $Q_q(x)$ должны иметь общий корень. Но $Q_q(x)$ неприводим и общий делитель его коэффициентов единица.

Значит $P(x)$ делится на $Q(x)$ и $P_N(x)=Q_q(x)R(x)$, где $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и, тем самым, с высотой не меньшей, чем единица.

По лемме II тогда следуют неравенства

$$H_q \leqslant He^n \leqslant e^{a\frac{\sigma(x_q)}{\sqrt{\psi(x_q)}}}, \quad n_q \leqslant n \leqslant a_0 \frac{\sigma(x_q)}{\sqrt{\psi(x_q)}}, \tag{192}$$

которые при $x_q \geqslant x'''$ будут противоречить уравнению (182), определяющему x_q. Это и доказывает нашу лемму.

Условия этой леммы могут быть обобщены и уточнены. В частности, функцию $\theta(x)$ можно заменить достаточно большой постоянной.

Лемма VIII. *Пусть $P(x)$ будет неприводимый в рациональном поле многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H, α — фиксированное число, а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ — какой-либо фиксированный базис кольца целых чисел алгебраического поля K_ν. Если $P(x)$ приводим в поле K_ν и имеет место неравенство*

$$|P(\alpha)| < T^{-1}, \tag{193}$$

то в поле K_ν у $P(x)$ существует неприводимый делитель $T(x)$, коэффициенты которого будут целыми числами поля K_ν, подчиняющийся условиям

$$|T(\alpha)| < HT^{-\frac{1}{\nu}}; \quad T(x)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{s=1}^{\nu} b_{k,s}\omega_s x^k; \tag{194}$$

$$|b_{k,s}| < \lambda_0 e^{2n} H^\nu, \qquad \frac{n}{\nu} \leqslant r \leqslant n;$$

где λ_0 зависит только от поля K_ν и $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как известно, $P(x)$ может быть представлен в поле K_ν произведением неприводимых в этом поле делителей единственным образом, с точностью до постоянных множителей. Далее, число этих неприводимых делителей, если считать каждый столько раз, какова его кратность, не превысит порядка поля ν. Действительно, если

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k x^k = A_n \prod_{k=1}^{\mu} R_k(x) = A_n \prod_{k=1}^{\mu} R_k^{(s)}(x), \quad 1 \leqslant s \leqslant \nu - 1,$$

где $R_k(x)$ — неприводимые в поле K_ν многочлены со старшими коэффициентами, равными единице, а $R_k^{(s)}(x)$, $s=1, 2, \ldots, \nu-1$, — многочлены, коэффициенты, которых сопряжены коэффициентам $R_k(x)=R_k^{(0)}(x)$ и принадлежат соответственно полям $K_\nu^{(s)}$, $s=1, \ldots, \nu-1$, сопряженным полю K_ν, то имеют место соотношения

$$\prod_{s=0}^{\nu-1} R_k^{(s)}(x) = A_n^{-m_k} P^{m_k}(x), \quad m_k < \nu, \quad 1 \leqslant k \leqslant \mu.$$

Отсюда следует, что n_k — степень $R_k(x)$ — находится в границах $\frac{n}{\nu} \leqslant n_k < n$. Это и доказывает наше утверждение, что $\mu \leqslant \nu$. Положим теперь

$$R_k(x) = x^{n_k} + \sum_{s=0}^{n_k-1} a_{k,\,s} x^s,$$

где $a_{k,\,s}$ — некоторые, вообще говоря, не целые числа поля K_ν. Пусть $\wp$ — простой идеал поля K_ν, r_k — наивысшая степень $\wp^{-1}$, в которой $\wp^{-1}$ может входить в числа $a_{k,\,s}$, $s=0, 1, \ldots, n_k-1$, а c — целое число поля K_ν, которое делится только на первую степень $\wp$. Тогда из соотношения

$$P(x)\, c^r = A_n \prod_{k=1}^{\mu} \left[c^{r_k} x^{n_k} + \sum_{s=0}^{n_k-1} c^{r_k} a_{k,\,s} x^s \right] = A_n P_1(x);$$

$$r = \sum_1^{\mu} r_k,$$

где все коэффициенты $P_1(x)$ уже не могут делиться на $\wp$, так как хотя бы один коэффициент $c^{r_k} R_k(x)$ на $\wp$ не делится, а все остальные могут содержать $\wp$ только в неотрицательных степенях, следует, что A_n делится на $\wp^r$.

Отсюда следует (полагаем $Q_k^{(s)}(x) = A_n R_k^{(s)}(x)$, $A_n = A$), что, так как предшествующее рассуждение верно для любого $R_k^{(s)}(x)$,

$$P(x)=A^{-\mu+1}Q_1^{(s)}(x)\,Q_2^{(s)}(x)\,\ldots\,Q_\mu^{(s)}(x),\quad 0\leqslant s\leqslant\nu-1, \tag{195}$$

где $Q_k^{(s)}(x)$, $k=1, 2, \ldots, \mu$ — неприводимые в поле $K_\nu^{(s)}$ многочлены, имеющие коэффициентами целые числа поля $K_\nu^{(s)}$, а A — целое рациональное, $|A|\leqslant H$.

Пусть среди полей $K_\nu^{(0)}, K_\nu^{(1)}, \ldots, K_\nu^{(\nu-1)}$ будет r_1 действительных и $2r_2$ комплексно сопряженных, и единицы поля $K_\nu^{(0)}$, $\xi_{k,0}$, $k=1, 2, \ldots, r$; $r=r_1+r_2-1$, образуют фундаментальную систему единиц. Совершенно так же пусть $\xi_{k,s}$, $k=1, 2, \ldots, r$ будет фундаментальная система сопряженных единиц для поля $K_\nu^{(s)}$, $s=1, 2, \ldots, \nu-1$. Положим

$$\ln|\xi_{k,s}|=\eta_{k,s};\quad 0\leqslant s\leqslant\nu-1;\quad 1\leqslant k\leqslant r. \tag{196}$$

Условимся также, что поля $K_\nu^{(s)}$, $s=1, 2, \ldots, r_1-1$, будут действительными, а поля $K_\nu^{(s)}$, $s=r_1, r_1+1, \ldots, r$, будут комплексными, причем $K_\nu^{(s)}\neq K_\nu^{(p)}$, $r_1\leqslant s$, $p\leqslant r$. Пусть также логарифмы высот сопряженных многочленов

$$Q_k^{(0)}(x)=Q_k(x),\ Q_k^{(1)}(x),\ \ldots,\ Q_k^{(\nu-1)}(x),\quad k=1, 2, \ldots, \mu,$$

будут соответственно

$$q_{k,i};\quad i=0, 1, \ldots, \nu-1;\quad k=1, 2, \ldots, \mu.$$

Фиксируя число $k\geqslant 2$, решим теперь систему уравнений

$$\sum_{s=1}^{r} x_{k,s}\eta_{s,m}=q_k-q_{k,m}; \tag{197}$$

$$m=1, 2, 3, \ldots, r;\quad q_k=\sum_{s=0}^{\nu-1}\frac{1}{\nu}q_{k,s}.$$

Определитель этой системы в силу того, что поля $R_\nu^{(s)}$, $s=1, 2, \ldots, r_1-1$ действительны и при $r_1\leqslant s\leqslant r$ попарно не комплексно сопряженные, а система единиц ξ_k фундаментальная, отличен от нуля. Поэтому наша система (197) имеет единственное решение. Пусть теперь в дальнейших рассуждениях системы чисел $x_{k,s}$; $k=2, 3, \ldots, \mu$; $s=1, 2, \ldots, r$, будут системами решений соответствующих систем уравнений и, тем самым, фиксированы. Условимся дополнительно, что $K_\nu^{(r_1+s)}=K_\nu^{(r+s+1)}$, $s=0, 1, \ldots, r_2-2$. Отсюда следует, что или $K_\nu^{(0)}=K_\nu$ действительно, и тогда $K_\nu^{(r)}=\overline{K}_\nu^{(\nu-1)}$, или $K_\nu^{(0)}=\overline{K}_\nu^{(r)}$, и тогда $K_\nu^{(\nu-1)}$ действительно.

Вследствие того что $\xi_{k,s}$, $s=0, 1, \ldots, \nu-1$, суть система сопряженных единиц, то $\sum\limits_{s=0}^{\nu-1}\eta_{k,s}=0$. Отсюда следует, что для действительного поля $K_\nu^{(\sigma)}$, не входящего в ряд $K_\nu^{(1)}, K_\nu^{(2)}, \ldots, K_\nu^{(r)}$,

$$\sum_{s=1}^{r} x_{k,s}\eta_{s,\sigma}=-\sum_{\substack{p=0\\p\neq\sigma}}^{\nu-1}\sum_{s=1}^{r} x_{k,s}\eta_{s,p}=$$

$$=-(\nu-1)\,q_k+\sum_{\substack{p=0\\p\neq\sigma}}^{\nu-1} q_{k,p}=q_k-q_{k,\sigma}, \quad (198)$$

так как если $K_\nu^{(m)}=\overline{K}_\nu^{(p)}$, то $\eta_{s,m}=\eta_{s,p}$, $s=1, \ldots, r$, и $q_{k,m}=q_{k,p}$ в силу комплексной сопряженности $Q_k^{(m)}(x)$ и $Q_k^{(p)}(x)$.

