

## **ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ**

М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. —432 с.

Книга содержит свыше двух тысяч задач, которые отражают 15-летний опыт преподавания физики в ФМШ при НГУ. Особое внимание уделено задачам тех разделов школьной программы, которые важны для успешного обучения в вузе. Идеи многих задач взяты из практики научно-исследовательской работы в институтах СО АН СССР.

Задачи снабжены ответами.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие	6	
Физические постоянные	8	
	<b>Задачи</b>	<b>Ответы</b>
Глава 1. КИНЕМАТИКА	9	329
§ 1.1. Движение с постоянной скоростью	9	329
§ 1.2. Движение с переменной скоростью	14	331
§ 1.3. Движение в поле тяжести. Криволинейное движение	18	333
§ 1.4. Преобразование Галилея	22	334
§ 1.5. Движение со связями	25	335
Глава 2. ДИНАМИКА	30	336
§ 2.1. Законы Ньютона	30	336
§ 2.2. Импульс. Центр масс	41	339
§ 2.3. Работа. Энергия.	47	340
§ 2.4. Законы сохранения энергии и импульса	58	343
§ 2.5. Сила тяготения. Законы Кеплера	64	345
§ 2.6. Вращение твердого тела	69	346
§ 2.7. Статика	76	348
Глава 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	86	349
§ 3.1. Малые отклонения от равновесия	86	349
§ 3.2. Период и частота свободных колебаний	90	350
§ 3.3. Гармоническое движение	97	351
§ 3.4. Наложение колебаний	102	353
§ 3.5. Вынужденные и затухающие колебания	105	354
§ 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волн	112	358
§ 3.7. Распространение волн	117	360
§ 3.8. Наложение и отражение волн	121	361
Глава 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ	126	365
§ 4.1. Давление в жидкости	126	365
§ 4.2. Плавание. Закон Архимеда	131	366
§ 4.3. Движение идеальной жидкости	136	368
§ 4.4. Течение вязкой жидкости	140	369
§ 4.5. Поверхностное натяжение жидкости	141	370
§ 4.6. Капиллярные явления	146	371

Глава 5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	148	372
§ 5.1. Тепловое движение частиц	148	372
§ 5.2. Функция распределения	150	372
§ 5.3. Столкновения молекул. Процессы переноса	154	373
§ 5.4. Разреженные газы. Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела	156	374
§ 5.5. Уравнение состояния идеального газа	159	374
§ 5.6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость	163	375
§ 5.7. Истечение газа	167	376
§ 5.8. Вероятность термодинамического состояния	169	376
§ 5.9. Второе начало термодинамики	172	377
§ 5.10. Фазовые переходы	175	378
§ 5.11. Тепловое излучение	178	379
Глава 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	181	379
§ 6.1. Закон Кулона	181	379
§ 6.2. Напряженность электрического поля	184	380
§ 6.3. Электрическое давление. Энергия электрического поля	190	382
§ 6.4. Проводники в постоянном электрическом поле	194	383
§ 6.5. Потенциал электрического поля	197	385
§ 6.6. Конденсаторы	203	386
§ 6.7. Электрическое поле при наличии диэлектрика	207	387
Глава 7. ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	213	388
§ 7.1. Движение в постоянном электрическом поле	213	388
§ 7.2. Движение в переменном электрическом поле	219	390
§ 7.3. Взаимодействие заряженных частиц	222	390
Глава 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	227	393
§ 8.1. Ток. Плотность тока. Ток в вакууме	227	393
§ 8.2. Проводимость. Сопротивление. Источники э.д.с.	231	394
§ 8.3. Электрические цепи	237	395
§ 8.4. Конденсаторы и нелинейные элементы в электрических цепях	247	398
Глава 9. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ	252	399
§ 9.1. Индукция магнитного поля. Действие магнитного поля на ток	252	399
§ 9.2. Магнитное поле движущегося заряда. Индукция магнитного поля линейного тока	256	400
§ 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по плоскости или объему	259	401
§ 9.4. Магнитный поток	264	403
Глава 10. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ в сложных полях	266	405
§ 10.1. Движение в электрическом и магнитном полях	266	405
§ 10.2. Дрейфовое движение частиц	271	406
Глава 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	273	407

§ 11.1. Движение проводников в постоянном магнитном поле. Электродвигатели	273	407
§ 11.2. Вихревое электрическое поле	280	408
§ 11.3. Взаимная индуктивность. Индуктивность проводников. Трансформаторы	284	409
§ 11.4. Электрические цепи переменного тока	288	410
§ 11.5. Сохранение магнитного потока. Сверхпроводники в магнитном поле	293	411
§ 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным	297	413
Глава 12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	300	415
§ 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн	300	415
§ 12.2. Распространение электромагнитных волн	308	419
Глава 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА	312	419
§ 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света	312	419
§ 13.2. Преломление света. Оптические линзы	314	421
§ 13.3. Оптические системы	319	422
§ 13.4. Фотометрия	322	423
§ 13.5. Квантовая природа света	326	424
Приложения	425	

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы книги, преподаватели первой в стране специализированной физико-математической школы-интерната при Новосибирском государственном университете и научные сотрудники СО АН СССР, стремились создать не просто сборник задач, а учебное пособие, преследующее цель упрочения связи школьного образования с современной наукой.

В книге свыше двух тысяч задач различной сложности: от обычных школьных до олимпиадных, требующих сообразительности и нестандартного мышления. В отличие от аналогичных пособий, изданных за последнее время, в предлагаемом сборнике (за редким исключением) не приводятся решения задач, а даются лишь ответы. Такая форма более естественна для активного, творческого изучения физики. Ведь путь к ответу — это индивидуальный и увлекательный научный поиск. И этот творческий процесс нельзя заменить изучением рецептов решения задач.

Почти все включенные в книгу задачи взяты из сборников задач по физике этих же авторов, изданных в НГУ для учащихся физико-математической школы. Поэтому особое внимание уделялось темам, которые важны для успешного обучения в вузе. Так, значительно увеличена доля задач по колебаниям и волнам, молекулярной физике, движению заряженных частиц, электромагнитным волнам. Это первый опыт пособия подобного типа, поэтому многие задачи пришлось специально создавать для той или иной темы. Большую помощь в этой работе нам оказали сотрудники институтов СО АН СССР. В частности, сотрудники Института гидродинамики разработали тему — течение сложных струй (§ 4.3), предложили большинство задач, связанных с законом сохранения магнитного потока (§ 11.5). Сотрудники Инсти-

туда ядерной физики составили много задач о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Кроме того, книга содержит много задач Всесибирских олимпиад и вступительных экзаменов в НГУ. В книгу включены также некоторые задачи, традиционно относимые к курсу общей физики в вузах, однако характер формулировок и порядок их следования позволяют найти их решение в рамках школьного курса. Ряд известных задач перешел из других сборников для школьников, но они составляют меньшую часть от общего числа задач.

Книга разбита на тринадцать глав, которые в свою очередь разбиты на параграфы. В каждом параграфе, насколько это соответствует логике развития темы, за задачами сравнительно элементарными следуют более трудные и чаще всего более интересные. Наибольшую пользу учащимся принесут задачи, которые вызывают живой интерес, побуждают задуматься над физическим явлением, развивают способность самостоятельно мыслить, приучают быть готовым к нестандартной постановке вопроса, к нестандартному решению. В книге много таких задач. Надеемся, что в случае, когда некоторые из них окажутся трудными для учащегося, это не лишит его веры в свои силы, а лишь побудит к более глубокому изучению физики. Такие задачи часто помечены звездочкой и иногда снабжены очень кратким решением. Для лучшего понимания условия многих задач иллюстрируются рисунками, которые иногда сгруппированы на отдельных страницах.

Книга предназначена для слушателей подготовительных отделений вузов, для учащихся специализированных физико-математических школ и классов, для школьников, которым в будущем предстоит заниматься физикой в вузе и позже, возможно, профессионально.

Авторы благодарны Е. И. Бутикову, А. А. Быкову, А. К. Казанскому и А. Е. Кучме за многочисленные полезные замечания по рукописи книги.

*О. Я. Савченко*

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

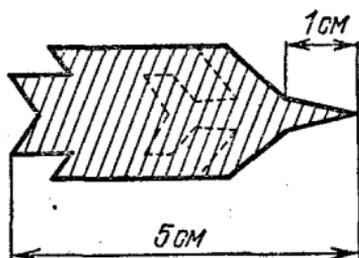
Наименование	Обозначение	Числовое значение
Скорость света в вакууме	$c$	$2,99 \cdot 10^8$ м/с
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $= 12,56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Планка	$h$	$6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,10 \cdot 10^{-31}$ кг
протона	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
нейтрона	$m_n$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e$	1836,15
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e$	$1,75 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Магнитный момент электрона	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомная единицы массы	1 а. е. м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	96 484,56 Кл/моль
Газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/(моль · К)
Нуль шкалы Цельсия	$T_0$	273,15 К
Нормальное давление	$p_0$	$1,01 \cdot 10^5$ Па
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_m = RT_0/p_0$	$22,41 \cdot 10^{-3}$ м <sup>3</sup> /моль
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана—Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> · К <sup>4</sup> )
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Нормальное ускорение свободного падения	$g_n$	9,80 м/с <sup>2</sup>

# ЗАДАЧИ

## Глава 1. КИНЕМАТИКА

### § 1.1. Движение с постоянной скоростью

1.1. На рисунке приведена «смазанная фотография» летящего реактивного самолета. Действительная длина самолета 30 м, длина носовой части 10 м. Определите по этой «фотографии» скорость самолета. Время выдержки затвора 0,1 с. Форма самолета изображена на рисунке штриховой линией.



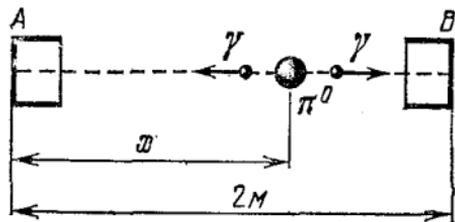
К задаче 1.1.

1.2. Радиолокатор определяет координаты самолета, измеряя угол  $\alpha$  между направлением на Северный полюс и направлением на самолет и расстоянием  $R$  от радиолокатора до самолета. Когда оператор радиолокатора обнаружил самолет, его положение определялось координатами  $\alpha_1 = 44^\circ$ ,  $R_1 = 100$  км. Через 5 с он снова измерил его координаты. Оказалось, что  $\alpha_2 = 46^\circ$ ,  $R_2 = 100$  км. В декартовой системе координат с осью  $y$ , направленной на север, и с радиолокатором в начале координат изобразите положение самолета в оба момента времени, определите модуль и направление его скорости. Угол отсчитывать по часовой стрелке.

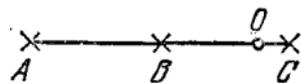
1.3. Через открытое окно в комнату влетел жук. Расстояние от жука до потолка менялось со скоростью 1 м/с, до задней стены комнаты — 2 м/с, до боковой стены — 2 м/с. Через 1 с жук ткнулся в угол между потолком и боковой стеной комнаты. Определите скорость полета жука

и место в окне, через которое жук влетел в комнату. Высота комнаты 2,5 м, ширина 4 м, длина 4 м.

1.4. Счетчики  $A$  и  $B$  (регистрирующие момент прихода  $\gamma$ -кванта) расположены на расстоянии 2 м друг от друга. Между ними произошел распад частицы  $\pi^0$ -мезона на два  $\gamma$ -кванта. В каком месте произошел этот распад, если счетчик  $A$  зафиксировал  $\gamma$ -квант на  $10^{-9}$  с позднее, чем счетчик  $B$ ? Скорость света  $3 \cdot 10^8$  м/с.



К задаче 1.4.

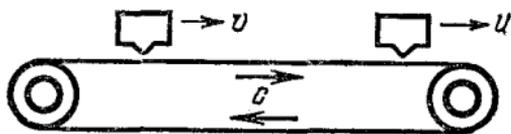


К задаче 1.5\*.

1.5\*. Три микрофона, расположенные на одной прямой в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , зарегистрировали в моменты времени  $t_A > t_B > t_C$  звук от взрыва, который произошел в точке  $O$ , лежащей на отрезке  $AC$ . Найдите  $AO$ , если  $AB = BC = L$ . Момент пуска часов не совпадает с моментом взрыва.

1.6. Спортсмены бегут колонной длины  $l$  с одинаковой скоростью  $v$ . Навстречу бежит тренер со скоростью  $u$  ( $u < v$ ). Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, бежит назад с той же скоростью  $v$ . Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

1.7. С подводной лодки, погружающейся равномерно, испускаются звуковые импульсы длительности  $T_0$ . Длительность приема отраженного от дна импульса  $T$ . Скорость звука в воде  $c$ . С какой скоростью  $v$  погружается подводная лодка?



К задаче 1.8.

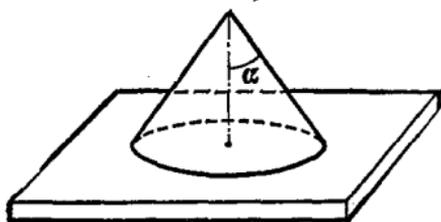
1.8. Лента транспортера имеет скорость  $c$ . Над лентой — автомат, выбрасывающий  $v$  шариков в единицу времени.

Шарики прилипают к ленте. Счетчик с фотоэлементом считает только шарики, прошедшие точно под ним. Сколько шариков сосчитает счетчик за единицу времени, если скорость автомата  $v$ , а счетчика  $u$ ?

1.9. а) Из взрывчатого вещества изготовлен стержень длины  $l$ . Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв

новых участков взрывчатого вещества) равна  $v$ , а скорость разлета продуктов взрыва  $u$  ( $v > u$ ). Как меняется со временем область, занятая продуктами взрыва? Сделайте рисунок.

б) Из взрывчатого вещества нужно изготовить такую тонкостенную коническую оболочку, чтобы при взрыве ее с вершины конуса продукты взрыва одновременно уда-



К задаче 1,96.

рили по горизонтальной плите. Какой угол  $\alpha$  между осью конуса и образующей нужно выбрать?

1.10\*. По прямому шоссе идет автобус. Вы можете бежать со скоростью в два раза меньшей, чем скорость автобуса. Вы заметили автобус в точке  $A$ . Из какой области около шоссе можно успеть на автобус?

1.11\*. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, покоящиеся на расстоянии  $l$  друг от друга на одной вертикали, зафиксировали приход звука от самолета с интервалом  $\tau$ . Скорость звука в воздухе  $c$ . Какова скорость самолета?

1.12. Два стержня пересекаются под углом  $2\alpha$  и движутся с равными скоростями  $v$  перпендикулярно самим себе\*). Какова скорость точки пересечения стержней?

1.13. Постройте по графику зависимости координаты от времени график зависимости скорости от времени.

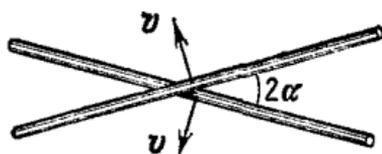
1.14. Как найти с помощью графика зависимости координаты от времени время и место соударения частиц, движущихся по одной прямой? Скорость первой частицы  $v$ , второй  $v/2$ . Первая в момент  $t = 0$  имела координату  $x = 0$ , вторая в момент времени  $\tau$  — координату  $x = a$ .

1.15. Постройте по графику зависимости скорости от времени график зависимости координаты от времени. Найдите в случаях б) и в) среднюю скорость за большое время.

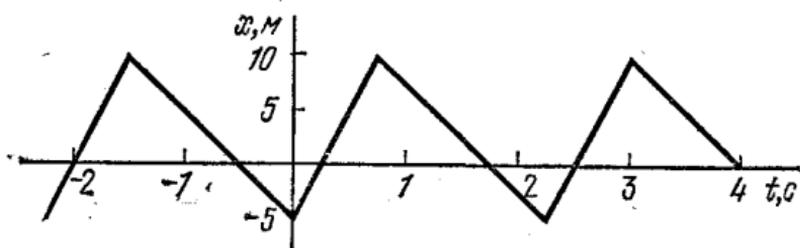
1.16. Частица движется в плоскости. По графикам зависимости проекций скорости  $v_x$  и  $v_y$  от времени построьте траекторию частицы, если  $x(0) = 2$  м,  $y(0) = 1$  м.

1.17. Движение луча по экрану осциллографа задается графиками зависимости координат  $x$  и  $y$  от времени. Какую линию опишет луч на экране при  $T = T_0$ ,  $T = T_0/3$ ,  $T =$

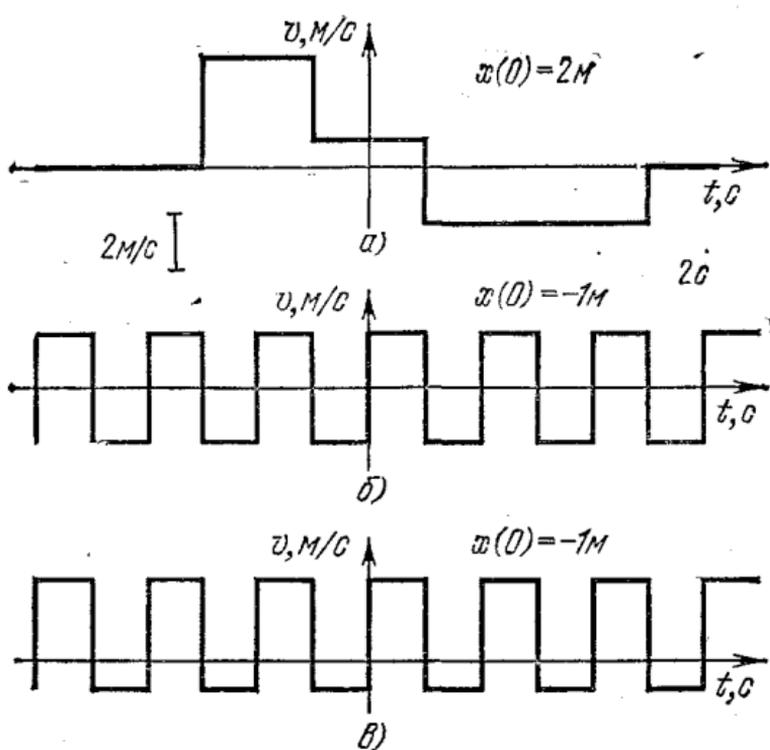
\*) Напоминаем, что рисунки к задачам иногда расположены на отдельных страницах.



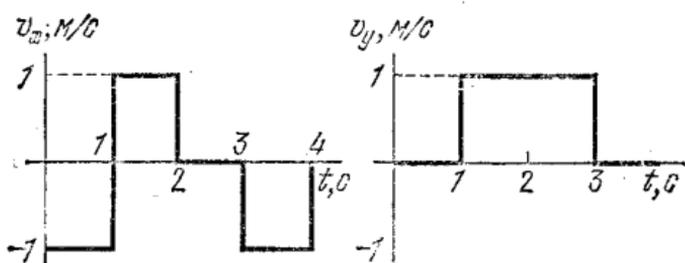
К задаче 1.12,



К задаче 1.13,

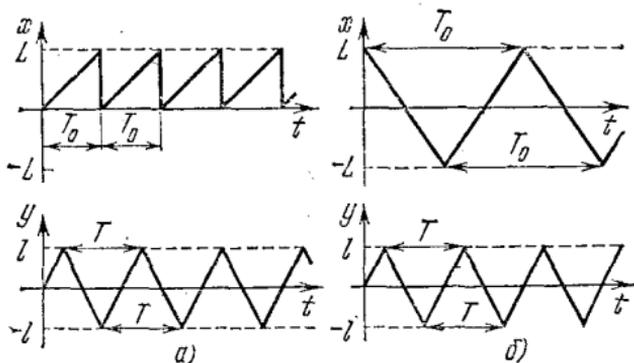


К задаче 1.15.



К задаче 1.16,

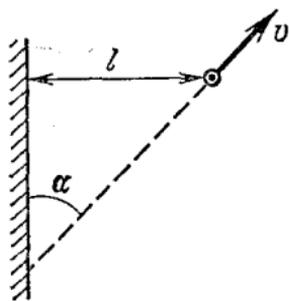
$= 3T_0$ ? В случае а) горизонтальные линии на экране почти не видны. Почему? При каком отношении  $T$  и  $T_0$  в случае б) линия будет замкнутой?



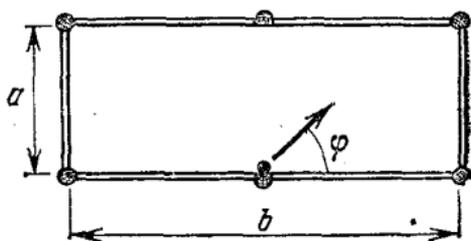
К задаче 1.17.

**1.18.** Автомобиль движется со скоростью  $v$  мимо длинной стены под углом  $\alpha$  к ней. В момент, когда расстояние до стены равно  $l$ , автомобиль подает короткий звуковой сигнал. Какое расстояние пройдет он до момента, когда шофер услышит эхо? Скорость звука в воздухе  $c$ .

**1.19.** При упругом ударе шара о гладкую неподвижную стенку угол падения шара равен углу отражения. На какой угол изменится направление скорости шара после двух ударов о стенки, угол между которыми равен  $\alpha$ ? Как полетит шар, если угол  $\alpha = \pi/2$ ? Движение происходит в плоскости, перпендикулярной стенкам.



К задаче 1.18.

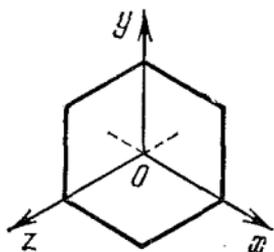


К задаче 1.20\*.

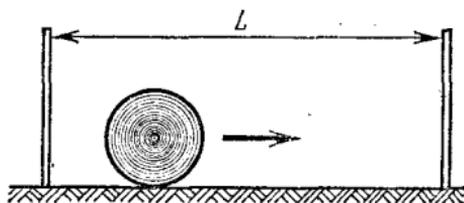
**1.20\*.** В бильярде со сторонами  $a$  и  $b$  пускают шар от середины стороны  $b$ . При каких углах  $\varphi$  он вернется в ту же точку борта, из которой начал движение?

**1.21.** Угловой отражатель, установленный на луноходе, представляет собой три взаимно перпендикулярных зеркала. Пусть введена система координат, показанная на

рисунке. Если на отражатель падает свет, вектор скорости которого  $c = (c_x; c_y; c_z)$ , то каким будет вектор скорости после отражения от зеркала, находящегося в плоскости  $yOz$ ? Каким будет вектор скорости после отражения от всех трех зеркал?



К задаче 1.21.



К задаче 1.22\*.

1.22\*. Стрелок пытается попасть в диск радиуса  $R$ , который движется между двумя стенками так быстро, что за ним нельзя уследить. Нарисуйте график зависимости вероятности попадания в диск от расстояния точки прицеливания до стенок. Выстрелы производятся на высоте  $R$  от пола перпендикулярно направлению движения диска. Где вероятность наименьшая? Наибольшая? Чему они равны? Разберите случаи:  $L > 4R$ ,  $4R > L > 2R$  ( $L$  — расстояние между стенками).

## § 1.2. Движение с переменной скоростью

2.1. На рисунке изображена траектория электрона, который дрейфует вдоль плоскости раздела областей с различными магнитными полями. Его траектория состоит из чередующихся полуокружностей радиусов  $R$ ,  $r$ . Скорость электрона постоянна по модулю и равна  $v$ . Найдите среднюю скорость электрона за большой промежуток времени.

2.2. Нарисуйте график зависимости координаты от времени для прямолинейного движения, удовлетворяющий одновременно двум условиям: а) средняя скорость за время от 2 до 6 с равна 5 м/с; б) максимальная скорость за это же время равна 15 м/с.

2.3. Две частицы в момент времени  $t = 0$  вышли из одной точки. Определите по графикам зависимости скорости от времени место и время новой встречи частиц. Частицы движутся по одной прямой.

2.4. Тело в течение времени  $\tau$  движется с постоянной скоростью  $v_0$ . Затем скорость его линейно нарастает со вре-

менем так, что в момент времени  $2\tau$  она равна  $2v_0$ . Определите путь, пройденный телом за время  $t > \tau$ .

2.5. Оказалось, что график зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела  $v_0$ , время движения  $t_0$ . Определите путь, пройденный телом.

2.6. Автобус движется в течение 20 с по прямой до остановки. Его начальная скорость 15 м/с, а проходит он расстояние 310 м. Докажите, что ускорение автобуса меняется по направлению.

2.7. Конькобежец проходит дистанцию  $L$  с постоянной скоростью, а затем тормозит с ускорением  $a$ . При какой скорости время движения до остановки наименьшее?

2.8. Мигрирующие рыбы, накопив в море запас жира, заходят в устья рек. В пресной воде они не питаются. Поэтому им важно добраться до нерестилищ в верховьях реки с наименьшими потерями массы. Расход жира на поддержание основного обмена за единицу времени составляет  $N$ , а добавочный расход  $bv^2$  тратится на движение со скоростью  $v$ . С какой скоростью  $v$  должны двигаться рыбы, чтобы затраты жира на пути до нерестилища были минимальны? Рыбы прекрасно осведомлены об этой скорости.

2.9. Из сферического аквариума радиуса  $R$ , наполовину заполненного водой, с каждой единицы поверхности испаряется в единицу времени объем жидкости  $q$ . Через какое время вся вода испарится?

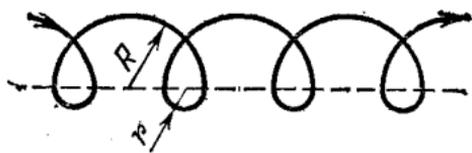
2.10\*. а) В коническом сосуде уровень воды поднимается с постоянной скоростью  $v_0$ . Как зависит от времени скорость поступления воды в сосуд через отверстие сечения  $s$ ? В нулевой момент времени сосуд пуст.

б) Струя масла, попадающая на поверхность воды, растекается круговым пятном толщины  $h$ . Как зависит от времени скорость движения границы пятна, если в единицу времени поступает объем масла  $q$ ? Начальный радиус пятна нулевой.

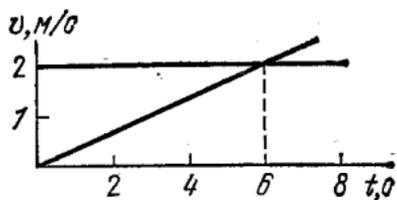
2.11. Мальчик надувает воздушный шарик. Когда его радиус проходил значение 10 см, скорость увеличения радиуса была 1 мм/с. Какой объем воздуха ежесекундно выдыхает мальчик?

2.12. По графику зависимости ускорения от времени установите скорость в моменты времени 4 и 15 с, если в момент времени 1 с скорость равна 3 м/с.

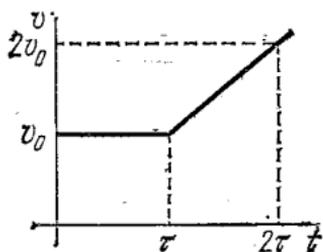
2.13. Ускорение ракетной тележки от старта до остановки первые 6 с составляло  $100 \text{ м/с}^2$ , затем 7 с она двига-



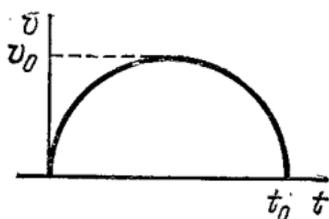
К задаче 2.1,



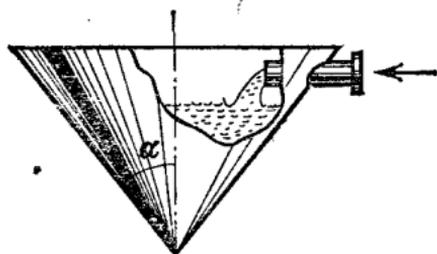
К задаче 2.3,



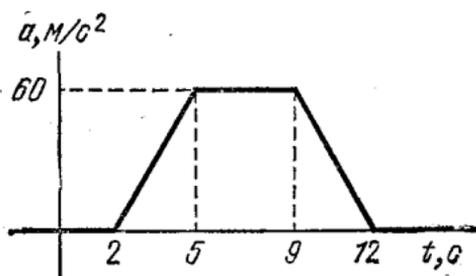
К задаче 2.4,



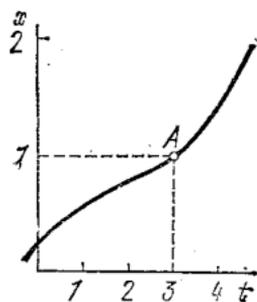
К задаче 2.5,



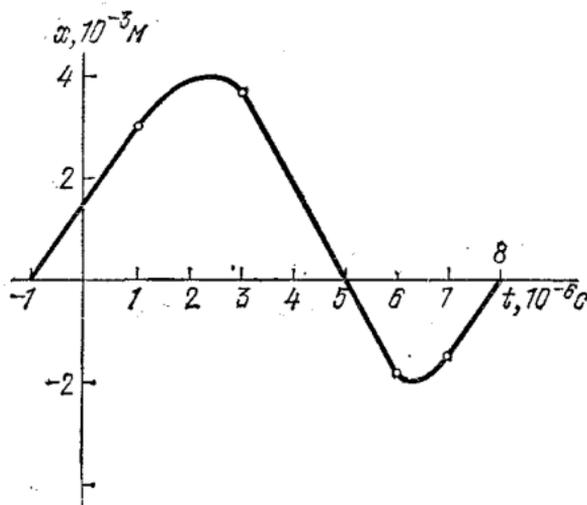
К задаче 2.10\*а,



К задаче 2.12,



К задаче 2.14,



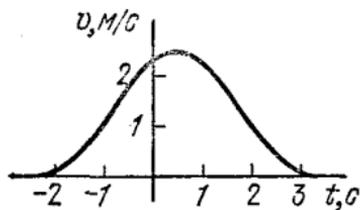
К задаче 2.15,

лась без ускорения, а последние 3 с, имея отрицательное ускорение  $-200 \text{ м/с}^2$ . Постройте в подходящем масштабе графики зависимости от времени ускорения, скорости и координаты. Какого наибольшего значения достигала скорость тележки? На каком отрезке пути происходило торможение? Какое полное расстояние прошла тележка? Как по графику зависимости от времени ускорения проверить, действительно ли тележка остановилась?

**2.14.** У двух частиц графики зависимости координаты от времени оказались одинаковыми, но для первой частицы одно деление оси  $t$  отвечает 4 с, а для второй 1 с. Как относятся скорости и ускорения частиц для точки  $A$  графика?

**2.15.** Часть графика зависимости координаты от времени ниже оси  $t$  подобна части графика выше этой оси. Постройте графики зависимости от времени скорости и ускорения. Сравните ускорения при наибольшем и наименьшем значении  $x$ .

**2.16.** По графику зависимости скорости от времени постройте графики зависимости от времени координаты и ускорения, если  $x(0) = 0$ .



К задаче 2.16.



К задаче 2.17.

**2.17.** Длина шкалы спидометра 15 см; он измеряет скорость от 0 до 150 км/ч. Найдите скорость указателя спидометра, если автомобиль движется с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ .

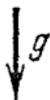
**2.18\*.** Тело начинает движение из точки  $A$ . Сначала тело движется в течение времени  $\tau$  равноускоренно, затем с тем же по модулю ускорением равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернется в точку  $A$ ?

**2.19\*.** Время отправления электрички 12-00. На ваших часах 12-00, но мимо вас уже начал проезжать предпоследний вагон. Он проезжал 10 с, а последний вагон проехал мимо вас за 8 с. Электричка отправилась вовремя и двигалась равноускоренно. На какое время отставали ваши часы?

## § 1.3. Движение в поле тяжести \*).

### Криволинейное движение

3.1. Вертикально вверх с интервалом времени  $\tau$  выброшены два шарика со скоростью  $v$  из одной и той же точки. Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?



3.2. а) Из верхней точки окружности по желобу, наклоненному под углом  $\varphi$  к вертикали, начинает скользить без трения шарик. За какое время он достигнет окружности, если ее диаметр  $D$ ?

б) Из точки  $A$  по различным наклонным спицам одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. На какой кривой будут находиться бусинки в момент времени  $t$ ?



3.3\*. Как должен быть направлен из точки  $A$  наклонный желоб, чтобы шарик соскользнул по нему до наклонной плоскости  $BB'$  за наименьшее время?

К задаче 3.1.

3.4. Свободно падающее тело пролетело точку  $A$  со скоростью  $v_A$ . С какой скоростью оно пролетит мимо точки  $B$ , находящейся ниже  $A$  на расстоянии  $h$ ?

3.5. Камень бросают со скоростью  $v$  под углом  $\varphi$  к горизонту. Через какое время скорость будет составлять угол  $\alpha$  с горизонтом?

3.6. Из орудия произведен выстрел под углом  $\varphi$  к горизонту. Начальная скорость снаряда  $v$ . Поверхность земли горизонтальна.

а) Найдите горизонтальную и вертикальную проекции скорости как функции времени.

б) Найдите координаты  $x$  и  $y$  как функции времени.

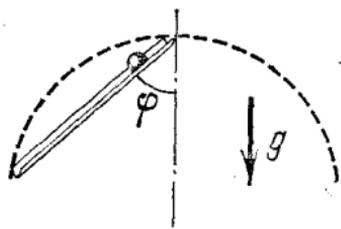
в) Найдите уравнение траектории, т. е. зависимость  $y$  от  $x$ .

г) Найдите время полета  $T$ , наибольшую высоту  $H$  и дальность полета  $L$  снаряда.

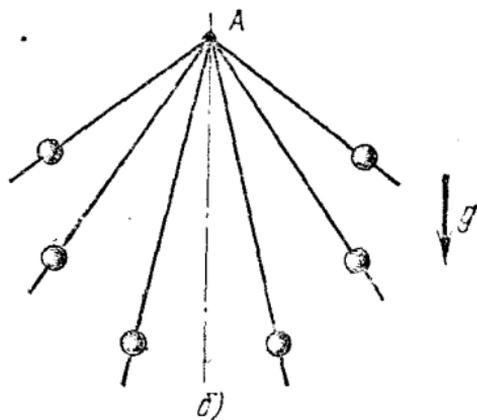
3.7. По наклонной плоскости со скоростью  $v$  пускают шарик. Какое расстояние по горизонтали он пройдет, прежде чем скатится с плоскости? Плоскость наклонена

---

\*) Если на рисунке к задаче указано ускорение свободного падения  $g$ , необходим учет поля тяжести,

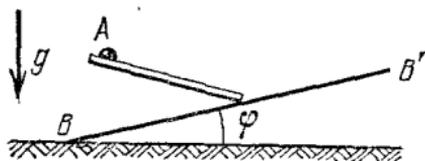


g)

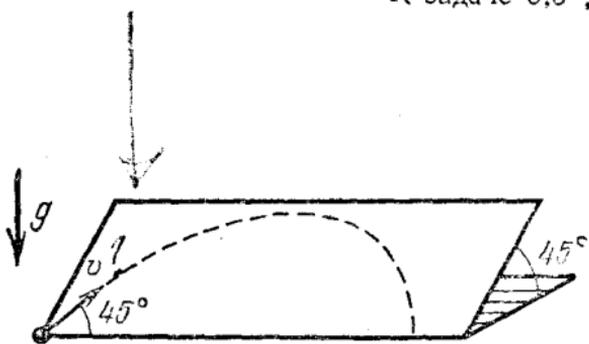


d)

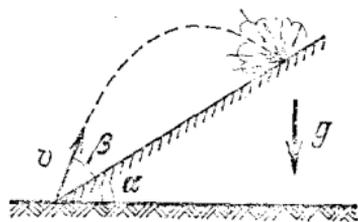
К задаче 3.2.



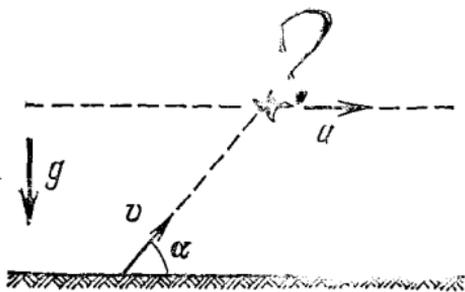
К задаче 3.3\*.



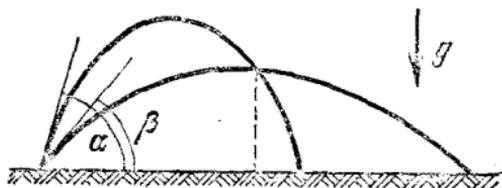
К задаче 3.7.



К задаче 3.8.



К задаче 3.10.



К задаче 3.11.

к горизонту под углом  $45^\circ$ . Вектор скорости образует угол  $45^\circ$  с горизонтальным краем плоскости. Трения нет.

**3.8.** Из миномета ведут стрельбу по объектам, расположенным на склоне горы. На каком расстоянии от миномета будут падать мины, если их начальная скорость  $v$ , угол наклона горы  $\alpha$  и угол стрельбы  $\beta$  по отношению к горизонту?

**3.9.** С какой скоростью в момент старта ракеты нужно выстрелить из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением  $a$ ? Расстояние пушки от места старта ракеты  $L$ , пушка стреляет под углом  $45^\circ$  к горизонту.

**3.10.** Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью  $u$ . В нее бросил камень неопытный «охотник», причем бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска направление скорости камня (угол  $\alpha$  к горизонту) было как раз на утку. Модуль начальной скорости камня равен  $v$ . На какой высоте летела утка, если камень все же попал в нее?

**3.11.** Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом  $\alpha$  и  $\beta$  к горизонту с одинаковой начальной скоростью  $v$ . На каком расстоянии по горизонтали струи пересекутся?

**3.12\*.** Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом  $45^\circ$  к горизонту вода с начальной скоростью  $10$  м/с. Площадь сечения отверстия шланга  $5$  см<sup>2</sup>. Определите массу струи, находящейся в воздухе.

**3.13\*.** Из орудия нужно попасть в точку с координатами  $x$  по горизонтали и  $y$  по вертикали. Начальная скорость снаряда  $v$ .

а) Найдите  $\operatorname{tg} \varphi$  — тангенс угла, образуемого стволом орудия с горизонтом.

б) Найдите границу области, куда может попасть снаряд.

в) При какой наименьшей скорости  $v$  снаряд может попасть в точку с координатами  $x, y$ ?

При решении а) воспользуйтесь тождеством  $1/\cos^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 \varphi + 1$ .

**3.14.** С одного и того же места с интервалом времени  $\tau$  брошены два тела с одной и той же начальной скоростью  $v$  под углом  $\varphi$  к горизонту. Каково движение первого тела относительно второго? Почему относительная скорость зависит только от  $\tau$ ?

**3.15.** По внутренней поверхности гладкого вертикального цилиндра радиуса  $R$  под углом  $\alpha$  к вертикали пускают

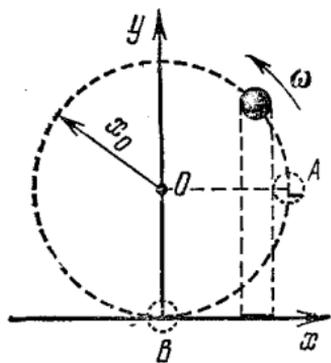
шарик. Какую начальную скорость ему надо сообщить, чтобы он вернулся в исходную точку?

3.16. Определите скорость и ускорение, которыми обладают точки земной поверхности на экваторе и в Ленинграде из-за участия Земли в суточном вращении. Радиус Земли принять равным 6400 км. Широта Ленинграда  $60^\circ$ .

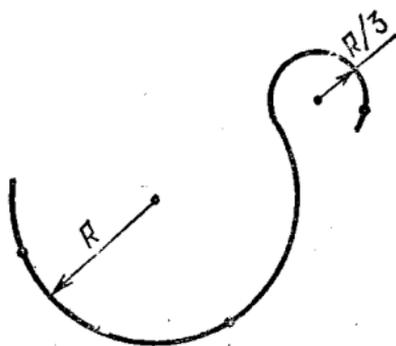
3.17. С какой скоростью должен лететь спутник, чтобы, все время падая на Землю с ускорением  $g$ , он двигался по окружности? Принять радиус Земли  $R = 6400$  км, а  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3.18. Частица движется по окружности радиуса  $r$  так, что угол поворота радиус-вектора равен  $\omega t$  в момент времени  $t$ . Докажите, что вектор скорости частицы равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , а модуль скорости  $v = \omega r$ . Исходя из предыдущего, найдите модуль и направление ускорения. Запишите выражение для ускорения  $a$  в векторном виде.

3.19. Вокруг точки  $O$  по окружности радиуса  $x_0$  движется с угловой скоростью  $\omega$  маленький шарик. Вдоль оси  $y$  шарик освещается параллельным пучком света, поэтому координата  $x$  тени шарика зависит от времени как  $x_0 \cos \omega t$ , если в момент  $t = 0$  шарик находился в точке  $A$ , или как  $x_0 \sin \omega t$ , если в момент времени  $t = 0$  шарик находился в точке  $B$ . Найдите в этих случаях зависимости мгновенной скорости и ускорения тени от времени.



К задаче 3.19.



К задаче 3.20.

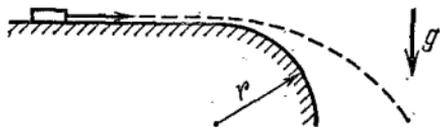
3.20. Тело движется с постоянной скоростью  $v$  по траектории, состоящей из двух дуг окружностей радиусов  $R$  и  $R/3$ , плавно соединенных. Постройте векторы ускорения в отмеченных точках траектории.

3.21. В момент времени, когда модуль скорости  $v = 10^6$  м/с, ускорение частицы  $a = 10^4$  м/с<sup>2</sup> и направлено

под углом  $30^\circ$  к вектору скорости. На сколько увеличится модуль скорости за время  $\Delta t = 10^{-2}$  с? На какой угол изменится направление скорости? Какова в этот момент угловая скорость вращения вектора скорости?

**3.22.** Тело движется по окружности радиуса  $r$  со скоростью, которая линейно увеличивается во времени:  $v = kt$ . Найдите зависимость от времени модуля полного ускорения тела.

**3.23.** Край горизонтального стола скруглен по полуокружности радиуса  $r$ . С какой наименьшей скоростью нужно пустить по столу малое тело, чтобы оно, достигнув скругления, сразу полетело по параболе?



К задаче 3.23.

**3.24\*.** Сферический резервуар, стоящий на земле, имеет радиус  $R$ . При какой наименьшей скорости на поверхности земли брошенный камень может перелететь резервуар, коснувшись его вершины?

**3.25.** Снаряд вылетает с начальной скоростью  $600$  м/с под углом  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  к горизонту. Определите радиусы кривизны траекторий снаряда в наивысшей и начальной точках.

**3.26.** Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиуса  $R$ . Полотно дороги составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью. Каково ускорение автомобиля, движущегося с постоянной по модулю скоростью  $u$ ?

## § 1.4. Преобразование Галилея

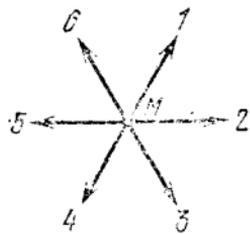
**4.1.** Начальные положения и векторы скоростей двух кораблей заданы на рисунке. Корабли движутся без ускорения. Как найти наименьшее расстояние между ними?

**4.2.** На рисунке изображены векторы скоростей шести зайцев, выпущенных старым Мазаем, в системе координат, неподвижной относительно Мазая. Попробуйте нарисовать векторы скоростей Мазая и остальных зайцев в системе координат, неподвижной относительно зайца 1.

**4.3.** Одна из частиц пылевого облака (частица  $A$ ) покоится, а все остальные разлетаются от нее в разные стороны со скоростями, пропорциональными расстояниям от частицы  $A$ . Какую картину движения обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с частицей  $B$ ?



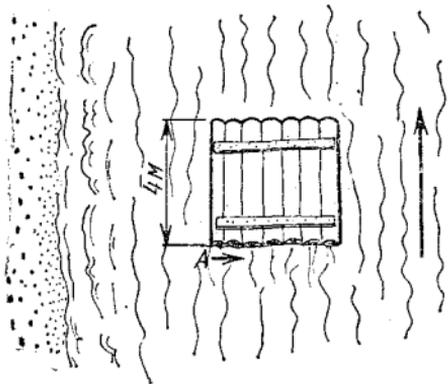
К задаче 4.1.



К задаче 4.2.

4.4. С угла  $A$  квадратного плота прыгнул пес и плывет вокруг плота в направлении, указанном короткой стрелкой. Нарисуйте траекторию движения пса относительно берега, если скорость пса относительно воды составляет  $\frac{4}{3}$  скорости течения.

4.5. а) Капли дождя из-за сопротивления воздуха падают с постоянной скоростью  $v$ , перпендикулярной поверхности земли. Как необходимо расположить цилиндрическое ведро, находящееся на движущейся со скоростью  $u$  платформе, чтобы капли не попадали на стенки?



К задаче 4.4.

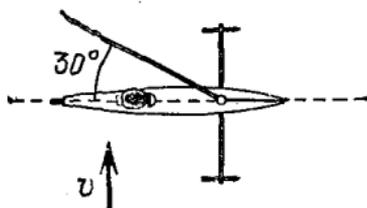
б) При скорости ветра  $10 \text{ м/с}$  капля дождя падает под углом  $30^\circ$  к вертикали. При какой скорости ветра капля будет падать под углом  $45^\circ$ ?

4.6. Буер представляет собой парусные сани. Он может двигаться лишь по линии, по которой направлены коньки. Ветер дует со скоростью  $v$ , перпендикулярной его движению. Парус же составляет угол  $30^\circ$  с направлением движения. Определите максимально возможную скорость буера.

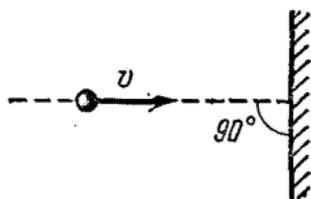
4.7. Какой будет длительность рейса самолета из Новосибирска в Москву и обратно, происходящего по прямой, если в течение всего полета дует ветер под углом  $\alpha$  к трассе со скоростью  $u$ ? Скорость самолета относительно воздуха  $v$ , длина трассы  $L$ . При каком направлении ветра длительность рейса максимальна?

4.8. При упругом ударе тела о неподвижную стенку скорость  $v$  меняется лишь по направлению. Определите, на какую величину изменится после удара скорость этого

тела, если стенка движется: а) со скоростью  $u$  навстречу телу; б) со скоростью  $w < v$  в направлении движения тела.



К задаче 4.6.



К задаче 4.8.

**4.9.** Тело налетает на стенку со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к ее нормали. Определите модуль скорости тела после упругого удара о стенку, если: а) стенка неподвижна; б) движется со скоростью  $w$  по своей нормали навстречу телу; в) движется со скоростью  $w$  под углом  $\beta$  к своей нормали навстречу телу.

**4.10.** Внутри сферы радиуса  $R$ , движущейся со скоростью  $u$ , находится шарик радиуса  $r$ , который в момент, когда он проходил через центр сферы, имел скорость  $v$  ( $u$  перпендикулярна  $v$ ). Масса сферы много больше массы шарика. Определите, с какой частотой шарик ударяется о стенку сферы, если считать удар абсолютно упругим.

**4.11.** Тело отпускают в поле тяжести на высоте  $h$  от плиты, которая движется вертикально вверх со скоростью  $u$ . Определите время между последовательными ударами тела о плиту. Удары абсолютно упругие.

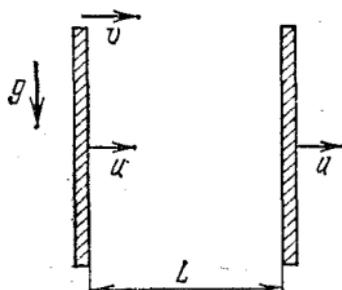
**4.12.** Тело влетает горизонтально со скоростью  $v$  в пространство между двумя вертикальными плоскостями, которые движутся со скоростью  $u$ . Определите скорость тела после  $n$ -го удара о переднюю стенку. Расстояние между стенками  $L$ . Удары абсолютно упругие.

**4.13.** Шестеренка радиуса  $R$  помещена между двумя параллельными зубчатыми рейками. Рейки движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  навстречу друг другу. Сколько оборотов делает шестеренка в единицу времени?

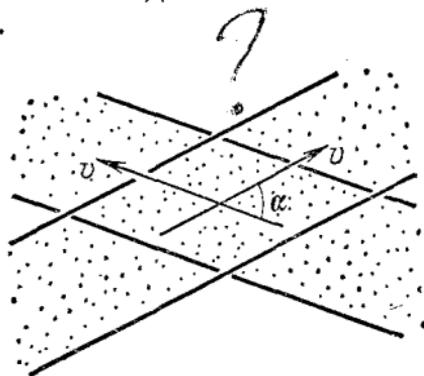
**4.14.** Ядро, летящее со скоростью  $v$ , распадается на два одинаковых осколка. Определите максимально возможный угол  $\alpha$  между вектором скорости одного из осколков и вектором  $v$ , если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость  $u < v$ .

**4.15\*.** Имеется пучок одинаковых ядер, движущихся параллельно со скоростью  $v$ . Ядра в пучке самопроизвольно делятся на два одинаковых осколка. Скорость оскол-

ков, движущихся в направлении пучка, равна  $3v$ . Найдите скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку. Найдите зависимость модуля скорости осколков от угла между направлением движения осколков и направлением скорости ядер.



К задаче 4.12.



К задаче 4.16.

**4.16.** Два пучка частиц, движущихся с одинаковой по модулю скоростью  $v$ , пересекаются под углом  $\alpha$ . Соударения происходят в ограниченной области. Перейдем, однако, в систему отсчета, где скорости частиц равны по модулю и противоположны. Кажется бы, теперь область пересечения — весь объем пучков, и поэтому число соударений в единицу времени должно быть больше. Объясните получившееся противоречие.

**4.17.** Идет «вертикальный» дождь. Скорость капель  $u$ . По асфальту со скоростью  $v$  скользит мяч. Во сколько раз на него попадает больше капель за секунду, чем на такой же неподвижный мяч? Изменится ли ответ, если мяч не круглый?

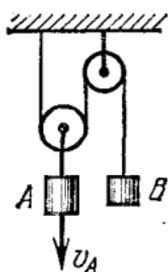
**4.18\*.** Мальчик, который может плавать со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки, хочет ее переплыть так, чтобы его снесло вниз по течению как можно меньше. Под каким углом к берегу он должен плыть? На какое расстояние его снесет, если ширина реки 200 м?

## § 1.5. Движение со связями

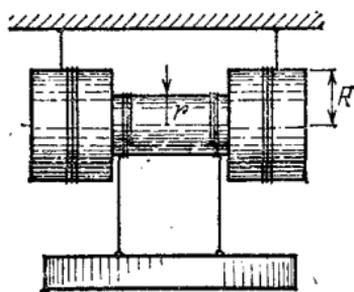
**5.1.** Скорость груза  $A$  равна  $v_A$ . Чему равна скорость груза  $B$ ?

**5.2.** Угловая скорость ворота  $\omega$ , радиус внутреннего цилиндра  $r$ , а внешних  $R$ . Каковы скорости оси ворота и груза относительно земли?

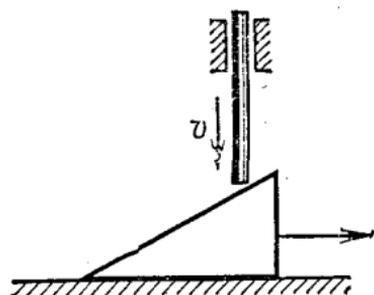
5.3. Клин образует с горизонтальной опорой угол  $30^\circ$ . Его «выталкивает» вертикальный стержень, опускающийся со скоростью  $v$ . Какова скорость клина?



К задаче 5.1,



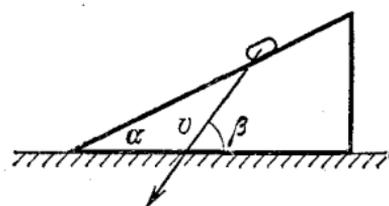
К задаче 5.2,



К задаче 5.3,

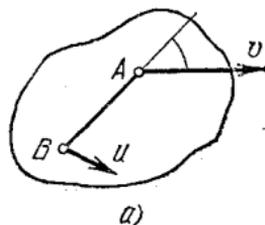
5.4. На клине с углом  $\alpha$  лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

5.5. Вектор скорости тела, соскальзывающего с клина, изображен на рисунке. Графическим построением найдите скорость клина.

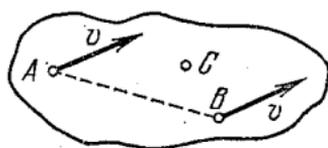


К задаче 5.5.

5.6. Плоское тело вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Координаты начального положения точек  $A$  и  $B$  этого тела  $(-1; 2)$  и  $(3; 1)$ , а конечного  $(-3; 1)$  и  $(-2; -3)$ . Найдите координаты оси вращения графически



а)



б)

К задаче 5.7,

5.7. а) Скорость точки  $A$  твердого тела по модулю равна  $v$  и образует угол  $45^\circ$  с направлением прямой  $AB$ . Скорость точки  $B$  этого тела по модулю равна  $u$ . Определите проекцию скорости точки  $B$  на направление  $AB$ .

б) Скорости точек  $A$  и  $B$  твердого тела равны  $v$ . Модуль скорости точки  $C$ , находящейся в плоскости прямой  $AB$  и вектора  $v$ , равен  $u$ . Найдите проекцию скорости точки  $C$  на ось, перпендикулярную указанной плоскости.

5.8. а) Постройте траектории точек колеса, катящегося без проскальзывания по рельсу. Рассмотрите случаи, когда точки находятся от оси колеса на расстоянии:  $\rho > R$ ,  $\rho = R$ ,  $\rho < R$ .

б) Найдите ускорения этих точек. Ось колеса движется с постоянной скоростью  $v$ .

в) Для точки, находящейся на расстоянии  $\rho \neq R$  от оси колеса, найдите радиусы кривизны траектории в высшем и низшем положениях.

5.9\*. Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Нить тянут со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите скорость оси и угловую скорость вращения катушки. При каких углах  $\alpha$  ось движется вправо? Влево? Нить так длинна, что  $\alpha$  не меняется при движении.

5.10. На рисунке изображена планетарная зубчатая передача. Какое число оборотов вокруг своей оси совершит шестеренка  $A$ , если зубчатое колесо совершит  $n_1$  оборотов, а центральная шестерня  $n_2$  оборотов? Внутренний радиус зубчатого колеса  $R$ , центральной шестерни  $r$ .

5.11. По внутренней поверхности закрепленного цилиндра радиуса  $2r$  катится без проскальзывания колесо радиуса  $r$ . Найдите траекторию точки обода колеса.

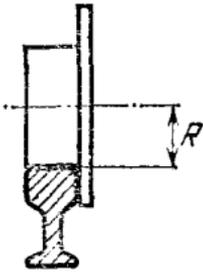
5.12. а) Луна обращена к Земле постоянно одной стороной. Сколько оборотов совершит она вокруг своей оси за время полного оборота вокруг Земли?

б) На сколько в среднем звездные сутки короче солнечных? Земля обходит Солнце за 365,25 солнечных суток.

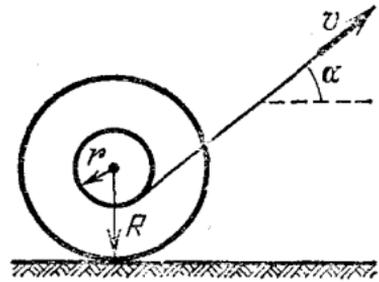
5.13. Бусинка может двигаться по окружности радиуса  $R$ , подталкиваемая спицей, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ . Ось вращения спицы проходит через точку  $O$  окружности. Каково ускорение бусинки?

5.14. Веревка, привязанная к лодке, переброшена через столб. Лодка движется со скоростью  $v$ , образуя в некоторый момент времени угол  $\alpha$  с веревкой. С какой скоростью нужно тянуть в этот момент времени свободный конец веревки, чтобы она не провисала?

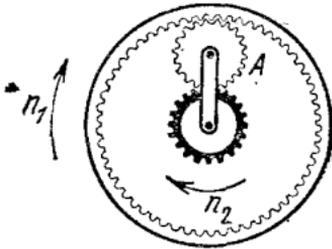
5.15. Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной  $a$ . Они начинают двигаться одновременно с постоянной по модулю скоростью  $v$  каждая по направлению



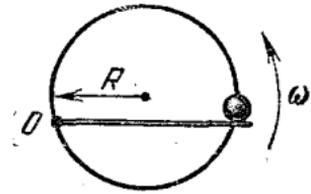
К задаче 5.8.



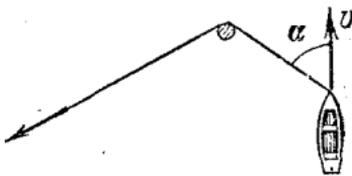
К задаче 5.9\*.



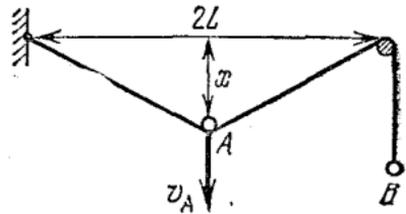
К задаче 5.10.



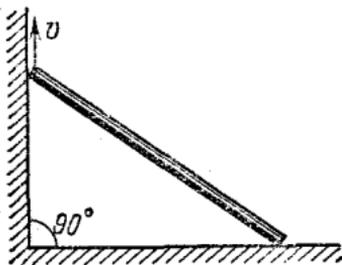
К задаче 5.13.



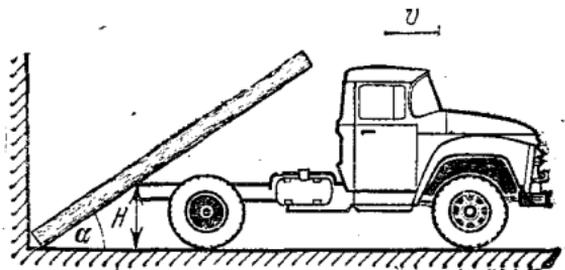
К задаче 5.14.



К задаче 5.16.



К задаче 5.17.



К задаче 5.18.

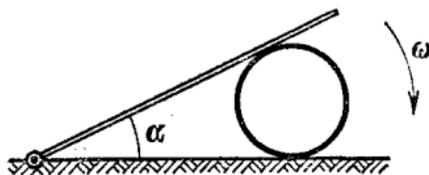
к своей соседке по часовой стрелке. Где встретятся черепахи и через какое время?

5.16. Постройте примерный график зависимости скорости точки  $B$  от времени, если скорость  $v_A$  точки  $A$  постоянна. Найдите формулу этой зависимости, если  $x(0) = 0$ .

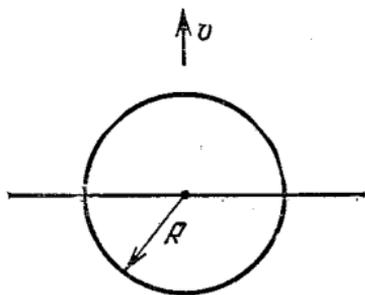
5.17. Стержень опирается своими концами о стороны прямого угла. Верхний его конец поднимают со скоростью  $v$ . Найдите, как зависит от времени скорость второго конца. За начало отсчета времени принять момент, когда верхний конец находится в вершине угла. Длина стержня  $L$ .

5.18. Бревно нижним концом упирается в угол между стеной и землей и касается дна грузовика на высоте  $H$  от земли. Найдите угловую скорость бревна в зависимости от угла  $\alpha$  с горизонталью, если грузовик отъезжает со скоростью  $v$ .

5.19. Стержень вращают с угловой скоростью  $\omega$ . Проскальзывания между цилиндром и горизонтальной плоскостью нет. Найдите угловую скорость цилиндра в зависимости от угла  $\alpha$ .



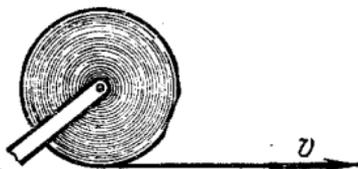
К задаче 5.19.



К задаче 5.20.

5.20. Окружность движется с постоянной скоростью  $v$  перпендикулярно неподвижной прямой. В начальный момент времени центр окружности находился на этой прямой. Найдите зависимость от времени скорости перемещения точек пересечения окружности с прямой.

5.21. Рулон бумаги раскручивается так, что скорость конца бумажной ленты постоянна и равна  $v$ . В начальный момент радиус рулона  $R$ . Какова угловая скорость рулона спустя время  $t$ ? Толщина бумаги  $d$ .

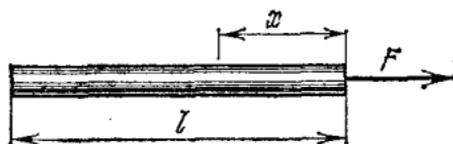


К задаче 5.21.

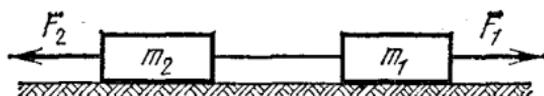
## § 2.1. Законы Ньютона

**1.1.** По достоверным сведениям, однажды барон Мюнхгаузен, увязнув в болоте, вытащил сам себя за волосы. Какие законы физики сумел нарушить барон?

**1.2.** Какая сила действует в сечении однородного стержня длины  $l$  на расстоянии  $x$  от конца, к которому приложена сила  $F$ , направленная вдоль стержня?



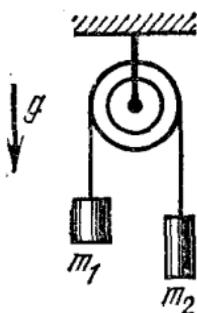
К задаче 1.2.



К задаче 1.3.

**1.3.** Два тела масс  $m_1$  и  $m_2$  связаны нитью, выдерживающей натяжение  $T$ . К телам приложены силы  $F_1 = at$  и  $F_2 = 2at$  ( $a$  — постоянный коэффициент,  $t$  — время). Определите, в какой момент времени нить порвется.

**1.4.** Найдите ускорения грузов и натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке. Блок и нити невесомы. Трения нет.



К задаче 1.4.



К задаче 1.5.

**1.5.** Маляр массы 72 кг работает в подвесном кресле. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что его сила давления на кресло уменьшилась до 400 Н. Масса кресла 12 кг. Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Чему равно ускорение маляра и кресла? Чему равна полная сила, действующая на блок?

1.6. Вертикально стартующая ракета развивает силу тяги  $F$  в течение времени  $\tau$ , затем двигатель выключается. Определите, через какое время после старта ракета вернется на Землю. Масса ракеты  $m$ , ее изменением пренебrecь. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебrecь.

1.7\*. Реактивный самолет массы  $m$ , развивающий силу тяги  $F$ , движется от места старта по прямой, направленной под углом  $\alpha$  к горизонту. На каком расстоянии от места старта будет находиться самолет через время  $\tau$  после старта? Изменением массы самолета и сопротивлением воздуха пренебrecь.

1.8. Три одинаковых шарика связаны одинаковыми невесомыми пружинами и подвешены на нити. Нить пережигают. Найдите ускорения шариков в момент пережигания нити.

1.9. Нарисуйте график силы трения, действующей на тело со стороны горизонтальной плоскости, в зависимости от горизонтальной силы, приложенной к телу.

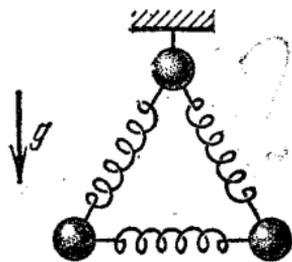
1.10. На горизонтальной доске лежит брусок массы  $m$ . Один из концов доски медленно поднимается.

Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски  $\alpha$ . Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ , ускорение свободного падения  $g$ .

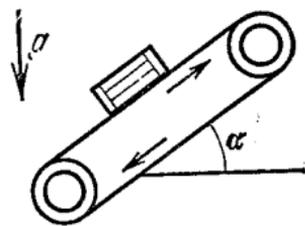
1.11. Ленточный подъемник наклонен на угол  $\alpha$  по отношению к горизонту. Коэффициент трения между ящиком и лентой  $\mu$ . При каком максимальном ускорении ленты поднимаемый ящик не будет скользить по ленте подъемника? Лента подъемника не прогибается.

1.12. На тело массы  $m$ , лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила  $F$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Сила приложена в центре масс, коэффициент трения равен  $\mu$ . Найдите ускорение тела, если оно не отрывается от плоскости.

1.13\*. По деревянным сходням, образующим угол  $\alpha$  с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни  $\mu$ . Под каким углом  $\beta$  к горизонту



К задаче 1.8.



К задаче 1.11.

следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием втаскивать ящик?

**1.14.** Определите ускорение цилиндра, скользящего по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором  $\alpha$ . Ребро двугранного угла наклонено под углом  $\beta$  к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба  $\mu$ .

**1.15.** Определите силу, действующую на стенку со стороны клина, при соскальзывании с него груза массы  $m$ . Угол при основании клина  $\alpha$ . Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина  $\mu$ . Трения между клином и полом нет.

**1.16.** На доске массы  $M$ , находящейся на гладкой горизонтальной плоскости, лежит тело массы  $m$ . Коэффициент трения между телом и доской  $\mu$ .

а) Какую силу надо приложить к доске, чтобы тело соскользнуло с нее? За какое время тело соскользнет, если к доске приложена сила  $F_0$ , а длина доски  $l$ ?

б) С какими ускорениями движутся тела, если сила  $F_0$  действует на тело массы  $m$ ?

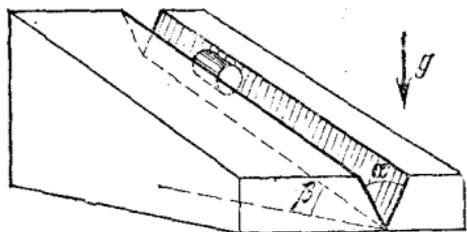
**1.17.** На гладком горизонтальном столе расположена система грузов, изображенная на рисунке. Коэффициент трения между грузами  $M$  и  $m$  равен  $\mu$ . Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой  $F$ , как указано на рисунке. Найдите ускорения всех грузов системы.

**1.18.** Невесомая нить, перекинута через блок с неподвижной осью, пропущена через щель. При движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения  $F$ . На концах нити подвешены грузы, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ . Определите ускорения грузов.

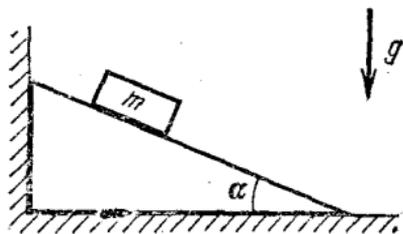
**1.19\*.** Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле, равна  $M$ , выталкивающая сила  $F$ , коэффициент трения каната о землю  $\mu$ . Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара  $v$  относительно воздуха:  $F_{\text{сопр}} = \alpha v$ . Найдите скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью  $u$ .

**1.20.** Сила трения капльи дождя о воздух пропорциональна квадрату скорости и квадрату радиуса:  $F = \alpha R^2 v^2$ . Какие капли, крупные или мелкие, падают на землю с большей скоростью?

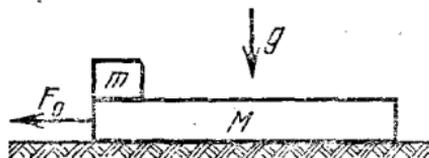
**1.21\*.** Модели корабля массы 0,5 кг сообщили скорость 10 м/с. При дальнейшем движении модели на нее действует



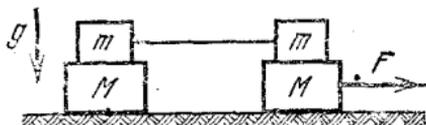
К задаче 1.14.



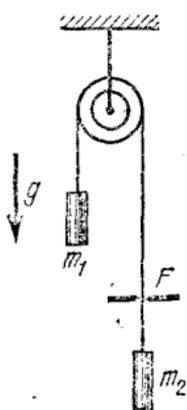
К задаче 1.15.



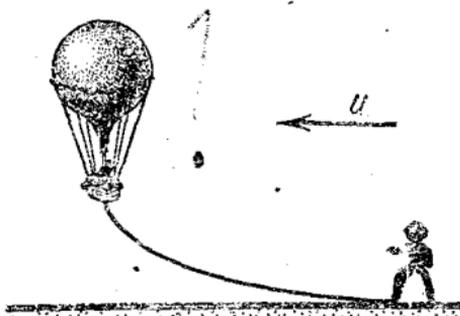
К задаче 1.16а.



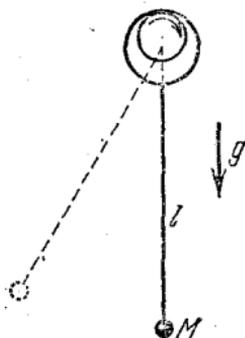
К задаче 1.17.



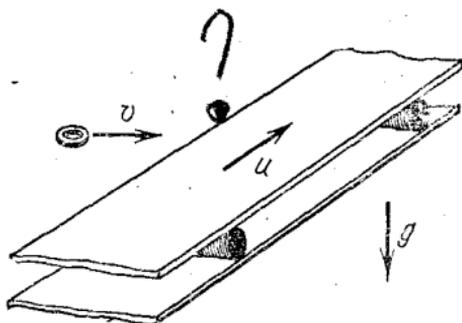
К задаче 1.18.



К задаче 1.19\*.



К задаче 1.23.



К задаче 1.24.

сила сопротивления, пропорциональная скорости:  $F = kv$  ( $k = 0,5 \text{ кг/с}$ ).

а) Найдите путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое.

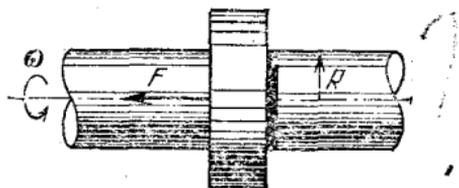
б) Найдите путь, пройденный моделью до остановки.

1.22\*. Объясните, почему звучит скрипичная струна при равномерном движении смычка. Учтите зависимость коэффициента трения от относительной скорости поверхностей.

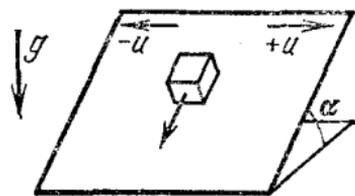
1.23. Маятник представляет собой легкий стержень длины  $l$  с грузом на конце. К другому концу прикреплена легкая цилиндрическая втулка с внутренним радиусом  $R$ , надетая на вращающуюся горизонтальную ось. Коэффициент трения между втулкой и осью  $\mu$ . Определите угол отклонения стержня от вертикали в равновесии.

1.24. Лента транспортера движется со скоростью  $u$ . На ленту влетает шайба, начальная скорость  $v$  которой перпендикулярна границе ленты. Найдите минимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другой стороны. Коэффициент трения между шайбой и лентой  $\mu$ , лента горизонтальна.

1.25\*. Кольцо надето на цилиндр радиуса  $R$ . Оно может перемещаться только вдоль цилиндра. Определите установившуюся скорость кольца под действием силы  $F$ , приложенной к кольцу вдоль цилиндра, если цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Максимальная сила трения кольца о цилиндр  $F_0 > F$ .



К задаче 1.25\*.



К задаче 1.26\*.

1.26\*. Определите установившуюся скорость движения тела, находящегося на наклонной плоскости, которая с большой частотой меняет скорость с  $-u$  на  $+u$ . Коэффициент трения  $\mu > \text{tg } \alpha$ , плоскость наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту.

1.27\*. На наклонной плоскости, для которой  $\text{tg } \alpha = \mu$ , лежит монета. Монете сообщили в направлении, перпенди-

кулярном склону, скорость  $v$ . Найдите установившуюся скорость монеты.

1.28\*. На крыше с углом наклона  $\varphi$  лежит свинцовый лист. Коэффициент трения свинца о крышу  $\mu > \operatorname{tg} \varphi$ . Коэффициент линейного расширения свинца  $\alpha$ . Длина листа при минимальной температуре  $t_1$  равна  $l$ . Считая, что температура в течение суток повышается, достигая наивысшего значения  $t_2$ , а потом понижается до  $t_1$ , найдите точку, неподвижную как при нагревании листа, так и при его остывании. На какое расстояние сползет лист за  $N$  суток устойчивой погоды?

1.29\*. Через сколько оборотов скорость тела, движущегося внутри сферической полости, уменьшится в  $e$  раз? Коэффициент трения между поверхностью и телом  $\mu$ . Влиянием силы тяжести на движение тела пренебречь.

1.30. Между двумя одинаковыми брусками масс  $M$  вставлен клин массы  $m$  с углом  $\alpha$ . Определите ускорения тел. Трения нет.

1.31. В сферическую полость положили гантель (два шарика масс  $m$ , соединенные невесомым стержнем) так, как это показано на рисунке.

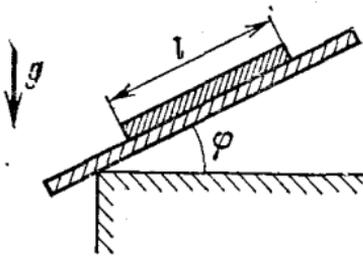
а) Определите силы давления шариков гантели на сферу в момент, когда гантель отпустили. Угол наклона стержня к горизонту  $45^\circ$ . Радиус шариков гантели много меньше радиуса сферы.

б\*) Как зависят силы давления на сферу от угла поворота гантели?

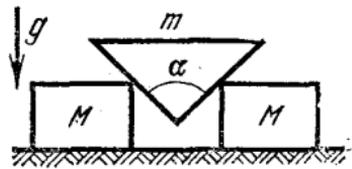
1.32\*. К концу нити, прикрепленной к стене и огибающей ролик, укрепленный на бруске массы  $M$ , подвешен груз. Брусек может скользить по горизонтальной плоскости без трения. В начальный момент груз отводят на угол  $\alpha$  от вертикали и отпускают. Определите ускорение бруска, если угол, образованный нитью с вертикалью, не меняется при движении системы. Чему равна масса груза?

1.33\*. Колесо радиуса  $R$  может свободно вращаться вокруг оси. К боковой плоскости колеса на расстоянии  $h$  от оси вращения прижимаются приводные ремни, движущиеся со скоростью  $v$ . Определите установившуюся угловую скорость колеса.

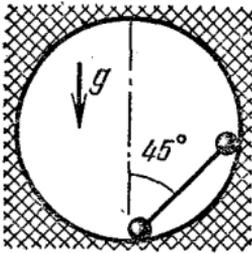
1.34. На нити длины  $l$  вращается груз массы  $M$  с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите натяжение нити. Силой тяжести пренебречь. Нить замените однородным стержнем массы  $m$ . Найдите натяжение стержня на расстоянии  $x$  от оси вращения.



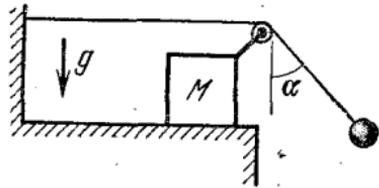
К задаче 1.28\*.



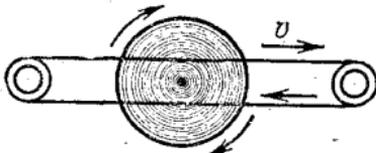
К задаче 1.30.



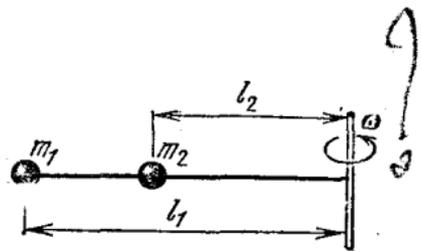
К задаче 1.31.



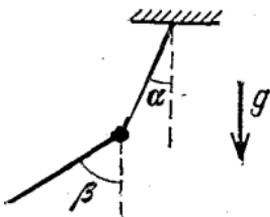
К задаче 1.32\*.



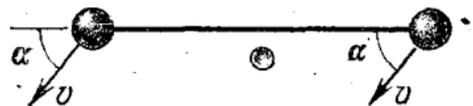
К задаче 1.33\*.



К задаче 1.35.



К задаче 1.36.



К задаче 1.37.

1.35. Две массы  $m_1$  и  $m_2$  вращаются с угловой скоростью  $\omega$ . Расстояния от них до оси вращения  $l_1$  и  $l_2$ . Определите натяжения нитей.

1.36. Двойной маятник вращается вокруг вертикальной оси так, что обе нити лежат в одной плоскости и составляют с вертикалью постоянные углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Длины нитей одинаковы и равны  $l$ . Найдите угловую скорость вращения маятника.

1.37. Два одинаковых шарика, связанные нитью длины  $l$ , движутся с одинаковыми скоростями  $v$  по горизонтальному столу. Центр нити налетает на гвоздь. Чему равно натяжение нити в момент соприкосновения нити с гвоздем в случае, если скорости шаров направлены под углом  $\alpha$  к нити?

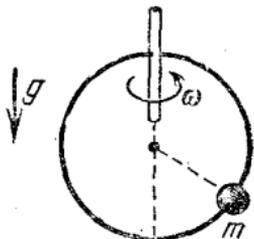
1.38. На гладкое проволочное кольцо радиуса  $R$  надет маленький шарик массы  $m$ . Кольцо вместе с шариком вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через диаметр кольца, с угловой скоростью  $\omega$ . Где находится шарик?

1.39\*. Тонкое резиновое кольцо массы  $m$  и радиуса  $R_0$  раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega$ . Найдите новый радиус кольца, если жесткость резины  $k$ .

1.40. Тело массы  $m$  находится на горизонтальном диске на расстоянии  $R$  от оси. Диск начинает раскручиваться с линейно возрастающей со временем угловой скоростью  $\omega = \epsilon t$ . При какой угловой скорости тело начнет проскальзывать, если коэффициент трения между телом и диском равен  $\mu$ ?

1.41. Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке, наоборот, проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже?

1.42. С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая круг радиуса  $R$ , если коэффициент трения резины о почву равен  $\mu$ ? На какой угол от вертикали он должен при этом отклониться? Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения мотоциклиста по наклонному треку с углом наклона  $\alpha$  по сравнению с максимально допустимой



К задаче 1.38.

скоростью по горизонтальному треку при одинаковом радиусе закругления?

1.43\*. Каков должен быть коэффициент трения резины о внутреннюю поверхность конуса с углом у вершины  $2\alpha$ , чтобы мотоциклист мог двигаться по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega$ ?

1.44. На сферической поверхности радиуса  $R$  находится тело. Коэффициент трения тела о поверхность сферы  $\mu$ , угол между вертикалью и радиус-вектором тела  $\alpha$ . Какова максимальная угловая скорость вращения сферы, при которой тело удерживается на ее поверхности?

1.45\*. С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг своей оси горизонтально расположенный цилиндр, чтобы мелкие частицы внутри цилиндра не соскальзывали с его поверхности? Коэффициент трения между поверхностью цилиндра и частицами равен 1, внутренний радиус цилиндра  $R$ .

1.46. Шарик маятника массы  $m$  сообщили минимальную скорость, при которой он еще совершает вращение в вертикальной плоскости. Каково будет натяжение нити маятника при прохождении положения равновесия?

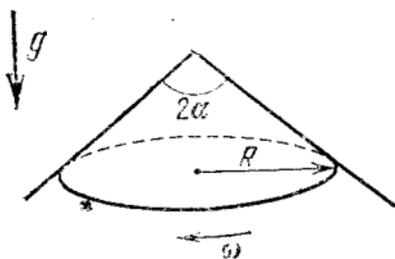
1.47. Нить длины  $l$  с привязанным к ней шариком массы  $m$  отклонили на  $90^\circ$  от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии  $x$  под точкой подвеса нужно поставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает натяжение  $T$ .

1.48. На тонкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. В какой точке траектории ускорение шарика направлено вертикально вниз? Вертикально вверх? Горизонтально? В начальный момент нить не растянута. Найдите натяжение нити, когда груз проходит нижнее положение. Длина нити  $l$ , масса груза  $m$ .

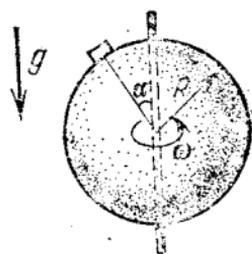
1.49. На каком минимальном расстоянии от точки  $A$  мы должны поместить тело, чтобы оно в точке  $A$  оторвалось от поверхности и начало движение по баллистической траектории? Угол наклона плоскости, по которой движется тело, равен  $\alpha$ , радиус закругления  $R$ . Трения нет.

1.50. С вершины гладкой полусферы радиуса  $R$  соскальзывает небольшое тело. На какой высоте над центром полусферы тело оторвется?

1.51. На высоте  $H$  над поверхностью земли находится цилиндрический желоб радиуса  $R$ . Какую скорость необходимо сообщить телу на поверхности земли, чтобы оно двигалось поперек желоба не отрываясь? Трения нет.



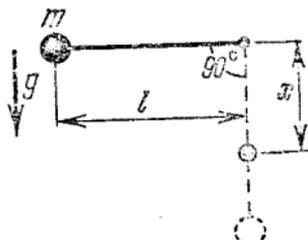
К задаче 1.43\*.