Эти последние соображения показывают, что при выбранных нами $x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,r}$ всегда имеют место соотношения

$$\sum_{s=1}^{r} x_{k,s}\eta_{s,m}=q_k-q_{k,m}, \quad (199)$$

$$m=0, 1, \ldots, \nu-1, \qquad k=2, 3, \ldots, \mu.$$

Полагаем теперь

$$x_{k,s}=y_{k,s}-\varepsilon_{k,s}, \qquad |\varepsilon_{k,s}|<1,$$

где $y_{k,s}$ — целые рациональные, и вводим дополнительно обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&a_k^{(s)} = \prod_{m=1}^{r} \xi_{m,s}^{y_{k,m}}; \quad k = 2, 3, \ldots, \mu; \\
&\qquad\qquad\qquad s = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \\
&a_1^{(s)} = \prod_{k=2}^{\mu} \frac{1}{a_k^{(s)}}; \quad s = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \\
&\lambda_{k,m} = \sum_{s=1}^{r} \varepsilon_{k,s}\eta_{s,m}; \quad \lambda = 2\nu \max_{\substack{2 \leqslant k \leqslant \mu \\ 0 \leqslant m \leqslant \nu - 1}} |\lambda_{k,m}|, \\
&\qquad\qquad 2 \leqslant k \leqslant \mu, \quad 0 \leqslant m \leqslant \nu - 1, \\
&T_k^{(s)}(x) = a_k^{(s)} Q_k^{(s)}(x); \quad 1 \leqslant k \leqslant m; \quad 0 \leqslant s \leqslant \nu - 1.
\end{aligned}\right\} \tag{200}$$

Так как $\xi_{m,s}$ — единицы, то $T_k^{(s)}(x)$—опять многочлены с целыми коэффициентами поля $K_\nu^{(s)}$. Соотношения (195) можно переписать теперь в форме

$$A^{\mu-1} P(x) = T_1^{(s)}(x)\, T_2^{(s)}(x) \ldots T_\mu^{(s)}(x); \quad 0 \leqslant s \leqslant \nu - 1. \tag{201}$$

Обозначая высоту $T_k^{(s)}(x)$ буквой $h_{k,s}$, мы будем иметь в силу соотношений (199) и (200), что

$$\ln h_{k,s} = \lambda_{k,s} + q_k; \quad 2 \leqslant k \leqslant \mu; \quad 0 \leqslant s \leqslant \nu - 1. \tag{202}$$

Далее, так как $T_k(x) = \prod_{s=0}^{\nu-1} T_k^{(s)}(x)$ будет многочленом с целыми рациональными коэффициентами, то из очевидных соотношений

$$(1 + n_k)^\nu h_{k,0} \ldots h_{k,\nu-1} \geqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \mu \tag{203}$$

и соотношений (202) следуют неравенства

$$q_h \geqslant -\ln(1 + n_k) - \lambda_k, \quad \lambda_k = \frac{1}{\nu} \sum_{s=0}^{\nu-1} \lambda_{k,s}; \quad k = 2, \ldots, \mu. \tag{204}$$

Из этих неравенств и неравенств (202) в свою очередь следуют неравенства

$$\ln h_{k,\,s} \geqslant -\ln(1+n_k)+\lambda_{k,\,s}-\lambda_k; \qquad (205)$$
$$2\leqslant k\leqslant \mu; \quad 0\leqslant s\leqslant \nu-1.$$

Далее, с помощью леммы II и соотношений (201) мы также получаем неравенства

$$n+\mu\ln H \geqslant \sum_{k=1}^{\mu}\ln h_{k,\,s}; \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1. \qquad (206)$$

Неравенства (206) и (205) дают нам для $h_{1,\,s}$ границу сверху, именно

$$\ln h_{1,\,s}\leqslant \mu\ln H+n+\sum_{2}^{\mu}\ln(1+n_k)+(\mu-1)\lambda_k-\sum_{k=2}^{\mu}\lambda_{k,\,s},$$
$$0\leqslant s\leqslant \nu-1. \qquad (207)$$

Так как $T_k(x)$ будет многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени νn_k, то его высота h_k по лемме II удовлетворяет неравенству

$$\nu n_k+\ln h_k > \sum_{s=0}^{\nu-1}\ln h_{k,\,s}=\nu q_k+\nu\lambda_k=$$
$$=\nu\ln h_{k,\,s}+\nu(\lambda_k-\lambda_{k,\,s}), \qquad (208)$$
$$k=2,\ 3,\ \ldots,\ \mu, \qquad 0\leqslant s\leqslant \nu-1,$$

а вследствие соотношений

$$A^{\nu(\mu-1)}P^{\nu}(x)=T_1(x)\ldots T_\mu(x) \qquad (209)$$

и леммы II — неравенствам

$$n\nu+\nu\mu\ln H>\ln h_k>\nu\ln h_{k,\,s}-\nu n_k+\nu(\lambda_k-\lambda_{k,\,s}). \qquad (210)$$

Это последнее неравенство непосредственно приводит нас к неравенству

$$\ln h_{k,\,s} < \mu \ln H + 2n + \lambda_{k,\,s} - \lambda_k < \mu \ln H + 2n + \lambda, \quad (211)$$
$$2 \leqslant k \leqslant \mu, \qquad 0 \leqslant s \leqslant \nu - 1.$$

Нетрудно заметить, что и неравенство (207) также может быть переписано в этом же виде, так как $\sum\limits_{2}^{\mu} \ln(1+n_k) < n$. Значит, неравенства (211) справедливы и при $k=1$. Эти неравенства и доказывают нашу лемму, так как если

$$|P(\alpha)| < T^{-1},$$

то должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств

$$|T_k^{(0)}(\alpha)| < HT^{-\frac{1}{\nu}} \quad (212)$$

вследствие соотношений (201).

Далее, пусть $b = \sum\limits_{k=1}^{\nu} b_k \omega_k$ будет любой коэффициент многочлена $T_k(x)$, для которого выполнено неравенство (212). Целые алгебраические числа $b^{(s)}$,

$$b^{(s)} = \sum_{k=1}^{\nu} b_k \omega_k^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, \nu - 1,$$

где $\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}, \ldots, \omega_k^{(s)}$ сопряжены числу $\omega_k = \omega_k^{(0)}$ пусть будут сопряженными числа $b = b^{(0)}$. Тогда в силу неравенств (212) мы имеем неравенства

$$|b^{(s)}| < \lambda H^{\mu} e^{2n}, \quad s = 0, 1, \ldots, \nu - 1.$$

Решая систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\nu} \omega_k^{(s)} b_k = b^{(s)}, \quad s = 0, 1, \ldots, \nu - 1,$$

относительно b_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, которая разрешима, так как ее определитель есть дискриминант поля K_ν, мы получаем неравенства

$$|b_k| = \left| \sum_{s=1}^{\nu} C_{k,\,s}\, b^{(s)} \right| < \lambda_0 H^{\mu} e^{2n},$$

где все $C_{k,\,s}$ зависят только от чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$. Значит λ_0 не зависит от n, H и T, что и требовалось доказать.

§ 5. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы I. Допустим, что от присоединения к рациональному полю 11 чисел, где $1, \alpha_1, \alpha_2$, так же как и η_1, η_2, η_3, линейно независимы в рациональном поле,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ e^{\eta_i \alpha_k};\quad i = 1, 2, 3;\quad k = 0, 1, 2;\quad \alpha_0 = 1, \tag{213}$$

получилось поле R_1. Это поле не может быть просто алгебраическим полем, так как при алгебраичности e^{η_1}, $\eta_1 \neq 0$, $e^{\eta_1 \alpha_1}$ должно быть трансцендентным, вследствие того, что α_1 алгебраическое иррациональное число. Тогда это поле R_1 образовано числами ω и ω_1, где степень ω_1 положим равной ν, свойства которых определены в начале § 4 этой главы. Наши 11 чисел (213) будут, по предположению, совпадать с 11 числами поля

$$\frac{S_i}{T_i},\quad i = 1, 2, \ldots, 11;\quad T = T_1\, T_2 \ldots T_{11}, \tag{214}$$

где все S_i и T_i — целые числа поля R_1 (определение целого числа и его степени было дано ранее).

Пусть N будет сколь угодно большое целое число. Положим $p = [N^3 \ln^{-\frac{3}{2}} N] + 1 = [(N \ln^{-\frac{1}{2}} N)^3] + 1$ и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k_0=0}^{p-1} \sum_{k_1=0}^{N} \sum_{k_2=0}^{N} \sum_{k_3=0}^{N} A_{k_0,\,k_1,\,k_2,\,k_3}\, z^{k_0} e^{(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3)\,z}, \tag{215}$$

$$A_{k_0,\,k_1,\,k_2,\,k_3} = \sum_{k_4=0}^{p_1} C_{k_0,\,\ldots,\,k_4}\, \omega^{k_4},\quad p_1 = \left[\frac{N^3}{\ln^{\frac{1}{2}} N} \right],$$

где все $C_{k_0, k_1, k_2, k_3, k_4}$ — целые рациональные числа, в совокупности отличные от нуля.

Воспользовавшись неравенствами (112) и (162), мы получаем неравенство при $0 \leqslant N_i \leqslant N$, $N > N'$, $\eta_1' = |\eta_1| + \left|\frac{1}{\eta_1}\right|$

$$\prod_{-N_1}^{N-N_1} \prod_{-N_2}^{N-N_2} \prod_{-N_3}^{N-N_3} |k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3| >$$

$$> |\eta_1|^{-1} \prod_{\substack{k_2=-N_2\\ k_2^2+k_3^2\neq 0}}^{N-N_2} \prod_{k_3=-N_3}^{N-N_3} |\eta_1|^N \left(k_2\frac{\eta_2}{\eta_1} + k_3\frac{\eta_3}{\eta_1}\right) 2^{-N-1} N! >$$

$$> |\eta_1'|^{-(N+1)^3} 2^{-(N+1)^3} (N!)^{(N+1)^2} e^{-\tau (N+1)^3 \ln N} > e^{-\tau N^3 \ln N}. \tag{216}$$

Применим теперь к нашей функции $f(z)$ лемму III. Заметим, что

$$p = [(N \ln^{-\frac{1}{2}} N)^3] + 1, \quad q = (N+1)^3,$$

$$m = pq = (N+1)^3 [N^3 \ln^{-\frac{3}{2}} N + 1] > N^6 \ln^{-\frac{3}{2}} N,$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{11}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{5}\tau$$

и положим $\gamma_0 = \frac{4}{11}$, $\lambda = 3 + \tau$. При таком выборе постоянных благодаря неравенствам (112) и (216), как легко проверить, выполняются условия леммы III и мы получаем, что хотя бы одно из чисел

$$f(k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2), \quad 0 \leqslant k_i \leqslant \lambda \frac{N^2}{\sqrt{\ln N}}, \; i = 0, 1, 2 \tag{217}$$

не равно нулю. Величина $f(k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$ есть многочлен относительно 11 величин (213) и при $k_i \leqslant \lambda N^2 \ln^{-\frac{1}{2}} N$ его степень по отношению к каждому из этих чисел не превышает $(\lambda+1)N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N$. Поэтому числа f_{k_0,k_1,k_2},

$$\left.\begin{aligned} f_{k_0,k_1,k_2}=T^{\mu}f(k_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2),\ 0\leqslant k_i\leqslant\lambda N^2\ln^{-\frac{1}{2}}N,\\ \mu=[11\lambda N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N],\ i=0,1,2,\ \lambda=3+\tau,\end{aligned}\right\}\quad(218)$$

будут целыми числами поля R_1.