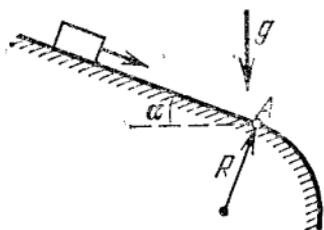
К задаче 1.44.



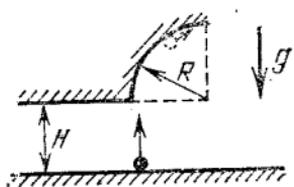
К задаче 1.45\*.



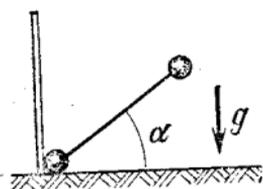
К задаче 1.47.



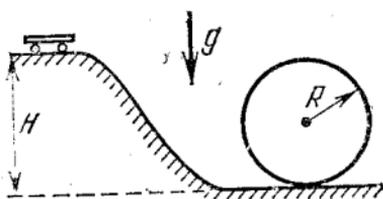
К задаче 1.49.



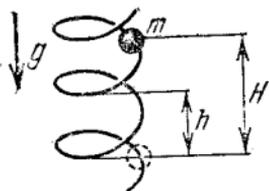
К задаче 1.51.



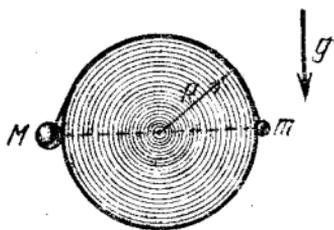
К задаче 1.52.



К задаче 1.53.



К задаче 1.54\*.



К задаче 1.55.

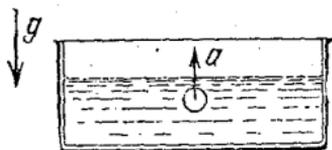
1.52. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели, в тот момент, когда ось гантели составляет угол  $\alpha$  с горизонтом. Гантель начинает свое движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шарика гантели  $m$  \*).

1.53. Тележка скатывается по гладким рельсам, образующим вертикальную петлю радиуса  $R$ . С какой минимальной высоты  $H_{\min}$  должна скатиться тележка для того, чтобы она не покинула рельсов по всей их длине? Каково будет движение тележки, если она скатывается с высоты  $H$ , меньшей  $H_{\min}$ ?

1.54\*. По вертикально стоящей гладкой и жесткой спирали скользит маленькая бусинка массы  $m$ . Расстояние от спирали до ее оси  $R$ , шаг спирали (расстояние по вертикали между двумя соседними витками)  $h$ . С какой силой действует бусинка на спираль в момент, когда она опустилась по вертикали на расстояние  $H$ ? Бусинка была отпущена без начальной скорости.

1.55. С цилиндра радиуса  $R$  начинает без трения соскальзывать система из двух точечных масс  $M$  и  $m$ , связанных невесомой нитью длины  $l = \pi R$ . В начальный момент массы находятся на горизонтальной прямой. Какой нужно взять массу  $M$  для того, чтобы тело массы  $m$  сорвалось с цилиндра в верхней точке?

1.56\*. Тело соскальзывает с горы за время  $\tau$ . За какое время это тело соскользнет с горы, размеры которой без изменения формы увеличены в 4 раза? Сопротивлением воздуха пренебречь, коэффициенты трения в обоих случаях одинаковы.



К задаче 1.57.

1.57. В сосуде, наполненном водой плотности  $\rho$ , всплывает пузырек воздуха объема  $V$  с ускорением  $a$ . Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой равна  $M$ .

\*) Если в задаче не указаны радиус шарика гантели и масса стержня, считать радиус шарика гантели много меньше длины стержня и массу стержня много меньше массы шарика.

## § 2.2. Импульс. Центр масс

2.1. На две частицы — одну массы  $m$ , летящую со скоростью  $v$ , другую массы  $2m$ , летящую со скоростью  $2v$  перпендикулярно направлению движения первой частицы, — в течение некоторого времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица стала двигаться в обратном направлении со скоростью  $2v$ . С какой скоростью стала двигаться вторая частица?

2.2. При полете тела массы  $m$  над поверхностью Земли между точками траектории  $A$  и  $B$  модуль изменения импульса тела равен  $|\Delta p|$ . Найдите время полета между  $A$  и  $B$ . Спротивлением воздуха пренебречь.

2.3. Человек бежит по резиновой ленте, надетой на два горизонтальных ролика (трение в осях отсутствует). На первый взгляд кажется, что по закону сохранения импульса импульс человека равен импульсу, переданному ленте. Но легко видеть, что полный импульс ленты равен нулю. Следует ли из этого, что человек не может сбежать с ленты?

2.4. Какую массу топлива нужно выбросить со скоростью  $3v$  относительно ракеты массы  $M$ , чтобы ее скорость увеличилась от  $v$  до  $1,1v$ ?

2.5\*. На покоящееся тело массы  $M$  налетает со скоростью  $v$  тело массы  $m$ . Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно растет за время  $\tau$  от нуля до значения  $F_0$ , а затем линейно убывает до нуля за то же время  $\tau$ . Определите скорости тел после взаимодействия, считая его центральным.

2.6. Определите отношение масс соударяющихся тел, одно из которых до столкновения покоилось, если после центрального упругого удара они разлетаются с одинаковыми по модулю скоростями.

2.7. Снаряд, выпущенный под углом к горизонту, разрывается в наивысшей точке траектории (на расстоянии  $L$  от пушки по горизонтали) на два одинаковых осколка. Один из осколков падает возле пушки. Где упадет второй осколок, если первый возвращался по траектории снаряда?

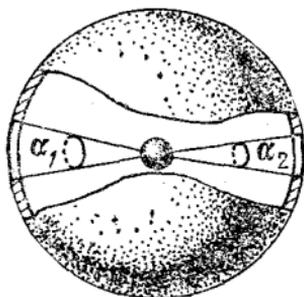
2.8. Артиллерист стреляет из пушки ядром массы  $m$  так, чтобы оно упало в неприятельском лагере на расстоянии  $L$  от пушки. В момент выстрела на ядро садится барон Мюнхгаузен, масса которого  $M = 5m$ . Определите,

какую часть пути до неприятельского лагеря ему придется идти пешком.

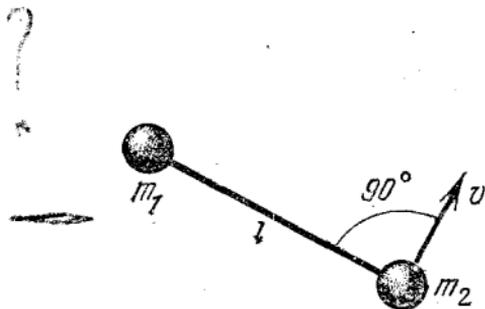
2.9. Движущееся тело распадается на два осколка с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ , направленными под углом  $\theta$  друг к другу. Определите импульс распавшегося тела.

2.10. Тело массы  $M$ , летящее со скоростью  $u$ , распадается на два осколка, массы которых равны  $m$  и  $M-m$ . Скорость тела массы  $m$  равна  $v$  и направлена перпендикулярно скорости  $u$ . Чему равна скорость тела массы  $M-m$ ?

2.11\*. В сфере проделаны отверстия, которые видны из центра под телесными углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , малыми, но не равными. В центре сферы разрывается на мелкие осколки ядро. Взрыв сферически симметричен. Осколки, падающие на внутреннюю поверхность сферы, прилипают. Определите скорость сферы после взрыва, если масса ее равна массе ядра, а скорости осколков  $v$ .



К задаче 2.11\*.



К задаче 2.13\*.

2.12. Для создания искусственной силы тяжести на пассивном участке полета две части космического корабля (отношение масс 1 : 2) развели на расстояние  $R$  друг от друга и раскрутили вокруг центра масс. Определите период вращения, если действующая на все тела в более массивной части корабля искусственная сила тяжести в два раза меньше силы тяжести на Земле.

2.13\*. Два тела масс  $m_1$  и  $m_2$  связаны нитью длины  $l$  и движутся по гладкой горизонтальной поверхности, совпадающей с плоскостью рисунка. В некоторый момент времени оказалось, что тело  $m_1$  неподвижно, а скорость тела  $m_2$ , равная  $v$ , перпендикулярна нити. Определите натяжение нити в этот момент времени.

2.14. Космонавт массы  $m$  приближается к космическому кораблю массы  $M$  с помощью троса, длина которого равна  $l$ . Какие пути пройдут космонавт и корабль до сближения?

**2.15.** На краю бруска массы  $M$ , находящегося на гладкой горизонтальной плоскости, стоит тележка с песком. Тележке сообщают горизонтальную скорость  $u$ , и из нее начинает высыпаться песок с массовым расходом  $\mu$ . Песок прилипает к бруску. Тележка движется без трения. Масса песка  $m$ . Найдите зависимость скорости бруска от времени.

**2.16.** Обезьяна массы  $m$  уравновешена противовесом на блоке  $A$ . Блок  $A$  уравновешен грузом на блоке  $B$ . Система неподвижна. Как будет двигаться груз  $2m$ , если обезьяна начнет равномерно выбирать веревку со скоростью  $u$  относительно себя? Массами блоков и трением пренебречь.

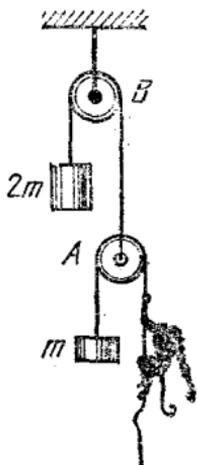
**2.17.** На тросе длины  $L$  висит небольшой ящик, заполненный песком, в который влетают пули, летящие горизонтально со скоростью  $v$ . Масса пули  $m$  много меньше массы ящика  $M$ . Трос отклоняется от вертикального направления на угол  $\alpha$ . Какое число пуль останавливается в песке за секунду?

**2.18.** Ракета, двигаясь в космическом пространстве со скоростью  $u$ , попадает в облако пыли плотности  $\rho$ . Сечение ракеты  $S$ . Удар пылинок о ракету считать неупругим. Изменением массы ракеты пренебречь. Какую силу тяги должны развивать двигатели ракеты, чтобы она двигалась с постоянной скоростью?

**2.19.** Два сплошных шарика из одного материала падают на землю, замедляясь в разреженном облаке пыли. Во сколько раз установившаяся скорость одного шарика больше скорости другого, если радиус его вдвое больше? Учитывать только сопротивление, оказываемое пылинками (а не воздухом). Удары пылинок о шарик считать неупругими.

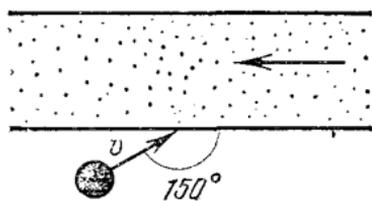
**2.20.** Ядро летит со скоростью  $v$  и попадает в поток песчинок, которые движутся с одинаковыми скоростями под углом  $150^\circ$  к скорости ядра и прилипают к нему. После пробивания потока ядро вылетело со скоростью, в 4 раза меньшей, под углом  $90^\circ$  к скорости потока. Какова скорость песчинок? Сколько песчинок прилипает к ядру, если масса отдельной песчинки в 1000 раз меньше массы ядра?

**2.21\*.** На брусок массы  $M$ , находящийся на горизонтальной плоскости, действует поток горизонтально летящих частиц. Полная масса, содержащаяся в единице объема

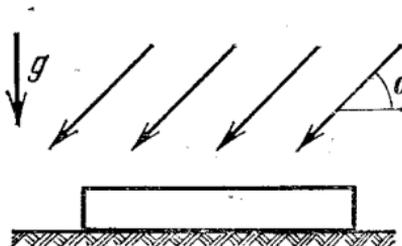


К задаче 2,16,

потока,  $\rho$ , сечение потока  $S$ , скорость частиц в потоке  $v$ . Чему равна установившаяся скорость бруска, если удар частиц о брусок упругий? Коэффициент трения бруска о плоскость  $\mu$ .



К задаче 2.20.



К задаче 2.22\*.

2.22\*. На брусок массы  $M$ , находящийся на горизонтальной плоскости, действует поток частиц, летящих под углом  $\alpha$  к горизонту. Полная масса, содержащаяся в единице объема потока,  $\rho$ , скорость частиц в потоке  $v$ . Коэффициент трения бруска о плоскость  $\mu$ . Чему равна установившаяся скорость бруска, если удар частиц о поверхность бруска неупругий? Площадь горизонтальной поверхности бруска  $S$ . Высота бруска мала, так что действием потока частиц на его боковые грани можно пренебречь.

2.23. Водометный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления воды движению катера  $F = kv$ . Скорость выбрасываемой воды относительно катера  $u$ . Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды  $S$ . Плотность воды  $\rho$ .

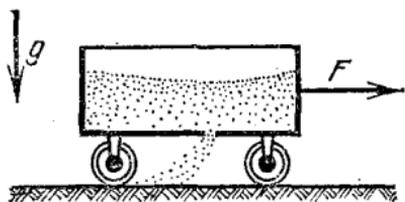
2.24. Труба радиуса  $r$  заполнена пористым веществом плотности  $\rho_0$ . Невесомый поршень, на который действует постоянная сила  $F$ , двигаясь в трубе, уплотняет вещество до плотности  $\rho$ . С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, т. е. в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью поверхность, справа от которой плотность вещества  $\rho$ , а слева  $\rho_0$ ? В начальный момент эта поверхность совпадает с поверхностью поршня.

2.25. Ракета массы  $M$  висит над поверхностью Земли. Какую массу топлива в единицу времени она должна расходовать при этом, если скорость истечения газа  $u$ ? Как изменится результат, если ракета будет двигаться вверх с ускорением  $a$ ?

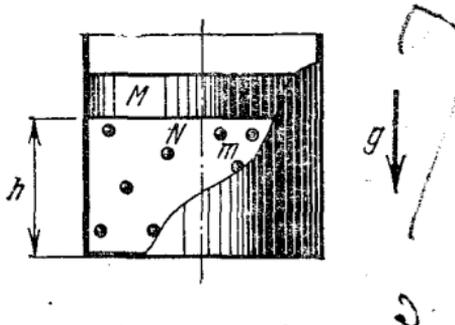
2.26. Две одинаковые тележки, на которых сидят два одинаковых дворника, движутся с одинаковыми скоростями. В некоторый момент времени на тележки начинает

падать снег равномерным потоком. Дворник, сидящий на одной из тележек, сбрасывает все время снег вбок, а на второй тележке дворник спит. Какая из тележек быстрее пройдет определенное расстояние?

2.27. Найдите ускорение и скорость тележки в зависимости от времени при ее движении под действием постоянной силы  $F$ , если из нее через отверстие в платформе в единицу времени высыпается масса песка  $\Delta m$ . В момент времени  $t = 0$  скорость тележки была равна нулю, а масса песка и тележки вместе была равна  $M$ .



К задаче 2.27.



К задаче 2.29.

2.28. На чаше весов прыгают  $n$  шариков массы  $m$ . Какова средняя сила, действующая на чашу весов, если при ударе шариков о чашу модуль их скорости не меняется? Если при ударе модуль их скорости уменьшается?

2.29. В цилиндре под поршнем массы  $M$  прыгают, упруго ударяясь о поршень и дно цилиндра,  $N \gg 1$  шариков массы  $m$  каждый. Сила тяжести поршня уравновешена ударами шариков. Расстояние между поршнем и дном цилиндра  $h$ . На какую высоту  $H$  будут подскакивать шарики, если поршень быстро убрать?

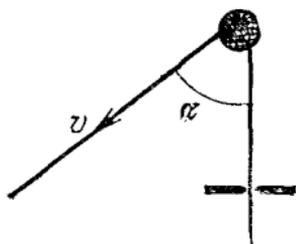
2.30. На чаше весов стоят песочные часы. Когда песок внизу, показание весов равно  $P_0$ . Часы переворачивают. Как зависят от времени показания весов? Время падения каждой песчинки  $\tau$ .

2.31. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью  $v$ ? Масса змеи  $m$ , ее длина  $l$ .

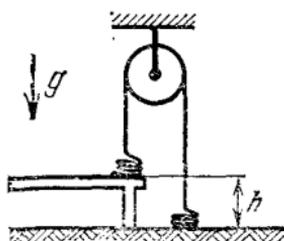
2.32. Тяжелая веревка подвешена на нити так, что нижним концом она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите силу давления веревки на стол при падении в зависимости от длины еще не упавшего конца.

2.33. Веревку, охватывающую гладкий гвоздь, протаскивают со скоростью  $v$  через щель. Сила трения в щели  $F$ .

масса единицы длины веревки  $\rho$ . Определите силу, действующую на гвоздь, если концы веревки образуют угол  $\alpha$ .



К задаче 2.33.



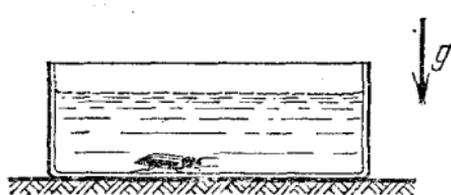
К задаче 2.34.

2.34. Канат перекинут через блок, причем часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найдите скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола  $h$ .

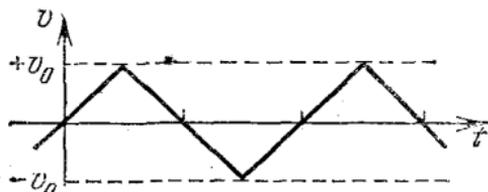
2.35. Определите силу тяги воздушно-реактивного двигателя самолета, летящего со скоростью  $v$ . Массовые расходы топлива и поступающего в двигатель воздуха равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Скорость продуктов сгорания на выходе из двигателя относительно самолета  $u$ .

2.36\*. а) Газ, вытекающий из сопла, имеет скорость  $v$  относительно ракеты. Определите скорость ракеты после того, как ее общая масса из-за истечения газа уменьшилась в  $n$  раз.

б) Скорость газа, истекающего из ракеты, относительно нее равна  $2$  км/с. Оцените массу ракеты, которая сможет вывести на орбиту Земли спутник массы  $10^4$  кг.



К задаче 2.37.



К задаче 2.38\*.

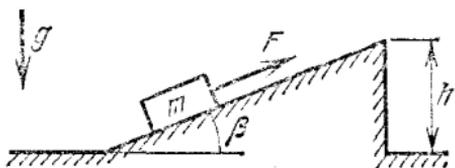
2.37. На гладком полу стоит сосуд, заполненный водой плотности  $\rho_0$  и объема  $V_0$ . В нем находится жук объема  $V$  и плотности  $\rho$ . Он начинает двигаться со скоростью  $u$  относительно сосуда. С какой скоростью станет двигаться сосуд относительно пола? Массой сосуда пренебречь.

2.38\*. Определите установившуюся скорость тела по наклонной доске, скорость которой в продольном направлении меняется с большой частотой так, как показано на рисунке. Амплитуда скорости  $v_0$ , коэффициент трения  $\mu$ , доска наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту.

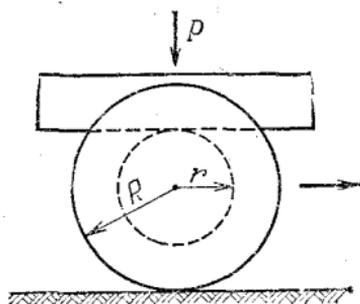
### § 2.3. Работа. Энергия

3.1. Тело массы  $m$  поднимают по наклонной плоскости силой  $F$ . Высота наклонной плоскости  $h$ , угол у основания  $\beta$ , коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью  $\mu$ . Определите работу силы трения и работу силы тяжести.

3.2. Какую работу необходимо совершить, чтобы перетянуть брусок длины  $l$  и массы  $m$  через шероховатую полосу ширины  $L$ ? Коэффициент трения  $\mu$ .



К задаче 3.1.



К задаче 3.3\*.

3.3\*. На цилиндр радиуса  $r$  с жестко закрепленными на нем колесами радиуса  $R$  давит пресс с силой  $P$ . Коэффициент трения между цилиндром и прессом, а также между колесами и горизонтальной плоскостью равен  $\mu$ . Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы сдвинуть ось системы вправо на расстояние  $l$  (меньшее, чем расстояние до края пресса)?

3.4. Какую мощность развивает лошадь при движении саней, если она тянет их в гору равномерно со скоростью  $u$ ? Масса саней  $m$ , коэффициент трения  $\mu$ . Угол наклона горы  $\alpha$ .

3.5. Два автомобиля мощностей  $N_1$  и  $N_2$  развивают скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Какую скорость они разовьют, если их сцепить вместе? Проскальзывания нет \*).

3.6\*. Автомобиль массы  $m$  трогается с места. Коэффициент трения колес о дорогу  $\mu$ . Обе оси автомобиля ведущие.

\*) Если нет других указаний в задаче, сопротивлением воздуха пренебречь.

Найдите зависимость скорости от времени и начертите качественный график этой зависимости. Мощность двигателя  $N$ .

3.7. Водометный катер движется по спокойной воде с постоянной скоростью  $v$ . Скорость выбрасываемой воды относительно катера  $u$ . Определите  $k$ . п. д.

3.8. Какую мощность развивают двигатели ракеты, неподвижно висящей над Землей? Масса ракеты  $M$ , скорость истечения газов  $u$ .

3.9. Тело массы 1 кг брошено под углом  $45^\circ$  к горизонту с начальной скоростью 19,6 м/с. Нарисуйте график зависимости полной, кинетической и потенциальной энергий от времени.

3.10. У двух одинаковых ракет, одна из которых движется, а другая покоится, на короткое время включаются двигатели. За время работы они выбрасывают одну и ту же массу газа (малую по сравнению с массой ракеты) с одинаковой скоростью относительно ракет. Кинетическая энергия движущейся ракеты, равная вначале  $E_0$ , возросла на 4%. Определите кинетическую энергию второй ракеты.

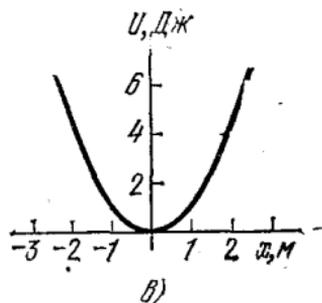
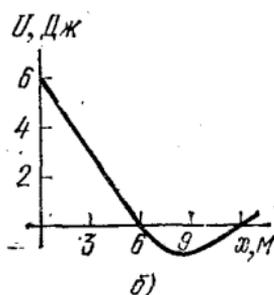
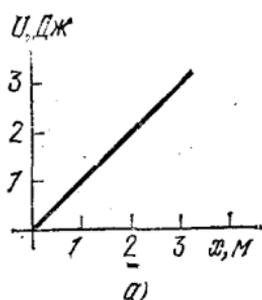
3.11. Предлагается наполнять вагоны поезда углем на ходу. Подсчитайте работу, совершенную поездом за время погрузки некоторой массы  $m$ , и сравните ее с кинетической энергией, которую получила погруженная масса угля, если скорость поезда  $u$ . Объясните результат.

3.12. Шарик массы  $m$ , укрепленный на невесомом стержне, вращается с постоянной скоростью  $v$ . Его кинетическая энергия в системе отсчета, неподвижной относительно оси вращения, постоянна и равна  $mv^2/2$ . В системе отсчета, движущейся в плоскости вращения прямолинейно со скоростью  $v$  относительно оси, кинетическая энергия шарика меняется от 0 до  $4(mv^2/2)$ . Какая причина вызывает это изменение энергии?

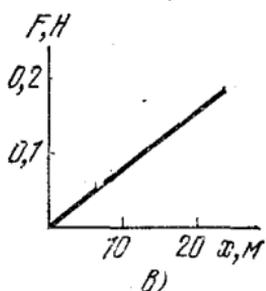
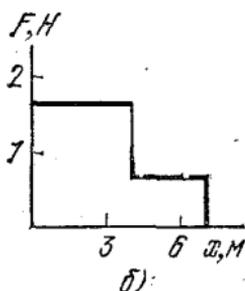
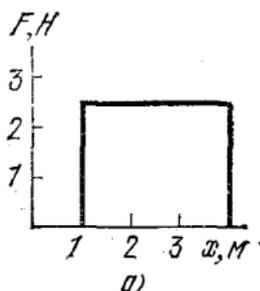
3.13. В поле тяжести на тело массы  $m$  действуют силой  $F$ , направленной вертикально вверх. Нарисуйте график зависимости потенциальной энергии от времени. Сила  $F$  действует ограниченное время  $\tau$ .

3.14. На рисунке приведены графики потенциальных энергий точечной массы в разных полях. Нарисуйте графики сил, действующих на эту массу.

3.15. На рисунке приведены графики зависимостей сил, действующих на тела, от расстояния. Нарисуйте графики потенциальных энергий этих тел.



К задаче 3.14.



К задаче 3.15.

3.16. Зависимости потенциальных энергий тел от расстояния имеют вид: а)  $U = U_0 x/x_0$ ; б)  $U = U_0 (x/x_0)^2$ ; в)  $U = U_0 x_0/x$ . Определите, как зависят от расстояния силы, действующие на тела.  $x_0$  имеет размерность длины,  $U_0$  — размерность энергии.

3.17. Зависимости сил, действующих на тела, от расстояния имеют вид: а)  $F = F_0$ ; б)  $F = F_0 x/x_0$ ; в)  $F = F_0 (x_0/x)^2$ . Определите, как зависят от расстояния потенциальные энергии тел.  $F_0$  имеет размерность силы,  $x_0$  — размерность длины.

3.18. Глубина проникновения частиц массы  $m$  в область действия тормозящей силы прямо пропорциональна импульсу:  $l = ap$ . Найдите закон зависимости силы от глубины.

3.19. Оцените среднее усилие, развиваемое ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа.

3.20. Дрова подняли на 9-й этаж и сожгли. Что произошло с потенциальной энергией дров?

3.21. Оконная штора массы 1 кг и длины 2 м свертывается в тонкий валик над окном. Какая при этом совершается работа? Трением пренебречь.

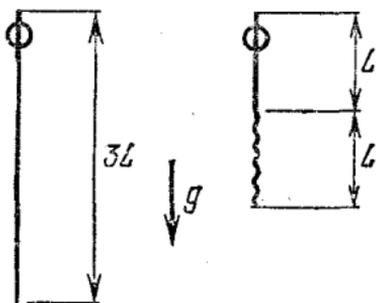
3.22. Какую работу необходимо совершить, чтобы лежащий на столе тонкий брусок длины  $L$  и массы  $M$  поставить вертикально?

3.23\*. В колодце диаметра  $D$  стоит свая диаметра  $d$  и длины  $2l$ . Плотность материала сваи  $\rho$ . В колодец залита вода плотности  $\rho_0$  до середины сваи. Определите работу, которую нужно совершить, чтобы вынуть сваю из воды.

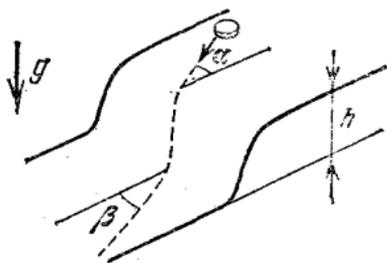
3.24. Двум одинаковым телам сообщают одинаковые скорости под некоторым углом к горизонту. Одно тело свободное, другое движется вдоль спицы. Какое тело поднимется на большую высоту?

3.25\*. Метеорологическая ракета массы  $M$ , запускаемая вертикально стартовым ускорителем с начальной скоростью  $v$ , имеет двигатель, способный в течение времени  $\tau$  развивать силу тяги  $F$ . В какой момент времени должен начать работу двигатель, чтобы ракета достигла наибольшей высоты? Какова эта высота? Считать, что масса ракеты не меняется и ускорение свободного падения  $g$  постоянно.

3.26\*. У проволоочки длины  $3L$  нижний участок длины  $2L$  сделали волнистым, так что длина этого участка



К задаче 3.26\*.



К задаче 3.27.

стала  $L$ . Определите время соскальзывания по этой проволочке бусинки, первоначально покоящейся наверху проволочки. Трения нет. Проволочка висит вертикально. Размеры волны много меньше  $L$ .

3.27. Две горизонтальные плоскости, отстоящие друг от друга на  $h$ , плавно соединены. По верхней плоскости движется тело под углом  $\alpha$  к нормали линии сопряжения. Найдите угол  $\beta$  между направлением движения тела и нормалью к линии сопряжения в нижней плоскости. Трение отсутствует.

3.28. Частица массы  $m$  движется под углом  $\alpha$  к плоскости, разделяющей пространства с потенциальными энергиями  $U_1$  и  $U_2$ . Скорость частицы  $v_1$ . Найдите, под каким углом она будет двигаться после пересечения этой плоскости. При каком условии частица не проникает в область с потенциальной энергией  $U_2$ ?

3.29. Невесомый стержень длины  $l$  с одинаковыми массами на концах установлен вертикально на горизонтальной плоскости. Стержень отпускают. Определите скорость верхней массы в момент удара о плоскость, если: а) нижняя масса закреплена на шарнире; б) нижняя масса может скользить по плоскости без трения.

3.30\*. На концах очень длинной нити подвешены равные грузы масс  $m$ . Нить перекинута через два невесомых маленьких блока, расположенных на расстоянии  $2l$  друг от друга. Найдите скорость грузов по истечении достаточно большого промежутка времени, если к середине нити прикреплен груз массы  $2m$ .

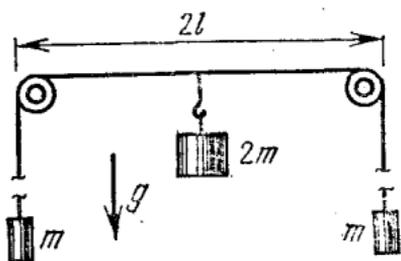
3.31. Систему, изображенную на рисунке, приводит в движение центральный груз массы  $m$ . Определите максимальную скорость центрального груза и максимальное удаление его от начального положения.

3.32\*. Трубка, диаметр которой много меньше длины, свернута в кольцо радиуса  $R$  и заполнена водой, за исключением небольшого участка около точки  $A$ , заполненного маслом. В начальный момент масляная «пробка» начинает всплывать в направлении к точке  $B$ . Найдите ее скорость в момент, когда она проходит мимо точки  $B$ . Угол  $AOB$  равен  $135^\circ$ . Плотность масла  $\rho_m$ , плотность воды  $\rho_v$ ;  $\rho_v > \rho_m$ . Длина масляной «пробки»  $l \ll R$ . Трением о стенки трубки пренебречь. Просачивание через «пробку» отсутствует.

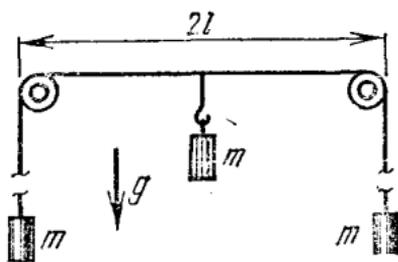
3.33. Однородная тяжелая веревка длины  $L$  перекинута через невесомый блок так, что один из свешивающихся концов равен  $l$ . Веревку отпускают. Определите скорость веревки в момент соскальзывания с блока. Размерами блока пренебречь.

3.34. Однородная веревка длины  $l$  и массы  $m$  перебросена через небольшой блок так, что вначале находится в равновесии. Трения нет. Веревка начинает соскальзывать. С какой силой действует веревка на блок в тот момент, когда длина веревки на одной стороне блока равна  $l/3$ ?

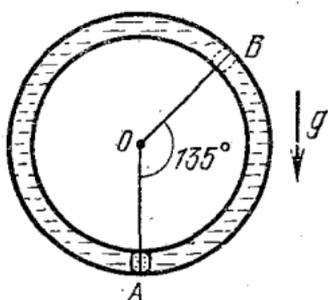
3.35\*. На двух катках разных радиусов лежит тяжелая доска, образующая угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите ускоре-



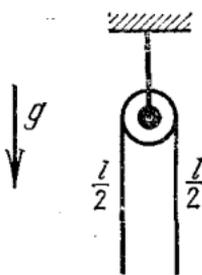
К задаче 3.30\*.



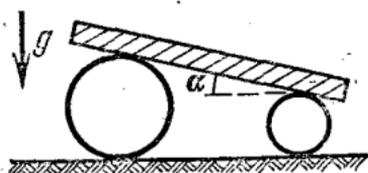
К задаче 3.31.



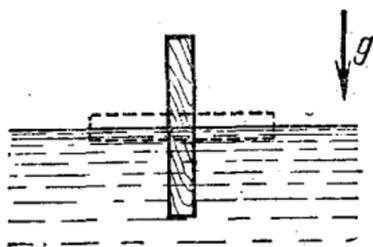
К задаче 3.32\*.



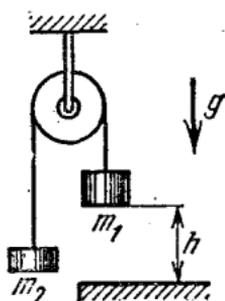
К задаче 3.34.



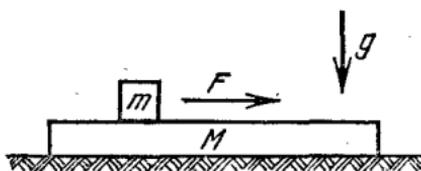
К задаче 3.35\*.



К задаче 3.37.



К задаче 3.38.



К задаче 3.40.

ние доски. Массой катков пренебречь. Проскальзывания нет.

3.36. При медленном подъеме тела массы  $m$  по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  и коэффициентом трения  $\mu$  совершили работу  $A$ . Определите, сколько выделилось тепла.

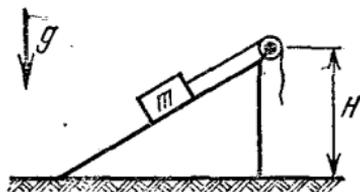
3.37. Какое количество тепла выделится при переводе наполовину погруженного в воду бруска квадратного сечения из вертикального положения в горизонтальное? Масса бруска  $10^{-2}$  кг, длина 0,2 м, сечение  $0,01 \times 0,01$  м<sup>2</sup>.

3.38. Два груза масс  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) соединены нитью, переброшенной через неподвижный блок. В начальный момент грузы покоятся, а расстояние от груза  $m_1$  до стола, находящегося под ним, равно  $h$ . Сколько тепла выделится при ударе груза о стол? Удар абсолютно неупругий.

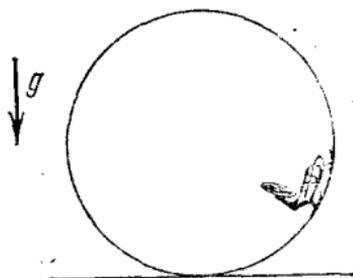
3.39. На тело массы  $M$  в течение времени  $\tau$  действует сила  $F$ , направленная горизонтально. Коэффициент трения тела о горизонтальную плоскость, на которой лежит тело, равен  $\mu$ . Какой путь пройдет тело до остановки?

3.40. На гладкой горизонтальной поверхности лежит длинный брусок массы  $M$ . На кубик массы  $m$ , лежащий на бруске, в течение времени  $\tau$  действует горизонтальная сила  $F$ . Коэффициент трения между бруском и кубиком  $\mu$ . Какой путь пройдет кубик по поверхности бруска?

3.41. Тело массы  $m$  медленно поднимают вверх по наклонной плоскости тросом, прикрепленным к телу и перекинутым через блок, установленный на вершине. При поднятии груза на вершину совершается работа  $A$ . В верхней точке трос обрывается, и груз скользит вниз. Какую скорость будет иметь груз в момент соскальзывания с плоскости? Высота наклонной плоскости  $H$ .



К задаче 3.41.



К задаче 3.42.

3.42. Какова работа силы трения за один оборот аэросаней в «мертвой петле» радиуса  $R$ ? Движение происходит

с постоянной скоростью  $v$ , масса саней  $m$ , коэффициент трения  $\mu$ .

3.43. Тонкостенный цилиндр радиуса  $R$  раскрутили до угловой скорости  $\omega$  и поставили в угол, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром  $\mu$ . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

3.44\*. На тонкостенный цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости так, что при соскальзывании цилиндра нить все время параллельна наклонной плоскости. Определите скорость цилиндра в нижней точке плоскости, если длина ее  $l$ , угол наклона к горизонту  $\alpha$ , коэффициент трения  $\mu$ .

3.45. В сферическую чашу радиуса  $R$  положили гантель в виде невесомого стержня длины  $l$  с шариками масс  $m$  на концах. Один из шариков лежит в нижней точке полушеры. Есть очень малое трение. Гантель начинает двигаться. Определите, какое количество тепла выделится по истечении длительного времени.

3.46. Автомобиль с работающим двигателем, имеющий начальную скорость  $v$ , въезжает на обледенелую гору, поверхность которой наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту. Какой высоты гору может преодолеть автомобиль, если коэффициент трения колес о гору  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ ?

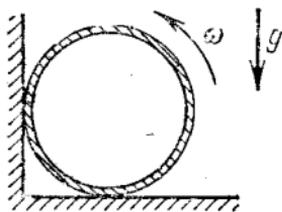
3.47. Человек, стоящий на движущемся вниз эскалаторе, решил подняться вверх. Какую работу он должен совершить, чтобы подняться на высоту  $H$  за время  $\tau$ ? Масса человека  $m$ , скорость эскалатора  $v$  и угол наклона  $\alpha$ .

3.48. Рогатка сделана из резины жесткости  $k$ . Найдите скорость «снаряда» массы  $m$ , выпущенного из этой рогатки, если рогатку растянули на длину  $L$ .

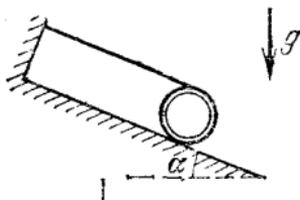
3.49. Три одинаковые массы  $m$  соединены друг с другом одинаковыми пружинами жесткости  $k$ . Одновременно всем массам сообщили одинаковую скорость  $v$  в направлении от центра системы. Какое расстояние пройдет каждая из масс, прежде чем остановится?

3.50. От груза, висящего на пружине жесткости  $k$ , отрывается масса  $m$ . На какую максимальную высоту поднимается после этого оставшаяся часть груза?

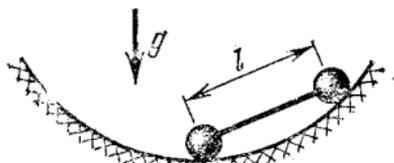
3.51. Груз массы  $m$ , прикрепленный к пружине жесткости  $k$ , находится на подставке, так что пружина не растянута. Подставку мгновенно убирают. Определите максимальное растяжение пружины и максимальную скорость груза.



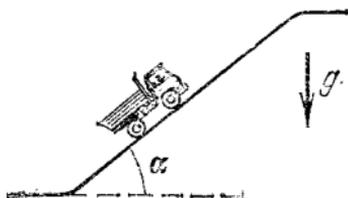
К задаче 3.43.



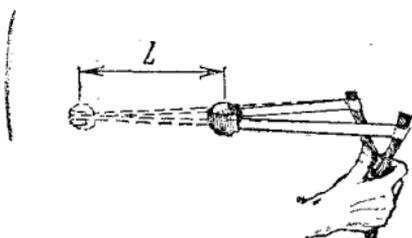
К задаче 3.44\*.



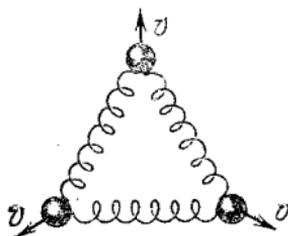
К задаче 3.45.



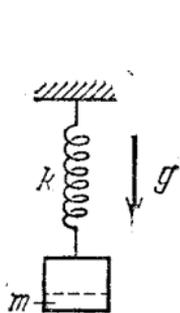
К задаче 3.46.



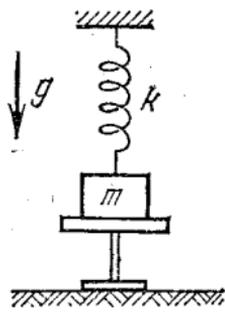
К задаче 3.48.



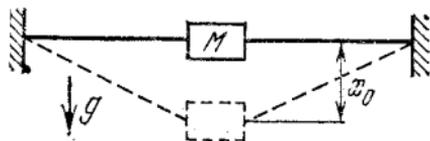
К задаче 3.49.



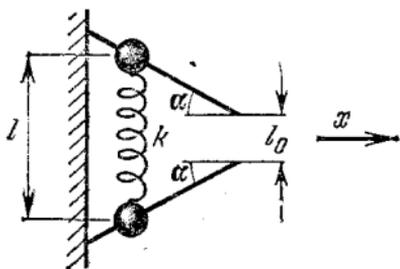
К задаче 3.50.



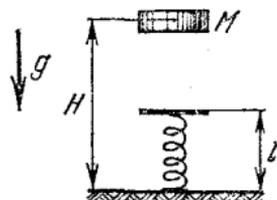
К задаче 3.51.



К задаче 3.52.



К задаче 3.53.



К задаче 3.54.

3.52. К середине нерастянутого резинового шнура длины  $2l$ , концы которого прикреплены к стенкам, подцепили груз массы  $M$ . Чему равна жесткость этого шнура, если предоставленный самому себе груз опускается вниз на максимальное расстояние  $x_0$ ?

3.53. На концах невесомой пружины жесткости  $k$  и длины  $l$  имеются маленькие бусинки массы  $m$  каждая. Бусинки надеты на жестко закрепленные стержни так, как показано на рисунке. Расстояние между концами стержней  $l_0$  совпадает с длиной пружины в нерастянутом состоянии. Определите, с какой скоростью будет двигаться пружина в направлении  $x$  после того, как бусинки соскочат со стержней. В начальный момент пружина покоится. Трением и полем тяжести пренебречь.

3.54. Определите максимальную силу давления на пол, если тело массы  $M$  падает с высоты  $H$  на пружину жесткости  $k$  и длины  $l$ . Объясните, почему при увеличении жесткости эта сила возрастает.

3.55. С какой силой надо надавить на верхний груз  $m_2$ , чтобы после прекращения действия этой силы груз  $m_1$  оторвался от пола?

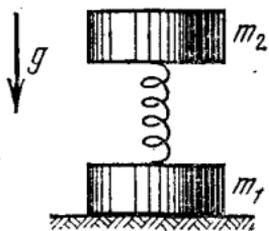
3.56\*. На теннисный мяч с высоты 1 м падает кирпич и подскакивает почти на 1 м. Оцените, на какую высоту подскочит мяч.

3.57\*. На доске лежит тело, подвешенное на пружине. В начальный момент пружина не растянута. Доску начинают опускать с ускорением  $a$ . Чему будет равно удлинение пружины в момент, когда доска оторвется от тела? Каково максимальное растяжение пружины? Масса тела  $m$ , жесткость пружины  $k$ .

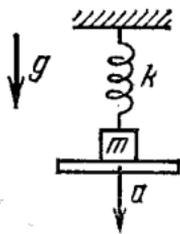
3.58\*. На горизонтальной плоскости лежат два бруска масс  $m$  и  $M$ , соединенные ненапряженной пружиной. Коэффициент трения грузов о плоскость  $\mu$ . Определите, какую наименьшую постоянную горизонтальную силу нужно приложить к левому бруску, чтобы сдвинулся и правый.

3.59\*. Собака массы  $m$  привязана поводком длины  $L$  к саням массы  $M$  ( $M > m$ ). В начальный момент она находится рядом с санями. Коэффициенты трения собаки и саней о плоскость равны  $\mu$ . На какое максимальное расстояние собака сможет сдвинуть сани за один рывок?

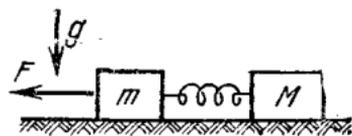
3.60\*. На горизонтальном столе находится груз массы  $M$ . Коэффициент трения груза о стол  $\mu$ . К грузу привязана нерастяжимая нить, которая перекинута через блок. К нити привязана невесомая пружина. Какой массы груз необ-



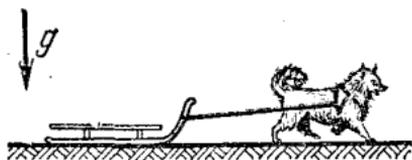
К задаче 3.55,



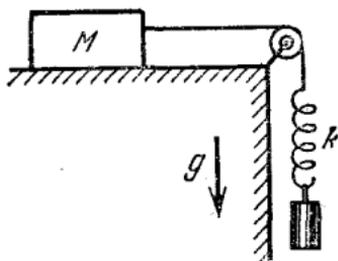
К задаче 3.57\*.



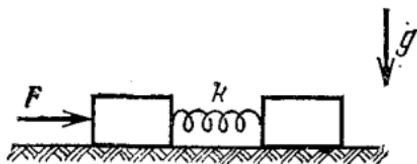
К задаче 3.58\*.



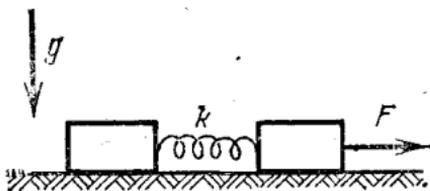
К задаче 3.59\*.



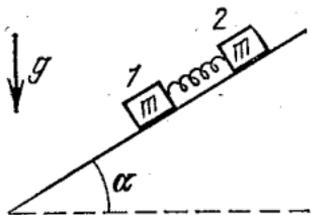
К задаче 3.60\*.



К задаче 3.61.



К задаче 3.62\*.



К задаче 3.63\*.

ходимо прикрепить к нерастянутой пружине, чтобы, падая, он мог сдвинуть груз массы  $M$  с места?

3.61. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска, соединенных пружиной жесткости  $k$  и длины  $l_0$ . На левый брусок внезапно начинает действовать постоянная горизонтальная сила  $F$ . Найдите минимальное и максимальное расстояния между брусками.

3.62\*. На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых тела, связанных пружиной жесткости  $k$ . На правое тело начинает действовать горизонтальная сила  $F$ . Возникшее колебательное движение из-за трения в пружине постепенно затухает, и через некоторое время тела начинают двигаться равноускоренно. Какое количество тепла выделится к этому времени?

3.63\*. С наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  соскальзывают два одинаковых тела масс  $m$ , связанных первоначально недеформированной пружиной жесткости  $k$ . Определите максимальное растяжение пружины при движении системы, если коэффициент трения между телом 2 и плоскостью  $\mu$ . Трения между телом 1 и плоскостью нет.

## § 2.4. Законы сохранения энергии и импульса

4.1. На неподвижный шар со скоростью  $u$  налетает шар, масса которого в  $k$  раз больше массы неподвижного. Чему равны отношения скоростей шаров к скорости  $u$  после центрального упругого удара? Нарисуйте графики зависимости этих отношений от числа  $k$ . К какой величине стремятся эти отношения, если  $k$  стремится к бесконечности?

4.2\*. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости покоится шар. На него налетает такой же шар. Удар абсолютно упругий, нецентральный. Найдите угол разлета шаров.

4.3. Две одинаковые частицы, движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , взаимодействуют упруго. Угол между скоростями  $\alpha$ . После взаимодействия скорости частиц равны  $u_1$  и  $u_2$ . Найдите угол разлета.

4.4. Почему быстрые нейтроны легко проходят через блок свинца, но задерживаются в таком же объеме парафина, воды или другого соединения, в состав которого входят атомы водорода?

4.5. При облучении кристалла потоком нейтронов обнаружено, что с поверхности, противоположной бомбарди-

руемой, вылетают атомы, причем направление вылета атомов зависит лишь от ориентации кристалла и не зависит от направления потока нейтронов. Объясните это явление.

4.6. Локомотив с постоянной тягой  $F$  начал двигаться к стоящему вагону и столкнулся с ним через время  $t$ . Через какое время произойдет следующее столкновение? Удар упругий. Трением в осях колес вагона пренебречь. Массы вагона и локомотива одинаковы. Найдите время между последующими соударениями.

4.7\*. Тяжелая частица массы  $M$  сталкивается с покоящейся легкой частицей массы  $m$ . На какой максимальный угол может отклониться тяжелая частица при ударе?

4.8. Три бусинки масс  $m_1, m_2, m_3$  могут скользить вдоль горизонтальной спицы без трения, причем  $m_1 \gg m_2$  и  $m_3 \gg m_2$ . Определите максимальные скорости крайних бусинок, если в начальный момент времени они покоились, а средняя имела скорость  $v$ . Удары считать упругими.

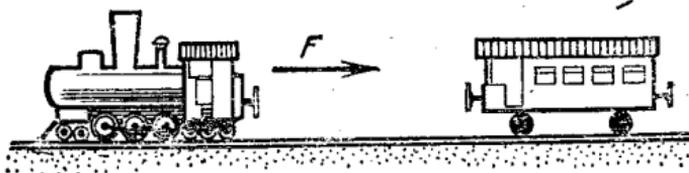
4.9. Частица массы  $m$  налетает на брусок массы  $M$  под углом  $\alpha$  к нормали плоскости бруска. Брусок покоился. Определите, под каким углом отскочит частица. Удар упругий.

4.10. По гладкой поверхности стола могут двигаться кольцо радиуса  $R$  и находящийся внутри кольца шарик. В начальный момент шарик упруго соударяется с кольцом. До удара кольцо неподвижно, а шарик имеет скорость  $v$ , направленную под углом  $\alpha$  к радиусу, проведенному в точку удара. Найдите время до следующего удара.

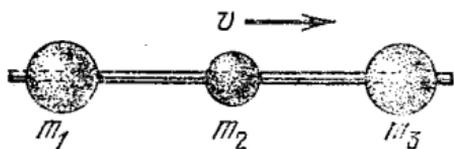
4.11\*. Внутри U-образной трубки массы  $M$  находится нить массы  $m$ . В начальный момент нить и трубка движутся так, что скорость конца нити  $A$  равна  $v$ , а скорость конца  $B$  — нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Трение не учитывать, радиус изгиба трубки считать очень малым. Трубка не вращается.

4.12\*. Шарик, двигаясь по гладкой плоскости, налетает на клиновидный выступ. Происходит упругий удар. Найдите минимально возможную скорость шарика, при которой он может перескочить через клин. Угол клина  $\alpha$ , высота  $H$ .

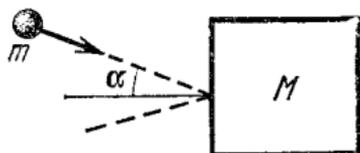
4.13. Снаряд массы  $m$  попадает в канал, прорезанный в вагоне массы  $M$ . Определите, при какой минимальной начальной скорости снаряд поднимется на высоту  $h$  над крышей. Трения нет. Нижний срез канала находится на расстоянии  $H$  от крыши.



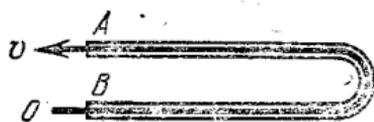
К задаче 4.6.



К задаче 4.8.



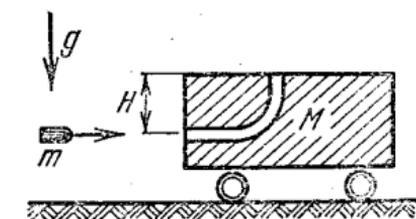
К задаче 4.9.



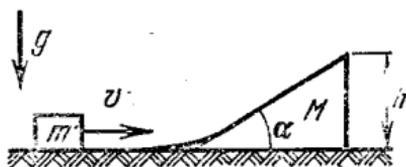
К задаче 4.11\*.



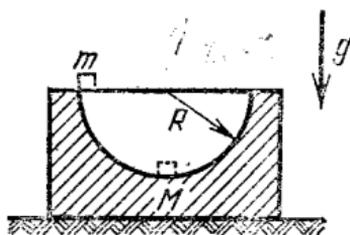
К задаче 4.12\*.



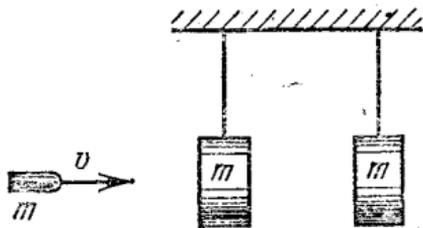
К задаче 4.13.



К задаче 4.14\*.



К задаче 4.15\*.



К задаче 4.19.

4.14\*. На горизонтальной плоскости находится клин массы  $M$  и высоты  $h$ . Поверхность клина, наклоненная под углом  $\alpha$  к горизонту, в нижней части плавно сопряжена с плоскостью. На клин со скоростью  $v$  налетает тело массы  $m$ . На какую высоту поднимется тело после отрыва от клина? Трением пренебречь.

4.15\*. Полусферическая подставка массы  $M$  и радиуса  $R$  стоит на гладком столе. Тело массы  $m$  кладут на край подставки и отпускают. Трения нет. Найдите скорости тел в момент, когда тело массы  $m$  проходит нижнюю точку полусферы. С какой силой тело давит на подставку в нижней точке?

4.16. Импульсы налетающих друг на друга тел равны  $p_1$  и  $p_2$ . Угол между скоростями тел  $\theta$ . При ударе тела слипаются. Масса слипшегося тела  $M$ . Определите скорость этого тела.

4.17. Навстречу друг другу летят два шара. Между шарами происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия одного шара в 20 раз больше кинетической энергии другого. При каком отношении масс шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладающего меньшей энергией?

4.18. Стальная пуля массы  $m$ , имеющая скорость  $v$ , пробивает подвешенный на тонкой нити свинцовый шар массы  $M$ , в результате чего скорость пули уменьшается вдвое. Какая часть кинетической энергии пули пошла на нагревание?

4.19. Пуля массы  $m$ , летевшая с начальной скоростью  $v$ , пробивает один подвешенный грузик массы  $m$  и застревает во втором, таком же. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузиком, найдите количество тепла, выделившегося в первом грузике, если во втором выделилось тепло  $Q_2$ .

4.20. Нейтрон с энергией 250 кэВ налетает на ядро  ${}^6\text{Li}$ . При этом образуется возбужденное ядро  ${}^7\text{Li}$ . Массы ядер и нейтрона 6, 7 и 1 а. е. м. Найдите кинетическую энергию ядра  ${}^6\text{Li}$ .

4.21. Атом массы  $M$  может увеличить свою внутреннюю энергию на  $E$ . Определите, какой минимальной скоростью должен обладать электрон массы  $m$ , чтобы в результате удара возбудить атом. Удар центральный.

4.22. Неподвижное атомное ядро распадается на две части масс  $m_1$  и  $m_2$ . При этом выделяется энергия  $E$  (кинетическая энергия осколков). Определите скорости осколков.

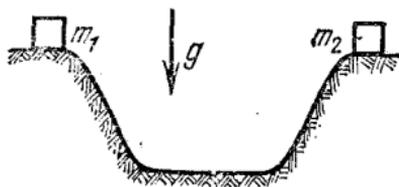
4.23\*. Покоящаяся частица может распадаться на три одинаковых осколка масс  $m$ , обладающих суммарной кинетической энергией  $K$ . Рассмотрите пучок таких частиц, движущихся со скоростью  $v$ . Определите максимально возможные скорости осколков.

4.24. В результате распада движущегося ядра появились два осколка масс  $m_1$  и  $m_2$ , импульсы которых равны  $p_1$  и  $p_2$ . Угол между скоростями осколков  $\theta$ . Определите энергию, которая выделяется при распаде ядра.

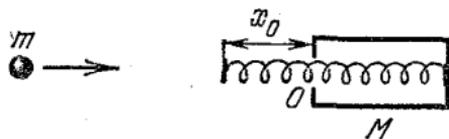
4.25. Неподвижное ядро распадается на два одинаковых осколка масс  $m$  и осколок массы  $m_1$ . Одинаковые осколки с импульсами  $p$  разлетаются под углом  $\alpha$  друг к другу. Определите выделившуюся при распаде энергию.

4.26. Реакцию синтеза тяжелого и сверхтяжелого изотопов водорода ( ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} = {}^4\text{He} + n$ ) изучают, направляя ускоренные до энергии 2 МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия 14 МэВ.

4.27. Два тела масс  $m_1$  и  $m_2$  одновременно начинают соскальзывать без трения с двух горок одинаковой высоты и формы. При ударе тела слипаются. Определите отношение высоты, на которую поднимется вновь образованное тело, к высоте, с которой тела начинали соскальзывать.



К задаче 4.27.



К задаче 4.28.

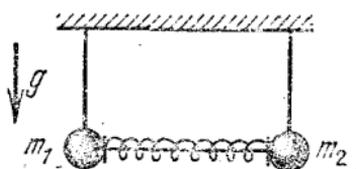
4.28. Устройство массы  $M$  имеет отверстие  $O$ . Определите минимальную скорость, которую необходимо сообщить шарiku массы  $m$ , чтобы он вошел в отверстие, если жесткость пружины  $k$ , длина выступающей части пружины  $x_0$ . Устройство не закреплено. Размером шарика пренебречь.

4.29. Два шарика масс  $m_1$  и  $m_2$  висят на нитях одинаковой длины. Между шариками зажата жесткая пружина. Энергия сжатой пружины  $U$ . Нить, связывающую шарики, пережигают. Найдите максимальные высоты, на которые поднимутся шарики.

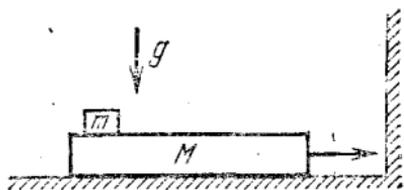
4.30. Тело налетает на неподвижную стенку под углом  $\alpha$  к нормали. Коэффициент трения о стенку  $\mu$ . Определите, под каким углом отразится тело.

4.31. На тележку массы  $M$ , движущуюся по прямой с постоянной скоростью  $v$ , падает с высоты  $H$  кирпич массы  $m$ . Кирпич остается на тележке. Определите, сколько при этом выделится тепла.

4.32. Кольцо массы  $m$  может скользить по стержню длины  $L$  и массы  $M$ . Сила трения между ними  $F$ . Определите, какую минимальную скорость  $v$  нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если вначале кольцо покоится. Опыт проводится в невесомости. Какое количество тепла выделится?



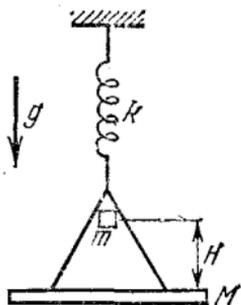
К задаче 4.29.



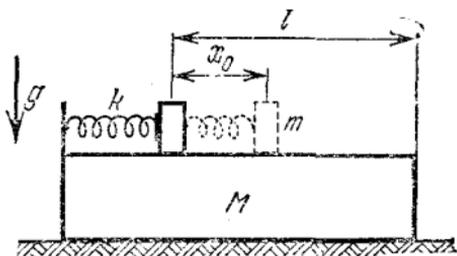
К задаче 4.33.

4.33. На бруске длины  $l$  и массы  $M$ , расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, находится тело массы  $m$ . Коэффициент трения между телом и бруском  $\mu$ . С какой минимальной скоростью должна двигаться система, чтобы после упругого удара бруска о стенку тело упало с бруска?

4.34\*. На подставку массы  $M$ , подвешенную на пружине жесткости  $k$ , с высоты  $H$  падает тело массы  $m$  и прилипает к ней. Определите максимальное растяжение пружины.



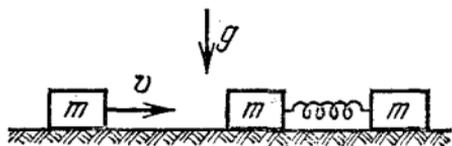
К задаче 4.34\*.



К задаче 4.35.

4.35. На гладкой горизонтальной поверхности стоит система, изображенная на рисунке. Масса бруска  $M$ , масса

верхнего тела, размерами которого можно пренебречь,  $m$ . Жесткость пружины  $k$ . Тело не прикреплено к пружине. Коэффициент трения между телом и бруском  $\mu$ . Пружину сжали телом на  $x_0$ , а затем его отпустили. Расстояние от тела до края бруска в момент «выстрела»  $l$ . Найдите скорость бруска после того, как тело соскользнет с него.



К задаче 4.36.

4.36. На покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности систему, состоящую из двух тел масс  $m$ , соединенных пружиной, со скоростью  $v$  налетает тело такой же массы  $m$ . Удар упругий. Найдите максимальное растяжение пружины. Жесткость пружины  $k$ .

## § 2.5. Сила тяготения. Законы Кеплера

5.1. Дана тонкая сфера радиуса  $R$  и массы  $M$ . Определите напряженность поля и потенциал во всем пространстве.

5.2\*. Постройте графики напряженности поля и потенциала, создаваемого сферическим слоем массы  $M$ , в зависимости от расстояния до центра. Внешний радиус слоя  $R_1$ , внутренний  $R_2$ .

5.3. Определите напряженность поля и потенциал, создаваемый шаром радиуса  $R$  и равномерной плотности, в зависимости от расстояния до центра шара. Масса шара  $M$ .

5.4. Определите силу и энергию взаимодействия двух шаров масс  $10^3$  кг. Расстояние между центрами шаров 10 м.

5.5. Найдите силу, с которой вы притягиваетесь к Земле. К Луне. К Солнцу.

5.6. Во сколько раз сила тяжести тела на поверхности Земли больше силы тяжести этого же тела на высоте 100 км? 1000 км?

5.7. На каком расстоянии от Земли на прямой Земля — Луна силы притяжения тела к Земле и Луне равны по модулю?

5.8. Тело массы  $m$  движется по экватору со скоростью  $v$ . Найдите силу, с которой тело действует на поверхность земли. Рассмотрите случаи движения тела с запада на восток и с востока на запад.

5.9. Для Земли найдите первую и вторую космические скорости.

5.10. Какую силу тяги должен развивать двигатель на спутнике Земли массы  $m$  для того, чтобы спутник двигался по орбите радиуса  $R$  со скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по орбите того же радиуса?

5.11. На какую высоту нужно запустить спутник в экваториальной плоскости, чтобы он все время находился над одной и той же точкой земной поверхности?

5.12\*. Какова должна быть минимальная скорость жюль-верновского снаряда, чтобы он попал на Луну? Какую скорость он будет иметь у поверхности Луны?

5.13. Ракета, пущенная вертикально вверх на полюсе Земли, поднялась на высоту 3200 км и начала падать. Какой путь пройдет ракета за первую секунду своего падения?

5.14\*. Тело запустили вдоль экватора с востока на запад с такой скоростью, что очень далеко от Земли его скорость стала нулевой. Это же тело с той же скоростью относительно Земли запустили тоже вдоль экватора, но с запада на восток. С какой скоростью оно будет двигаться на очень большом расстоянии от Земли?

5.15\*. На какую высоту поднимется снаряд, если ему сообщили вертикально вверх первую космическую скорость на полюсе Земли?

5.16\*. Шаровая туманность имеет массу приблизительно  $4 \cdot 10^{41}$  солнечных масс и диаметр около  $10^5$  световых лет. Какую скорость необходимо сообщить телу, находящемуся на ее краю, чтобы оно покинуло эту звездную систему?

5.17\*. Вторая космическая скорость для Земли 11,2 км/с. Какую скорость будет иметь снаряд вдали от Земли, если он был запущен с полюса со скоростью 12 км/с?

5.18. Определите, во сколько раз масса планеты Марс меньше массы Земли, если известно, что спутник Марса Фобос обращается вокруг него по орбите радиуса 9400 км с периодом 7 ч 39 мин.

5.19. Сравните периоды обращения спутников, один из которых движется вокруг Земли, а второй — вокруг Луны. Орбиты спутников круговые и пролегают вблизи поверхности.

5.20. Среднее расстояние от Земли до Солнца  $1,5 \cdot 10^8$  км. Оцените массу Солнца.

5.21. Две массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся относительно друг друга так, что расстояние между ними остается постоянным и равным  $a$ . Найдите полную энергию системы.

5.22. Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли увеличилась и сделалась равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось прежним?

5.23\*. Два одинаковых тела движутся так, что в некоторый момент времени скорость одного тела составляет острый угол с направлением на другое тело, которое в данный момент времени имеет нулевую скорость. Найдите угол между направлениями скоростей тел в тот момент, когда расстояние между телами вновь станет равным начальному.

5.24. Две звезды под действием их взаимного притяжения описывают круговые орбиты вокруг общего центра масс с периодом 2 года. Сумма масс звезд равна двум солнечным массам. Найдите расстояние между звездами, зная, что среднее расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн. км. Масса Земли по сравнению с массой Солнца пренебрежимо мала.

5.25. Определите натяжение троса, связывающего два космических корабля масс  $m$ , которые вращаются вокруг Земли на расстояниях  $R_1$  и  $R_2$  так, что трос всегда направлен от Земли.

5.26\*. Найдите отношение максимальных приливообразующих сил, вызываемых Луной и Солнцем.

5.27\*. Спутник массы  $10^3$  кг, запущенный на круговую орбиту высоты 500 км над поверхностью Земли, тормозится в атмосфере. На какой высоте окажется спутник через месяц, если: а) тормозящая сила со стороны атмосферы  $2,07 \cdot 10^{-3}$  Н; б) наблюдаемое угловое ускорение спутника равно  $3 \cdot 10^{-13}$  рад/с<sup>2</sup>.

5.28. Космический корабль движется к Луне под влиянием ее притяжения. На большом расстоянии его скорость относительно Луны была нулевой. Ускорение свободного падения на поверхности Луны в 6 раз меньше, чем на Земле ( $g_{\text{л}} = g/6$ ). Радиус Луны около 1700 км. На какой высоте  $h$  должен быть включен тормозной двигатель для осуществления мягкой посадки, если считать, что двигатель создает пятикратную перегрузку ( $5g$ )? Изменением массы корабля при торможении и зависимостью силы притяжения от высоты на этапе торможения пренебречь.

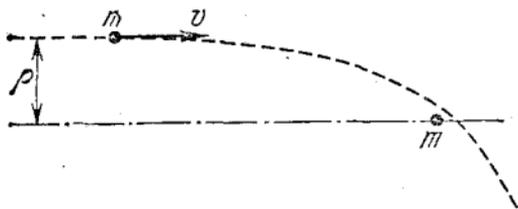
5.29. По диаметру Земли прорыта шахта. Тело опускают в шахту с начальной нулевой скоростью. Определите скорость тела в центре Земли, считая ее однородной.

5.30. Какую скорость нужно сообщить телу небольшой массы в центре астероида массы  $M$  и радиуса  $R$ , чтобы оно через радиальную шахту ушло на бесконечность? Плотность астероида постоянна.

5.31. Спутник Земли массы  $m$  движется по круговой орбите, радиус которой равен удвоенному радиусу Земли. Какой импульс нужно мгновенно передать спутнику, чтобы плоскость орбиты повернулась на угол  $\alpha$ , а радиус не изменился? Радиус Земли  $R$ .

5.32. Космический корабль массы  $m$ , пролетая вблизи астероида, отклонился на угол  $\alpha$ . Импульс корабля, вначале равный  $p_0$ , стал равным  $p$ . Определите массу астероида.

5.33\*. На покоящуюся точечную массу  $m$  налетает из бесконечности такая же масса со скоростью  $v$  и прицельным параметром  $\rho$ . Найдите наименьшее расстояние, на которое сблизятся массы.



К задаче 5.33\*.

5.34\*. Из бесконечности на Землю движется однородный поток метеоритов, в единице объема которого содержится  $n$  частиц. Масса каждого метеорита  $m$ , скорость на бесконечности  $v_0$ . Найдите массу метеоритного вещества, выпадающего на Землю за время  $t$ . Радиус Земли  $R$ , ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g$ .

5.35. Снаряд запустили с первой космической скоростью под углом к горизонту. По какой траектории будет двигаться снаряд?

5.36. Наибольшее расстояние кометы Галлея от Солнца  $h = 35,4$ , наименьшее  $l = 0,59$  (за единицу принято расстояние от Земли до Солнца). Линейная скорость движения кометы  $v_1 = 0,91$  км/с в точке наибольшего удаления ее от Солнца, т. е. в афелии. Какова линейная скорость  $v_2$  кометы, когда она ближе всего подходит к Солнцу, т. е. в перигелии? В каком году комета будет видна с Земли, если последнее прохождение ее вблизи Солнца наблюдалось в 1910 году?

**5.37\*.** Спутник, двигавшийся по круговой орбите радиуса  $R_c$ , был заторможен и стал двигаться по эллиптической траектории, касающейся поверхности планеты. Определите время падения спутника на планету. Радиус планеты  $R$ .

**5.38\*.** Определите время падения Земли на Солнце, если ее внезапно остановить.

**5.39\*.** С башни, расположенной на поверхности планеты, посылают с одинаковой скоростью  $v$  два снаряда. Начальная скорость первого снаряда направлена так, что он движется по направлению радиуса планеты; начальная скорость второго снаряда перпендикулярна радиусу планеты, и он движется по эллиптической траектории. Какой из снарядов достигает максимального удаления от планеты? Найдите отношение  $R_1/R_2$  максимально возможных расстояний от центра планеты. Скорость

$$\sqrt{2gR} > v > \sqrt{gR},$$

где  $R$  — радиус планеты.

**5.40\*.** Спутник планеты движется по круговой орбите на высоте  $h$  над поверхностью планеты. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности планеты  $H$  и минимальным  $h$ . На сколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической орбите? Радиус планеты  $R$ , масса  $M$ .

**5.41\*.** Два одинаковых тела движутся вокруг Земли в одном направлении по касающимся траекториям. Первое тело движется по окружности радиуса  $R$ . Второе тело имеет вдвое больший период, чем первое тело. Они стыкуются. Определите максимальное расстояние от центра Земли образовавшегося тела.

**5.42\*.** Два богатыря на полюсе Земли бросают вертикально вверх булавы. Первая упала через неделю, вторая — через 30 дней. Оцените, на сколько различались их начальные скорости.

**5.43\*.** Требуется вывести космический корабль на околосолнечную орбиту с перигелием  $0,01$  радиуса земной орбиты и периодом, совпадающим с периодом вращения Земли вокруг Солнца. С какой скоростью и в каком направлении относительно прямой Земля — Солнце нужно запустить корабль с Земли? Орбитальная скорость Земли  $30$  км/с.

## § 2.6. Вращение твердого тела

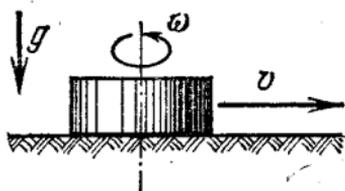
6.1. Определите кинетическую энергию тонкого кольца радиуса  $R$  и массы  $M$ , раскрученного до угловой скорости  $\omega$ . Больше или меньше эта энергия энергии сплошного диска такого же радиуса и массы?

6.2. Маховик в виде кольца массы  $m$  и радиуса  $r$  (с невесомыми спицами) был раскручен до угловой скорости  $\omega$  и затем предоставлен самому себе. Под влиянием сил трения он остановился. Найдите момент сил трения, считая его постоянным, принимая, что: а) маховик остановился через время  $\tau$ ; б) маховик до полной остановки сделал  $N$  оборотов. Какая энергия при этом выделилась в виде тепла?

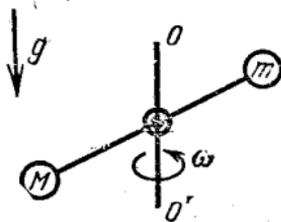
6.3. Тонкий обруч радиуса  $R$  раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega$  и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен  $\mu$ ? Сколько оборотов сделает обруч?

6.4\*. Определите, за какое время остановится раскрученный до угловой скорости  $\omega$  диск радиуса  $R$ , положенный плоскостью на стол. Коэффициент трения между диском и столом равен  $\mu$ .

6.5. Шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$  и поступательное со скоростью  $v$ . В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при  $\omega = 0$  или при  $\omega \neq 0$  ( $v$  одинаково в обоих случаях)?



К задаче 6.5.



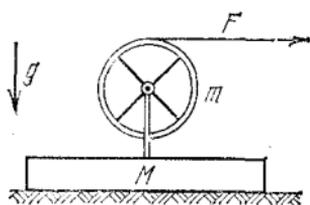
К задаче 6.7.

6.6. Десять муравьев решили утащить со стола лежащую на нем щепочку. Как им поступить, если сила, с которой каждый из муравьев может тащить щепочку, несколько меньше одной десятой силы трения, действующей на щепочку при ее движении относительно стола?

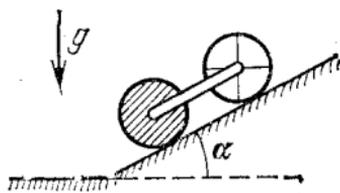
6.7. Гантель с шариками масс  $m$  и  $M$ , соединенными невесомым стержнем длины  $l$ , вращается вокруг вертикаль-

ной оси  $OO'$ , проходящей через центр гантели, с угловой частотой  $\omega$ . Определите угол, который образует ось гантели с осью вращения.

6.8. На гладком горизонтальном столе находится брусок массы  $M$ . На нем укреплен тонкостенный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$ , который может без трения вращаться вокруг своей оси. На цилиндр намотана невесомая тонкая нить, за конец которой тянут с горизонтальной силой  $F$ . Найдите ускорение бруска и угловое ускорение цилиндра.



К задаче 6.8.



К задаче 6.10\*.

6.9. Найдите ускорение, с которым будет скатываться без проскальзывания по наклонной плоскости с углом  $\alpha$ : а) тонкостенный цилиндр; б) сплошной цилиндр. Найдите силы трения, действующие на цилиндры.

6.10\*. Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания с наклонной плоскости с углом  $\alpha$ . Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого цилиндра  $m$ . Определите натяжение штанги.

6.11. Сплошной цилиндр массы  $m$  насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массы  $M$ . С каким ускорением будет опускаться гиря, если ее отпустить? Шнур не проскальзывает по цилиндру.

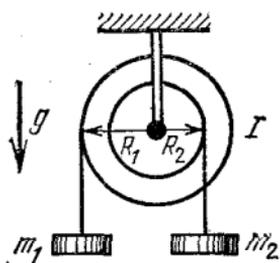
6.12. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две легкие нити, нагруженные массами  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите ускорения грузов и натяжения нитей. Момент инерции блока  $I$ .

6.13. На валик радиуса  $r$  наглухо насажен сплошной диск. Полный момент инерции всей системы относительно оси  $I$ , масса  $m$ . К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых система подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается, а затем предостав-

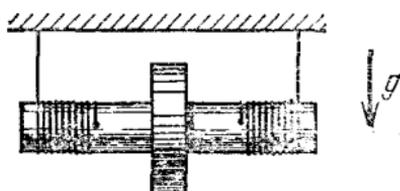
ляют диску свободно опускаться. Найдите ускорение оси диска и натяжение нитей.

**6.14\*.** Однородная тяжелая веревка закреплена своими концами за плоскости и охватывает невесомый обруч. Определите, с каким ускорением он будет падать.

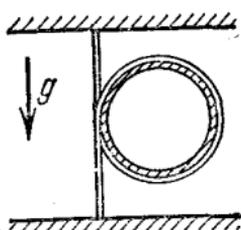
**6.15.** Определите ускорение цилиндрической бочки, целиком заполненной жидкостью, скатывающейся без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Трением между жидкостью и стенками бочки пренебречь. Масса жидкости  $m$ . Массу бочки  $M$  считать сосредоточенной на боковой поверхности цилиндра.



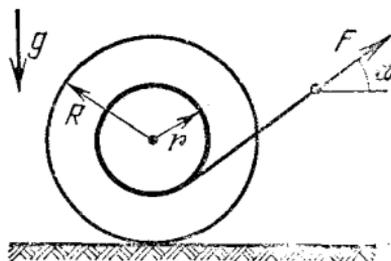
К задаче 6.12.



К задаче 6.13.



К задаче 6.14\*.



К задаче 6.16\*.

**6.16\*.** На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток массы  $m$ . Момент инерции катушки относительно ее оси  $I$ . Катушку тянут за нить с силой  $F$ . При каких углах  $\alpha$  между силой и горизонтом катушка будет двигаться ускоренно в сторону натянутой нити? Какой должна быть сила  $F$  для того, чтобы отсутствовало скольжение? Коэффициент трения между катушкой и плоскостью  $\mu$ .

**6.17\*.** Тонкое кольцо радиуса  $R$  и массы  $m$  раскручено до угловой скорости  $\omega$  и поставлено вертикально на горизонтальную плоскость с коэффициентом трения  $\mu$ . Какая часть начальной энергии перейдет в тепло? С какой скоростью будет двигаться кольцо после прекращения проскальзывания? Какой путь пройдет кольцо до прекраще-

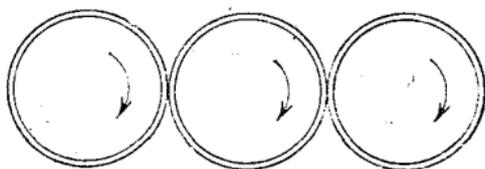
ния проскальзывания? Нарисуйте график зависимости ускорения кольца от времени.

**6.18\***. Однородный цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$  в начальный момент пущен по горизонтальной плоскости так, что он скользит по ней без качения. Между цилиндром и поверхностью коэффициент трения  $\mu$ . Какая часть начальной энергии цилиндра перейдет в тепло? Какое расстояние пройдет цилиндр, прежде чем его движение превратится в качение без скольжения? Какова скорость цилиндра после прекращения проскальзывания? Начальная скорость цилиндра  $v$ .

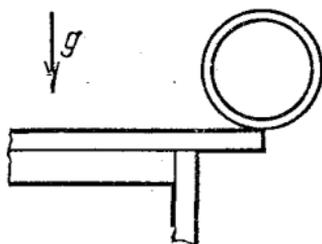
**6.19\***. По шероховатому горизонтальному полу катится без проскальзывания тонкое кольцо. Докажите, что через некоторое время после упругого удара о вертикальную стенку кольцо остановится.

**6.20\***. Однородный цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$  раскрутили до угловой скорости  $\omega$  и поставили на наклонную плоскость с углом  $\alpha$  у основания. На какую высоту поднимется цилиндр? Коэффициент трения цилиндра о наклонную плоскость равен  $\mu$ .

**6.21.** Три одинаковых тонкостенных цилиндра, раскрученных до некоторой угловой скорости, приводятся в соприкосновение. Оси этих цилиндров параллельны и закреплены. Определите, какая часть энергии перейдет в тепло.



К задаче 6.21.

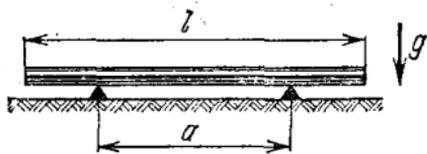


К задаче 6.22\*.

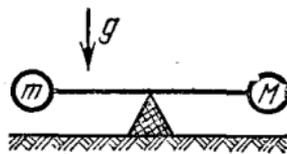
**6.22\***. С края стола высоты  $H$  падает без проскальзывания кольцо радиуса  $R$ . На каком расстоянии от стола упадет это кольцо? Шар такого же радиуса упадет на меньшем или большем расстоянии?

**6.23\***. Тонкая однородная палочка длины  $l$  и массы  $m$  кладется симметрично на две опоры, расстояние между которыми равно  $a$ . Одну из опор убирают. Найдите силу реакции оставшейся опоры в первый момент времени.

6.24\*. Невесомый стержень, на концах которого закреплены массы  $m$  и  $M$ , опирается серединой на жесткую подставку. В начальный момент стержень расположен



К задаче 6.23\*.

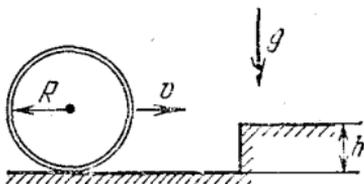


К задаче 6.24\*.

горизонтально, а скорость его равна нулю. С какой силой давит он в этот момент на подставку?

6.25. Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль, на полной скорости срывающийся в километровую пропасть.

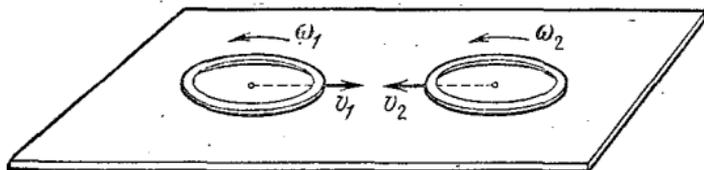
6.26\*. Найдите высоту подскока обруча радиуса  $R$ , налетающего на стенку высоты  $h$ , если его скорость  $v$ . Рассмотрите случай удара без трения и удара с трением, предположив, что проскальзывание отсутствует. До удара обруч не вращался.



К задаче 6.26\*.

6.27. При вертикальном падении на плоскость обруч отражается под углом  $30^\circ$  к вертикали. Радиус обруча  $R$ . С какой угловой скоростью вращался обруч до удара, если скорость его поступательного движения после удара равна  $v$ ?

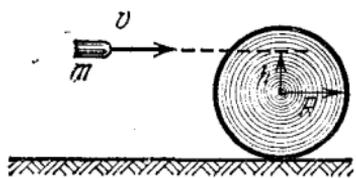
6.28. По горизонтальной гладкой поверхности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  движутся два одинако-



К задаче 6.28.

вых тонких кольца. Угловые скорости колец  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Определите угловые скорости колец после удара, если в последний момент удара проскальзывания колец относительно друг друга нет.