Вспоминая выражение чисел A через ω, мы получаем представления

$$f_{k_0,k_1,k_2}=\sum_{q=0}^{\mu_1-1}\sum_{q_1=0}^{\nu-1}\omega^q\omega_1^{q_1}\times$$

$$\times\sum_{n_0=0}^{p-1}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\sum_{n_3=0}^{N}\sum_{n_4=0}^{p_1}C_{n_0,n_1,\ldots,n_4}B_{n_0,\ldots,n_4,k_0,k_1,k_2,q,q_1},$$

$$\mu_1\leqslant[\lambda_0N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N],\ k_i\leqslant\lambda N^2\ln^{-\frac{1}{2}}N,\ i=0,1,2,\quad(219)$$

$$|B_{n_0,\ldots,n_4,k_0,k_1,k_2,q,q_1}|<e^{\lambda_1N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N},\ \lambda_0>1,$$

где все числа B целые рациональные. Число чисел C, которое обозначим n, удовлетворяет, как показывает простой подсчет, неравенству $n>N^9\ln^{-2}N$. Положим $\lambda_2=(3\nu\lambda_0)^{-\frac{1}{3}}$. Так как, для того чтобы обратилась в нуль величина f_{k_0,k_1,k_2}, нужно, чтобы выполнилось $\nu\mu_1<\nu\lambda_0N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N$ уравнений, то, по лемме первой, целые числа C можно выбрать в совокупности отличными от нуля и такими, что

$$\left.\begin{aligned} f_{k_0,k_1,k_2}=0,\ 0\leqslant k_i<[\lambda_2N^2\ln^{-\frac{1}{2}}N],\\ |C_{n_0,\ldots,n_4}|<e^{\lambda_3N^3\ln^{-\frac{1}{2}}N}.\end{aligned}\right\}\quad(220)$$

Действительно, число уравнений для $C_{n_0, \ldots, n_4}$ будет меньше, чем

$$\nu\lambda_0 N^3 \ln^{-\frac{1}{2}} N \cdot \lambda_2^{\frac{3}{2}} N^6 \ln^{-\frac{3}{2}} N < \frac{1}{2} N^9 \ln^{-2} N. \quad (221)$$

Но тогда $f(z)=0$ в точках

$$z = k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \ 0 \leqslant k_i \leqslant [\lambda_2 N^2 \ln^{-\frac{1}{2}} N] = q. \quad (222)$$

Это обстоятельство позволяет нам воспользоваться интегральным представлением $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \prod_{k_0=0}^{q} \prod_{k_1=0}^{q} \prod_{k_2=0}^{q} \left[\frac{z-k_0-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2}{\zeta-k_0-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2} \right] \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad (223)$$

где контур Γ есть окружность $|\zeta| = 2N^{\frac{9}{2}}$, а $|z| \leqslant N^3$. Из этого представления мы непосредственно, оценивая интеграл в правой части по модулю, получаем неравенство

$$|f(z)| < e^{-\lambda_2^{\frac{3}{2}} N^6 \ln^{-\frac{3}{2}} N}, \ |z| \leqslant N^3. \quad (224)$$

Но так как при $N > \lambda$, $N^3 > \lambda N^2$, то при достаточно большом N выполняются неравенства

$$|f_{k_0, k_1, k_2}| < e^{-\frac{1}{2}\lambda_2^{\frac{3}{2}} N^6 \ln^{-\frac{1}{2}} N}, \ 0 \leqslant k_i \leqslant \lambda N^2 \ln^{-\frac{1}{2}} N. \quad (225)$$

Мы уже доказали, что среди этих чисел будет хотя бы одно отличное от нуля. Это число будет многочленом, с целыми рациональными коэффициентами, $P(\omega, \omega_1)$ относительно чисел ω и ω_1, степени n и высоты H, причем вследствие неравенств (225), (219) и (220) будут справедливы неравенства

$$|P(\omega, \omega_1)| < e^{-\frac{1}{2}\lambda_2^{\frac{3}{2}} N^6 \ln^{-\frac{1}{2}} N}, \ n + \ln H < \lambda_4 N^3 \ln^{-\frac{1}{2}} N. \quad (226)$$

Пусть числа $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu$ будут сопряженными к ω_1 в поле $R(\omega)$, где $R(\omega)$ есть поле, полученное от присоединения к рациональному полю числа ω. Тогда мы будем иметь, что

$$P_0(\omega)=\prod_{k=1}^{\nu} P(\omega, \omega_k) \neq 0, \tag{227}$$

и что $P_0(\omega)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени n_0 и высоты H_0, для которого верны неравенства

$$|P_0(\omega)| < e^{-\lambda_5 N^6 \ln^{-\frac{1}{2}} N};$$

$$\max[n_0, \ln H_0] < \lambda_6 N^3 \ln^{-\frac{1}{2}} N, \quad N > N''. \tag{228}$$

Положив

$$\sigma(N) = 3\lambda_6 N^3 \ln^{-\frac{1}{2}} N, \quad \theta(N) = \frac{\lambda_5}{9\lambda_6^2}\sqrt{\ln N}, \tag{229}$$

мы видим, что для числа ω выполняются условия леммы VII и, значит, ω — алгебраическое число. Мы приходим, таким образом, к противоречию, что и доказывает нашу теорему.

Неравенство (112) нашей теоремы безусловно имеет место в случае, когда $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ и $\frac{\eta_3}{\eta_1}$ будут или алгебраическими, или рациональными степенями одного и того же логарифма алгебраического числа, или алгебраическими степенями числа e. Во всех этих случаях, как давно известно, будет иметь место неравенство

$$|x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3| > e^{-\tau \ln x}, \ |x_i| \leqslant x, \tag{230}$$

где τ — некоторая постоянная (см., например, неравенства (48) и (49) гл. II). Это замечание доказывает законность следствий 1, 2 и 3 из нашей теоремы.

Доказательство теоремы II. Доказательство этой теоремы мало чем отличается от доказательства теоремы I. Поэтому приведем его в несколько сокращенном виде. Поле R_1 будет опять образовано числами ω и ω_1, причем $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu$ будут сопряженными в прежнем смысле числа ω_1. Десять чисел

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ e^{\eta_i \alpha_k};\ i=0,\ 1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \alpha_0=1 \tag{231}$$

будут равны отношениям целых чисел поля R_1, которые имеют вид

$$\frac{S_i}{T_i};\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10,\ T=T_1\,T_2\,\ldots\,T_{10}. \tag{232}$$

Число ω трансцендентно, так как числа η_0 и e^{η_0}, по теореме Линдемана, не могут быть одновременно алгебраическими. Пусть N будет сколь угодно большое целое число. Положим $p=[N^{\frac{5}{3}}\ln^{-1}N]+1$ и рассмотрим функцию $f(z)$,

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{k_0=0}^{N}\sum_{k_1=0}^{N} A_{k,\,k_0,\,k_1} z^k e^{(k_0\eta_0+k_1\eta_1)z},\\ A_{k,\,k_0,\,k_1} &= \sum_{k_2=0}^{p_1} C_{k,\,k_0,\,k_1,\,k_2}\omega^{k_2},\quad p_1=[N^{\frac{5}{3}}], \end{aligned}\right\} \tag{233}$$

где все $C_{k,\,k_0,\,k_1,\,k_2}$ — целые рациональные, отличные от нуля в совокупности, числа. Воспользовавшись неравенством (162), мы получаем неравенство при $0\leqslant N_i\leqslant N$

$$\prod_{\substack{k_0=-N_0\\ k_0^2+k_1^2\neq 0}}^{N-N_0}\ \prod_{k_1=-N_1}^{N-N_1} |k_0\eta_0+k_1\eta_1| \geqslant$$

$$\geqslant |\eta_0|^{N^2+2N} 2^{-(N+1)^2} N!^N \prod_{\substack{k_1=-N_1\\ k_1\neq 0}}^{N-N_1} \left(k_1\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) \geqslant$$

$$\geqslant |\eta_0|^{(N^2+2N)} 2^{-(N+1)^2} N!^N \prod_{\substack{k_1=-N_1\\ k_1\neq 0}}^{N-N_1} \min_{k_0}\left|k_0+k_1\frac{\eta_1}{\eta_0}\right|, \tag{234}$$

где (x) — расстояние x до ближайшего целого числа.

Пусть $\eta_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}$. Тогда, если при целых k_i

$$|k_0 + k_1\eta_2| < 2^{-N}, \ |k_2 + k_3\eta_2| < 2^{-N}, \ |k_1|, |k_3| \leqslant N, \quad (235)$$

то очевидно, что линейные формы $k_0 + k_1\eta_2$ и $k_2 + k_3\eta_2$ пропорциональны. Пусть, далее,

$$\rho = \min_{|k_1| \leqslant N} |k_0 + k_1\eta_2|$$

осуществляется при $|k_1| = s \leqslant N$. Тогда, воспользовавшись неравенством (114), мы получим, что

$$\prod_{\substack{k_1=-N_1 \\ k_1 \neq 0}}^{N-N_1} \min_{k_0} |k_0 + k_1\eta_2| > 2^{-N^2}\rho^{\left[\frac{N}{s}\right]} > 2^{-N^2} e^{-\tau s^2 \left[\frac{N}{s}\right] \ln s} >$$

$$> e^{-\tau N^2 \ln N} 2^{-N^2}. \quad (236)$$

Теперь мы имеем окончательно, что

$$\prod_{k_0=-N_0}^{N-N_0} \prod_{k_1=-N_1}^{N-N_1} |k_0\eta_0 + k_1\eta_1| > e^{-\tau N^2 \ln N} > e^{-\frac{3}{10}\tau q \ln pq}, \quad (237)$$

где $p = [N^{\frac{5}{3}} \ln^{-1} N] + 1$, $q = (N+1)^2$. Применим теперь к нашей функции лемму III. Заметим, что в этом случае $m = pq \geqslant N^{\frac{11}{3}} \ln^{-1} N$, $\gamma_1 = \frac{3}{10}$, $\gamma_2 = \frac{3}{10}\tau$ и положим $\gamma_0 = \frac{1}{5}$ и $\lambda = 3 + 2\tau$. При таком выборе постоянных, благодаря неравенствам (237) и (114), как легко проверить, выполняются условия леммы III, и мы получаем, что хотя бы одно из чисел

$$f^{(s)}(k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2), \ 0 \leqslant k_i \leqslant \lambda N^{\frac{2}{3}}, 0 \leqslant s \leqslant p, i = 0, 1, 2, \quad (238)$$

отлично от нуля. Величина $f^{(s)}(k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$ есть многочлен относительно 10 величин (231), причем степень его по отношению к каждой из этих величин не превосходит $\lambda N^{\frac{5}{3}}$.