**6.29.** В цилиндр массы  $M$  и радиуса  $R$ , покоящийся на плоскости, попадает пуля массы  $m$ , летящая со скоростью  $v$ . Пуля летит параллельно плоскости на высоте  $h$  от центра цилиндра. Считая удар абсолютно неупругим и  $m \ll M$ , найдите линейную скорость центра и угловую скорость цилиндра. Трение отсутствует.

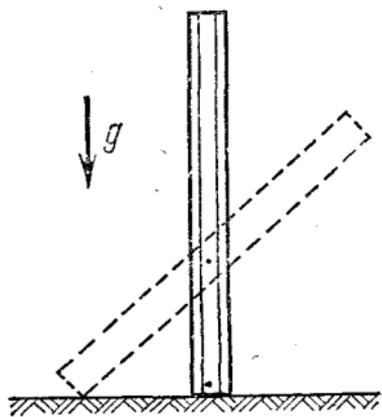


К задаче 6.29.

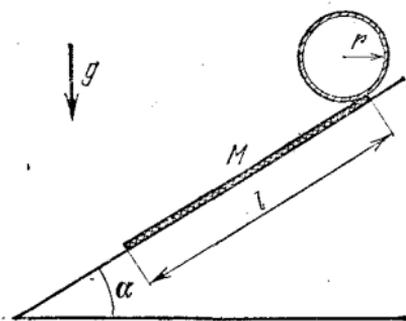
**6.30.** На покоящемся однородном горизонтальном диске массы  $M$  и радиуса  $R$  находится человек массы  $m$ . Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться. С какой угловой скоростью вращается диск, когда человек идет по окружности радиуса  $r$  вокруг оси диска со скоростью  $v$  относительно диска?

**6.31.** На краю свободно вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси диска, имеющего радиус  $R$  и момент инерции  $I$ , стоит человек массы  $m$ . Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится энергия системы при этом? Размерами человека по сравнению с размерами диска пренебречь.

**6.32\*.** Карандаш длины  $l$  падает из вертикального положения на гладкую горизонтальную поверхность. Определите скорость верхнего конца карандаша в момент удара его о поверхность.



К задаче 6.32\*.



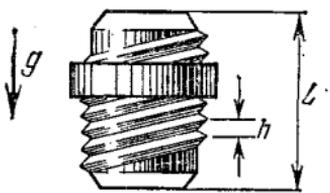
К задаче 6.33.

**6.33.** Тонкостенный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$  начинает скатываться с наклонной плоскости (начальная

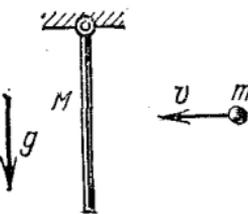
скорости  $v_0 = 0$ ), наматывая на себя тонкую липкую ленту, масса которой  $M$ , длина  $l$ . Какую скорость будет иметь центр цилиндра, когда вся лента будет намотана? ( $2\pi r \ll l$ .)

6.34. Гайка, масса которой сосредоточена по окружности радиуса  $R$ , соскальзывает без трения по резьбе стержня. Длина стержня  $L$ , шаг резьбы  $h$ . Найдите скорость гайки в момент, когда она оторвется от стержня.

6.35. Тонкий стержень массы  $M$  и длины  $l$  лежит на абсолютно гладкой поверхности. Шарик массы  $m$ , обладающий скоростью  $v$ , которая направлена перпендикулярно стержню, ударяется об один из концов. Считая удар абсолютно неупругим, найдите количество выделившегося тепла. Считая удар упругим, найдите скорость шарика после удара.



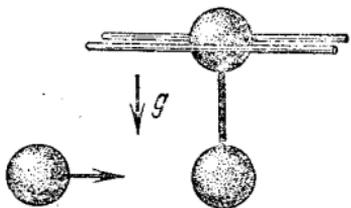
К задаче 6.34.



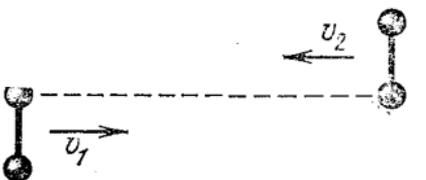
К задаче 6.36.

6.36. Однородный стержень массы  $M$  и длины  $l$  подвешен за конец на шарнире без трения. Небольшой кусок замазки массы  $m$  прилипает к стержню на уровне его середины. До прилипания скорость замазки была горизонтальна и равна  $v$ . Найдите максимальный угол отклонения стержня от вертикали.

6.37\*. Какой частью длинной палки надо ударить, чтобы рука не чувствовала удара?



К задаче 6.38.



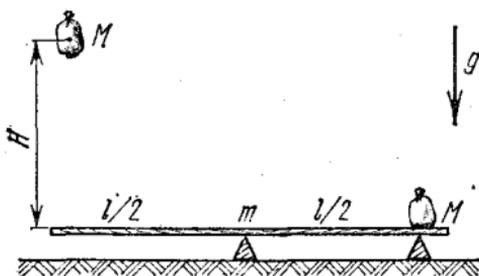
К задаче 6.39.

6.38. Гантель из двух шариков равных масс подвешена между двумя направляющими так, что верхний

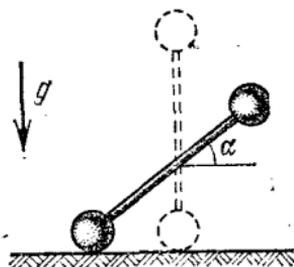
шарик может по ним свободно скользить в горизонтальном направлении. В нижний шарик абсолютно упруго ударяется летящий горизонтально шарик такой же массы. Какова должна быть скорость налетающего шарика, чтобы гантель могла занять горизонтальное положение? Расстояние между центрами шариков  $l$ .

**6.39.** Две одинаковые гантели летят навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  так, как изображено на рисунке. Расстояние между шариками гантели  $l$ . Как будут двигаться гантели после упругого удара?

**6.40\*.** На какую высоту можно подбросить мешок с песком с помощью доски массы  $m$  и длины  $l$ , если на другой конец этой доски с высоты  $H$  падает такой же мешок с песком? Масса мешка с песком  $M$ .



К задаче 6.40\*.



К задаче 6.42\*.

**6.41\*.** На круглую однородную платформу радиуса  $R$  падает мелкий дождь. Скорость капель  $v$ , их суммарная масса в единице объема  $\rho$ . Масса платформы вместе с водой  $M$ . Какую мощность должен иметь мотор, вращающий платформу, чтобы она вращалась с постоянной угловой скоростью  $\omega$ ? Трение капель о платформу большое, так что их радиальной скоростью при уходе с платформы можно пренебречь.

**6.42\*.** Определите силу, действующую на гладкую горизонтальную плоскость со стороны падающей гантели в момент, когда ось гантели составляет угол  $\alpha$  с горизонтом. Гантель начинает свое движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шара гантели  $m$ .

## § 2.7. Статика

**7.1.** На рисунке изображены системы, с помощью которых удерживается груз 10 кг. Тросы на рисунках изображены тонкими линиями, стержень — двойной линией.

В случае б) один конец стержня соединен со стенкой, а через другой конец переброшен трос. Определите натяжение тросов в случае а) и силу, действующую на стержень со стороны троса, в случае б).

7.2. Карандаш массы  $0,01$  кг стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. Когда пенал перевернули, карандаш стал давить на крышку в  $1,2$  раза сильнее. С какой силой он давил на нее первоначально?

7.3. Определите наибольшую высоту дома, который можно построить из кирпича, если предел прочности кирпича на сжатие равен  $10^7$  Па, плотность кирпича  $1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

7.4\*. Какой формы должно быть здание, чтобы давление вдоль вертикальной оси на любой высоте было одинаковым?

7.5. Через три отверстия в крышке стола пропущены нити, связанные с одного конца общим узлом. К другому концу каждой нити прикреплены одинаковые грузы. Найдите углы между нитями. Трения нет.

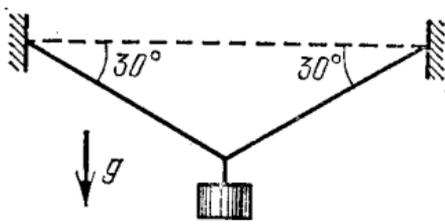
7.6. При каком угле наклона плоскости к горизонту шарик вылетит из лунки, которая расположена на этой плоскости? Глубина лунки в два раза меньше радиуса шарика.

7.7. Шарик радиуса  $r$  и массы  $m$  удерживается на неподвижном шаре радиуса  $R$  невесомой нитью длины  $l$ , закрепленной в верхней точке шара  $C$ . Других точек соприкосновения между нитью и шаром нет. Пренебрегая трением, найдите натяжение нити.

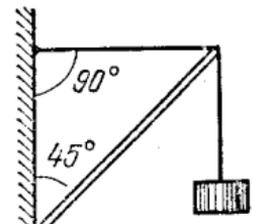
7.8. Два груза соединены невесомой нитью длины  $l$  и размещены на цилиндрической гладкой поверхности радиуса  $R$ . При равновесии угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку, где находится груз  $m_1$ , равен  $\alpha$ . Найдите массу второго груза.

7.9. Из проволоки изготовлена рама в форме прямоугольного треугольника и помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. По проволоке без трения скользят связанные нитью два груза масс  $m_1 = 0,1$  кг и  $m_2 = 0,3$  кг. Чему равно натяжение нити и угол  $\alpha$  в положении равновесия?

7.10. Два одинаковых цилиндра подвешены на нерастяжимых нитях одинаковой длины. Между ними положен цилиндр того же диаметра, но вдвое большей массы. Определите угол  $\beta$ , если угол между нитями равен  $\alpha$ . Трением пренебречь.

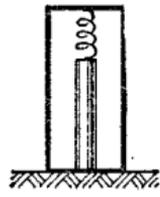
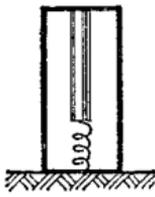


a)

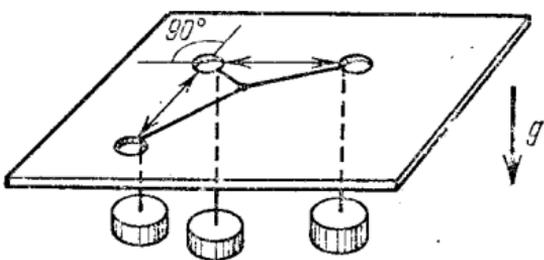


б)

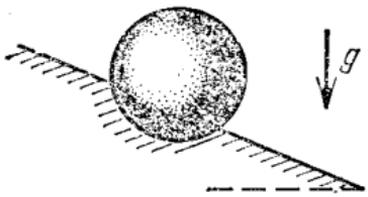
К задаче 7.1.



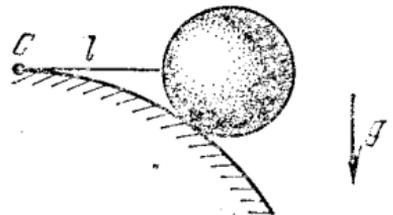
К задаче 7.2.



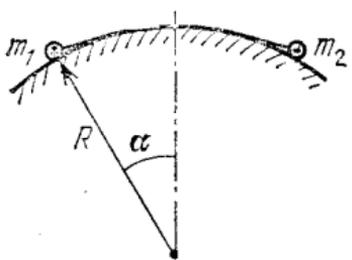
К задаче 7.5.



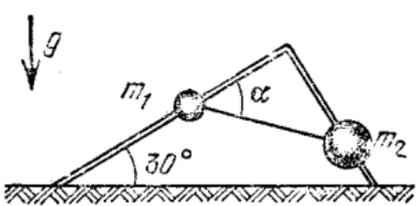
К задаче 7.6.



К задаче 7.7.



К задаче 7.8.



К задаче 7.9.

7.11. На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка  $A$ ), если к нему приложить силу  $F$ ? Жесткости пружин  $k$ .

7.12. Если к нижнему концу вертикально висящей пружины прикрепить груз, то ее длина станет равной  $l_1$ . Если этот же груз прикрепить к середине пружины, то ее длина станет  $l_2$ . Найдите длину недеформированной пружины.

7.13\*. Тело с расположенными на его сторонах клиньями установлено между двумя параллельными плоскостями так, как показано на рисунке. Найдите предельный угол при вершине клиньев, при котором тело может двигаться вправо и не может двигаться влево. Коэффициенты трения клиньев о плоскости и тело равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Силой тяжести пренебречь.

7.14. Каким должен быть коэффициент трения между шариком и плоскостями, чтобы шарик не «выскочил» из двугранного угла  $\alpha$ , составленного двумя плоскостями, при попытках уменьшить этот угол? Силой тяжести пренебречь.

7.15. Между двумя одинаковыми брусками квадратного сечения, лежащими на горизонтальной плоскости, вставлен клин такой же массы, но с сечением в виде равнобедренного треугольника. При каком максимальном коэффициенте трения брусков о плоскость они начнут разезжаться? Трения между клином и брусками нет.

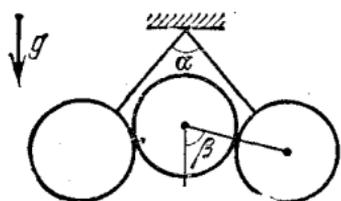
7.16\*. Система из стержней, соединенных шарнирами, нагружена гирей массы  $m$ , как показано на рисунке. Определите силу, растягивающую  $n$ -й верхний горизонтальный стержень.

7.17. Цепочка массы  $m$  подвешена за концы. Натяжение цепочки в нижней точке равно  $T$ . Найдите натяжение в точках подвеса.

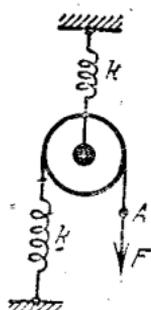
7.18\*. На цилиндрический столб намотан один виток каната. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда за один из его концов тянут с силой  $F$ , за второй конец каната нужно тянуть с силой  $f$ . Как изменится сила  $f$ , если на столб будет намотано  $n$  витков каната?

7.19\*. Веревка закручена вокруг столба на угол  $\theta$ . Коэффициент трения веревки о столб  $\mu$ . Какую минимальную силу нужно приложить к одному из концов веревки, чтобы уравновесить силу  $T_0$ , приложенную к другому концу?

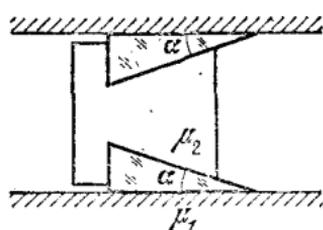
7.20. На рисунке изображены балки, на которых находятся по два груза масс 10 кг. Расстояние между опорами



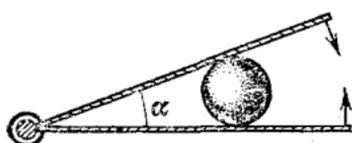
К задаче 7.10.



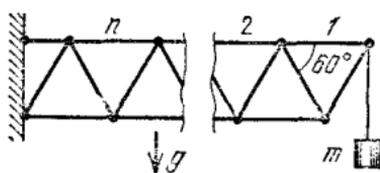
К задаче 7.11.



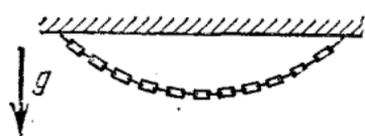
К задаче 7.13\*.



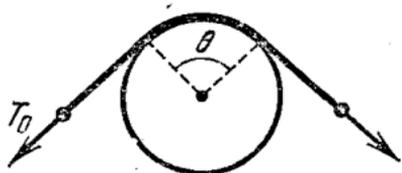
К задаче 7.14.



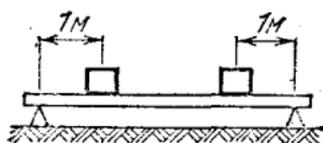
К задаче 7.16\*.



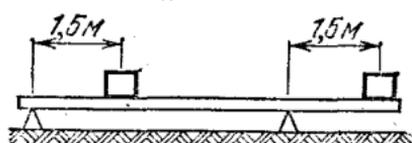
К задаче 7.17.



К задаче 7.19\*.

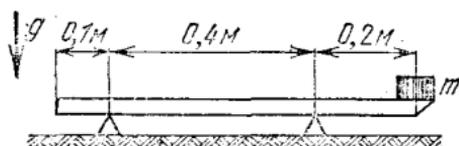


а)

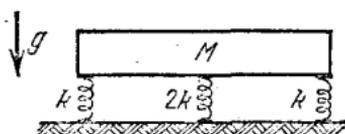


б)

К задаче 7.20.



К задаче 7.21.



К задаче 7.22.

балок 4 м. Найдите силы давления балок на опоры. Балки невесомы.

7.21. Линейка массы 0,01 кг лежит на двух опорах так, как показано на рисунке. На свободном конце линейки стоит груз массы  $m$ . При какой массе  $m$  возможно равновесие?

7.22. На три пружины одинаковой длины, жесткости которых равны  $k$ ,  $2k$  и  $k$ , положили балку так, как показано на рисунке. Определите силы, действующие на балку со стороны пружин. Масса балки  $M$ .

7.23. Неравноплечие весы уравновесили, положив дополнительный груз на одну из чаш весов. Можно ли теперь пользоваться этими весами для взвешивания так же, как и обычными?

7.24. При взвешивании на неравноплечих весах масса тела на одной чаше получилась равной 3 кг, а на другой 3,4 кг. Определите истинную массу тела.

7.25. Тяжелый стержень согнули в середине под углом  $90^\circ$  и подвесили свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует прикрепленная сторона?

7.26. Каким должен быть коэффициент трения однородного стержня о пол, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке? Длина нити  $AB$  равна длине стержня.

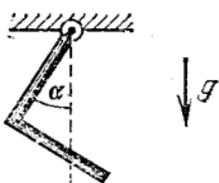
7.27. Тонкий лист бумаги прижат к столу однородным стержнем массы  $m$ , верхний конец которого шарнирно закреплен. Угол между стержнем и листом  $\alpha$ , коэффициент трения между ними  $\mu$ . Между столом и бумагой трение отсутствует. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к листу, чтобы вытащить его?

7.28. С какой силой давит на стенку цилиндрического стакана палочка массы  $M$ , наполовину погруженная в воду? Угол наклона палочки к горизонту  $\alpha$ . Трения нет.

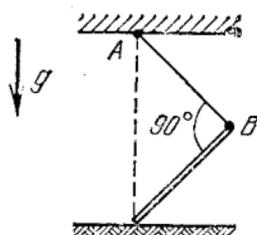
7.29\*. Однородная палочка имеет в лунке три положения равновесия. Докажите, что горизонтальное положение равновесия неустойчиво, если два других положения равновесия палочки устойчивы. Трения между концами палочки и стенками лунки нет.

7.30. В гладкой закрепленной полусфере свободно лежит палочка массы  $M$  так, что угол ее с горизонтом равен  $\alpha$ , а один конец выходит за край. С какими силами действует палочка на полусферу в точках соприкосновения  $A$  и  $B$ ?

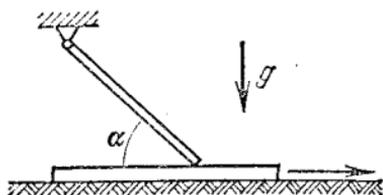
7.31. Гладкий круглый тонкий обруч массы  $m$  удерживается у стенки с помощью двух гвоздей. Первый из них



К задаче 7.25,



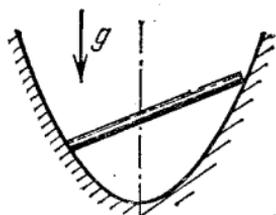
К задаче 7.26,



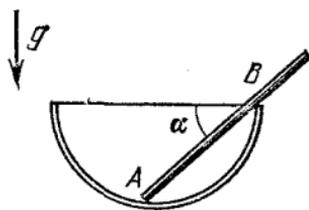
К задаче 7.27.



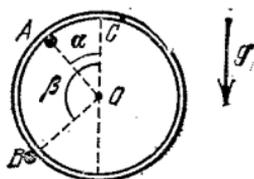
К задаче 7.28,



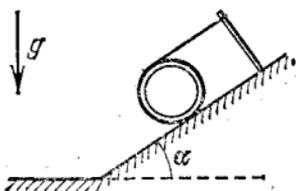
К задаче 7.29\*.



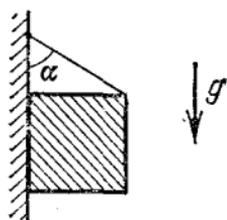
К задаче 7.30.



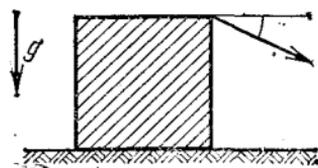
К задаче 7.31.



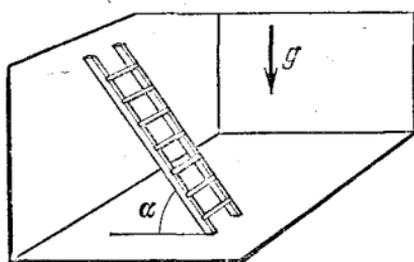
К задаче 7.32,



К задаче 7.33,



К задаче 7.34\*.



К задаче 7.35,

расположен внутри обруча (точка  $A$ ) и касается его так, что радиус, проведенный в точку касания  $A$ , составляет с вертикалью  $OC$  угол  $AOC = \alpha$ . Второй гвоздь находится вне обруча (точка  $B$ ), соответствующий угол  $BOC = \beta$ . Найдите, с какой силой обруч действует на каждый гвоздь. Трение отсутствует.

7.32. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости. Коэффициент трения цилиндра о плоскость  $\mu$ . При каком максимальном угле  $\alpha$  цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

7.33. К вертикальной плоскости прислонен кубик, удерживаемый за ребро веревкой. При каких значениях угла  $\alpha$  кубик находится в равновесии, если коэффициент трения кубика о плоскость равен  $\mu$ ?

7.34\*. На горизонтальной поверхности стоит куб. С какой минимальной силой и под каким углом к горизонту надо тянуть куб за верхнее ребро, чтобы он опрокинулся без проскальзывания, если коэффициент трения равен  $\mu$ ? Масса куба  $m$ .

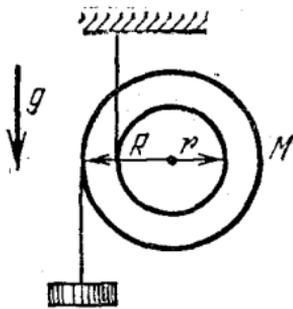
7.35. В комнате стоит лестница. Коэффициент трения нижнего конца лестницы о пол  $\mu_1$ , а коэффициент трения верхнего конца лестницы о стенку  $\mu_2$ . При каких углах  $\alpha$  лестница может стоять?

7.36. Катушка подвешена к потолку с помощью нити, намотанной по малому радиусу  $r$ . По большому радиусу  $R$  тоже намотана нить, на конце которой подвешен груз. Какой должна быть масса груза, чтобы система находилась в равновесии? Масса катушки  $M$ .

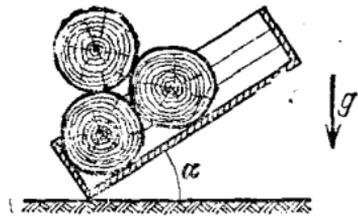
7.37\*. При каких углах  $\alpha$  три бревна в кузове грузовика будут располагаться так, как изображено на рисунке, если бревна одинаковы? Трением пренебречь.

7.38\*. К однородному бруску массы  $m$ , высоты  $h$  и длины  $l$  на краях жестко прикреплены опоры, размерами которых можно пренебречь. Какую горизонтальную силу необходимо приложить к бруску на высоте  $h/2$ , чтобы он двигался равномерно, если коэффициенты трения между опорами и горизонтальной плоскостью равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ?

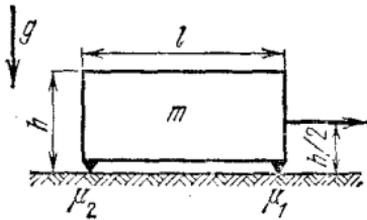
7.39. На катушку, лежащую на горизонтальном столе, давит клин, который может смещаться вдоль вертикальной плоскости  $AB$ . Коэффициенты трения катушки о клин и стол одинаковы и равны  $\mu$ . При каком значении  $\mu$  катушка сдвинется влево, вращаясь против часовой стрелки?



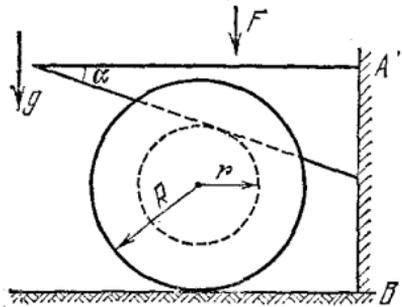
К задаче 7.36.



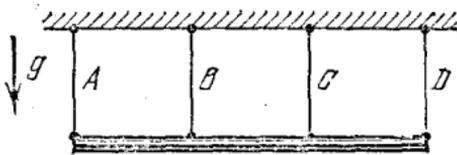
К задаче 7.37\*.



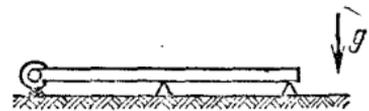
К задаче 7.38\*.



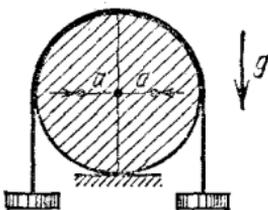
К задаче 7.39.



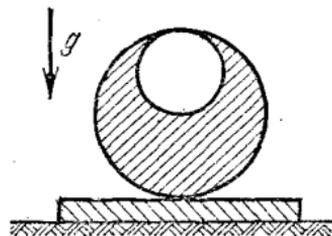
К задаче 7.40.



К задаче 7.41.



К задаче 7.42\*.

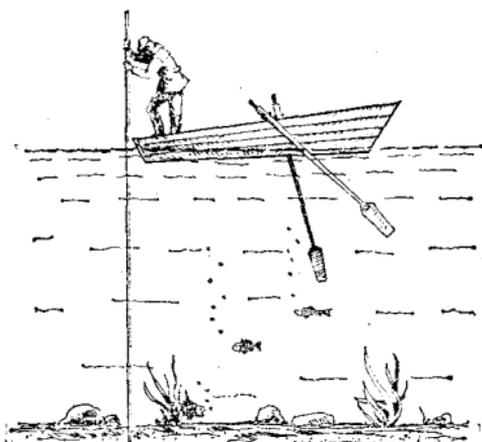


К задаче 7.43.

7.40. Однородная балка длины  $l$  висела на четырех одинаковых канатах, закрепленных на расстояниях  $l/3$  друг от друга. Канат  $A$  удалили. Для уменьшения опасности разрыва предлагают в этом случае удалить еще один канат. Разумно ли это предложение?

7.41. Конец балки массы  $m$  соединен с шарниром, относительно которого балка может свободно вращаться. Балка опирается на две одинаковые опоры, верхние участки которых в недеформированном состоянии находятся на одинаковом уровне с осью шарнира. Одна опора расположена в центре балки, вторая — на свободном конце балки. С какими силами давит балка на опоры? Деформация опор незначительна, поэтому положение балки практически горизонтально.

7.42\*. Цилиндр радиуса  $R$ , лежащий на подставке, разрезан пополам по вертикальной плоскости, проходящей через его ось. Масса каждой половины цилиндра  $M$ , а их центры масс находятся на расстоянии  $a$  от оси цилиндра. Чтобы цилиндр не распался, через него перекинута нить с одинаковыми грузами на концах. Найдите минимальную массу грузов, при которой возможно равновесие. Трения нет.



К задаче 7.44.

7.43. Параллельно оси цилиндра на расстоянии  $R/2$  от нее просверлено отверстие радиуса  $R/2$ . Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец. Найдите предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще может находиться в равновесии. Коэффициент трения  $\mu$ .

7.44. Рыбаку требуется передвинуть лодку. Для этого он ставит шест вертикально на дно водоема и, опираясь о край лодки, тянет шест на себя. Шест по дну не скользит, но может поворачиваться. Передвинется ли лодка?

## Глава 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### § 3.1. Малые отклонения от равновесия

1.1. Посередине натянутой струны длины  $2l$  прикреплен шар. Какая сила действует на него со стороны струны при поперечном смещении  $x \ll l$ ? Натяжение струны  $T$  не зависит от смещения. Почему при малых смещениях можно считать зависимость силы от  $x$  линейной? Как направлена сила по отношению к смещению?

1.2. На рисунке изображено состояние равновесия. Как зависит суммарная сила, действующая на тело, от его малых вертикальных смещений  $x$ ? Жесткости пружин  $k$ .

1.3\*. Пусть пружины не деформированы, а их длины равны  $l$ . Найдите силу, действующую на тело нулевой массы при малых горизонтальных смещениях  $x$ . Жесткости пружин  $k$ .

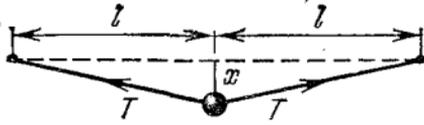
1.4. По изогнутой проволоке радиуса  $R$  может скользить груз массы  $m$ . Как зависит сила, действующая на груз, от смещений  $x$  в случае  $x \gg y$ ?

1.5. Грузик массы  $m$ , подвешенный на нити, колеблется в вертикальной плоскости.

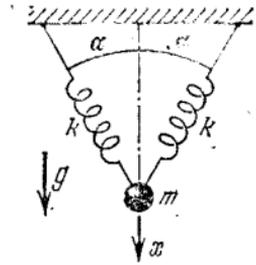
а) Убедитесь, что суммарная сила, действующая на грузик в точке  $C$ , зависит от амплитуды колебаний. Нарисуйте вектор этой силы в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $O$  ( $O$  — нижняя,  $A$  и  $B$  — крайние точки).

б) Найдите в точке  $C$  проекцию этой силы на направление движения. Почему она не зависит от амплитуды колебаний, а определяется только углом  $\alpha$ ? Введите смещение  $x$  вдоль траектории из нижней точки  $O$  и докажите, что при малых отклонениях проекция результирующей силы на направление траектории пропорциональна  $x$ .

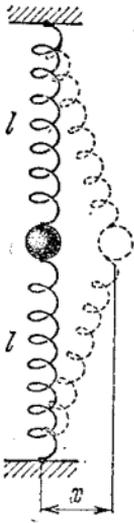
1.6. Найдите зависимость потенциальной энергии шара радиуса  $r$  и массы  $m$  от малого смещения  $x$  из положения равновесия вдоль траектории центра шара, если он скользит по поверхности лунки радиуса  $R$ .



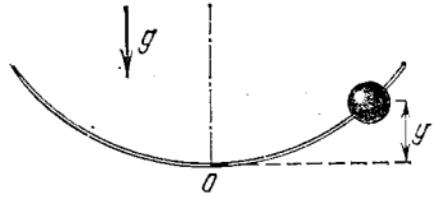
К задаче 1.1.



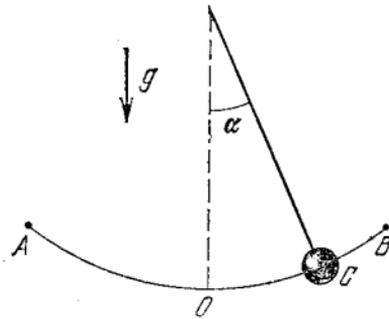
К задаче 1.2.



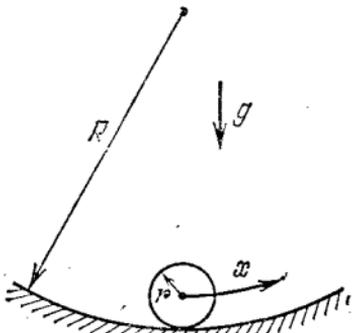
К задаче 1.3\*.



К задаче 1.4.



К задаче 1.5.



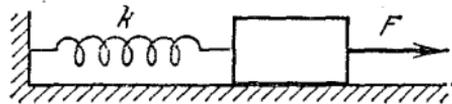
К задаче 1.6.



К задаче 1.7.

1.7. Бусинка с зарядом  $q$  может двигаться по натянутой нити длины  $2l$ , на концах которой закреплены неподвижные заряды  $Q$ . Найдите приращение потенциальной энергии при смещении бусинки на  $x$  вдоль нити из центра. Убедитесь, что при малых смещениях приращение потенциальной энергии зависит от  $x$  квадратично.

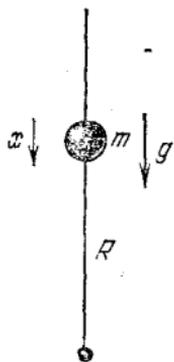
1.8. Стальной брусок прикреплен к пружине жесткости  $k$ . При любом его положении на брусок действует постоянная магнитная сила  $F$ . Как зависит суммарная сила, действующая на брусок, от смещения  $x$  из положения равновесия? Почему характер этой зависимости не связан со значением  $F$ ?



К задаче 1.8.

1.9\*. а) Небольшое заряженное тело массы  $m$  может скользить по вертикальной непроводящей спице, в нижней точке которой закреплен неподвижно заряд, одноименный с зарядом тела. В состоянии равновесия тело находится на расстоянии  $R$  от этого заряда. Как зависит сила, действующая на тело, от его малых смещений  $x$  из положения равновесия?

б) При неизменных зарядах массу тела увеличили втрое. Каково теперь расстояние от тела до нижнего конца спицы при равновесии? Как зависит сила, действующая на тело, от малых смещений из положения равновесия?



1.10. Частица массы  $m$  движется по окружности с центром в начале координат в плоскости  $xOy$  с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите проекции силы, действующей на частицу, на оси координат в момент, когда координаты частицы равны  $x$  и  $y$ .

1.11. Тело массы  $m$  совершает колебания на пружине так, что наибольшее значение модуля скорости равно  $v_0$ , а наибольшее отклонение от положения равновесия  $x_0$ . Найдите жесткость пружины.

1.12. Почему кажется, что быстро колеблющаяся на пружине лампочка вспыхивает в крайних точках?

1.13. Тело колеблется при наличии возвращающей силы, пропорциональной смещению, с амплитудой  $x_0$ . Во сколько раз время прохождения малого участка длины  $dx$  на расстоянии  $x$  от положения равновесия больше времени про-

хождения такого же участка  $dx$  около положения равновесия?

1.14\*. Пусть потенциальная энергия тела зависит от смещения  $x$  квадратично:  $U = kx^2/2$ , где  $k$  — жесткость. Если скорость тела в точке  $x$  равна  $v$  при амплитуде колебаний  $x_0$ , то чему равна скорость в точке  $nx$  при амплитуде  $nx_0$ ? Докажите независимость периода колебаний от амплитуды.

1.15. Назовем колебательную систему осциллятором (осцилляция — колебание). В дальнейшем будем считать, что потенциальная энергия осциллятора  $U = kx^2/2$ , а кинетическая  $K = mv^2/2$  (здесь  $x$  — отклонение от положения равновесия,  $v = dx/dt$ ,  $k$  и  $m$  — постоянные коэффициенты). Откладывая по абсциссе координату, а по ординате скорость, изобразите зависимость скорости от координаты осциллятора при полной его энергии  $E$ . Диаграмма  $v — x$  называется фазовой диаграммой, а график зависимости  $v$  от  $x$  — фазовой кривой. Изобразите фазовые кривые для нескольких значений полной энергии. Обдумайте, что означает замкнутость этих кривых.

1.16\*. Фазовые кривые (см. задачу 1.15) приобретают особенно простой вид, если по ординате откладывать величины  $u = \sqrt{mv}$ , а по абсциссе  $q = \sqrt{kx}$ . Убедитесь, что на  $u — q$ -диаграмме фазовая кривая осциллятора — окружность. Каков ее радиус?

Каждому состоянию осциллятора — координате и скорости — отвечает точка на этой фазовой диаграмме. Как с течением времени движется эта точка по фазовой кривой? В каком направлении?

1.17. При фиксированной полной энергии  $E$  состояние осциллятора можно задать углом  $\varphi$ , отсчитываемым от оси  $q$  по часовой стрелке до направления на точку  $u — q$ -диаграммы (см. задачу 1.16\*), изображающую состояние. Этот угол называют фазой. Выразите координату и скорость через фазу  $\varphi$ . Прделайте то же самое, если известна не полная энергия, а наибольшее отклонение  $A$ .

1.18\*. Чтобы при известной полной энергии установить зависимость состояния осциллятора от времени, достаточно найти, как меняется со временем фаза (см. задачу 1.17). Найдите скорость движения точки по фазовой кривой. Для этого выразите сначала через  $u$  и  $q$  составляющие этой скорости по абсциссе и ординате, исходя из равенств  $dx/dt = v$  и  $dv/dt = -(k/m)x$ , а затем воспользуйтесь теоремой Пифагора. Докажите теперь, что угловая скорость на фазовой диаграмме  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

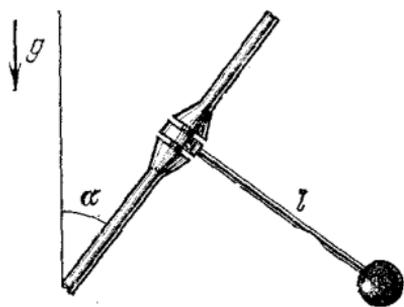
### § 3.2. Период и частота свободных колебаний

2.1. Груз колеблется по вертикали на резиновом шнуре. Во сколько раз изменится период колебаний, если груз подвесить на том же шнуре, сложенном вдвое?

2.2. Неподвижный груз, подвешенный на пружине, растягивает ее на длину  $l$ . Каков период вертикальных колебаний груза?

2.3. Найдите длину математического маятника, период малых колебаний которого 1 с. Принять  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

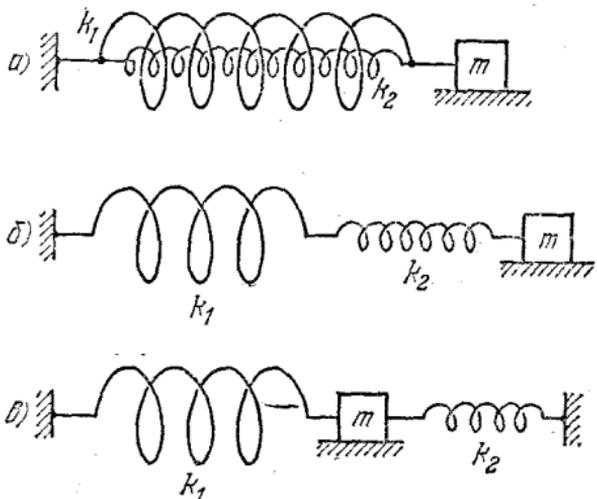
2.4. Чтобы сделать период колебаний маятника больше без чрезмерного увеличения его размеров, ось маятника устанавливают под углом  $\alpha$  к вертикали. Маятник представляет собой легкий и жесткий стержень длины  $l$  с грузом на конце. Определите период малых колебаний.



К задаче 2.4.

2.5. Найдите период малых колебаний математического маятника длины  $l$ , если на пути нити на расстоянии  $l/2$  по вертикали от точки подвеса вбит гвоздь.

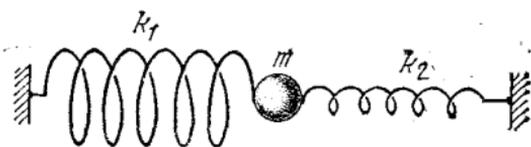
2.6. Найдите период колебаний осцилляторов, изображенных на рисунке. Зависит ли в случае в) период от



К задаче 2.6.

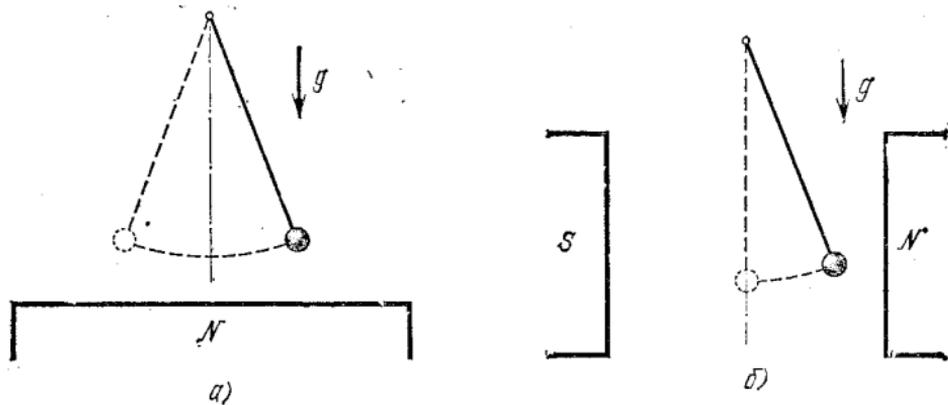
расстояния между стенками?  $k_1$  и  $k_2$  — жесткости пружин,  $m$  — масса тела.

2.7. Две недеформированные пружины жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  прикреплены к стенкам. Между ними, касаясь свободных концов, находится шарик массы  $m$ . Найдите период горизонтальных колебаний шарика, если он не прикреплен к пружинам. Как относятся наибольшие отклонения шарика влево и вправо от положения равновесия?



К задаче 2.7,

2.8. а) Математический маятник — железный шарик массы  $m$ , висящий на длинной нити, — имеет период  $T_0$ . В присутствии магнита, расположенного чуть ниже шарика по вертикали, период колебаний стал  $T$ . Определите действующую на шарик магнитную силу.



К задаче 2.8,

б) Шарик этого маятника поместили между полюсами магнита, так что на него действует горизонтальная магнитная сила. Найдите ее и новое положение равновесия, если период малых колебаний стал  $T$ .

2.9\*. Вблизи рудного месторождения период колебаний маятника изменился на 0,1 %. Плотность руды в месторождении  $8 \text{ г/см}^3$ . Оцените размер месторождения, если средняя плотность Земли  $5,6 \text{ г/см}^3$ , ее радиус  $6400 \text{ км}$ .

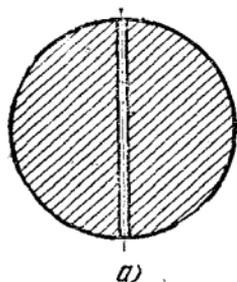
2.10. Измерения частоты собственных колебаний массы  $m$ , закрепленной посередине струны длины  $2l$ , дали значение  $\omega$  (\*). Найдите натяжение струны.

2.11. Найдите частоты малых колебаний систем, описанных в задачах 1.7 и 1.9\*.

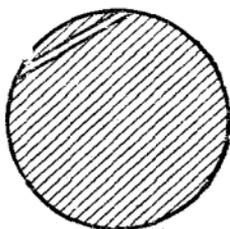
\*)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ , где  $T$  — период колебаний.

2.12. а) Определите время полета камня с одной стороны Земли на другую по прямому туннелю, прорытому через ее центр. Плотность Земли считать постоянной, ее радиус 6400 км. Вращением Земли пренебречь.

б) Через Землю прорыт прямой туннель, не проходящий через центр Земли. Определите время движения поезда с выключенными двигателями по такому туннелю, если трения нет. Вращением Земли пренебречь.

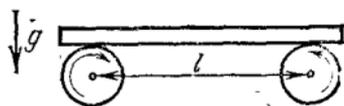


а)



б)

К задаче 2.12,



К задаче 2.13,

2.13. Доска массы  $m$  лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков  $l$ , коэффициент трения при скольжении доски по катку  $\mu$ . Найдите частоту колебаний.

2.14\*. Тележка едет по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, с ускорением  $a$ . Найдите период малых колебаний маятника длины  $l$ , установленного на тележке.

2.15\*. Космический корабль вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Как зависит период малых колебаний маятника длины  $l$  от расстояния  $R$  точки подвеса до оси вращения?

2.16. Шарик массы  $m$  вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси, с которой он соединен пружиной жесткости  $k$ . Определите частоту малых колебаний шарика вдоль пружины.

2.17. Муфта массы  $m$  надета на гладкую горизонтальную спицу. К ней привязана нить, перекинута через блок. На другом конце нити привязан груз массы  $M$ . Почему при малых колебаниях муфты изменением натяжения нити из-за вертикальных колебаний груза можно пренебречь? Найдите частоту колебаний муфты. Какова частота колебаний груза?

2.18\*. Воздушный шарик при слабом ударе о стенку деформируется, как показано на рисунке. При этом  $x$  много меньше радиуса шарика  $R$ . Можно считать, что избыточное давление  $\Delta P$  воздуха в шарике не меняется при ударе. Пренебрегая упругостью оболочки, оцените время соударения со стенкой. Масса шарика  $m$ .

2.19. Силы, действующие на частицы, направлены к некоторой оси  $OO'$  и пропорциональны расстоянию до нее:  $F = -kr$ . У пучка частиц массы  $m$  в сечении  $O$  скорости  $v_0$  параллельны оси. Докажите, что частицы будут собираться (фокусироваться) в определенных точках оси.

2.20. Из точки, лежащей на нижней образующей горизонтального цилиндрического желоба радиуса  $R$ , под небольшим углом к образующей вылетел со скоростью  $v_0$  маленький шарик. Сколько раз он пересечет нижнюю образующую желоба на длине  $l$ ?

2.21. Метроном представляет собой легкий стержень, на нижнем конце которого на расстоянии  $l$  от оси находится масса  $M$ . Выше оси подвижный грузик  $m$  можно фиксировать на стержне на разных расстояниях  $x$  от оси, тем самым подбирая нужную частоту колебаний. Считая массы точечными, найдите, как частота зависит от  $x$ .

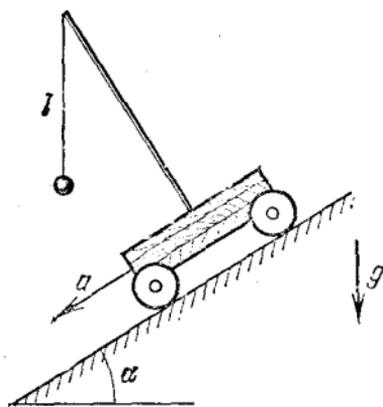
2.22. Как изменится частота малых колебаний маятника в виде груза на легком стержне, если к середине стержня прикрепить горизонтальную пружину жесткости  $k$ ? На рисунке изображено состояние равновесия.

2.23. К колесу радиуса  $R$  с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе грузик массы  $m$ . Найдите массу колеса, предполагая ее однородно распределенной по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна  $\omega$ .

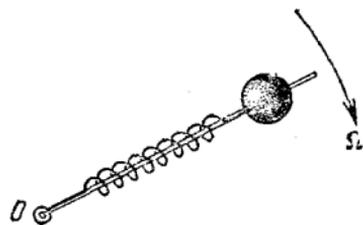
2.24. В сферической лунке радиуса  $R$  находятся две точечные массы, соединенные невесомым стержнем длины  $2l$ . Определите частоту малых колебаний системы при движении в плоскости рисунка и при движении перпендикулярно этой плоскости. Трения нет.

2.25. Пружина жесткости  $k$  присоединена к оси колеса массы  $m$ , которое способно катиться без проскальзывания. Какова частота колебаний системы? Масса колеса однородно распределена по ободу.

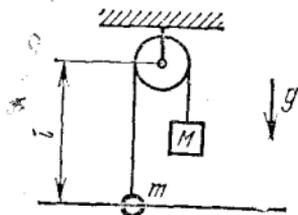
2.26\*. Найдите частоту колебаний системы, описанной в задаче 1.6, при отсутствии проскальзывания. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр, равен  $\frac{2}{5}mr^2$ .



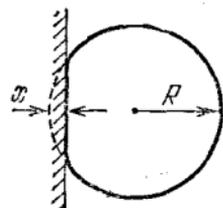
К задаче 2.14\*.



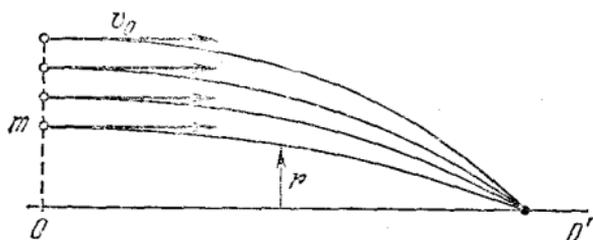
К задаче 2.16.



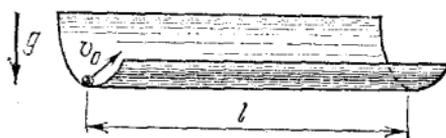
К задаче 2.17.



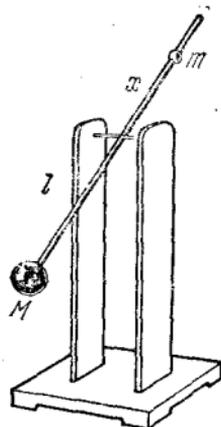
К задаче 2.18\*.



К задаче 2.19.



К задаче 2.20.



К задаче 2.21.

2.27. Два тела масс  $m_1$  и  $m_2$  связаны пружиной жесткости  $k$ . Какова частота свободных колебаний такой системы?

2.28. Как относятся частоты колебаний молекул  $H_2$  и  $HD$  ( $D$  — атом дейтерия)?

2.29\*. Возможны два типа линейных колебаний молекулы углекислого газа: а) ядра кислорода движутся в противоположные стороны, а ядро углерода остается на месте; б) ядра кислорода движутся с одинаковыми скоростями в направлении, противоположном направлению движения ядра углерода. Определите отношение частот этих колебаний.

2.30. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массы  $M$  с установленным на ней математическим маятником длины  $l$  и массы  $m$ . Найдите период малых колебаний системы.

2.31. Четыре одинаковые массы  $m$  соединены одинаковыми пружинами жесткости  $k$ . Одновременно всем четырем массам сообщили равные скорости, направленные к центру квадрата. Через какое время после этого пружины будут: а) сильнее всего сжаты; б) сильнее всего растянуты?

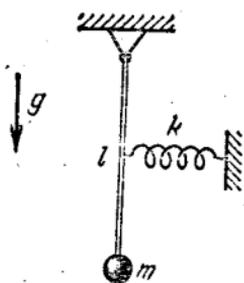
2.32. Момент сил, возникающий при закручивании проволоки, пропорционален углу закручивания. К проволоке прикреплена чашка с известным моментом инерции  $I_0$  относительно оси кручения проволоки. Каков момент инерции груза относительно этой же оси, если после его прикрепления к чашке период крутильных колебаний изменился от  $T_0$  до  $T$ ?

2.33. Найдите период колебаний жидкости в U-образном сосуде постоянного сечения. Общая длина части сосуда, занятого жидкостью, равна  $l$ .

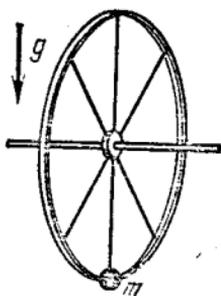
2.34\*. Вертикальная перегородка в высоком сосуде разделяет его на две сообщающиеся части с разными сечениями. Найдите период малых колебаний жидкости, считая, что свободная поверхность жидкости в каждой части остается горизонтальной. Начальная глубина жидкости  $H$ .

2.35. Определите частоту малых вертикальных колебаний длинного цилиндрического ареометра, погруженного в состоянии равновесия в жидкость на глубину  $H$ . Жидкость налита в узкий цилиндрический стакан (радиус стакана много меньше  $H$ ).

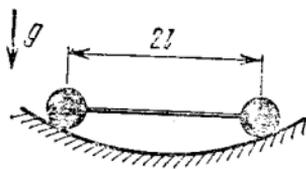
2.36. После загрузки лайнера период малых колебаний его по вертикали изменился от 7 до 7,5 с. Какова общая



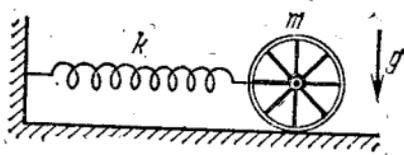
К задаче 2.22,



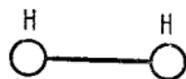
К задаче 2.23,



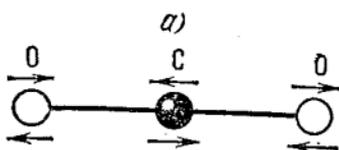
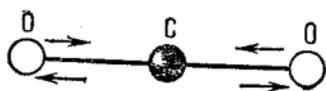
К задаче 2.24,



К задаче 2.25,

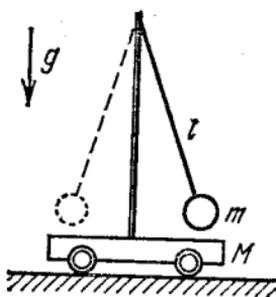


К задаче 2.28,

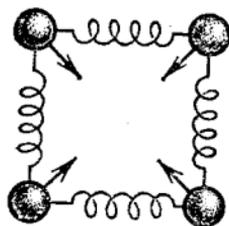


б)

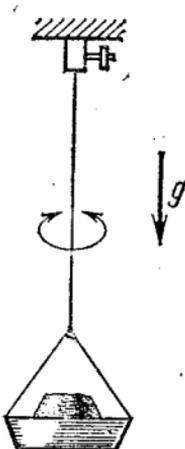
К задаче 2.29\*,



К задаче 2.30,



К задаче 2.31,



К задаче 2.32,



К задаче 2.34\*.

масса груза? Сечение по ватерлинии  $S = 500 \text{ м}^2$ . Характер вовлечения воды в движение считать неизменившимся при загрузке.

### § 3.3. Гармоническое движение

3.1\*. На рисунке приведены графики зависимости от времени давления и объема воздуха в легких. Отсчет ведется от средних значений. В хорошем приближении обе зависимости можно считать гармоническими. Определите сдвиг фазы. Насколько обоснованно предположение, что избыточное давление  $\Delta P$  пропорционально  $dV/dt$  — объему воздуха, протекающему в единицу времени?

3.2. Тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине, свободно колеблется. Координата тела зависит от времени по закону  $A \cos \omega t$ . Как меняются со временем скорость и ускорение? Чему равна жесткость пружины?

3.3. Амплитуда колебаний математического маятника 5 мм, длина его нити 1 м. Как зависит смещение шарика маятника от времени? За начало отсчета времени принять: а) момент прохождения нижнего положения слева направо; б) момент прохождения крайнего правого положения.

3.4. Груз, свободно колеблющийся на пружине, за время 0,01 с сместился с расстояния 0,5 см от положения равновесия до наибольшего, равного 1 см. Каков период колебаний?

3.5. Частота свободных колебаний осциллятора  $\omega$ . Через какое наименьшее время кинетическая энергия осциллятора уменьшится от наибольшего значения до его половины?

3.6. К наклонной стене подвешен маятник длины  $l$ . Маятник отклонили от вертикали на малый угол, в два раза больший угла наклона стены к вертикали, и отпустили. Найдите период колебаний, если удары о стену абсолютно упругие.

3.7. Один конец пружины прикреплен к стене, на втором — шарик, колеблющийся с амплитудой  $a$  и периодом  $T_0$ . На каком расстоянии от положения равновесия нужно поставить плиту, чтобы период колебаний стал  $T$  вместо  $T_0$ ? Удары о плиту абсолютно упругие.

3.8\*. Стрелок пытается попасть в диск радиуса  $R$ , который колеблется гармонически так быстро, что стрелок не может за ним уследить. Тогда он стреляет в центр области движения. С какой вероятностью стрелок попадет

в диск, если амплитуда колебаний центра  $l$  много больше  $R$ ? Если  $l = 2R$ ? Увеличится ли вероятность попадания, если стрелок будет стрелять в точку на расстоянии  $R$  от края области?

**3.9.** По гладкой горизонтальной плоскости скользит в продольном направлении тонкий однородный брусок длины  $l$ . Скорость бруска  $v$ . Брусок наезжает на обширный шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения  $\mu$ . Через какое время брусок остановится?

**3.10.** К одному концу первоначально недеформированной пружины жесткости  $k$  прикреплен груз массы  $m$ , другой же конец стали тянуть с постоянной скоростью  $u$  вдоль пружины. На расстоянии  $d$  от начального положения этот конец пружины снова резко остановили. При каких скоростях  $u$  груз после остановки не будет колебаться? Сформулируйте аналогичную задачу для математического маятника.

**3.11.** Двум одинаковым маятникам с общей точкой подвеса сообщили толчком одинаковые скорости, но одному из них на небольшое время  $\tau$  позже. Когда маятники встретятся, если период их колебаний  $T$ ?

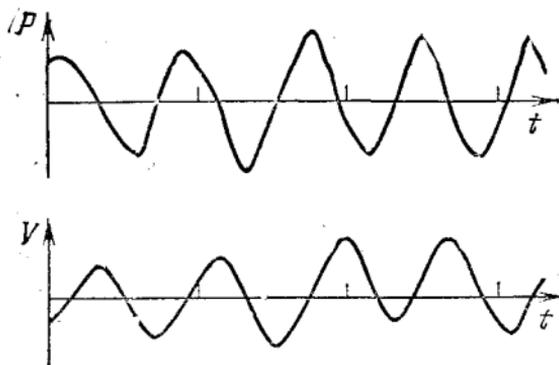
**3.12.** На подставке лежит тело массы  $m$ , подвешенное на пружине жесткости  $k$ . Подставку мгновенно убирают. Опишите движение тела после этого, если первоначально пружина: а) не деформирована; б) сжата на  $l$ .

**3.13.** В тело массы  $M$ , связанное со стенкой пружиной жесткости  $k$ , попадает и застревает пуля массы  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ . Выбрав момент попадания пули за начало отсчета времени, найдите зависимость скорости и координаты тела от времени.

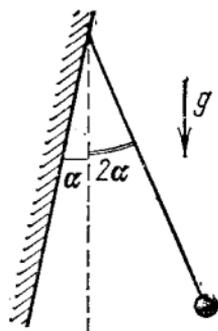
**3.14.** По горизонтальной плоскости со скоростью  $v$  скользят два шарика равных масс  $m$ , связанные недеформированной пружиной жесткости  $k$ . Они налетают на вертикальную упругую стенку. Опишите движение шариков в дальнейшем. Произойдет ли повторный удар о стенку?

**3.15.** На тело, связанное со стенкой пружиной и находящееся в равновесии, начала действовать вдоль пружины постоянная сила  $F$ . Чему равно наибольшее натяжение пружины и через какое время после включения силы  $F$  оно достигается? Период свободных колебаний тела на пружине  $T$ .

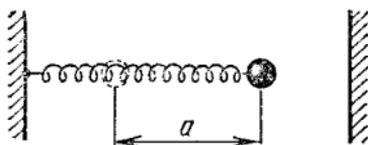
**3.16\*.** В момент времени  $t_0$  координата осциллятора  $x_0$ , а скорость  $v_0$ . Докажите, что зависимость его координаты от времени при свободных колебаниях можно пред-



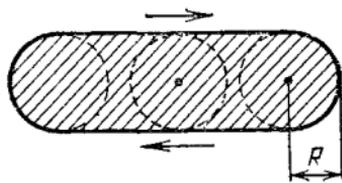
К задаче 3.1\*.



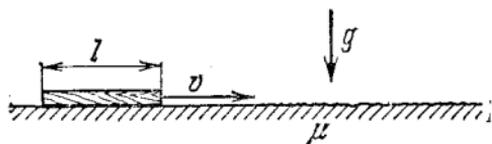
К задаче 3.6.



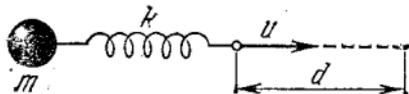
К задаче 3.7.



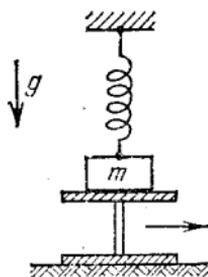
К задаче 3.8\*.



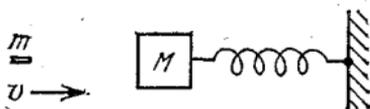
К задаче 3.9.



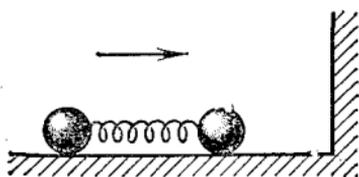
К задаче 3.10.



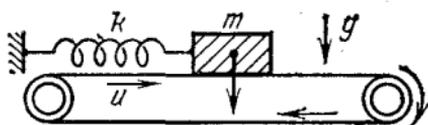
К задаче 3.12.



К задаче 3.13.



К задаче 3.14.



К задаче 3.18\*.

ставить как

$$x = x_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega (t - t_0).$$

3.17. Тело массы  $m$  колеблется на пружине по закону  $x = A_0 \cos \omega t$ . С момента времени  $t_0$  на него начинает действовать вдоль пружины постоянная сила  $F$ . Определите амплитуду колебаний относительно нового положения равновесия. При каком выборе  $t_0$  эта амплитуда наибольшая? Наименьшая?

3.18\*. На горизонтальной ленте транспортера, движущейся со скоростью  $u$ , находится груз массы  $m$ , связанный пружиной жесткости  $k$  с неподвижной стенкой. Коэффициент трения между грузом и лентой  $\mu$ . Пусть в начальный момент пружина не деформирована и груз движется вместе с лентой. Определите амплитуду возникших колебаний.

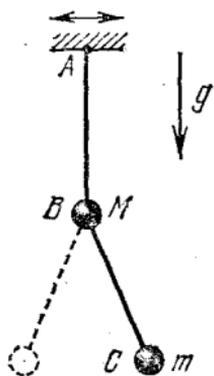
3.19\*. Пусть в условиях задачи 3.18\* начальная скорость груза нулевая. При какой скорости ленты  $u$  движение с самого начала будет гармоническим? Найдите амплитуду установившихся колебаний.

3.20\*. На горизонтальной плоскости лежит тело массы  $M$ , связанное пружиной жесткости  $k$  с неподвижной стенкой. Тело оттянули на расстояние  $l$  от положения равновесия и отпустили. После  $n$  колебаний тело остановилось. Чему равен коэффициент трения между телом и плоскостью, если после остановки пружина оказалась недеформированной?

3.21. К маятнику  $AB$  с шариком массы  $M$  подвешен маятник  $BC$  с шариком массы  $m$ . Точка  $A$  совершает гармонические колебания по горизонтали с частотой  $\omega$ . Найдите длину нити  $BC$ , если известно, что нить  $AB$  все время остается вертикальной.

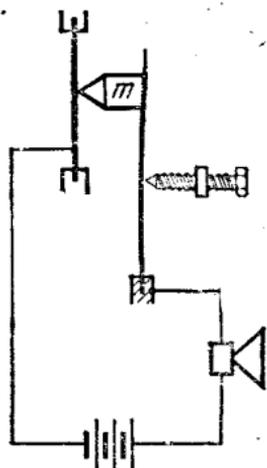
3.22. Тело массы  $m$  колеблется по закону  $x = A \cos (\omega t + \varphi)$ . Найдите зависимость силы, действующей на тело, от времени. Чему равно наибольшее значение силы? В какие моменты модуль силы проходит наибольшее значение?

3.23. Горизонтальная мембрана совершает гармонические колебания по вертикали с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . На мембране лежит маленький груз. При каком условии он будет колебаться вместе с мембраной, а при каком — начнет подскакивать? Ниже или выше среднего положения мембраны происходит отрыв?



К задаче 3.21.

3.24. Для измерения малых амплитуд колебаний мембраны, совершающей гармонические колебания высокой частоты  $\omega$ , применяется «молоточек». Молоточек массы  $m$  прижимается к мембране с силой  $F$ , которая регулируется микрометрическим винтом. Когда контакт молоточка с мембраной прерывается, прерывается ток в цепи и в телефоне слышно дребезжание. Определите амплитуду колебаний, если дребезжание началось как раз со значения силы  $F$ .

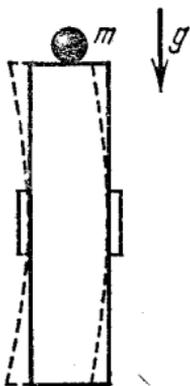


К задаче 3.24.

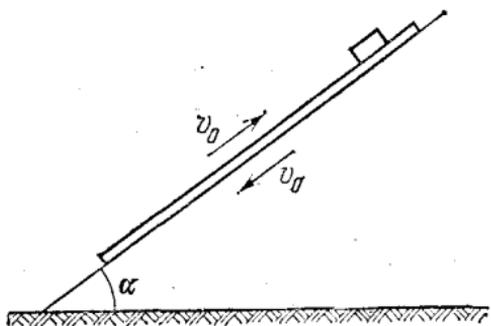
3.25. На горизонтальной плите лежит груз. Плиту начинают двигать по вертикали с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . На какую высоту от начального положения подскочит груз после отрыва?

3.26\*. С какой амплитудой должна колебаться плита (см. задачу 3.25), чтобы наступил своеобразный резонанс: груз, подбрасываемый плитой, после каждого удара увеличивал бы свою высоту подъема? Удары считать абсолютно упругими.

3.27\*. Пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой  $10^{-6}$  см и частотой  $\omega = 10^7$  с $^{-1}$ . Положим тело массы



К задаче 3.27.



К задаче 3.30\*.

$m$  на торец пластинки. Коэффициент трения между телом и пластинкой равен 1. Оцените, при каких амплитудах наличие этой массы, сравнимой с массой пластинки, существенно влияет на частоту колебаний пластинки.

3.28. Поверхность тел, колеблющихся с ультразвуковой частотой, кажется скользкой на ощупь, а тела, помещенные

на эту поверхность, «плывут» по ней от малейшего усилия. Объясните это.

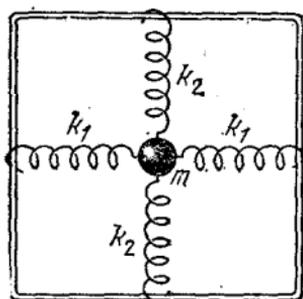
3.29\*. В условиях задачи 3.27 оцените наибольшую скорость тела массы  $m$  в установившемся колебательном режиме. Для этого разберитесь, каков характер установившегося движения этого тела.

3.30\*. Наклонная плоскость гармонически колеблется с большой частотой вдоль своей поверхности. Каково установившееся движение тела на ней? Какова его средняя скорость за большое время, если  $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$  ( $\alpha$  — угол наклона плоскости к горизонту  $\mu$  — коэффициент трения тела о плоскость)? Амплитуда скорости наклонной плоскости  $v_0$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

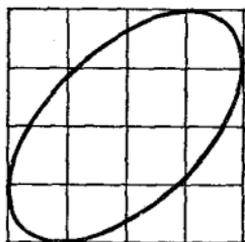
### § 3.4. Наложение колебаний

4.1. Концы пружин могут скользить без трения по неподвижной рамке, другими концами они прикреплены к телу массы  $m$ . Какой характер носит движение тела в общем случае? Пусть  $k_1 \neq k_2$ . Какие тогда прямолинейные движения возможны и как их возбудить? На тело после возбуждения колебаний действуют только силы пружин.

4.2. Пусть в условиях задачи 4.1  $k_1 = k_2 = k/2$ . Убедитесь, что в плоскости рамки возможны прямолинейные колебания любого направления. Как нужно возбудить колебания, чтобы движение происходило по окружности? Докажите, что при любом способе возбуждения траектория движения замкнутая, и найдите полное время оборота.



К задаче 4.1.



К задаче 4.3.

4.3. Движение луча осциллографа по экрану происходит по закону

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad y = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Для удобства измерений перед экраном помещена квадратная сетка. Определите по рисунку сдвиг фазы.

4.4\*. В условиях задачи 4.3 определите, при каком сдвиге фазы на экране виден отрезок; окружность. За время  $2\pi/\omega$  след луча на экране не успевает погаснуть. Докажите, что в случае произвольного постоянного  $\varphi$  след луча на экране представляет собой эллипс с полуосями, лежащими на диагоналях квадрата. Найдите эти полуоси.

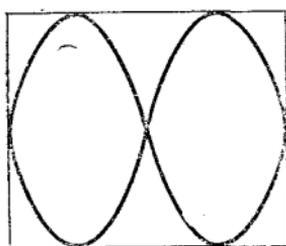
4.5. При изучении гармонических колебаний осциллятора сигнал, пропорциональный его смещению, подается на пластины  $x$  осциллографа, а пропорциональный скорости, — на пластины  $y$ . Какую картину мы увидим на экране?

4.6. Отклонение луча осциллографа:

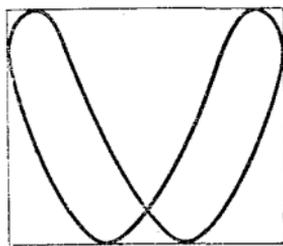
$$x = A \cos(\omega - \Omega/2)t, \quad y = A \cos(\omega + \Omega/2)t,$$

где  $\Omega$  много меньше  $\omega$ , причем след луча на экране гаснет за малую долю времени  $2\pi/\Omega$ . Какую картину мы увидим на экране осциллографа?

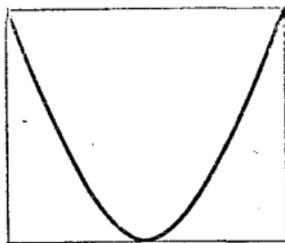
4.7. На пластины  $x$  и  $y$  осциллографа подают гармонические сигналы, и на экране видны картинki, изображенные



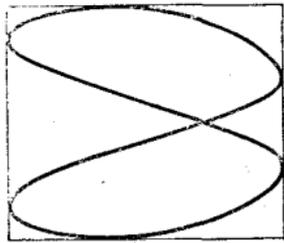
а)



б)



в)



г)

К задаче 4.7.

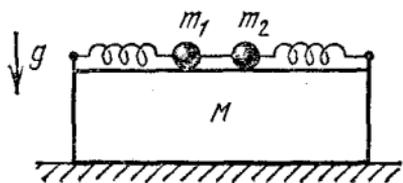
на рисунке. Как относятся периоды колебаний по  $x$  и  $y$  в случаях а) — г)?

4.8. Точка, гармонически колеблющаяся по  $x$  и  $y$ , описывает линии, которые называют фигурами Лиссажу. Докажите, что если частоты относятся как целые числа, то

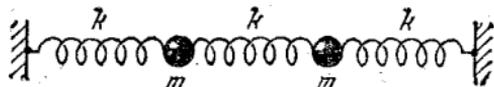
эти фигуры — замкнутые кривые. Какой вид они имеют при равных частотах?

4.9. Докажите, что если амплитуда колебаний по  $x$  равна  $A$ , а по  $y$  —  $B$ , то фигура Лиссажу вписывается в прямоугольник со сторонами  $2A$  по  $x$  и  $2B$  по  $y$ . Пусть фигура касается горизонтальных сторон этого прямоугольника в точках  $p$ , а вертикальных — в  $q$ . Как относятся частоты?

4.10\*. Два шарика масс  $m_1$  и  $m_2$  могут колебаться на одинаковых пружинах, скользя по бруску массы  $M$  без трения. Брусок лежит на горизонтальной плоскости. Шарик связан нитью, натяжение которой  $T$ . Нить пережигают. При каком наименьшем коэффициенте трения  $\mu$  между плоскостью и бруском он не сдвинется с места?



К задаче 4.10\*.



К задаче 4.14.

4.11\*. Концы пружины жесткости  $k$  перемещают в продольном направлении по гармоническому закону:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2);$$

при этом среднее натяжение пружины нулевое. Как меняется натяжение со временем? Определите наибольшую и среднюю энергии пружины. При какой разнице фаз средняя энергия наибольшая? Наименьшая?

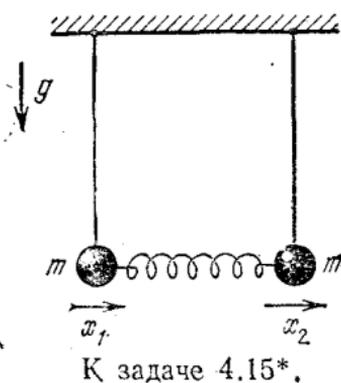
4.12\*. Пусть концы пружины (см. задачу 4.11\*) колеблются с разной частотой:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t.$$

Как в этом случае меняется натяжение пружины со временем? В случае близких частот постройте график зависимости натяжения от времени. Почему здесь говорят о биениях? Определите в случае неравных амплитуд и частот среднюю энергию пружины за большое время.

4.13. Частица колеблется по закону  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$  при наличии силы  $F = F_0 \cos \omega t$ . Какова средняя мощность этой силы?

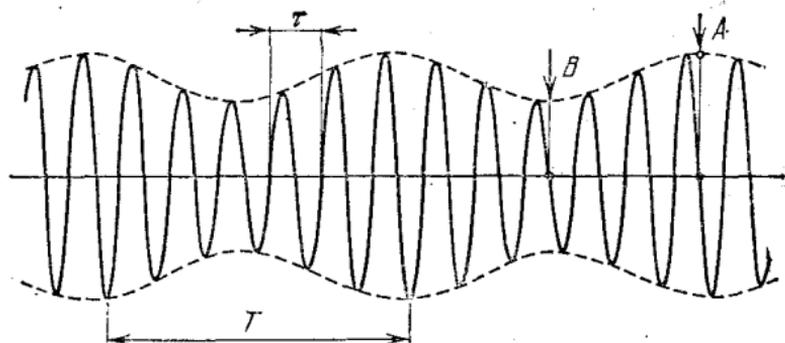
**4.14.** Свободные колебания сложных систем можно представить как наложение нескольких гармонических колебаний разных частот. Рассмотрите, например, систему, изображенную на рисунке. Докажите, что здесь возможны два типа линейных гармонических колебаний: а) когда массы движутся с одинаковой амплитудой в одну и ту же сторону; б) когда массы движутся с одинаковой амплитудой навстречу друг другу. Найдите частоты этих колебаний, если жесткость пружины  $k$ .



**4.15\*.** Малые колебания маятников, связанных пружиной, происходят по закону

$$x_1 = b \cos(\omega_0 t + \varphi) + a \cos \omega t, \quad x_2 = b \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \cos \omega t,$$

где частоты  $\omega_0$  и  $\omega$  известны. Определите жесткость пружины, связывающей маятники. В положении равновесия маятники вертикальны.



К задаче 4.16.

**4.16.** На рисунке изображена зависимость координаты от времени для движения, являющегося наложением двух гармонических колебаний. Определите по нему амплитуды и частоты этих колебаний.

### § 3.5. Вынужденные и затухающие колебания

**5.1.** Ваша приятельница сидит на качелях. Вы раскачиваете их кратковременными толчками. Как это нужно делать, чтобы раскачивание проходило наиболее успешно?

5.2. Осциллятор массы  $m$  подвергается кратковременным ударам, за каждый из которых ему передается импульс  $p$ . Пусть затухания нет и первоначально осциллятор покоился. Опишите движение, если удары следуют через время  $T_0, T_0/2$  ( $T_0$  — период свободных колебаний).

5.3\*. В условиях задачи 5.2 осциллятор имел в нулевой момент скорость  $v_0$  и координату  $x_0$ . Какой будет амплитуда колебаний после  $n$  ударов, если первый произошел в нулевой момент? Постройте фазовую диаграмму.

5.4. Через речку переброшена длинная упругая доска. Когда мальчик стоял на ней неподвижно, она прогибалась на 0,1 м. Когда же он пошел со скоростью 3,6 км/ч, то доска так раскачалась, что он свалился в воду. Каков размер шага мальчика?

5.5. Грузовики въезжают в зерновой склад, разгружаются и выезжают с той же скоростью. С одной стороны склада выбоины на дороге идут чаще, чем с другой. Как по профилю дороги определить, с какой стороны въезд, а с какой выезд?

5.6. Катер стал сильно раскачиваться, хотя волны на море были сравнительно небольшие. Капитан изменил курс и скорость. Удары волн стали в два раза чаще, но тем не менее размах колебаний катера значительно уменьшился. Объясните это.

5.7. Казалось бы, стреляя из рогатки в мост в такт его собственным колебаниям, за большое число выстрелов его можно очень сильно раскачать. Однако это вряд ли вам удастся. Почему?

5.8. Сила сопротивления жидкой или газообразной среды для небольших скоростей движения пропорциональна скорости тела и направлена против нее:  $f = -bv$ . Как зависит рассеиваемая мощность от скорости?

5.9\*. Пусть кинетическая энергия осциллятора  $K = mv^2/2$ , а потенциальная  $U = kx^2/2$ . Покажите, что наличие «потерь» мощности  $N_{\text{п}} = bv^2$  эквивалентно наличию добавочной силы  $f = -bv$ .

5.10. Исходя из баланса энергии, качественно опишите движение осциллятора при сопротивлении, пропорциональной скорости, под влиянием одиночного толчка и при одинаковых толчках, следующих через период. Вначале осциллятор покоился.

5.11\*. Колебательную систему при наличии силы «трения»  $f = -bv$  называют осциллятором с затуханием, а его колебания при отсутствии вынуждающей силы — зату-

жающими. Покажите, что уравнения движения двух осцилляторов при  $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$  и  $b_1/m_1 = b_2/m_2 = 2\gamma$  имеют одинаковые решения при одинаковых начальных координатах и скоростях ( $\omega_0$  — частота свободных колебаний без трения;  $\gamma$  — коэффициент затухания;  $k_1, k_2$  — жесткости;  $m_1, m_2$  — массы осцилляторов).

5.12. Покажите, что если происходят затухающие колебания осциллятора с  $x = x_1(t)$  и  $v = v_1(t)$ , то колебания такого же осциллятора с начальными условиями  $x(0) = nx_1(0)$  и  $v(0) = nv_1(0)$  происходят по закону  $x = nx_1(t)$ ,  $v = nv_1(t)$ .

5.13. Затухание может быть столь велико, что движение осциллятора перестанет носить колебательный характер. Оцените по порядку величины, при каком соотношении  $\gamma$  и  $\omega_0$  это произойдет.

5.14. Пусть затухание достаточно слабое, так что осциллятор, выйдя из нулевого положения с положительной проекцией скорости, через конечное время  $T$  снова проходит нулевое положение с положительной проекцией скорости, в  $n$  раз меньшей начальной. Что можно сказать про скорость через время  $2T, 3T$ ?

5.15. Через время  $\tau_2$  амплитуда затухающих колебаний уменьшилась вдвое. Как за это время изменилась механическая энергия осциллятора? За какое время энергия уменьшится вдвое?

5.16. На горизонтальные пластины осциллографа подается сигнал, пропорциональный смещению затухающего осциллятора, а на вертикальные — сигнал, пропорциональный скорости. Изобразите качественно след луча на экране при слабом затухании.

5.17\*. Точное выражение для координаты осциллятора в случае вывода осциллятора из равновесия толчком имеет вид

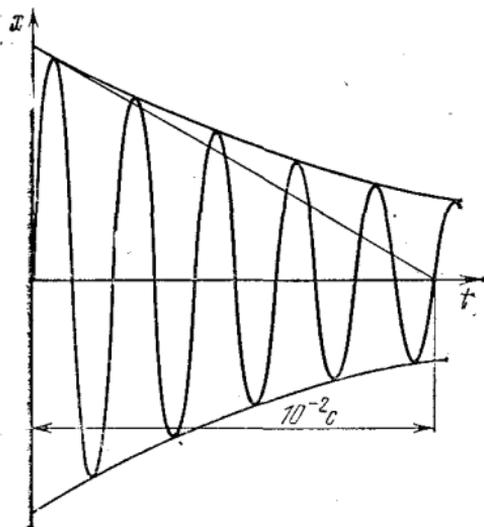
$$x = \frac{v_0}{\omega} \exp(-\gamma t) \sin \omega t, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma < \omega_0,$$

$v_0$  — начальная скорость. Покажите, что тогда при любых начальных условиях решение можно записать в виде

$$x = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi).$$

5.18. По картине зависимости  $x$  от  $t$ , полученной на экране осциллографа, определите  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $\omega_0$ . Почему при  $\gamma \ll \omega_0$  за  $\omega$  принимают  $\omega_0$ ?

5.19. а) Два следующих друг за другом наибольших отклонения влево секундного маятника отличаются на одну сотую долю. Каков коэффициент затухания  $\gamma$  этого маятника?



К задаче 5.18.

б) Шарик этого маятника заменили шариком того же радиуса, но с массой, в четыре раза большей. Как это скажется на затухании колебаний?

5.20\*. а) Добротностью осциллятора  $Q$  называют отношение его начальной энергии к потере энергии за время изменения фазы на 1 рад. Выразите добротность через  $\gamma$  и  $\omega_0$  ( $\gamma \ll \ll \omega_0$ ). Как связано  $Q$  с

числом колебаний, за которое энергия уменьшится в  $e$  раз?

б) У монокристаллов сапфира для колебаний при низкой температуре и соответствующей подвеске в вакууме добротность  $Q = 10^8 - 10^9$ . Частота колебаний монокристалла  $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Оцените, во сколько раз изменится амплитуда колебаний за сутки.

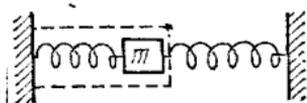
5.21\*. Каждый раз, когда отклонение осциллятора нулевое, а проекция скорости положительна, ему сообщается ударом дополнительный импульс  $p$ . Каким будет движение осциллятора и какая установится в конце концов максимальная скорость? Характеристики осциллятора известны. Рассмотрите два предельных случая:  $2\pi\gamma/\omega \gg 1$  и  $2\pi\gamma/\omega \ll 1$ .

5.22. Приведите пример системы, в которой воздействие со стороны одной части ее на другую описывается силой, меняющейся со временем гармонически.