Поэтому числа $f_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2}$

$$f_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2} = T^{\mu} f^{(s)}(k_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2),\quad \mu = [10\lambda N^{\frac{5}{3}}], \tag{239}$$

$$0 \leqslant s \leqslant N^{\frac{5}{3}} \ln^{-1} N,\quad 0 \leqslant k_i \leqslant \lambda N^{\frac{2}{3}},\quad i = 0, 1, 2$$

будут целыми числами поля R_1.

Аналогично (219) мы получаем выражения

$$f_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2} = \sum_{q=0}^{\mu_1-1} \sum_{q_1=0}^{\nu-1} \omega^q \omega_1^{q_1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{n_0=0}^{N} \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{p_1} C_{n,\,n_0,\,n_1,\,n_2} B_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2 n,\,\ldots,\,n_2,\,q,\,q_1},$$

$$\mu_1 \leqslant \lambda_0 N^{\frac{5}{3}},\quad |B_{s,\,\ldots,\,q_1}| < e^{\lambda_1 N^{\frac{5}{3}}},\quad 0 \leqslant s \leqslant N^{\frac{5}{3}} \ln^{-1} N, \tag{240}$$

$$0 \leqslant k_i \leqslant \lambda N^{\frac{2}{3}},\quad i = 0, 1, 2,$$

где все числа B целые рациональные. Число целых чисел C не меньше, чем $N^{\frac{16}{3}} \ln^{-1} N$. Положим $\lambda_2 = (3\nu\lambda_0)^{-\frac{1}{3}}$. Для того чтобы $f_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2}$ обратилось в нуль, достаточно, чтобы имело место $\nu\mu_1 < \lambda_0 \nu N^{\frac{5}{3}}$ уравнений. Поэтому, по лемме I, числа C можно выбрать целыми рациональными и такими, что

$$f_{s,\,k_0,\,k_1,\,k_2} = 0,\quad |C_{n,\,n_0,\,n_1,\,n_2}| < e^{\lambda_3 N^{\frac{5}{3}}},$$

$$k_i \leqslant \lambda_2 N^{\frac{2}{3}},\quad i = 0, 1, 2;\quad 0 \leqslant s < N^{\frac{5}{3}} \ln^{-1} N, \tag{241}$$

так как в этом случае число переменных будет не меньше, чем $N^{\frac{16}{3}} \ln^{-1} N$, а число уравнений не больше, чем

$\lambda_2^3\lambda_0\nu N^{\frac{16}{3}}\ln^{-1}N < \frac{1}{2}N^{\frac{16}{3}}\ln^{-1}N$. Но при выбранных таким образом числах C, $f^{(s)}(t)=0$, где

$$t=k_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ 0\leqslant k_i\leqslant q=[\lambda_2 N^{\frac{2}{3}}],\ s\leqslant r=\left[\frac{N^{\frac{5}{3}}}{\ln N}\right], \tag{242}$$

что и дает интегральное представление

$$f^{(s)}(t)=$$
$$=\frac{s!}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{dz}{(z-t)^{s+1}}\int\limits_{\Gamma}\prod_{k_0=0}^{q}\prod_{k_1=0}^{q}\prod_{k_2=0}^{q}\left[\frac{z-k_0-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2}{\zeta-k_0-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2}\right]^{r+1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$$s\leqslant r,\ t=k_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ 0\leqslant k_i\leqslant\lambda N^{\frac{2}{3}}, \tag{243}$$

где контур Γ_0 — окружность $|z|=N$, а контур Γ — окружность $|\zeta|=N^{\frac{7}{3}}$. Интегральное представление (243) при оценке по модулю интегралов в правой части дает неравенства

$$|f^{(s)}(k_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)|<e^{-2\lambda_2 N^{\frac{11}{3}}\ln^{-1}N},$$
$$s\leqslant r,\quad 0\leqslant k_i\leqslant\lambda N^{\frac{2}{3}},\quad i=0,1,2, \tag{244}$$

что в свою очередь непосредственно приводит к неравенствам

$$|f_{s,k_0,k_1,k_2}|<e^{-\lambda_2 N^{\frac{11}{3}}\ln^{-1}N},\ s\leqslant[N^{\frac{5}{3}}\ln^{-1}N],\ 0\leqslant k_i\leqslant\lambda N^{\frac{2}{3}}, \tag{245}$$

где хотя бы одно из чисел f_{s,k_0,k_1,k_2} отлично от нуля. Это отличное от нуля число является многочленом от ω и ω_1, тождественно не равным нулю, с целыми рациональными коэффициентами, высоты H и степени n по отношению к ω, причем для него справедливы в силу неравенств (240), (241) и (245), неравенства

$$|P(\omega,\omega_1)|<e^{-\lambda_2 N^{\frac{11}{3}}\ln^{-1}N},\quad \max[n,\ln H]<\lambda_4 N^{\frac{5}{3}}. \tag{246}$$

Положив

$$P_0(\omega)=\prod_{k=1}^{\nu} P(\omega, \omega_k), \quad P_0(x)\not\equiv 0,$$

где $\omega_2, \ldots, \omega_\nu$ — сопряженные с ω_1 числа, мы получаем, что для многочлена $P_0(x)$, имеющего целые рациональные коэффициенты, высоту H_0 и степень n_0 справедливы неравенства

$$0<|P_0(\omega)|<e^{-\frac{1}{2}\lambda_2 N^{\frac{11}{3}}\ln^{-1}N}, \quad \max[n, \ln H]<\lambda_5 N^{\frac{5}{3}}. \tag{247}$$

Итак, для каждого целого $N>N'$ существует тождественно не равный нулю многочлен $P_0(x)$ с целыми рациональными коэффициентами, для которого верны неравенства (247). Отсюда следует, по лемме VII, что ω алгебраическое и мы пришли к противоречию, которое и доказывает нашу теорему. Для законности следствий 1, 2, 3 из теоремы II достаточно напомнить примечание к теореме I и неравенство (230).

Доказательство теоремы III. Докажем сперва неравенство

$$|P(\alpha^\beta)|>e^{-\frac{s^3}{1+\ln^3 s}(s+\ln H)\ln^{2+\delta}(s+\ln H)}, \quad \delta>0, \tag{248}$$

где $P(x)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени s и высоты H, $\alpha\neq 0, 1$ — алгебраическое, β — алгебраическое иррациональное число, $\delta>0$ сколь угодно мало, но фиксировано, а $s+\ln H>n(\alpha, \beta, \delta)$.

Пусть N будет достаточно большое цёлое число, q — целое, $N\geqslant q\geqslant \ln^{1+\varepsilon}N$, $\varepsilon>0$ сколь угодно мало, но фиксировано. Положим $r=[\sqrt{q\ln N}]$, $\omega=\alpha^\beta$, $\eta=\ln\alpha$, и рассмотрим функцию

$$f_1'(z)=\sum_{k_0=0}^{q}\sum_{k_1=0}^{N} A'_{k_0, k_1} e^{\eta(k_0\beta+k)z}, \tag{249}$$

$$A'_{k_0, k_1}=\sum_{k=0}^{p} C'_{k, k_0, k_1}\omega^k, \quad p=[q\sqrt{q\ln N}]>qr-1,$$

где $C'_{k,\,k_0,\,k_1}$ — целые рациональные числа, в совокупности отличные от нуля. В этом случае числа $A'_{k_0,\,k_1}$ будут также отличны от нуля в совокупности, так как ω, как известно, будет трансцендентным.

Пусть α и β будут числа алгебраического поля R степени ν, $a_0\alpha$, и $a_0\beta$, где a_0 — целое рациональное, будут целыми числами этого поля, а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ пусть будет базис кольца целых чисел этого поля R_ν. Тогда при $p_1 = 2p+2$

$$f_{1,\,s,\,t} = \eta^{-s} a_0^{3Nr+s} f_1^{(s)}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{k_1=1}^{\nu} \omega^k \omega_{k_1} \sum_{n=0}^{p} \sum_{n_0=0}^{q} \sum_{n_1=0}^{N} C'_{n,\,n_0,\,n_1} B_{s,\,t,\,n,\,n_0,\,n_1,\,k,\,k_1}, \tag{250}$$

$$|B_{s,\,\ldots,\,k_1}| < e^{\lambda_0 N\sqrt{q \ln N}}, \quad s \leqslant r_1 = \left[N\sqrt{\frac{q}{\ln N}}\right],$$

$$0 \leqslant t \leqslant r, \qquad \lambda_0 > 1,$$

где все числа B — целые рациональные. Число чисел C' равно $(p+1)(q+1)(N+1) > q^{\frac{5}{2}} N \ln^{\frac{1}{2}} N$. Для того чтобы имели место равенства

$$f_{1,\,s,\,t} = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant r_2 = \left[\frac{1}{6\nu}\sqrt{q \ln N}\right], \tag{251}$$

необходимо, чтобы числа C' удовлетворяли $\nu(2p+3) \times (r_1+1)(r_2+1)$ уравнениям. Так как

$$\nu(2p+3)(r_1+1)(r_2+1) <$$

$$< \nu\left(2q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} N + 3\right)\left(Nq^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} N + 1\right)\left(\frac{1}{6\nu}\sqrt{q \ln N} + 1\right), \tag{252}$$

то, по лемме I, мы можем выбрать числа C' целыми рациональными, в совокупности отличными от нуля, так, чтобы выполнялись все равенства (251). Для этих чисел вследствие неравенств (250), по лемме I, будут иметь место неравенства

$$|C'_{n,\,n_0,\,n_1}| < e^{2\lambda_0 N\sqrt{q \ln N}}, \quad n \leqslant p, \ n_0 \leqslant q, \quad n_1 \leqslant N. \tag{253}$$

Выбрав такую систему чисел C'_{n, n_0, n_1}, мы рассмотрим теперь совокупность чисел A'_{n_0, n_1}, являющихся многочленами с целыми рациональными коэффициентами относительно ω с коэффициентами C'_{n, n_0, n_1}, степени которых не превосходят $q_0 \sqrt{q \ln N}$. Если все эти многочлены имеют общий наибольший делитель $R(\omega)$, то мы положим $A'_{n_0, n_1} = R(\omega) A_{n_0, n_1}$, где A_{n_0, n_1} — опять многочлены с целыми рациональными коэффициентами, высота которых может быть оценена по лемме II, так как $R(\omega)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами, причем многочлены A_{n_0, n_1} не имеют уже общего корня. Мы приходим, таким образом, к новой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{R(\omega)} f_1(z) = \sum_{n_0=0}^{q} \sum_{n_1=0}^{N} A_{n_0, n_1} e^{\eta (n_0 \beta + n_1) z}, \\ A_{n_0, n_1} &= \sum_{n=0}^{p} C_{n, n_0, n_1} \omega^n, \ |C_{n, n_0, n_1}| < e^{3\lambda_0 N \sqrt{q \ln N}}, \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

$$p = [q \sqrt{q \ln N}]$$

и

$$f^{(s)}(t) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant r_1 = \left[N \sqrt{\frac{q}{\ln N}} \right], \tag{255}$$

$$0 \leqslant t \leqslant r_2 = \left[\frac{1}{6\nu} \sqrt{q \ln N} \right].$$

Условия (255) позволяют воспользоваться интегральным представлением

$$f^{(s)}(t) = \\ = \frac{s!}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-t)^{s+1}} \int_{\Gamma_1} \left[\frac{z(z-1)\ldots(z-r_2)}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-r_2)} \right]^{r_1+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{256}$$

где Γ есть окружность $|z| = \left[\frac{8}{\varepsilon} \sqrt{q \ln N} \right]$, а Γ_1 — окружность $|\zeta| = q$. Для того чтобы контур Γ был внутри контура Γ_1, достаточно выполнения неравенства $\ln^{\frac{\varepsilon}{2}} N > \frac{10}{\varepsilon}$.

Оценивая правые части неравенств (256) по модулю на соответствующих контурах Γ и Γ_1 и принимая во внимание неравенства (254), мы получаем неравенства

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{18\nu} qN \ln \frac{q}{\ln N}},$$

$$0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{4}{\varepsilon} N \sqrt{\frac{q}{\ln N}}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant [\sqrt{q \ln N}]. \qquad (257)$$

В нашем случае β алгебраическое, и, очевидно, выполняется условие (155) леммы IV. Эта лемма может быть применена к нашей функции $f(z)$, если будут выполняться условия (157), так как неравенства (254) и (257) эквивалентны остальным условиям леммы IV. Отсюда следует, что или

$$|A_{n_0, n_1}| < e^{-\frac{1}{4} Nq \ln q}, \quad 0 \leqslant n_0 \leqslant q, \quad 0 \leqslant n_1 \leqslant N, \qquad (258)$$

или хотя бы для одной пары s и t,

$$0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{4}{\varepsilon} N \sqrt{\frac{q}{\ln N}}\right], \qquad 0 \leqslant t \leqslant [\sqrt{q \ln N}] \qquad (259)$$

имеет место неравенство

$$|f^{(s)}(t)| > e^{-2Nq \ln q}. \qquad (260)$$

Из соотношений (250) и (254) мы получаем, что

$$P_{s,t}(\omega) = \eta^{-s} a_0^{3Nr+s} f^{(s)}(t) = \sum_{k_0=0}^{2p+2} \sum_{k_1=1}^{\nu} g_{k_0, k_1} \omega_{k_1} \omega^{k_0},$$

$$0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{4}{\varepsilon} N \sqrt{\frac{q}{\ln N}}\right], 0 \leqslant t \leqslant [\sqrt{q \ln N}], p = [q \sqrt{q \ln N}], \qquad (261)$$

где g_{k_0, k_1} — целые рациональные, удовлетворяют условиям

$$|P_{s,t}(\omega)| < e^{-\frac{1}{20\nu} qN \ln \frac{q}{\ln N}}, \quad \max |g_{k_0, k_1}| = g < e^{\lambda_1 Nr}. \qquad (262)$$

Пусть $\frac{1}{8} > \delta > 0$ будет сколь угодно мало, но фиксировано, а $Q(x)$ — многочлен степени n и высоты H, с целыми рациональными коэффициентами и неприводимый в рациональном поле, такой, что выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |Q(\omega)| &< e^{-Nq \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{3\delta} \ln q}, \\ n &< \sqrt{\frac{q}{\ln N}} \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-3\delta} \ln q, \\ \ln H &< \frac{N}{\sqrt{q \ln N}} \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-3\delta} \ln q. \end{aligned}\right\} \tag{263}$$

Тогда, по лемме VIII, существует неприводимый в поле R_ν многочлен $T(x)$ такой, что при $N > N'$

$$\left.\begin{aligned} |T(\omega)| &< e^{-Nq \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{2\delta} \ln q}, \\ T(x) &= \sum_{n_0=0}^{n} \sum_{n_1=1}^{\nu} t_{n_0, n_1} \omega_{n_1} x^{n_0}, \\ t_0 = \max_{\substack{0 \leqslant n_0 \leqslant n \\ 1 \leqslant n_1 \leqslant \nu}} |t_{n_0, n_1}| &< \exp \frac{N}{\sqrt{q \ln N}} \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-2\delta} \ln q, \end{aligned}\right\} \tag{264}$$

где все t_{n_0, n_1} — целые рациональные, отличные от нуля в совокупности числа. Возьмем теперь любой из многочленов $P_{s, t}(x)$. Так как

$$\begin{gathered} (a\beta_0)^{\nu(n+2p+2)} t_0^{2\nu(p+1)} g^{\nu n} (n + 2(p+1))^{\nu(n+2p+2)} < \\ < \exp \Big[2\nu q \sqrt{q \ln N} \frac{N}{\sqrt{q \ln N}} \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-2\delta} \ln q + \\ + \nu \sqrt{\frac{q}{\ln N}} \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-2\delta} \ln q \, \lambda_1 N \sqrt{q \ln N} + \\ + \lambda_2 q \sqrt{q \ln N} \Big] < \exp \left[Nq \ln \frac{q}{\ln N} \ln^{-\delta} \ln q \right] < \\ < \exp \left[\frac{1}{30\nu} q N \ln \frac{q}{\ln N} \right], \end{gathered} \tag{265}$$

где a и β_0 определены в лемме V, то вследствие неравенства

$$|T(\omega)|+|P_{s,t}(\omega)|<e^{-\frac{1}{30\nu}qN\ln\frac{q}{\ln N}}<$$
$$<(a\beta_0)^{-(2p+n+2)\nu}g^{-\nu n}t_0^{-2\nu(p+1)}(n+2(p+1))^{-\nu(n+2p+2)}, \tag{266}$$

которое непосредственно следует из неравенств (263) и (265), выполняются условия леммы V, откуда прямо следует делимость любого многочлена $P_{s,t}(x)$, где s и t находятся в границах (261), на многочлен $T(x)$.

Значит,

$$P_{s,t}(x)=R(x)\,T(x), \tag{267}$$

причем высота $R(x)$ пусть будет R, а степень его не превысит $2p-n+2$. Найдем границу сверху для величины $\ln R$. Так как числа t_{k_0,k_1} удовлетворяют неравенствам (264), а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел поля R_ν, то по хорошо известным свойствам алгебраических чисел мы будем иметь, что высота $T(x)$ не может быть меньше величины $\lambda_3 t_0^{-\nu}$, где $\lambda_3 \geqslant 1$ зависит только от чисел $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$. Отсюда следует по лемме II и с помощью неравенства (262), что

$$2p+2+2\lambda_1 N\sqrt{q\ln N}+\ln\lambda_3+\nu\ln t_0>\ln R, \tag{268}$$

что дает непосредственно неравенство

$$3(1+\lambda_1)N\sqrt{q\ln N}>\ln R. \tag{269}$$

Пользуясь неравенством (269), мы из неравенства (264) получаем новое, более сильное чем (262), неравенство для $P_{s,t}(\omega)$, где s и t находятся в границах (261), именно

$$|P_{s,t}(\omega)|<e^{-Nq\ln\frac{q}{\ln N}\ln^{\delta}\ln q}<e^{-2Nq\ln q}, \tag{270}$$

так как вследствие того, что $q>\ln^{1+\varepsilon}N$,

$$2\ln q<\ln\frac{q}{\ln N}\ln^{\delta}\ln q. \tag{271}$$

Но раз выполняются неравенства (270) для s и t в пределах (262), то должны быть верны неравенства (258); другими словами,

$$|A_{k_0, k_1}(\omega)| = \left|\sum_{k=0}^{p} C_{k, k_0, k_1}\omega^k\right| < e^{-\frac{1}{4}Nq\ln q}, \qquad (272)$$

где все C_{k, k_0, k_1} — целые рациональные и удовлетворяют условиям (254), а k_0 и k_1 находятся в границах $0 \leqslant k_0 \leqslant q$, $0 \leqslant k_1 \leqslant N$. Но многочлены $A_{k_0, k_1}(\omega)$ ничем, в смысле ограничений на степени и коэффициенты, не отличаются от многочленов $P_{s,t}(\omega)$ и, значит, всякий многочлен $A_{k_0, k_1}(x)$ должен делиться на $T(x)$. Это по характеру выбора чисел $A_{k_0, k_1}(\omega)$ невозможно, так как мы уже избавились заранее от общего наибольшего делителя $A_{k_0, k_1}(\omega)$. Мы пришли, таким образом, к противоречию, что показывает невозможность, при любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и любых N и q, $N \geqslant q \geqslant \ln^{1+\varepsilon} N$, неравенства

$$|Q(\omega)| < e^{-Nq\ln\frac{q}{\ln N}\ln^{\delta}\ln q}, \qquad (273)$$

если $Q(x)$ — неприводимый в рациональном поле многочлен с целыми рациональными коэффициентами, высоты $H \geqslant 3$ и степени n, где

$$\left.\begin{aligned} n &< \sqrt{\frac{q}{\ln N}}\ln\frac{q}{\ln N}\ln^{-\delta}\ln q; \\ \ln H &< \frac{N}{\sqrt{q\ln N}}\ln\frac{q}{\ln N}\ln^{-\delta}\ln q, \end{aligned}\right\} \qquad (274)$$

при достаточно большом N. Выбирая теперь $\sigma > 0$ и $\delta > 0$ произвольно малыми и решая уравнения

$$\left.\begin{aligned} n + \ln^{\sigma}\ln H &= \sqrt{\frac{x}{\ln z}}\ln\frac{x}{\ln z}\ln^{-\delta}\ln x, \\ n + \ln H &= \frac{z}{\sqrt{x\ln z}}\ln\frac{x}{\ln z}\ln^{-\delta}\ln x, \end{aligned}\right\} \qquad (275)$$

при $n + \ln H > A(\delta, \sigma)$, и полагая $q = [x]$, $N = [z]$, мы приходим, наконец, к неравенству (248).