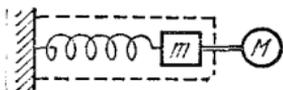
5.23. На частицу массы  $m$  действует сила  $F = F_0 \sin \omega t$ , при наличии которой она колеблется около нулевого положения. Представьте, что эту силу развивает пружина, прикрепленная другим концом к неподвижной стенке, и найдите, используя это, амплитуду колебаний частицы. Считать, что затухания нет.

5.24\*. В системах, изображенных на рисунке, происходят свободные колебания без трения. Покажите, что сила, действующая на выделенный штриховой линией осциллятор, имеет гармонический характер.

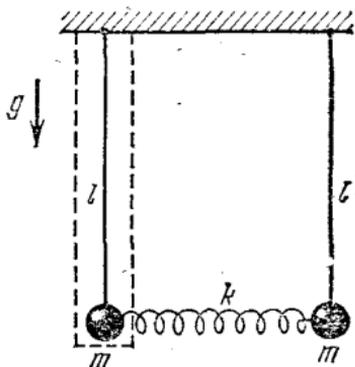
5.25. а) Тело массы  $m$ , прикрепленное к двум пружинам жесткостей  $k_1$  и  $k_2$ , свободно колеблется с частотой



а)



б)



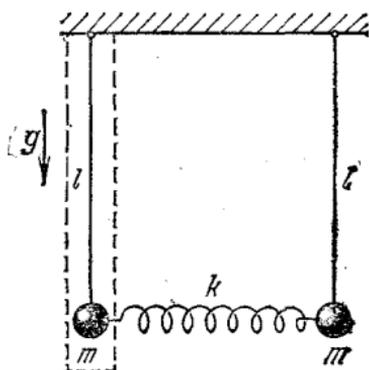
б)

К задаче 5.24\*.

$\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ . Сила со стороны второй пружины меняется гармонически с той же частотой  $\omega$ :  $F = -k_2 x = F_0 \cos \omega t$ . Если ее заменить вынуждающей силой  $F_0 \cos \omega t$ , то движение останется прежним. Таким образом, одни и те же колебания можно рассматривать и как свободные, и как вынужденные. Пользуясь этим и считая  $k_1 = m\omega_0^2$ , найдите зависимость  $x$  от  $t$  и выразите амплитуду вынужденных колебаний через  $F_0$ ,  $\omega$  и  $\omega_0$ .

б) Какую добавочную массу следует прикрепить к осциллятору массы  $m$  с собственной частотой  $\omega_0$  и с какой амплитудой он должен после этого двигаться, чтобы сила, действующая на него со стороны добавочной массы, равнялась  $F_0 \sin \omega t$ ? Совпадет ли эта амплитуда с амплитудой вынужденных колебаний этого осциллятора под действием вынуждающей силы  $F_0 \sin \omega t$ ?

5.26\*. Если отклонить грузики одинаково в одну сторону и отпустить, то возбудятся колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Если же отклонить их на равные расстояния в противоположные стороны, возникнут колебания с частотой  $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$ . В общем случае движение грузиков



К задаче 5.26\*.

есть наложение этих колебаний:

$$x_1 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t,$$

$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Рассмотрите теперь силу  $F_0 \cos \omega t$ , действующую на левый грузик со стороны пружины, как вынуждающую и определите  $A$  через  $F_0$ ,  $m$ ,  $\omega_0$  и  $\omega$ . Слагаемое  $B \cos(\omega_0 t + \varphi)$  представляет собой свободное колебание выделенного осциллятора. Чем определяются  $B$  и  $\varphi$ ?

5.27\*. Результат задачи 5.26 очень важен: в общем случае движение осциллятора при наличии вынуждающей силы является наложением свободных и вынужденных колебаний. При каких начальных условиях будут происходить только вынужденные колебания?

5.28\*. Почему при линейной зависимости силы от смещения и скорости общее движение является наложением свободных и вынужденных колебаний?

5.29. При вынужденных колебаниях с частотой, меньшей собственной частоты осциллятора, направления смещения и вынуждающей силы совпадают, а при частоте, большей собственной, противоположны. Объясните, почему. Затухание отсутствует.

5.30. При малых частотах вынуждающей силы (по сравнению с собственной частотой осциллятора) его смещения при вынужденных колебаниях можно считать равными  $F(t)/k$ , где  $F(t)$  — вынуждающая сила,  $k$  — жесткость. При больших же частотах ускорение осциллятора можно считать равным  $F(t)/m$ , где  $m$  — масса осциллятора. Объясните эти предельные случаи.

5.31\*. В нулевой момент на покоящийся в положении равновесия осциллятор начинает действовать вынуждающая сила  $F_0 \cos \omega t$ . Масса осциллятора  $m$  и собственная частота  $\omega_0$  известны. Найдите зависимость координаты осциллятора от времени и постройте ее график для  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . При построении графика воспользуйтесь тождеством

$$\cos \alpha - \cos \beta \equiv 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

5.32\*. Раскачка колебаний, как видно из результатов задачи 5.31\*, сопровождается биениями. При  $\omega \rightarrow \omega_0$  размах биений растет, но зато их период, а значит, и время нарастания неограниченно увеличиваются. Пусть время,

прошедшее после начала воздействия вынуждающей силы, много меньше  $2\pi/|\omega - \omega_0|$ . Воспользуйтесь приближением  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) и выясните первоначальный характер раскочки колебаний.

5.33\*. Выяснить характер раскочки колебаний при  $\omega = \omega_0$  можно, перейдя к пределу  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Как объяснить, что «амплитуда» колебаний растет в этом случае пропорционально времени?

5.34\*. Пусть имеется слабое затухание: коэффициент затухания  $\gamma \ll \omega_0$ . Как оно скажется на раскочке колебаний осциллятора из состояния покоя в положении равновесия при  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$  и  $\omega = \omega_0$ ? Почему здесь уместно говорить об установлении вынужденных колебаний? Каково характерное время этого установления?

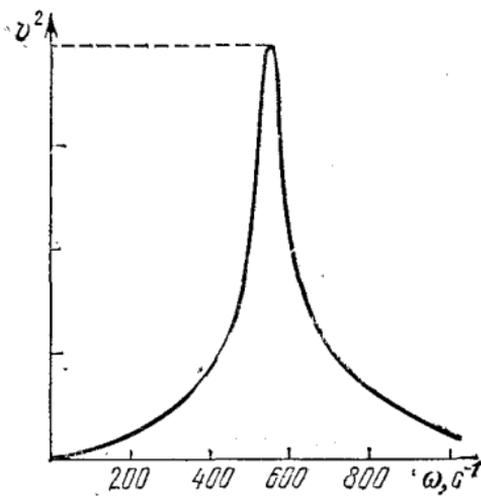
5.35. а) Какая нужна вынуждающая сила, чтобы у осциллятора массы  $m$  с коэффициентом затухания  $\gamma$  происходили гармонические колебания  $x = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$  с собственной частотой  $\omega_0$ ?

б) Амплитуда вынуждающей силы  $F_0$ , ее частота  $\omega = \omega_0$ . Определите амплитуду вынужденных колебаний. Во сколько раз она больше отклонения осциллятора при действии постоянной силы  $F_0$ ?

5.36. Осциллятор движется по закону  $x = x_0 \sin \omega t$ , а вынуждающая сила равна  $F_0 \cos \omega t$ . Каков коэффициент затухания у осциллятора? Масса осциллятора  $m$ .

5.37. На рисунке приведена зависимость квадрата амплитуды скорости вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы, амплитуда которой постоянна. Определите собственную частоту осциллятора, его коэффициент затухания и добротность.

5.38. Если для резонансного обнаружения малых вынуждающих сил использовать монокристалл сапфира с добротностью  $Q = 10^9$  и частотой собственных колебаний  $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ , то какое время (по порядку величины) нужно ждать, чтобы установились колебания?



К задаче 5.37.

5.39. По синусоидальной канавке грампластинки может следовать игла звукоснимателя. Пусть частота собственных колебаний иглы  $\omega_0$ . При какой скорости иглы относительно пластинки она начнет выскакивать из канавки? Изгибы канавки повторяются через расстояние  $\lambda$ .

5.40\*. Источник частиц массы  $m$  испускает их почти с нулевой начальной скоростью. После выхода на них действует сила  $F_0 \sin \omega t$ . Определите скорость частиц, испущенных в нулевой момент, спустя время  $t$ . Какова средняя скорость этих частиц? На каком расстоянии от источника достигается наибольшая скорость? Ответьте на эти вопросы для частиц, испущенных в момент времени  $\pi/\omega$ ,  $\pi/2\omega$ .

5.41\*. С нулевого момента времени на частицу массы  $m$  начинает в направлении оси  $x$  действовать сила  $F_0 \sin \omega t$ , а в направлении оси  $y$  — сила  $F_0 \cos \omega t$ . Найдите траекторию, если в начальный момент частица покоится. Чему равна средняя скорость частицы за большое время? Какую начальную скорость должна иметь частица, чтобы она двигалась при наличии этих сил по окружности? Каков радиус этой окружности?

### § 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волн

6.1. Длинную цепь шариков, связанных пружинами жесткости  $k$ , тянут за один конец с силой  $F$ . Другой конец цепи закреплен. Определите удлинение пружин и смещение  $N$ -го шарика при равновесии.

6.2. Проволоку длины 1 м растянули за концы на 0,1 мм. Как изменится расстояние между «соседними» атомами, если среднее межатомное расстояние в недеформированном материале равно  $10^{-10}$  м?

6.3. Модулем Юнга материала  $E$  называется жесткость единичного куба при усилении, приложенном перпендикулярно одной из граней. Какова жесткость стержня длины  $L$  и сечения  $S$  для продольных растяжений и сжатий? Пусть стержень закреплен с одного конца. Какой силой, приложенной к другому концу, его можно растянуть на  $\Delta L$ ?

6.4. Оцените жесткость межатомной связи в веществе с модулем Юнга  $E$  и средним межатомным расстоянием  $a$ .

6.5. На стальном стержне сечения  $1 \text{ см}^2$  и длины 75 см закрепили на расстоянии 25 см друг от друга три груза массы 2 т каждый. Последний груз висит на конце стержня. Нарисуйте графики деформаций и смещений участков

стержня в зависимости от расстояния до нижнего конца. Модуль Юнга стали  $2 \cdot 10^{11}$  Па. Каково растяжение всего стержня?

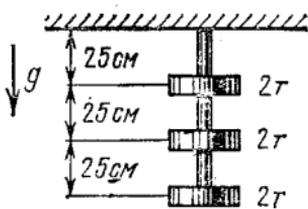
6.6. Рельсы трамвая при укладке сваривают в стыках. Какие напряжения появляются в них при изменении температуры от  $-30^\circ\text{C}$  зимой до  $30^\circ\text{C}$  летом, если укладка проводилась при  $10^\circ\text{C}$ ? Коэффициент линейного расширения стали  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

6.7. Части стены по разные стороны щели соединили раскаленной стальной полосой, которая, остыв до  $0^\circ\text{C}$ , прижала их друг к другу. Ширина трещины 1 см, длина полосы 2 м, а ее сечение  $2 \text{ см}^2$ . С какой силой стянуты части стены, если полоса первоначально раскалена до  $500^\circ\text{C}$ ?

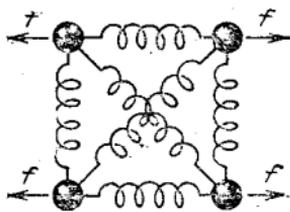
6.8. Колонна Исаакиевского собора в Ленинграде имеет высоту 30 м. На сколько она сжата под действием собственной тяжести? Плотность гранита  $2,7 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $10^{11}$  Па.

6.9. Относительное удлинение стержня  $\epsilon$ . Найдите энергию упругой деформации на единицу объема, если модуль Юнга материала  $E$ . Выразите полученную величину через нормальное напряжение  $\sigma$ .

6.10\*. Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы согнуть стержень длины  $l$  и квадратного сечения  $a \times a$  в кольцо? Модуль Юнга материала  $E$ , длина стержня  $l \gg a$ .



К задаче 6.5.



К задаче 6.11\*.

6.11\*. При действии продольных сил меняются не только продольные, но и поперечные размеры упругого тела. Рассмотрите ячейку, где связи атомов представлены пружинами. Жесткости диагональных пружин  $k_1$ , остальных  $k_0$ . Определите отношение сжатия поперечных пружин к растяжению продольных при малых деформациях.

6.12. Под деформацией подразумевается относительное изменение линейных размеров. Отношение поперечной деформации к продольной отрицательно, а абсолютное зна-

чение его называется коэффициентом Пуассона  $\mu$ . Для стали  $\mu = 0,3$ . Увеличивается или уменьшается объем стального стержня при растяжении? Для резины объем при растяжении почти не меняется. Чему равно тогда  $\mu$ ?

6.13\*. Сжимаемость вещества показывает, на какую долю от первоначального объема уменьшается объем тела при единичном увеличении давления на его поверхность. Рассматривая всестороннее сжатие кубика как сумму трех простых, выразите сжимаемость через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ .

6.14. Сжимаемость воды  $5 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$ . Оцените изменение глубины океана, если бы вода стала несжимаемой. Средняя глубина океана 3—4 км. В океане встречаются глубины около 10 км. На сколько плотность воды на этой глубине больше, чем на поверхности? Какая упругая энергия запасена в единице объема воды?

6.15. Невесомая нить переброшена через два гвоздя. Натяжение ее горизонтальных участков  $T$ . Как по профилю нити найти массы грузов и силы реакции со стороны гвоздей?

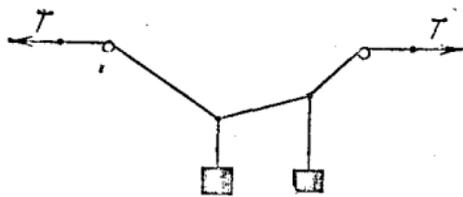
6.16. К концам струны приложены продольные силы  $T$ . При поперечном смещении участков струны возник профиль, изображенный на рисунке. Постройте график поперечной составляющей натяжения струны  $F$  в зависимости от расстояния  $x$  до левого конца. Как  $F$  связана с деформацией изгиба  $\epsilon = dy/dx$ ? Какие поперечные силы удержат такой профиль в равновесии?

6.17. Участки струны движутся в поперечном направлении так, что область изгиба смещается вправо со скоростью  $c$ , не меняя своего наклона. Как связаны деформация  $\epsilon$  в области изгиба и скорость частиц струны  $u$ ?

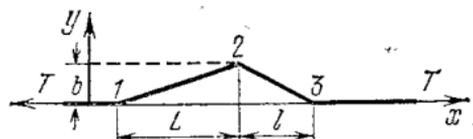
6.18. а) Объясните, почему увеличивается импульс выделенного участка струны. Определите скорость изменения импульса через массу на единицу длины струны  $\mu$ , деформацию в области изгиба  $b/L = \epsilon \ll 1$  и скорость смещения области изгиба  $c$ .

б) Какова сумма сил, действующих на выделенный участок, если натяжение струны равно  $T$ ? Скорость изменения импульса равна этой сумме сил. Выразите отсюда  $c$  через  $T$  и  $\mu$ .

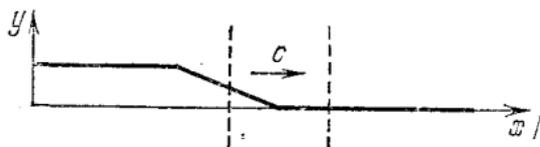
6.19. а) По графику продольных смещений участков стержня с модулем Юнга  $E$  определите деформацию и упругую энергию, приходящуюся на единицу объема, в области возмущения. Пусть возмущение, сохраняя свою форму,



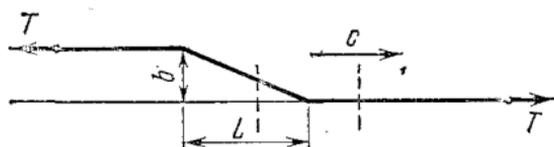
К задаче 6.15.



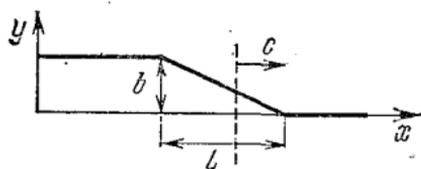
К задаче 6.16.



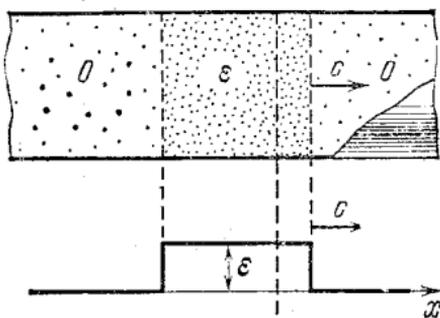
К задаче 6.17.



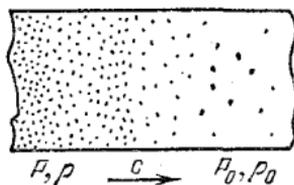
К задаче 6.18.



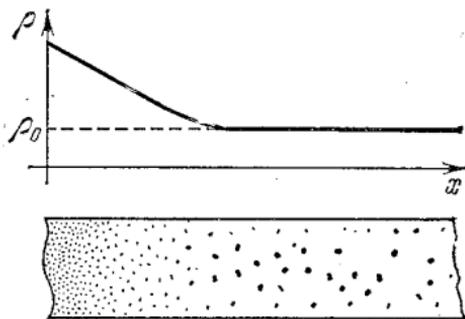
К задаче 6.19.



К задаче 6.20.



К задаче 6.23.



К задаче 6.24\*.

перемещается вправо по стержню со скоростью  $c$ . Какова скорость частиц в области возмущения?

б) В бегущем возмущении, сохраняющем свою форму, кинетическая энергия равна упругой. Исходя из этого, определите скорость возмущения через модуль Юнга  $E$  и плотность  $\rho$  материала стержня.

6.20. а) Область продольной деформации  $\epsilon$  движется по стержню со скоростью  $c$  вправо. Пусть площадь сечения стержня  $S$ , плотность материала  $\rho$ . Какова скорость изменения импульса справа от выделенного сечения?

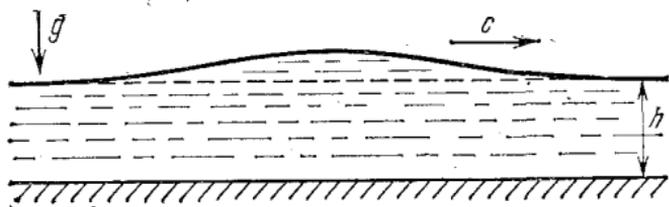
б) Импульс, переносимый за единицу времени через единицу площади поперечного сечения, называется плотностью потока импульса. Почему она должна быть равна нормальному напряжению  $\sigma$  в этом сечении? Выразив  $\sigma$  через деформацию, определите отсюда  $c$  через  $E$  и  $\rho$ .

6.21. Модуль Юнга стали  $2 \cdot 10^{11}$  Па, плотность  $7,8$  г/см<sup>3</sup>. Какова скорость продольных волн для стального стержня? В листах стали скорость продольных волн больше, чем в тонких стержнях. Почему?

6.22. Сжимаемости ртути, воды и воздуха  $3 \cdot 10^{-5}$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$  и  $0,71$  атм<sup>-1</sup>, а плотности  $13,6$ ,  $1$  и  $1,2 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>. Определите скорости звука в этих средах.

6.23. По газу идет ударная волна, если за фронтом волны давление  $P$  и плотность  $\rho$  резко превосходят давление  $P_0$  и плотность  $\rho_0$  невозмущенного газа. Найдите по этим данным скорость ударной волны.

6.24\*. В бегущем возмущении плотность  $\rho$  газа плавно убывает до плотности  $\rho_0$  невозмущенного газа. Давление газа  $P \sim \rho^\gamma$  ( $\gamma > 1$ ). Объясните, как из такого возмущения развивается ударная волна сжатия. Почему не образуется ударных волн разрежения?

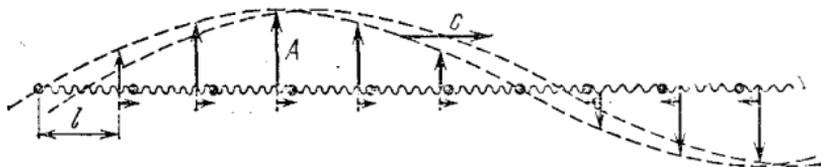


К задаче 6.25\*.

6.25\*. Определите скорость «волн на мелкой воде». Так обычно называются возмущения уровня воды, протяжен-

ность которых много больше глубины воды  $h$ . Изменение уровня за счет возмущения мало по сравнению с  $h$ .

6.26\*. По цепочке шариков массы  $m$ , связанных пружинами длины  $l$  и жесткости  $k = m\omega_0^2$ , бежит продольная синусоидальная волна частоты  $\omega$ . Смещения шариков отложены на рисунке по вертикали в увеличенном масштабе.



К задаче 6.26\*.

Амплитуда смещений много меньше  $l$ . Найдите скорость распространения этой волны. Получите скорость волны в низкочастотном пределе  $\omega \ll \omega_0$ . Оцените граничную частоту  $\omega_0$  для железа.

### § 3.7. Распространение волн

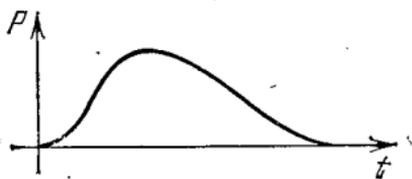
7.1. Середина стержня сечения  $S$  и плотности  $\rho$  сместилась после прохождения короткой волны продольного сжатия на расстояние  $b$  вправо. Скорость волны  $c$ . Определите импульс этой волны.

7.2. а) В упругой среде плотности  $\rho$  движется со скоростью  $c$  плоская волна уплотнения  $\Delta\rho$ . Чему равна плотность потока импульса в области сжатия?

б) Протяженность слоя среды в направлении распространения волны  $L$ , а самой волны  $l$ . С какой скоростью движется центр масс этого слоя?

На сколько он сместится, когда волна пройдет по всему слою?

7.3. По газу в трубе идет волна со скоростью  $c$ . Показания неподвижного датчика давления при прохождении волны  $P(t)$  (см. рис.). Найдите распределение давления в зависимости от расстояния до датчика в момент времени  $t$ .



К задаче 7.3.

7.4. В волне, бегущей вправо со скоростью  $c$ , скорости частиц стержня в начальный момент зависят от расстояния  $x$  до левого конца по закону  $u = u(x)$ . Найдите зависи-

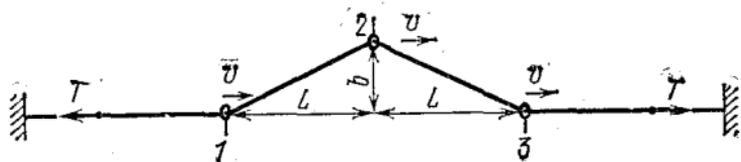
мость от времени плотности потока импульса на расстоянии  $x_0$  от левого конца.

7.5. Воду, текущую по водопроводной трубе со скоростью 2 м/с, быстро перекрывают жесткой заслонкой. Определите силу, действующую на заслонку при остановке воды, если скорость звука в воде 1,4 км/с. Сечение трубы 5 см<sup>2</sup>.

7.6. На конец покоящегося полубесконечного стержня в течение времени  $\tau$  действует продольная сила  $F$ . Найдите скорость и деформацию в волне, если сечение стержня  $S$ , модуль Юнга  $E$ , а плотность  $\rho$ . Какова плотность стержня в области возмущения? Найдите импульс и энергию волны через время  $0,5\tau$  и  $1,5\tau$  от начала действия силы.

7.7. Струна растянута за концы продольными силами  $T$ . Она состоит из двух частей с линейными плотностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . За место соединения ее начинают тянуть поперечной силой  $F$ . Как меняется со временем форма струны?

7.8. На струну, масса единицы длины которой  $\mu$ , а натяжение  $T$ , надеты три гладких колечка. Колечки движутся со скоростью  $v$  вдоль струны; с той же скоростью,



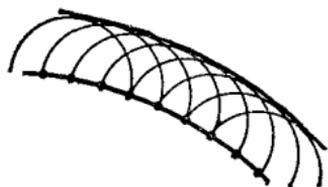
К задаче 7.8.

не меняя своей формы, движется профиль, создаваемый колечками. Какие силы действуют на струну со стороны колечек? Что происходит при приближении  $v$  к  $\sqrt{T/\mu}$ ?

7.9. Скорость волн «изгиба» шины 160—200 км/ч. Что произойдет при приближении скорости автомобиля к этой величине?

7.10. В своей лекции «О корабельных волнах» лорд Кельвин рассказывал: «...одно открытие фактически сделано лошадью, ежедневно тащившей лодку по каналу между Глазго и Ардроссаном. Однажды лошадь испугалась и понесла, и возница, будучи наблюдательным человеком, заметил, что, когда лошадь достигла определенной скорости, тянуть лодку стало явно легче и позади нее не оставалось волнового следа». Объясните это явление.

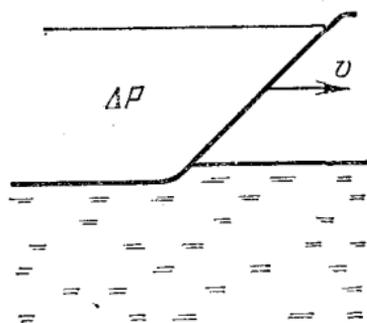
7.11. Согласно принципу Гюйгенса каждый участок фронта звуковой волны является источником вторичных сферических волн. Огибающая вторичных волн дает новый фронт волны. Почему?



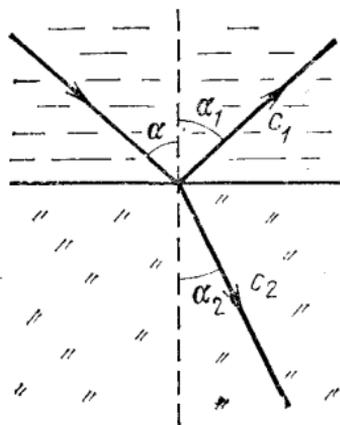
К задаче 7.11.

7.12. Исходя из принципа Гюйгенса, покажите, что в однородной среде плоский фронт перемещается со скоростью звука по своей нормали. Как распространяется цилиндрический фронт? Сферический?

7.13. Область повышенного давления на границе среды распространяется вправо со скоростью  $v$ , большей скорости звука  $c$  в среде. Каков фронт волны в среде? Каково его направление распространения?



К задаче 7.13.



К задаче 7.14.

7.14. На плоскую границу раздела сред со скоростями звука  $c_1$  и  $c_2$  под углом  $\alpha$  к нормали падает плоская волна. Найдите направления распространения отраженной и преломленной волн. Как меняется длина волны при преломлении?

7.15. Когда самолет летит с дозвуковой скоростью, на Земле слышен шум двигателей. Если же над нами пролетает сверхзвуковой самолет, то сначала слышен сильный хлопок, а затем уже шум двигателей. С чем это связано?

7.16. При достаточно пологом падении плоской звуковой волны на границу раздела в среде, в которой скорость

звука больше, не образуется преломленной волны. Это явление называется полным внутренним отражением. Найдите критический угол полного внутреннего отражения, если скорости звука в этих средах  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1 < c_2$ ).

7.17. Над поверхностью воды движется воздух. Как это повлияет на направления распространения отраженной и преломленной звуковых волн?

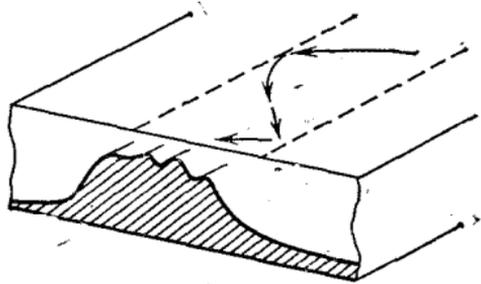
7.18. а) Скорость «волны на мелкой воде» уменьшается с уменьшением глубины. Прямой фронт такой волны при приближении к берегу, полого уходящему в воду, искривляется, «стараясь» повторить форму берега. Почему?

б) Изобразите качественно, как меняется фронт плоской первоначальной волны, встретившей на своем пути круглую и плавную отмель.

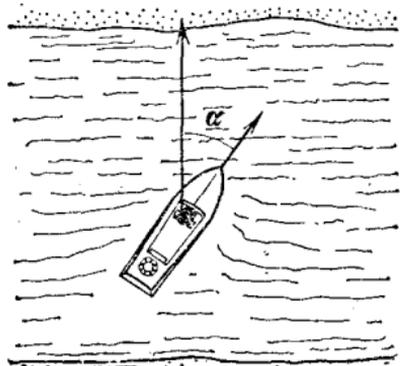
7.19\*. При землетрясениях на дне океана возникают протяженные возмущения поверхности воды — волны цунами. Особенно далеко они распространяются над подводными горными хребтами, почти не теряя своей разрушительной способности. Объясните это.

7.20\*. Почему по ветру звук слышен значительно лучше, чем против ветра? Скорость ветра заметно уменьшается при приближении к поверхности земли.

7.21. Частота собственных колебаний камертона  $\nu_0$ . Какой частоты звук мы услышим, если камертон приближать к уху со скоростью  $u$ ?



К задаче 7.19\*.

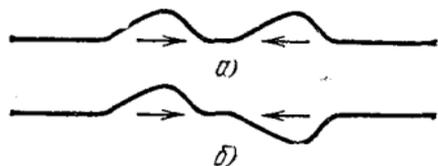


К задаче 7.22.

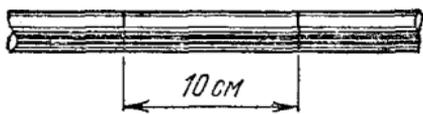
7.22. Волны набегают на берег с частотой  $\nu_0$ . С какой частотой они ударяют о катер, движущийся со скоростью  $u$  от берега? К берегу? Скорость волн на воде  $c$ . Рассмотрите движение катера под углом  $\alpha$  к направлению распространения волн.

### § 3.8. Наложение и отражение волн

8.1. По струне распространяются две встречные волны, несущие энергию  $W$  каждая. Каковы будут кинетическая и потенциальная энергии в момент совпадения оснований волн, изображенных на рисунке? Профили изгибов одинаковы.



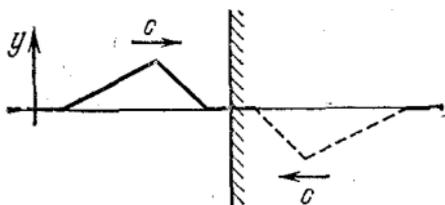
К задаче 8.1.



К задаче 8.2.

8.2. Участок стального стержня длины 10 см сжали на  $10^{-3}$  его длины и отпустили. Какие бегущие волны возникнут в стержне? Нарисуйте профили деформации и скорости частиц спустя время  $5 \cdot 10^{-6}$  с.

8.3. При нормальном падении волны на жесткую стенку возникает возмущение, в котором смещение и скорость частиц среды вблизи стенки нулевые. Если представить, что на падающую волну налагается идущая симметрично из-за стенки перевернутая волна смещений, то получится возмущение с требуемыми на стенке свойствами. Постройте для изображенной на рисунке падающей волны распределение смещения среды, когда волна «войдет в стенку» на  $1/6$ ,  $1/2$ ,  $2/3$  длины своего основания.



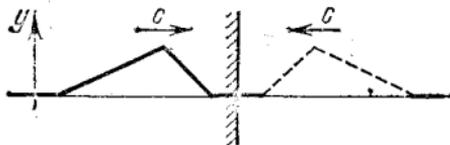
К задаче 8.3.

8.4. Как зависит от времени давление на стенку при падении на нее синусоидальной звуковой волны с частотой  $\omega$  и амплитудой смещения  $A$ ? Плотность среды  $\rho$ , скорость звука  $c$ . На каких расстояниях от стенки находятся узлы и пучности скорости? Узлы и пучности давления?

8.5. На свободной границе среды нулевое напряжение, а значит, и нулевые деформации. Воспользуйтесь приемом решения задачи 8.3 для нахождения возмущения, возникающего при падении волны на свободную границу. Почему здесь волна смещений, приходящая из-за границы, не перевернута?

8.6. Скорость незакрепленного конца стержня с нулевого момента времени стала меняться по закону  $v_0 \sin \omega t$  из-за прихода волны продольного смещения. Какова амплитуда этой волны? На каких расстояниях от конца стержня образуются узлы и пучности скорости? Узлы и пучности давления?

8.7. На внешней стороне стекла иллюминатора космического корабля имеются разрушения, вызванные попада-



К задаче 8.5.

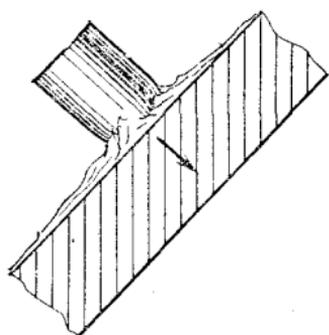


К задаче 8.7.

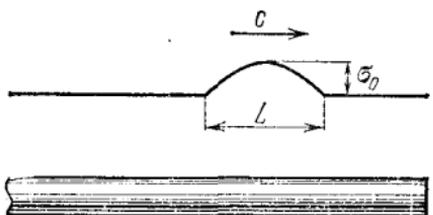
нием микрометеоритов. Подобные же разрушения видны на внутренней стороне. Объясните их появление.

8.8\*. Для борьбы с танками применяют «пластиковые» снаряды: взрывчатка во время удара расплывается по броне, а затем взрывается. Волна, порожденная взрывом, проходит толщу брони и откалывает с внутренней стороны слой, летящий с большой скоростью. Найдите эту скорость и толщину отколотого слоя брони, если давление при взрыве  $P = 5 \cdot 10^4$  атм и действует оно в течение времени  $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$  с.

Скорость звука в броне  $c = 5$  км/с, плотность брони  $\rho = 8$  г/см<sup>3</sup>.



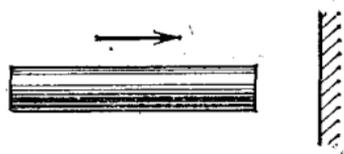
К задаче 8.8\*.



К задаче 8.9\*.

8.9\*. Предел прочности керамики и стекол на разрыв значительно меньше, чем на сжатие. Из-за удара по левому концу стеклянного стержня побегала волна сжатия — «полволны» синусоиды с амплитудой напряжения  $\sigma_0$  и протяженностью  $L$ . Какой участок стержня отколет, если предел прочности на разрыв  $\sigma < \sigma_0$ ? Рассмотрите случаи  $\sigma_0 > \sigma$  и  $\sigma_0 \approx \sigma$ .

8.10. Стальной стержень длины 1 м ударяется торцом о жесткую неподвижную стенку. Его первоначальная скорость 100 м/с. Какое давление он оказывает на стенку? Какие волны побегут по стержню? Чему равно время контакта? Какова конечная скорость стержня?



К задаче 8.10,

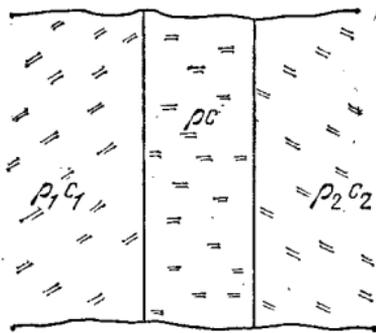


К задаче 8.11\*.

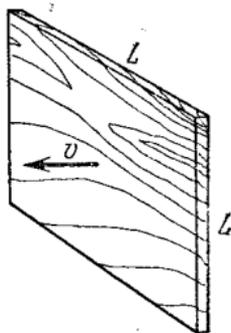
8.11\*. Происходит столкновение торцами упругих стержней одинакового сечения, длины которых относятся как скорости звука в стержнях. Рассмотрев волны, порожденные при ударе, и отражение их от свободных концов, докажите, что результат соударения такой же, как и при лобовом абсолютно упругом ударе. Что произойдет, если отношение длин не равно отношению скоростей звука в стержнях?

8.12\*. Из среды плотности  $\rho_1$  перпендикулярно границе раздела со средой плотности  $\rho_2$  падает волна скорости  $u_1$ . Скорости звука в первой и второй среде  $c_1$  и  $c_2$ . Исходя из законов сохранения импульса и энергии, найдите скорость среды в отраженной и преломленной волнах. Происходит ли разрыв скорости на границе раздела? В каком случае знак скорости в отраженной волне меняется?

8.13. Коэффициентом прохождения называют отношение энергии в проходящей волне к энергии в падающей. Найдите его для звуковой волны на границе вода — воздух.



К задаче 8.14,



К задаче 8.15\*.

8.14. Чтобы увеличить мощность на пьезодатчике, его подсоединяют к исследуемой среде через специальную про-

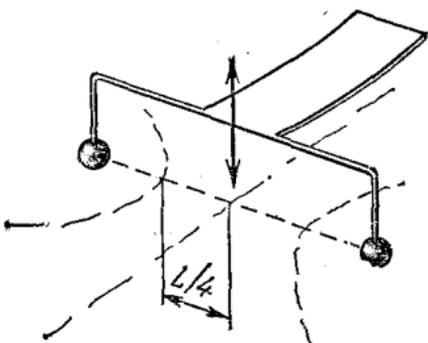
кладку. Пусть  $\rho_1 c_1 : \rho c = \rho c : \rho_2 c_2 = 4$ . Здесь  $\rho_i$  и  $c_i$  — плотности и скорости звука в прокладке, в среде и в кристалле пьезодатчика. Сравните по мощности сигналы, поступающие к датчику с прокладкой и без нее, если длительность сигналов меньше времени прохождения прокладки.

8.15\*. Пластина размерами  $L \times L$  колеблется гармонически перпендикулярно самой себе с частотой  $\omega \gg c/L$ , где  $c$  — скорость звука в воздухе. Оцените силу, действующую на нее со стороны воздуха, в момент, когда скорость пластинки равна  $v$ . Плотность воздуха  $\rho$ . Каково качественно движение воздуха при условии  $\omega \ll c/L$ ? Почему в этом случае излучение звука слабое?

8.16. Газовый пузырь радиуса  $R$  совершает гармонические радиальные колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  в жидкости, плотность которой  $\rho$ , скорость звука  $c$ . Какая энергия звуковой волны излучается в среднем за период? Как меняется амплитуда колебаний давления по мере удаления от пузыря? Считать  $A \ll R$ .

8.17\*. а) В сечении бесконечного стержня действует внешняя продольная сила  $f_0 \cos \omega t$ . Какие волны скорости и деформации порождаются ею? Сечение стержня  $S$ , плотность  $\rho$ , скорость волны  $c$ .

б) Пусть на расстоянии  $l$  друг от друга действуют два источника таких сил. Какие здесь порождаются волны? При каких  $l$  излучаемая мощность наибольшая? Наименьшая? Почему излучаемая энергия не равна сумме энергий, испускаемых каждым источником, работающим по отдельности?



К задаче 8.19.

8.18\*. В условиях предыдущей задачи одна сила меняется как  $f_0 \cos \omega t$ , а другая как  $f_0 \sin \omega t$ . При каких  $l$  волна будет уходить только со стороны первого источника? Только со стороны второго?

8.19. К вибратору частоты  $\omega$  прикреплены два шарика на расстоянии  $L$  друг от друга. Они возбуждают волны на поверхности воды (см. рис.). Найдите скорость  $c$  волн на воде.

8.20\*. а) При гармонической силе, действующей на конец свободного стержня длины  $L$ , из-за многократных отражений образуется стоячая волна. Где находятся узлы

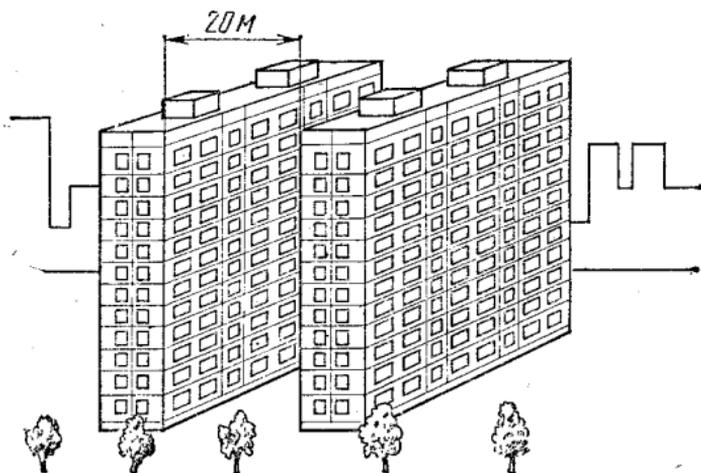
напряжений в ней? Какова амплитуда вынуждающей силы  $F_0$ , если амплитуда напряжений в стоячей волне  $\sigma_0$ , а сечение стержня  $S$ ?