Действительно, пусть σ фиксировано, но сколь угодно мало и $\sigma > 0$.

Тогда мы имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{n+\ln H}{n+\ln^\sigma \ln H} > 1, \\ (n+\ln^\sigma \ln H)(n+\ln H) &= \frac{z}{\ln z} \ln^2 \frac{x}{\ln z} \ln^{-2\delta} \ln x, \\ \frac{x}{\ln z} &= (n+\ln^\sigma \ln H)^2 \ln^{-2} \frac{x}{\ln z} \ln^{2\delta} \ln x, \end{aligned}\right\} \qquad (276)$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{\ln z} &= (n+\ln H)(n+\ln^\sigma \ln H) \times \\ &\qquad \times \ln^{-2}[n+\ln^\sigma \ln H] \ln^{\delta_1}(n+\ln H), \\ \frac{x}{\ln z} &= (n+\ln^\sigma \ln H)^2 \times \\ &\qquad \times \ln^{-2}(n+\ln^\sigma \ln H) \ln^{\delta_2}(n+\ln H), \\ \ln z &= \ln(n+\ln H) \ln^{\delta_3}[n+\ln H], \\ \ln \frac{x}{\ln z} &= 2\ln(n+\ln^\sigma \ln H) \ln^{\delta_4}(n+\ln H), \\ \lim_{\sigma=0,\ \delta=0} & [\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (277)$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{x}{\ln z} > n+\ln^\sigma \ln H > \ln^\sigma z$$

и

$$zx \ln \frac{x}{\ln z} \ln^\delta \ln x = \frac{z}{\ln z} \frac{x}{\ln z} \ln^2 z \ln \frac{x}{\ln z} \ln^\delta \ln x =$$

$$= \frac{(n+\ln^\sigma \ln H)^3}{\ln^3(n+\ln^\sigma \ln H)} (n+\ln H) \ln^{2+\varepsilon_1}(n+\ln H), \qquad (278)$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \sigma\to 0}} \varepsilon_1 = 0. \qquad (279)$$

Так как одновременно неравенства (273) и (274) при произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ невозможны, если $N > N'(\varepsilon, \delta, \alpha, \beta)$, то

$$|Q(\omega)| > \exp\left[-\frac{n^3}{1+\ln^3 n}(n+\ln H) \ln^{2+\varepsilon_1}(n+\ln H)\right] \qquad (280)$$

при $n > \ln^\sigma \ln H$. Если же, каково бы ни было σ, при $n + \ln H > A$, $n < \ln^\sigma \ln H$, то

$$|Q(\omega)| > \exp[-\ln H \ln^{2+\varepsilon_2} \ln H], \quad \varepsilon_2 > 0, \tag{281}$$

каково бы ни было $\varepsilon_2 > 0$. Это и доказывает первую часть нашей теоремы III. От неприводимости же $Q(\omega)$ избавляемся благодаря лемме VI, 1.

Докажем теперь, что если α и β — алгебраические, $\omega = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ иррационально, $Q(x)$ — неприводимый в рациональном поле многочлен степени n и высоты H с целыми рациональными коэффициентами, общий делитель которых единица, то

$$\left| Q\left(\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\right) \right| > e^{-n^2 (n+\ln H)^{2+\varepsilon}}; \quad \varepsilon > 0, \tag{282}$$

где ε сколь угодно мало, но фиксировано, при

$$n + \ln H > C(\varepsilon;\ \ln \alpha,\ \ln \beta).$$

Трансцендентность числа ω была доказана выше.

Доказательство этого неравенства проходит совершенно так же, как и неравенства (248), поэтому мы приведем несколько упрощенное его доказательство.

Пусть числа α и β принадлежат алгебраическому полю K_ν, $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел этого поля и a_0 — целое рациональное число, такое, что $a_0\alpha$ и $a_0\beta$ – целые алгебраические. Пусть также ε $\left(\frac{1}{4} > \varepsilon > 0\right)$ сколь угодно мало, но фиксировано и N — целое сколь угодно большое число. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \sum_{k_0=0}^{N} \sum_{k_1=0}^{N} A'_{k_0,\, k_1} e^{\ln \beta\, (k_0 + k_1 \omega)\, z}, \tag{283}$$

$$A'_{k_0,\, k_1} = \sum_{k=0}^{q} C'_{k,\, k_0,\, k_1} \omega^k, \quad N^{1+\varepsilon} \leqslant q \leqslant N^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} N,$$

где все числа $C'_{k,\, k_0,\, k_1}$ — целые рациональные и в совокупности отличны от нуля.

Положим $p=\left[\frac{4}{\varepsilon}\frac{N^2}{q}\right]$ и рассмотрим $(p+1)(q+1)$ чисел $f_{1,s,t}$

$$f_{1,s,t}=\ln^{-s}\beta a_0^{2pN}f_1^{(s)}(t)=$$
$$=\sum_{k_0=0}^{2q}\sum_{k_1=1}^{\nu}\omega_{k_1}\omega^{k_0}\sum_{n=0}^{q}\sum_{n_0=0}^{N}\sum_{n_1=0}^{N}C'_{n,n_0,n_1}B_{s,t,n,n_0,n_1,k_0,k_1}, \tag{284}$$
$$0\leqslant s\leqslant q,\ t=0,\ 1,\ \ldots,\ p.$$

Числа B, как нетрудно видеть, будут целыми рациональными и удовлетворять неравенствам

$$|B_{s,t,n,n_0,n_1,k_0,k_1}|<e^{\lambda_0\frac{N^3}{q}}. \tag{285}$$

Число целых чисел C' равно $(q+1)(N+1)^2$. Для того чтобы $f_{1,s,t}$ при s и t в границах (284) обратилось в нуль, необходимо выполнение $\nu(2q+1)$ условий. Поэтому, для того чтобы имели место равенства

$$f_{1,s,t}=0; \tag{286}$$
$$0\leqslant s\leqslant q;\ t=0,1,\ldots,r;\ \ r=\left[\frac{1}{8\nu}\frac{N^2}{q+1}\right]-1,$$

необходимо выполнение $\nu(r+1)(q+1)(2q+1)$ условий. Так как

$$\frac{1}{4}(N+1)^2(q+1)>\nu(r+1)(q+1)(2q+1), \tag{287}$$

то, по лемме I и неравенствам (285), числа C'_{n,n_0,n_1} можно выбрать целыми рациональными, в совокупности отличными от нуля и удовлетворяющими неравенствам

$$|C'_{n,n_0,n_1}|<e^{\frac{\lambda_0}{2}\frac{N^3}{q}} \tag{288}$$

так, чтобы выполнялись условия (286).

Выбрав, таким образом, C'_{n,n_0,n_1}, мы их зафиксируем и, тем самым, полностью определяем нашу функцию $f_1(z)$.

Рассмотрим зафиксированные таким образом числа $A'_{k_0, k_1} = A'_{k_0, k_1}(\omega)$, которые являются многочленами с целыми рациональными коэффициентами от числа ω. Пусть $R(\omega)$ — многочлен с целыми коэффициентами будет общим наибольшим делителем многочленов $A'_{k_0, k_1}(\omega)$. Полагая тогда

$$\frac{1}{R(\omega)} f_1(z) = f(z) = \sum_{k_0=0}^{N} \sum_{k_1=0}^{N} A_{k_0, k_1} e^{\ln \beta (k_0 + k_1 \omega) z}, \tag{289}$$

$$A_{k_0, k_1} = \sum_{k=0}^{q} C_{k, k_0, k_1} \omega^k,$$

мы по лемме II можем оценить модули целых рациональных чисел C_{k, k_0, k_1} и получаем для всех чисел C_{k, k_0, k_1} неравенства

$$|C_{k, k_0, k_1}| < e^{2\lambda_0 \frac{N^2}{q}}. \tag{290}$$

Полагая снова

$$P_{s, t}(\omega) = \ln^{-s}\beta a_0^{2pN} f^{(s)}(t) = \sum_{k_0=0}^{2q} \sum_{k_1=1}^{\nu} g_{k_0, k_1} \omega^{k_0} \omega_{k_1}, \tag{291}$$

$$0 \leqslant s \leqslant q; \quad 0 \leqslant t \leqslant p,$$

где на основании неравенств (290)

$$g_0 = \max_{\substack{0 \leqslant k_0 \leqslant 2q \\ 1 \leqslant k_1 \leqslant \nu}} |g_{k_0, k}| < e^{\lambda_1 \frac{N^3}{q}}, \tag{292}$$

и все эти числа g_{k_0, k_1} — целые рациональные. Так как для $f(z)$ выполняются условия (286), то мы имеем интегральное представление

$$P_{s, t}(\omega) = \\ = \frac{s!\, a_0^{2pN}}{(2\pi i)^2 \ln^s \beta} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-t)^{s+1}} \int_{\Gamma_1} \left[\frac{z(z-1)\dots(z-r)}{\zeta(\zeta-1)\dots(\zeta-r)} \right]^{q+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{293}$$

где контур Γ есть окружность $|z|=\frac{8}{\varepsilon}\frac{N^2}{q}$, а контур Γ_1 — окружность $|\zeta|=N$, а s и t меняются в границах (291).

Оценивая по модулю интегралы в правых частях неравенств (293), мы получаем неравенства

$$|P_{s,t}(\omega)|<e^{-\frac{1}{10\nu}N^2\ln N}, \qquad (294)$$
$$0\leqslant s\leqslant q, \quad 0\leqslant t\leqslant p.$$

По лемме IV или для всех $A_{k_0,k_1}(\omega)$ справедливы неравенства

$$|A_{k_0,k_1}(\omega)|<e^{-\frac{1}{4}N^2\ln N}, \quad 0\leqslant k_i\leqslant N, \ i=0,1, \qquad (295)$$

или хотя бы для одной пары (s, t), $0\leqslant s\leqslant q$, $0\leqslant t\leqslant p$, должно выполняться неравенство

$$|P_{s,t}(\omega)|>e^{-2N^2\ln N}. \qquad (296)$$

Пусть $\frac{1}{4}>\delta>0$ фиксировано и пусть $Q(x)$ будет неприводимый в рациональном поле многочлен с целыми рациональными коэффициентами, общий делитель которых единица, высоты H и степени n, удовлетворяющий условиям

$$\left.\begin{aligned}&|Q(\omega)|<e^{-N^2\ln^{1+2\delta}N};\\ &n\leqslant\frac{q}{N}\ln^{-\delta}N;\quad \ln H\leqslant\frac{N^2}{q}\ln^{-\delta}N.\end{aligned}\right\} \qquad (297)$$

Тогда, по лемме VIII, в поле K_ν существует неприводимый многочлен $T(x)$, коэффициенты которого — целые числа поля K_ν, удовлетворяющий условиям

$$|T(\omega)|<e^{-N^2\ln^{1+\delta}N}; \quad T(x)=\sum_{n_0=0}^{N}\sum_{n_1=1}^{\nu}t_{n_0,n_1}\omega_{n_1}x^{n_0}, \qquad (298)$$

$$t_0=\max_{\substack{0\leqslant n_0\leqslant n\\1\leqslant n_1\leqslant\nu}}|t_{n_0,n_1}|<\exp\left[\frac{N^2}{q}\ln^{-\frac{\delta}{2}}N\right].$$

Пусть $P(x)$ — любой из многочленов $P_{s,t}(x)$, где $0 \leqslant s \leqslant q$, $0 \leqslant t \leqslant p$. С помощью неравенств (292) и (298) мы получаем неравенство

$$(a\beta)^{\nu(n+2q)} g_0^{\nu n} t_0^{2\nu q} (n+2q)^{\nu(n+2q)} < \\ < \exp\left[\lambda_1 \nu \frac{N^3}{q} \cdot \frac{q}{N} + 2\nu \frac{N^2}{q} \cdot q + \lambda_2 \frac{N^3}{q}\right] < \\ < \exp[\lambda_3 N^2] < \exp\left[\frac{1}{10\nu} N^2 \ln N\right], \tag{299}$$

где числа a и β определены в лемме V.

Значит, для многочленов $P(x)$ и $T(x)$ выполнены условия леммы V, и $P(x)$ должен нацело делиться на $T(x)$ в силу неприводимости $T(x)$ в поле K_γ. Значит,

$$P_{s,t}(x) = R(x)\, T(x), \tag{300}$$

где $R(x)$ многочлен высоты R и степени, не превышающей $2q - n$. Для этой высоты R с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве первой части нашей теоремы, мы непосредственно получаем неравенство, аналогичное (269), именно

$$N^2 > 2q + \lambda_1 \frac{N^3}{q} + \nu \frac{N^2}{q} > \ln R. \tag{301}$$

Значит,

$$|P_{s,t}(\omega)| < e^{-\frac{1}{2} N^2 \ln^{1+\delta} N}, \quad 0 \leqslant s \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \tag{302}$$

откуда следует справедливость всех неравенств (295), так как ни одно из неравенств (296) не может иметь места. Но так как многочлены с целыми рациональными коэффициентами $A_{k_0, k_1}(x)$ теперь будут удовлетворять тем же условиям, что и многочлены $P_{s,t}(x)$, то все $A_{k_0, k_1}(x)$ должны делиться нацело на $T(x)$, что невозможно из-за того, что они не имеют общего корня. Итак, пусть N достаточно велико и $N^{1+\varepsilon} \leqslant q \leqslant N^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} N$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, но фиксировано. Фиксируем также δ, $\frac{1}{4} > \delta > 0$. Пусть $Q(x)$ будет многочлен с целыми рациональными коэффициентами, неприводимый в рациональном поле, степени n и высоты H

$$n \leqslant \frac{q}{N} \ln^{-\frac{1}{4}} N, \quad \ln H \leqslant \frac{N^2}{q} \ln^{-\frac{1}{4}} N. \tag{303}$$

Мы доказали, что тогда неравенство

$$|Q(\omega)| < e^{-N^2 \ln^2 N} \tag{304}$$

невозможно. Решим уравнения, при $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} > \sigma > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$,

$$n + \ln^\sigma H = \frac{z}{x} \ln^{-1} x, \quad n + \ln H = \frac{x^2}{z} \ln^{-1} x. \tag{305}$$

Мы будем иметь:

$$x = \theta^2 (n + \ln^\sigma H)(n + \ln H) \ln^2 (n + \ln H), \quad 1 \leqslant \theta \leqslant 2 \tag{306}$$

и

$$z = \theta (n + \ln^\sigma H)^2 (n + \ln H) \ln^3 (n + \ln H). \tag{307}$$

Полагая $N = [x]$, $q = [z \ln^{-\frac{1}{2}} (n + \ln H)]$, мы видим, что при достаточно большом числе $n + \ln H$ будут удовлетворены неравенства (303) и q будет находиться в нужных границах. Значит,

$$|Q(\omega)| > e^{-N^2 \ln^2 N} > e^{-n^2 (n + \ln H)^{2+\varepsilon_1}}, \tag{308}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно мало.

Пусть теперь $P_k(x)$ — приводимые многочлены с целыми коэффициентами, степени n_k и высоты H_k такие, что при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|P_k(\omega)| < e^{-n_k^2 [n_k + \ln H_k]^{2+\varepsilon}}, \tag{309}$$

независимо от k и

$$\lim_{k\to\infty} (n_k + \ln H_k) = \infty.$$

Тогда, по лемме VI, при любом k существует неприводимый многочлен $Q_k(x)$ высоты h_k и степени q_k, такой, что

$$\left.\begin{aligned} &\text{A)} \quad \ln h_k < \frac{2}{s}(n_k + \ln H_k), \qquad q_k < \frac{1}{s} n_k, \\ &\text{B)} \quad |Q_k(\omega)| < e^{-\frac{1}{2s} n_k^2 [n_k + \ln H_k]^{2+\varepsilon}}. \end{aligned}\right\}, \tag{310}$$

Неравенство B) показывает, что

$$\lim_{k\to\infty} (q_k + \ln h_k) = \infty,$$

а все эти неравенства вместе приводят нас к неравенству типа (308) уже для $Q(x)$ при замене ε на $\frac{\varepsilon}{2}$. Это, по доказанному, невозможно, и наша теорема полностью доказана.

Заметим, что, так же как мы доказывали теорему III, можно доказать и трансцендентность чисел α^β и $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$, причем для этого нужна значительно более простая лемма, чем лемма V. Кроме доказанных теорем, вышеизложенный метод приложим и к другим вопросам трансцендентности.

Из неравенства (117) теоремы III § 4 настоящей главы непосредственно следует одно утверждение, которое заслуживает быть сформулировано в виде отдельной теоремы.

Т е о р е м а IV. *Неравенство*

$$|x_1 \ln\alpha + x_2 \ln\beta| < e^{-\ln^{2+\varepsilon} x}, \quad |x_1| + |x_2| = x > 0, \tag{311}$$

где α и β — алгебраические числа, $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ иррационально, $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число, не имеет решений в целых рациональных числах x_1, x_2 при $x > x_0$, $x_0 = x_0\left(\alpha, \beta, \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}, \varepsilon\right)$, где *$x_0$ — эффективно вычисляемая постоянная.*

Неравенство (311) использовалось существенным образом в доказательстве ряда теорем теории чисел. Для того чтобы был ясен круг приложений этого типа неравенств, мы приведем здесь формулировки четырех теорем, которые доказываются с помощью неравенства (311).

Первая теорема относится к приближенному представлению целых чисел с помощью произведения произвольных степеней конечного числа фиксированных простых чисел. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ будут различные простые числа $s \geqslant 3$, $\frac{1}{3} > \varepsilon > 0$, $\varepsilon > \delta > 0$, N — любое целое рациональное число, $N>0$. Тогда будет иметь место теорема.

Для числа решений $I_{N,\,s}$ равенства

$$N=dp_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s};\quad |\ln d|\leqslant\Delta;\quad \Delta=e^{-[\ln\ln N]^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}},\ \nu=3, \tag{312}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — целые положительные, а d — положительное рациональное число, имеет место асимптотическая при больших N, формула

$$I_{N,\,s}=\frac{2\ln^{s-1}N\Delta}{(s-1)!\ln p_1\ldots\ln p_s}+O\left[\ln^{s-1}Ne^{-[\ln\ln N]^{\frac{1}{\nu}-\delta}}\right].$$

Эта теорема была доказана Б. И. Сегалом[1]), который пользовался прежним, менее точным неравенством (311), где вместо 2 в показателе стояло 3. Из неравенства (311) эта теорема следует при $\nu=2$.

Другая теорема относится к свойствам арифметических функций типа характеров. Пусть функция $\varphi(n)$ определена для всех целых рациональных чисел, мультипликативна, т. е. $\varphi(n)\varphi(m)=\varphi(nm)$ и $\varphi(1)\neq 0$. Тогда имеет место теорема.

Если $\varphi(p)=0$ для всех простых чисел p за исключением конечного числа и существует постоянная C такая, что для любого N

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\right|<C,$$

то $\varphi(p)=0$ для всех p, кроме, может быть, одного $p=p_0$, причем $\varphi(p_0)=e^{i\alpha}\neq 1$, где α действительно.

Эта теорема была доказана Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым[2]). Далее если α и β — действительные целые числа кубического поля K отрицательного определи-

---

[1]) Б. И. Сегал, О целых числах с каноническим разложением определенного вида, И. А. Н., сер. матем. (1939), стр. 519—538.

[2]) Н. Г. Чудаков и Ю. В. Линник, Об одном классе вполне мультипликативных функций, ДАН СССР, 1950, т. 74, № 2.

теля D, отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ иррационально, то можно указать эффективную границу $x_0 = x_0(\alpha, \beta)$ величины модулей решений уравнения

$$N(\alpha x + \beta y) = 1 \tag{313}$$

при

$$\frac{\alpha_3\beta_2 - \beta_3\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} = e^{2\pi i \frac{p}{q}},$$

если p, q, $(p, q) = 1$ — целые, а α_2, α_3 и β_2, β_3 сопряжены α и β.

Эта теорема была впервые доказана Б. Н. Делоне[1]) в несколько более общей форме, но она непосредственно следует также из неравенства (311).

Покажем вкратце, как доказывается эта теорема с помощью неравенства (311). Так как поле K имеет в нашем случае только одну основную единицу I, то из (313) следует, что $\alpha x + \beta y$, если x и y решение (313), единица и $\alpha x + \beta y = I^n$. Обозначая α_2, α_3, β_2, β_3 и I_2, I_3 числа, сопряженные $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ и $I = I_1$, мы получаем, таким образом, систему уравнений:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = I_1^n,$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y = I_2^n,$$

$$\alpha_3 x + \beta_3 y = I_3^n,$$

где n — целое число. Исключая из этой системы x и y, мы получаем уравнение для числа n

$$(\alpha_3\beta_2 - \beta_3\alpha_2) I_1^n + (\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3) I_2^n + (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) I_3^n = 0. \tag{314}$$

Предполагая, что I_1 действительно, а I_2, I_3 — комплексно сопряженные, $|I_1| = \rho$, мы получаем, что $|I_2| = |I_3| = |I_1|^{-\frac{1}{2}}$. Легко показать, что при достаточно больших

---

[1]) Б. Н. Делоне, Теория иррациональностей третьей степени. Труды мат. института им. Стеклова, 11 (1940), 1—340.

$|x|$ или $|y|$ $n>0$. Полагая $\eta=\ln\frac{I_3}{I_2}$, деля левую часть (314) на $(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_3)I_2^n$, мы получаем, в силу условий теоремы, неравенство

$$\left|e^{n\eta+2\pi i\left(m+\frac{p}{q}\right)}-1\right|<C_0|I_1|^{-2n}=C_0e^{-\lambda n}, \tag{315}$$

где C_0 и λ — постоянные, m — произвольное целое число. Из (315) непосредственно уже следует неравенство

$$\left|n\ln\frac{I_3}{I_2}+m_1\ln e^{\frac{2k\pi i}{q}}\right|<C_1e^{-\lambda n}, \tag{316}$$

где n и m_1 — целые числа, C_1 — постоянная, числа $\frac{I_3}{I_2}$, $e^{\frac{2k\pi i}{q}}$ — алгебраические, а значения их логарифмов любые, но фиксированные. Это же неравенство, более сильное чем (311), не может иметь решений при $|n|$ и $|m_1|$, больших некоторой границы. Если бы мы могли доказать неравенство (221) гл. I так же эффективно, как и неравенство (311) этого параграфа, то мы получили бы вычисляемую границу для величин решений уравнений (313) при любом алгебраическом поле K. К этой задаче сегодня не видно сколько-нибудь реальных подходов кроме вышеизложенного.

Наконец, можно пользуясь неравенствами (311) настоящего параграфа и (83) § 3, доказать весьма просто следующую теорему (А. О. Гельфонд [9]).

Пусть α, β и γ — действительные числа конечного алгебраического поля K, не равные $0, \pm 1$ и одно из них по крайней мере не есть алгебраическая единица. Тогда уравнение

$$\alpha^x+\beta^y=\gamma^z, \quad |x|+|y|+|z|=t$$

не имеет при $t>t_0(\alpha, \beta, \gamma)$ решений в целых числах x, y, z, исключая случай

$$\alpha=\pm 2^{n_1}, \quad \beta=\pm 2^{n_2}, \quad \gamma=\pm 2^{n_3},$$

где n_1, n_2, n_3 — рациональные, причем t_0 может быть эффективно вычислено.

Приведенные примеры использования оценки приближения отношения логарифмов алгебраических чисел рациональными дробями показывают, что результаты и методы теории трансцендентных чисел могут использоваться не только для теории геометрических построений — например, невозможности квадратуры круга.

Нетривиальные нижние границы линейных форм с целыми коэффициентами от любого числа логарифмов алгебраических чисел, эффективно полученные методами теории трансцендентных чисел, будут иметь чрезвычайно большое значение в решении очень трудных проблем современной теории чисел. Поэтому можно считать, что уже говорилось выше, наиболее актуальной задачей в теории трансцендентных чисел исследование меры трансцендентности конечных совокупностей логарифмов алгебраических чисел. Следует также напомнить, что до сих пор не найдено путей для исследования арифметической природы чисел типа постоянной Эйлера или значений $\zeta(z)$ при $z=2n+1$, где $n \geqslant 1$ целое число.

ЛИТЕРАТУРА

К. Боле

[1] Über die Transcendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten, Math. Annalen, B. 108 (1933), 56.

Г. Гассе

[1] Simultane Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen, Monatshefte Math. Phys., B. 48 (1939), 205.

А. О. Гельфонд

[1] Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entiers, The Tohoku Math. Journ., t. 30, N 3, 4 (1929).

[2] Sur les nombres transcendants, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 189 (1929), 1224.

[3] Необходимый и достаточный признак трансцендентности, Ученые записки МГУ, 1929.

[4] Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел. Естествознание и марксизм, т. 1/5 (1930), 33.

[5] О седьмой проблеме Гильберта, ДАН (1934), 1; Известия АН СССР, т. 7 (1934), 623.

[6] Трансцендентные числа, Труды Всесоюзного съезда, 1934.

[7] О приближениях трансцендентных чисел алгебраическими, ДАН (1935), 177.

[8] О приближении алгебраическими числами отношения двух алгебраических чисел, Изв. АН СССР, № 5—6 (1939), 509.

[9] Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un ideal premier, Матем. сборник, т. 7 (49), (1940), 7.

[10] О совместных приближениях алгебраических чисел рациональными дробями, Изв. АН СССР, № 5 (1941), 99.

[11] Аппроксимация алгебраических иррациональностей и их логарифмов, Вестник МГУ, № 9 (1948), 3.

[12] Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел, ДАН, т. 64, № 3 (1949), 277.

[13] См. Ю. В. Линник [1].

[14] См. Н. И. Фельдман [2].

[15] Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 5 (1949), 19.

К. Зигель

[1] Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. B. 10 (1921), 173.

[2] Über Näherungswerte algebraischer Zahlen Math. Ann., B. 84 (1921), 80.
[3] Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, Abh. preuss. Acad. Wiss., 1929—1930, N 1, 70.
[4] Über die Perioden elliütischer Funktionen, Journ. für reine u. angew. Math., B. 167 (1932), 62.
[5] Transcendental numbers, 1949.

И. Ф. Коксма
[1] Diophantische Approximationen, изд. Ergebnische der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 4 (1936).

Р. О. Кузьмин
[1] Об одном новом классе трансцендентных чисел, ИАН, сер. матем., т. 3 (1930), стр. 585.
[2] О диофантовых приближениях к алгебраическим иррациональностям, ДАН (1930), 9.
[3] О трансцендентных числах Гольдбаха, Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 5 : 1 (1938), 28.

Ю. В. Линник (совм. с А. О. Гельфондом)
[1] О методе Туэ и проблеме эффективизации в квадратичных полях, ДАН, т. 61, № 5 (1948), 773.

Ф. Линдеманн
[1] Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logaritmes néperiens des nombres commensurable ou des irrationelles algebriques, Compt. Rend. Ac. de Paris, t. 95 (1882), 72.
[2] Über die Zahl π Math. Ann., B. 20 (1882), 213.

Ж. Лиувилль [1] Sur l'irrationalité du nombre e, Journ. de Math. Pures et appl., t. 5 (1940), 192.
[2] Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même reductible à des irrationelles algébriques, Compt. Rend. Ac. Sc. Paris, t. 18 (1884), 883, 910; Journ. Math. pures et appl., t. 16 (1851), 133.

А. Лотоцкий
[1] Sur l'irrationalité d'un produit infini, Матем. сборник, т. 12 (54) (1943), 262.

К. Малер
[1] Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, Journ. Rein. u. Angew. Math., B. 166 (1932), 118; II, B. 166 (1932), 137.
[2] Zur Approximation algebraischer Zahlen, I, Math. Ann. B. 107 (1933), 691; II, Math. Ann. B. 108 (1933), 37; III Acta Math. B. 62 (1933), 91.
[3] Über transcendente P—adische Zahlen, Compos. Math. B. 2 (1935), 259.
[4] Ein Analogen zu einem Schneiderschen Satz, Proseed. Konikl. Akad. w. Wetensch. te Amsterdam, I, Vol. 39, N 5 (1936), 3; II, Vol. 39, N 6 (1936), 3.
[5] Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen, Pros. Konikl. Ak. w. Wetensch. te Amsterdam, Vol. 40, N 5 (1937), 3,

А. А. Марков

[1] Доказательство трансцендентности чисел e и π. Санкт-Петербург, 1883, Тип. Ак. Наук.

Д. Д. Мордухай-Болтовский

[1] О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса, Матем. сборник, т. 34, № 1 (1927), 55.

[2] Sur le logarithme d'un nombre algebrique, Comptes Rendus, Paris (1923), 724.

[3] Zur Theorie der transcendenten Zahlen, Com. Rend. et Mém. Soc. Nat. Varsovie, t. 25 (1913), 49.

[4] О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями, Матем. сборник № 41 (2) (1934), 221.

[5] Über einige Eigenschaften der transcendenten Zahlen, Tohoku Math. Journ. t. 40 (1935), 99.

[6] Об условиях определяемости числа трансцендентными уравнениями некоторого общего типа, ДАН, т. 52, № 6 (1946), стр. 487.

Г. Полиа

[1] Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. del Circolo Math. di Palermo, t. 40 (1914), 1.

Д. Риччи

[1] Sul settimo problema di Hilbert, Annali della R. Scuola Norm. Sup. de Pisa Ser. II, vol. IV, 1945—XIII, 1.

А. Туэ

[1] Über Anneherungswerte algebraischer Zahlen, Journ. reine u. angew. Math., B. 135 (1909), 284.

Н. И. Фельдман

[1] Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, ДАН, т. 66, № 4 (1949).

[2] О нижних границах форм от трех логарифмов алгебраических чисел, Вестник МГУ, № 5 (1949) (совм. с А. О. Гельфондом).

Е. Хилл

[1] Gelfond's solution of Hilbert's seventh problem, Amer. Math. Monthly, 49, p. 654—661 (1942).

Т. Шнейдер

[1] Über die Approximation algebraischer Zahlen, Journ. f. reine u. angew. Math., B. 175, N 3 (1936), 182.

[2] Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, B. 113, N 1 (1936), 1.

[3] Zur Theorie der abelschen Funktionen und Integrale, Journ. f. reine u. angew. Math., B. 183 (1941), 110.

[4] Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise, Math. Annalen, B. 121 (1949), 131—140.

Ш. Эрмит

[1] Sur la fonction exponentielle, Compt. Rend. Ac. Sci. Paris, t. 77 (1873), 18, 74, 226, 285.