б) Постройте резонансную кривую — график зависимости  $\sigma_0 S / F_0$  от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. Для каких частот возможны гармонические колебания при отсутствии вынуждающей силы?

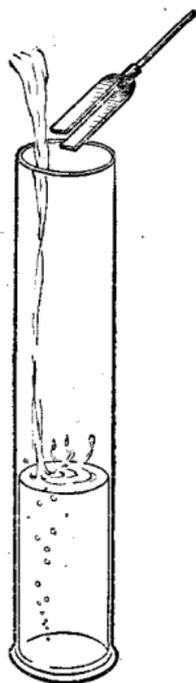
8.21. Найдите собственные частоты продольных колебаний стального стержня длины 1 м. Как изменятся собственные частоты колебаний стального шарика при увеличении радиуса вдвое?

8.22\*. Между жесткими параллельными стенками находится воздух. Одна из них начинает гармоническое движение с амплитудой  $A_0$  и частотой  $\omega$ . Расстояние между стенками  $L \gg A_0$ . До какой амплитуды смещения в пучности «раскачает» воздух эта стенка? Оцените время раскачки, если скорость звука в воздухе равна  $c$ .

8.23. Определите первую резонансную частоту колебаний воздуха между двумя параллельными зданиями, находящимися на расстоянии 20 м. Высота зданий заметно больше этого расстояния. Скорость звука в воздухе 330 м/с.



К задаче 8.23.



К задаче 8.24.

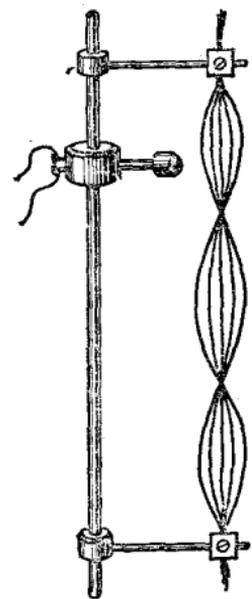
8.24. Поднесем вибрирующий камертон к высокому цилиндрическому сосуду. Если в него понемногу наливать воду, то мы будем слышать усиливающийся звук, сильный,

потом снова ослабевающий, снова усиливающийся. Как это объяснить? Почему без сосуда камертон звучит слабо?

8.25. При какой глубине океана в нем могут раскачаться физиологически опасные инфразвуковые колебания с линейной частотой 7 Гц?

8.26. Зачем полый корпус скрипки и виолончели делают фигурным? Как от его размеров зависит тон звучания?

8.27. В барокамере, наполненной смесью гелия и кислорода, скорость звука намного больше скорости звука в воздухе. Как изменится звучание голосов людей, разговаривающих в барокамере? Изменится ли там тон камертона?



8.28. С какой силой нужно натянуть гитарную струну длины 60 см и линейной плотности 0,1 г/см, чтобы она звучала с линейной частотой 100 Гц на первой гармонике, т. е. на первой резонансной частоте?

8.29. Колебания в струне длины  $L$  возбуждают, пропуская по ней переменный ток так, что магнитная сила со стороны небольшого магнита меняется гармонически. Частота тока отвечает третьей гармонике. Где нужно поместить магнит, чтобы амплитуда колебаний была наибольшей?

К задаче 8.29.

8.30. Если звучащий на первой гармонике стержень взять рукой, он почти сразу перестает звучать. Объясните, почему. Для какого места стержня этот эффект слабее всего? Сильнее всего?

8.31\*. У монокристаллов сапфира при низких температурах и соответствующей подвеске в вакууме потери энергии за период на первой гармонике составляют  $10^{-8}$  от энергии колебаний. Во сколько раз увеличатся эти потери в воздухе? Плотность сапфира  $3000 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука в сапфире  $6 \text{ км/с}$ . Для воздуха плотность  $1 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука  $0,33 \text{ км/с}$ .

## Глава 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

### § 4.1. Давление в жидкости

1.1. Что такое давление жидкости? Придумайте способ измерения давления.

1.2. В жидкости находится прямоугольная призма, размеры которой показаны на рисунке. Найдите сумму сил, действующих на переднюю и нижнюю грань призмы, если давление жидкости  $2 \cdot 10^5$  Па. Чему равна сумма сил, действующих на призму?

1.3. Результирующая сила, действующая со стороны сжатой жидкости на три грани правильного тетраэдра, равна  $F$ . Длина ребра тетраэдра  $a$ . Определите давление жидкости.

1.4. В трубе находится поршень, продольное сечение которого показано на рисунке. Давление жидкости с обеих сторон поршня одинаково. Находится ли поршень в равновесии?

1.5. Шар перекрывает отверстие радиуса  $r$  в плоской стенке, разделяющей жидкости с давлениями  $3P$  и  $P$ . С какой силой прижимается шар к отверстию?

1.6. Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении  $P$ . Радиусы отверстий  $r$  и  $R$ . Определите силу, действующую на пробку со стороны жидкости.

1.7\*. Сферический баллон радиуса  $R$  со стенками толщины  $\Delta \ll R$  разрывается внутренним давлением  $P$ . Определите предел прочности материала стенок.

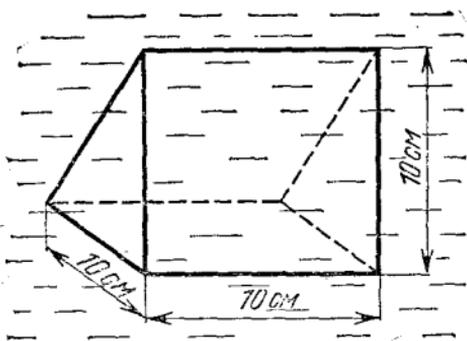
1.8. Почему сосиска в кипятке лопается вдоль, а не поперек?

1.9. Три сообщающихся сосуда с водой прикрыты поршнями. К поршням шарнирно прикреплена на вертикальных стержнях горизонтальная палка. В каком месте нужно приложить к палке силу  $F$ , чтобы палка осталась горизонтальной? Диаметры сосудов и расстояния между ними указаны на рисунке.

1.10. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни сечений 100 и 10 см<sup>2</sup>. На большой поршень становится человек массы 80 кг. На какую высоту поднимется после этого малый поршень?

1.11. Тело в форме куба, ребро которого 20 см, находится в воде. Нижняя грань куба удалена от поверхности воды на расстояние 1 м. Чему равна сила, действующая со стороны воды на нижнюю грань? Верхнюю грань? Какая сила действует на боковую грань куба? Найдите векторную сумму сил, действующих на тело.

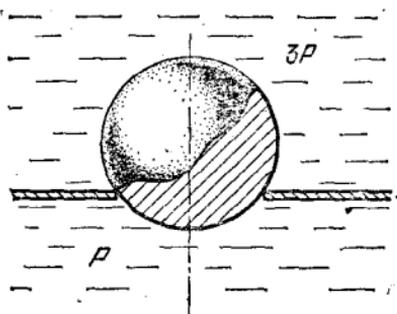
1.12\*. Нижняя грань правильного тетраэдра с ребром  $a$ , полностью погруженного в жидкость плотности  $\rho$ , удалена на расстояние  $h$  от поверхности жидкости. Определите силу,



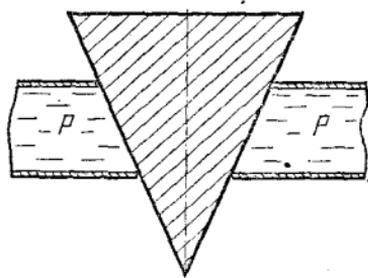
К задаче 1.2.



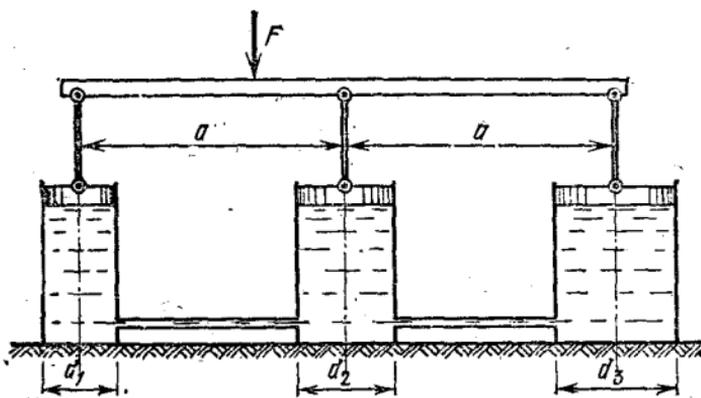
К задаче 1.4,



К задаче 1.5,



К задаче 1.6.



К задаче 1.9.

действующую со стороны жидкости на боковую грань тетраэдра. Ускорение свободного падения  $g$ .

1.13. На дне сосуда, которое составляет угол  $\alpha$  с горизонтом, стоит куб с ребром  $a$ , сделанный из материала плотности  $\rho$ . Найдите силу, с которой куб действует на дно, если в сосуд налита жидкость плотности  $\rho_0$ . Верхнее ребро куба находится на расстоянии  $h$  от поверхности жидкости. Между дном сосуда и кубом жидкости нет.

1.14. Трубка радиуса  $r$  закрыта снизу металлическим диском и погружена в жидкость на глубину  $l$ . Радиус диска  $R$ , высота  $h$ . Ось диска отстоит от оси трубки на расстоянии  $a$ . Плотность жидкости  $\rho_0$ , плотность металла  $\rho$ . До какой высоты нужно наливать жидкость в трубку, чтобы диск оторвался от трубки?

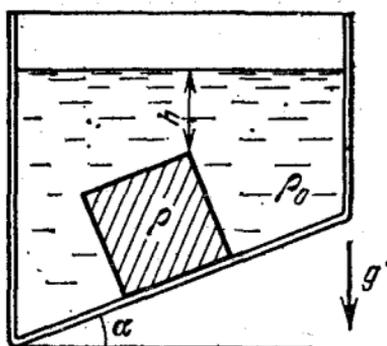
1.15. В крышке сосуда с водой имеется цилиндрическое отверстие, плотно закрытое подвижным поршнем. В поршень вделана вертикальная трубка. Радиус поршня 10 см, радиус трубки 5 см, масса поршня вместе с трубкой 20 кг. Определите высоту столба воды в трубке при равновесии системы.

1.16. Поршень, перекрывающий цилиндрическую трубку внутреннего радиуса 10 см, может перемещаться с помощью длинного вертикального штока. Трубка с поршнем, занимающим крайнее нижнее положение, опущена в цилиндрический колодец радиуса 1 м на глубину 0,5 м. На какую высоту от первоначального уровня воды в колодце можно поднять воду в трубке? Атмосферное давление  $10^5$  Па.

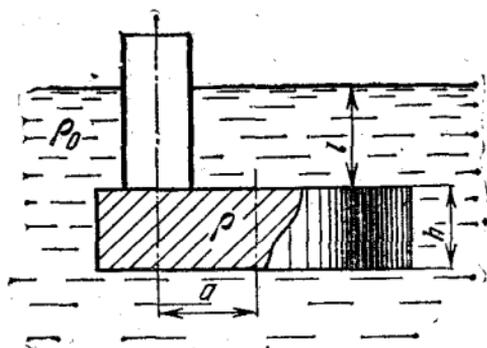
1.17\*. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие сверху жидкость. Когда жидкость доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найдите массу колокола, если его внутренний радиус равен  $R$ , а плотность жидкости  $\rho$ .

1.18. Докажите, что в двух сообщающихся сосудах жидкость в поле тяжести имеет минимальную потенциальную энергию, когда уровни жидкости в обоих сосудах совпадают.

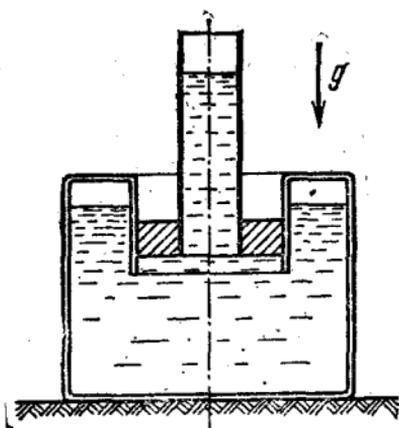
1.19\*. В цилиндрическом сосуде радиуса  $R$ , наполненном жидкостью плотности  $\rho$ , в боковой стенке имеется отверстие, заткнутое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку на длину  $l$ ? Пробка имеет вид цилиндра радиуса  $r$ . Центр отверстия находится на глубине  $h$ . Сосуд достаточно высок, чтобы вода из него не выливалась. Трение не учитывать.



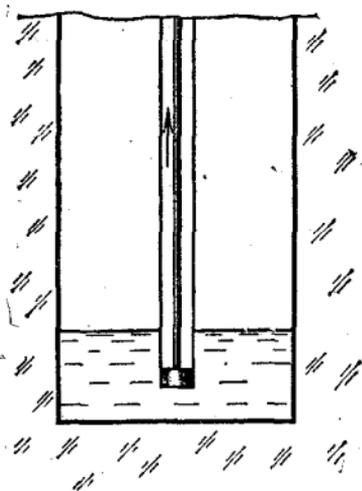
К задаче 1.13.



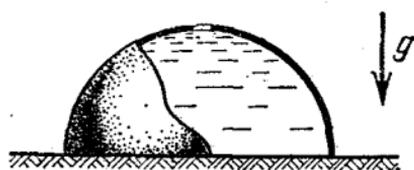
К задаче 1.14.



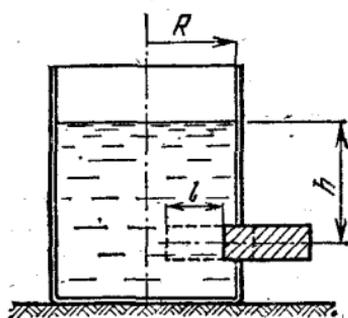
К задаче 1.15.



К задаче 1.16.



К задаче 1.17\*.



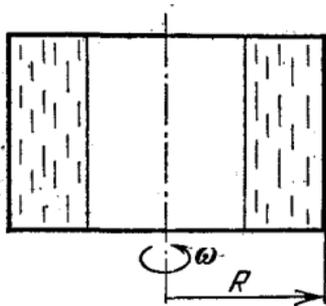
К задаче 1.19\*.

1.20\*. Найдите давление на расстоянии  $r$  от центра жидкой планеты радиуса  $R$ , если жидкость имеет плотность  $\rho$ . Чему равно давление в центре планеты? Гравитационная постоянная  $\gamma$ .

1.21. В сосуде с жидкостью находится газовый пузырь. Поля тяжести нет. Сосуд начинает двигаться с постоянным ускорением. Куда начнет двигаться пузырь?

1.22. Под каким углом к горизонту расположится поверхность жидкости в сосуде, скользящем по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом? Коэффициент трения  $\mu$ .

1.23\*. Закрытый цилиндр радиуса  $R$ , заполненный на  $3/4$  своего объема жидкостью плотности  $\rho$ , вращается в невесомости вместе с жидкостью с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Как меняется давление в жидкости в зависимости от расстояния до стенок цилиндра?



К задаче 1.23\*.

1.24. Найдите форму поверхности жидкости в вертикально расположенном цилиндрическом стакане, который вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

## § 4.2. Плавание. Закон Архимеда

2.1. Определите давление жидкости на нижнюю поверхность плавающей шайбы сечения  $S$  и массы  $m$ .

2.2. На границе раздела двух жидкостей плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  плавает шайба плотности  $\rho$  ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ). Высота шайбы  $h$ . Определите глубину ее погружения во вторую жидкость.

2.3. Тонкостенный стакан массы  $m$  вертикально плавает на границе раздела жидкостей плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Определите глубину погружения стакана в нижнюю жидкость, если дно стакана имеет толщину  $h$  и площадь  $S$  и стакан заполнен жидкостью плотности  $\rho_1$ .

2.4\*. В жидкости плотности  $\rho_0$  плавает прямоугольный параллелепипед из материала плотности  $\rho$ . Высота параллелепипеда  $b$ , ширина и длина  $a$ . При каком отношении  $a$  к  $b$  его положение устойчиво?

2.5. Деревянный куб с ребром 0,5 м плавает в озере, на  $\frac{2}{3}$  погруженный в воду. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы утопить куб?

2.6. Кусок железа весит в воде 1 кгс. Определите его объем. Плотность железа  $7,8 \text{ г/см}^3$ .

2.7. Тело в воде весит в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

2.8. К коромыслу весов подвешены два груза равной массы. Если один из грузов поместить в жидкость плотности  $\rho_1$ , а другой в жидкость плотности  $\rho_2$ , то равновесие сохранится. Найдите отношение плотностей грузов.

2.9\*. В сообщающиеся сосуды диаметров  $d_1$  и  $d_2$  налита жидкость плотности  $\rho$ . На сколько поднимется уровень жидкости в сосудах, если в один из сосудов положить тело массы  $m$  из материала, плотность которого меньше  $\rho$ ?

2.10. Определите натяжение нижней лески у поплавка, изображенного на рисунке, если поплавок погружен в воду на  $\frac{2}{3}$  своей длины. Масса поплавок 2 г.

2.11. С какой силой давит тяжелая палочка на дно водоема, если жестко связанный с палочкой пустотелый шарик радиуса  $r$  погрузился в жидкость наполовину? Плотность жидкости  $\rho$ , длина палочки  $l$ .

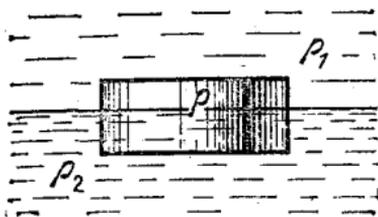
2.12. Определите натяжение нити, связывающей два шарика объема  $10 \text{ см}^3$ , если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду. Нижний шарик в три раза тяжелее верхнего.

2.13. Два одинаковых бревна расположены так, как показано на рисунке. Нижнее бревно привязано к вертикальной стенке тросами, составляющими с ней угол  $45^\circ$ . Верхнее бревно наполовину погружено в воду. Определите плотность бревен.

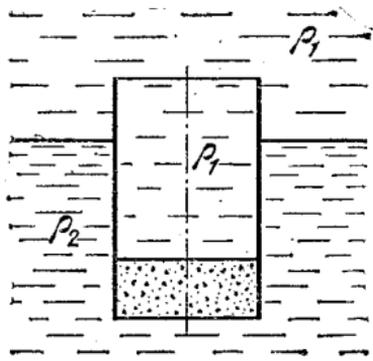
2.14. Определите силу давления бревен массы  $m$  на стенки канала. Верхнее бревно погружено в воду наполовину, а нижнее касается верхним участком поверхности воды.

2.15\*. Как зависит сила, прижимающая два одинаковых полуцилиндра плавающего батискафа, от глубины его погружения  $H$ , если плоскость соприкосновения полуцилиндров: а) вертикальна; б) горизонтальна? Радиус батискафа  $R$ , длина  $L$ , плотность жидкости  $\rho$ .

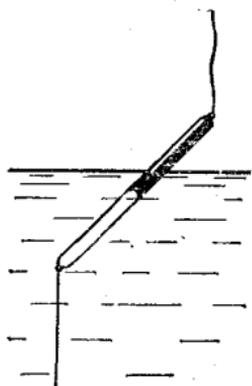
2.16\*. Докажите, что сила, с которой прижимаются половины сферического батискафа друг к другу, не зависит от наклона плоскости соприкосновения полусфер батискафа, если он полностью погружен в жидкость.



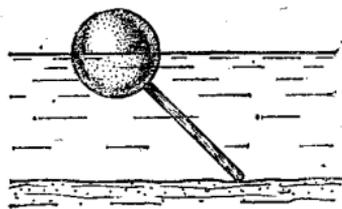
К задаче 2.2.



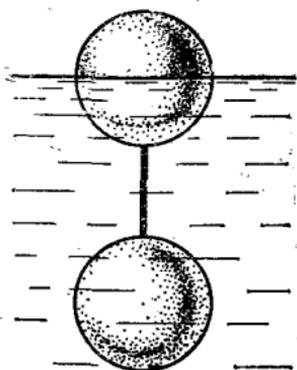
К задаче 2.3.



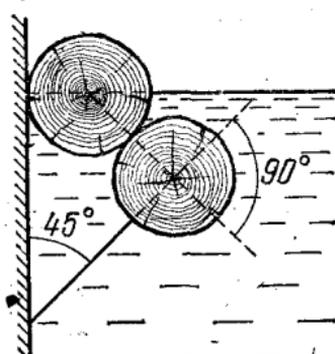
К задаче 2.10.



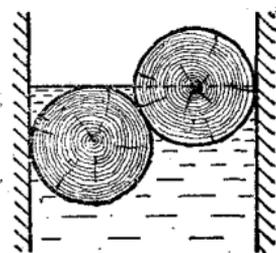
К задаче 2.11.



К задаче 2.12.



К задаче 2.13.



К задаче 2.14.

2.17. Коническая пробка высоты 10 см с углом при вершине  $90^\circ$  перекрывает отверстие радиуса 5 см. Чему должна быть равна масса этой пробки, чтобы она не всплывала при изменении уровня воды в сосуде?

2.18\*. Решите задачу 2.17 при условии, что отверстие радиуса  $r$  перекрывает шар радиуса  $R$ , а плотность жидкости равна  $\rho$ .

2.19\*. Наклон кубической коробки, наполовину погруженной в жидкость, равен  $\alpha$ . Определите массу каждого из двух противоположных ребер коробки. Массой остальных частей коробки пренебречь. Плотность жидкости  $\rho$ , длина ребер коробки  $a$ .

2.20\*. Определите минимальное натяжение двух канатов, связывающих широкий плот, состоящий из двух слоев бревен. Масса каждого бревна  $m$ . Верхний слой бревен погружен в воду наполовину.

2.21. В цилиндр радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью, падает цилиндрическая пробка радиуса  $r$  и высоты  $h$ . Начальная высота нижнего торца пробки над уровнем жидкости  $H$ , начальная скорость равна нулю. Какое количество тепла выделится к моменту окончания движения жидкости и пробки? Плотность пробки  $\rho$ , плотность жидкости  $\rho_0 > \rho$ .

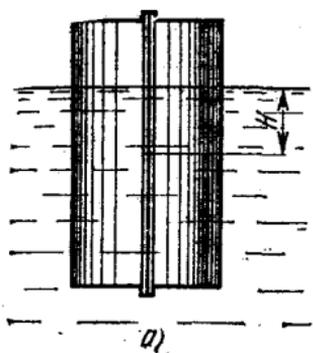
2.22. Какое количество тепла выделится в водоеме при всплывании в нем воздушного пузыря радиуса  $R = 0,1$  м с глубины  $H = 10$  м? Плотность воды  $\rho$ .

2.23. Какую минимальную работу нужно произвести, чтобы вытащить со дна моря на борт судна батискаф радиуса 2 м? Масса батискафа 35 т, глубина моря 100 м, высота борта судна 3 м.

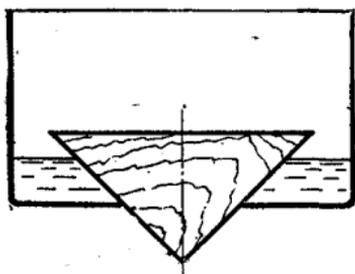
2.24\*. Для создания искусственной тяжести цилиндрический космический корабль радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Бассейн в корабле имеет глубину  $H$ , а дном бассейна служит боковая стенка корабля.

а) Сможет ли космонавт плавать в этом бассейне? Опишите особенность космического бассейна. Определите плотность плавающей в бассейне палочки длины  $l < H$ , если из воды выступает ее верхняя часть длины  $\Delta$ .

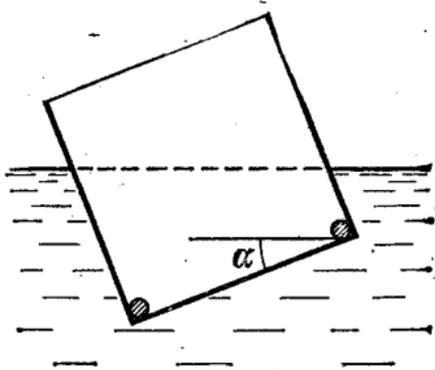
б) В бассейне можно наблюдать следующее интересное явление: два шара разной плотности, связанные нитью, в зависимости от «глубины» движутся или к свободной поверхности, или к стенке космического корабля, если плотность одного шара больше, а другого меньше плотности воды. Объясните это явление.



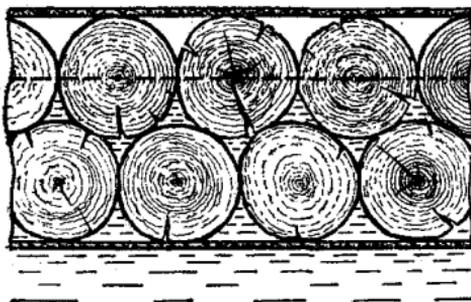
К задаче 2.15\*.



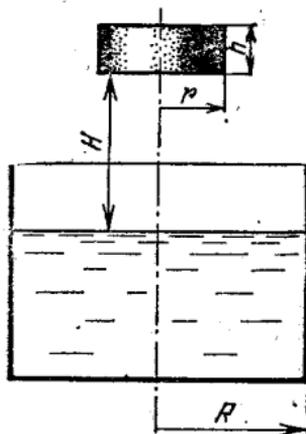
К задаче 2.17,



К задаче 2.19\*.



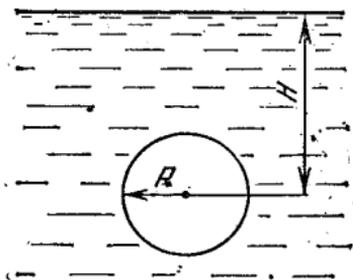
К задаче 2.20\*.



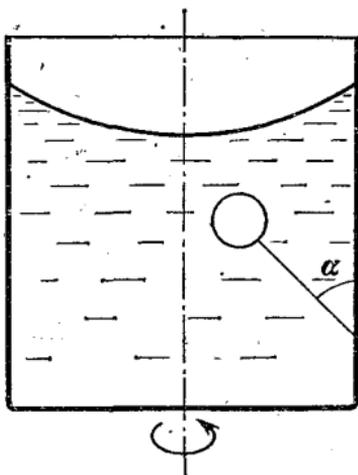
К задаче 2.21.

**2.25.** Цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , заполненный жидкостью плотности  $\rho_0$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. В сосуде находится шарик радиуса  $r$  и плотности  $\rho > \rho_0$ . Найдите силу, с которой шарик давит на боковую стенку сосуда.

**2.26.** Цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда на нити длины  $l$  привязан воздушный шарик радиуса  $r$ ; во время вра-



К задаче 2.22.



К задаче 2.26.

щения нить образует со стенкой угол  $\alpha$ . Определите угловую скорость вращения. Поле тяжести направлено вдоль оси сосуда.

### § 4.3. Движение идеальной жидкости

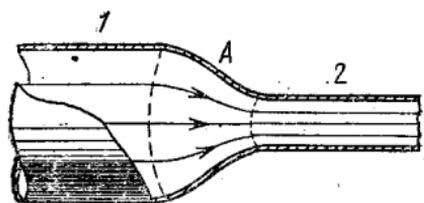
**3.1.** Насосная станция города поддерживает в водопроводе на уровне первого этажа давление 5 атм. Определите (пренебрегая трением при течении жидкости) скорость струи воды, вытекающей из крана на первом, втором и третьем этажах, если краны каждого последующего этажа расположены на 4 м выше. На какой этаж вода по водопроводу уже не поднимется?

**3.2.** Сосуд с водой подвешен к потолку. Высота воды в сосуде  $h$ . На сколько изменится натяжение подвеса, если в днище сосуда открыть маленькое отверстие, из которого вытекает струя сечения  $S$ ? Плотность воды  $\rho$ .

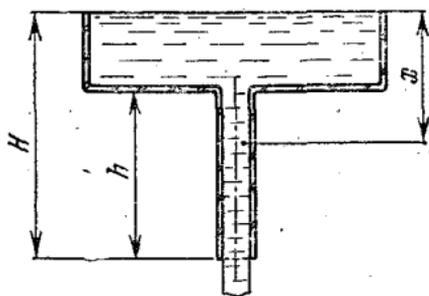
**3.3.** Насос должен подавать каждую секунду объем  $Q$  воды на высоту  $h$  по трубе постоянного сечения  $S$ . Какова должна быть мощность насоса? Плотность воды  $\rho$ .

3.4. а) Стационарный поток жидкости, протекающей по трубе переменного сечения, давит с силой  $F$  на участок  $A$  между сечениями  $1$  и  $2$ , который по третьему закону Ньютона давит с такой же силой в противоположном направлении. Следовательно, суммарная сила, действующая на жидкость со стороны этого участка, направлена против движения жидкости. Почему же жидкость в области  $2$  имеет бóльшую скорость, чем в области  $1$ ?

б) Чему равна суммарная сила, действующая на жидкость со стороны участка  $A$ ? Площади сечений в областях  $1$  и  $2$  равны  $S_1$  и  $S_2$ . Плотность жидкости  $\rho$ . В области  $2$  скорость жидкости равна  $v$ , давление равно нулю.



К задаче 3.4.



К задаче 3.5.

3.5. Из широкого сосуда через узкую цилиндрическую трубку вытекает жидкость плотности  $\rho$ . Как распределены по вертикали давление и скорость жидкости в сосуде и трубке? Давление воздуха  $P_0$ .

3.6. По изогнутой под прямым углом трубе поперечного сечения  $S$  со скоростью  $v$  течет жидкость плотности  $\rho$ . С какой силой жидкость действует на трубу, если давление жидкости на выходе из трубы  $P$ ? Силой тяжести пренебречь.

3.7. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площади  $S$  и выходным отверстием площади  $s$ , расположенным на оси цилиндра. Определите скорость истечения струи из насоса, если поршень под действием силы  $F$  перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости  $\rho$ .

3.8. По наклонной плоскости стекает широкий поток воды. На расстоянии  $l$  по течению глубина потока уменьшилась вдвое. На каком расстоянии глубина потока уменьшится в 4 раза?

3.9. Плита массы  $m$  удерживается на месте в горизонтальном положении  $N$  струями жидкости, бьющими вертикально вверх из отверстий сечения  $S$  каждое. Скорость

жидкости на выходе из отверстий  $u$ . На какой высоте над отверстиями удерживается плита?

3.10\*. Во сколько раз увеличится сброс воды через широкую плотину, если уровень воды над кромкой плотины возрастет в 2 раза? Профиль плотины изображен на рисунке.

3.11\*. Водосброс из широкого плоского сосуда происходит через треугольный вырез в его кромке. Во сколько раз уменьшится водосброс при понижении уровня воды от  $H$  до  $h$ ?

3.12. Плоская бесконечная струя жидкости толщины  $h$  падает под углом  $\alpha$  со скоростью  $v$  на плоскость. На какие струи распадается падающая струя?

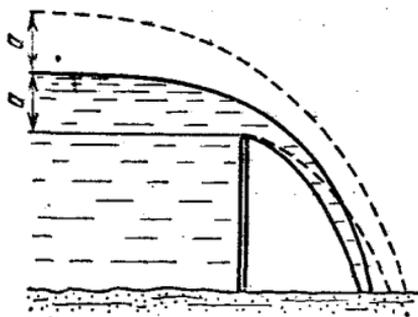
3.13\*. Две пластины, расположенные под углом  $2\alpha$  друг к другу, движутся со скоростью  $v$  по нормальям к своим поверхностям. Найдите скорости струй, возникающих при столкновении пластин, если движение материала пластин рассматривать как движение идеальной жидкости.

3.14\*. Определите форму стационарной струи после столкновения двух струй радиусов  $R$  и  $r$ , которые двигались навстречу друг другу с одинаковыми скоростями.

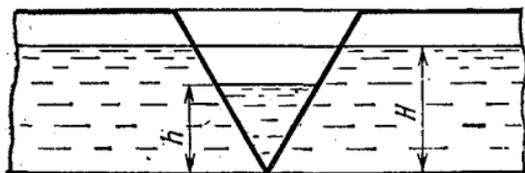
3.15. «... В 1941 году немцы придумали кумулятивный противотанковый снаряд. На конусе снаряда — запал. При ударе он вызывает детонацию и воспламеняет весь заряд. Снаряд пробивает всю броню. В 1944 году такие немецкие снаряды попали в наши руки и руки союзников. Начался широкий эксперимент. При этом обнаружили много дополнительных эффектов и парадоксов. Стали выяснять — что же летит, что пробивает? Сперва думали, что этот снаряд бронепрожигающий, что броню пронзает струя горячего газа. Нет, оказалось, что летит металл...: перед плитой со скоростью 8 км/с, внутри плиты 4 км/с, за плитой снова 8 км/с» (Из вступительного слова председателя Президиума СО АН СССР академика М. А. Лаврентьева перед учащимися Летней физико-математической школы в 1971 году). Объясните это явление. Определите, с какой скоростью двигалась стенка металлической конической полости, перекрывающей заряд, если угол при вершине полости  $30^\circ$ .

3.16\*. Плотность жидкости  $\rho$ . В начальный момент она заполняет вертикальный участок длины  $l$  в тонкой L-образной трубке. Найдите, как зависит от времени высота уровня жидкости. Найдите распределение давления в момент, когда высота столба уменьшится наполовину.

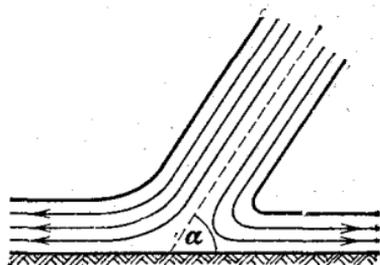
3.17\*. Из отверстия в дне высокого сосуда вытекает вода. Сечение сосуда  $S$ , сечение струи  $s$ . Уровень воды в со-



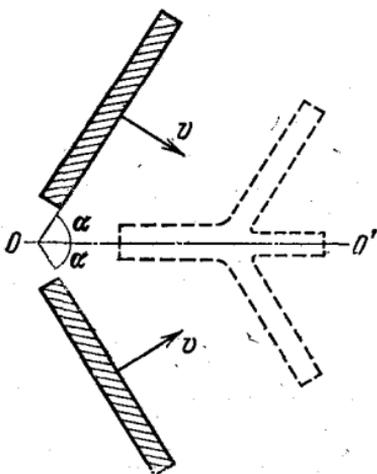
К задаче 3,10\*,



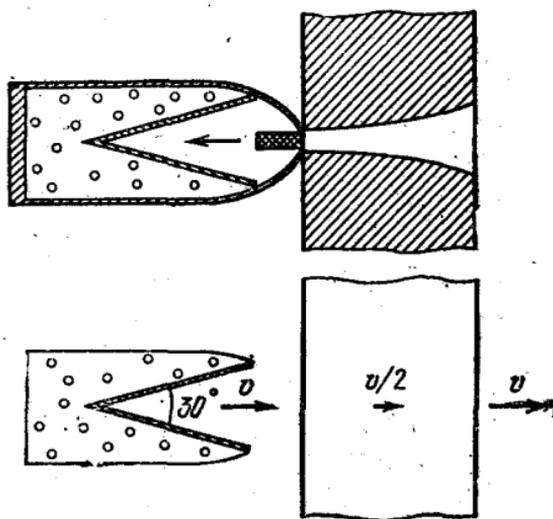
К задаче 3,11\*,



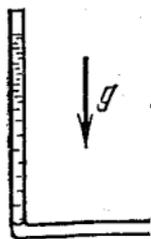
К задаче 3.12,



К задаче 3,13\*,



К задаче 3,15,



К задаче  
3.16\*.

суде перемещается с постоянным ускорением. Найдите это ускорение.

3.18. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема  $V$ . Поршень оказывает на воду постоянное давление  $P$ . Какую энергию приобретет вода в момент, когда полость исчезнет?

3.19\*. Рассмотрите «замыкание» сферической полости в большом водоеме. Давление воды  $P$ , начальный радиус полости  $R$ . Определите скорость воды на границе полости в момент, когда ее радиус был равен  $r$ .

3.20. а) Оцените, при какой скорости кромки лопасти винта катера за лопастью возникнет полость.

б\*) При какой интенсивности ультразвука в воде при атмосферном давлении начнут появляться микрополости? Сжимаемость воды  $5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ .

## § 4.4. Течение вязкой жидкости

4.1. Пространство между двумя параллельными плоскостями заполнено жидкостью вязкости  $\eta$ . Одна из плоскостей движется со скоростью  $u_0$ , другая покоится. Найдите распределение скоростей жидкости между плоскостями и силу вязкости, действующую на единицу площади каждой из плоскостей. Расстояние между плоскостями  $h$ .

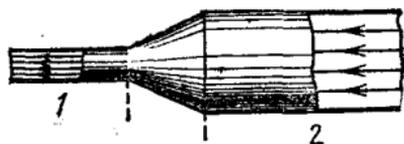
4.2. Найдите распределение скоростей при установившемся течении жидкости между двумя плоскостями. Расстояние между плоскостями  $h$ , вязкость жидкости  $\eta$ . Найдите расход жидкости на единицу ширины потока, если перепад давления на единицу длины (в направлении движения жидкости) равен  $\Delta P$ .

4.3\*. Жидкость перекачивается из одного сосуда в другой через длинную трубку радиуса  $R$  и длины  $l$ . Определите зависимость скорости жидкости от расстояния до стенки трубки, если разность давлений на концах трубки  $\Delta P$ , вязкость жидкости  $\eta$ .

4.4. Определите расход жидкости на единицу ширины плоского потока, стекающего по наклонной плоскости под углом  $\alpha$  к горизонту. Вязкость и плотность жидкости  $\eta$  и  $\rho$ . Толщина потока  $h$ .

4.5. В трубе переменного сечения поддерживается стационарное течение вязкой жидкости. В сечениях 1 и 2 ско-

рость можно считать постоянной по сечению. Площади сечений 1 и 2 равны  $S_1$  и  $S_2$ . Давления жидкости в сечениях 1 и 2  $P_1$  и  $P_2$ . Скорость течения жидкости в сечении 1  $u_1$ . Найдите силу, с которой жидкость действует на участок трубы между сечениями 1 и 2.



К задаче 4.5.

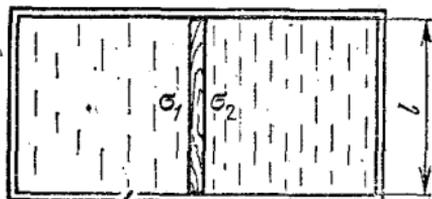
## § 4.5. Поверхностное натяжение жидкости

5.1. Что называется поверхностным натяжением? Приведите примеры проявления сил поверхностного натяжения.

5.2. Почему вода в кабине космического корабля «висит» в воздухе в форме шара? Чем меньше капельки ртути на полу, тем больше их форма похожа на сферу. Почему?

5.3. Оцените максимальный размер капель воды, которые могут «висеть» на потолке. Поверхностное натяжение воды 73 дин/см.

5.4. Пленки двух жидкостей разделены планкой длины  $l$ . Поверхностные натяжения жидкостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Какая сила действует на планку?



К задаче 5.4.

5.5. Найдите поверхностное натяжение жидкости, если петля из резиновой нити длины  $l$  и сечения  $S$ , положенная на пленку жидкости, растянулась по окружности радиуса  $R$  после того, как пленка была проколота внутри петли. Модуль Юнга резины  $E$ .

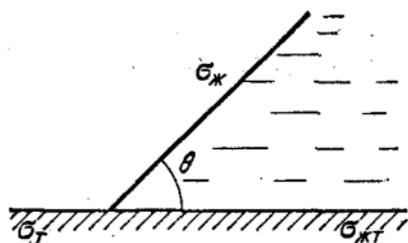
5.6. а) Жидкость не смачивает твердое тело, если  $\sigma_{ж} + \sigma_{т} = \sigma_{жт}$ , где  $\sigma_{ж}$ ,  $\sigma_{т}$  и  $\sigma_{жт}$  — поверхностные энергии жидкости, твердого тела и границы жидкость — твердое тело. Из каких физических соображений следует этот результат?

б) Когда жидкость полностью смачивает твердое тело?

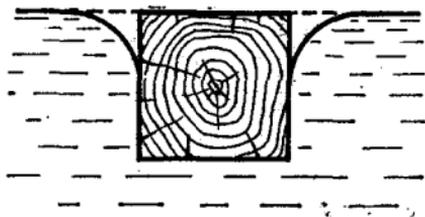
в\*) Определите косинус краевого угла  $\theta$  через  $\sigma_{ж}$ ,  $\sigma_{т}$ ,  $\sigma_{жт}$ .

5.7. Железный кубик, смазанный парафином, плавает в воде так, что его верхняя грань находится на уровне воды.

Вода не смачивает парафин. Поверхностное натяжение воды 73 дин/см. Найдите длину грани кубика.



К задаче 5.6.



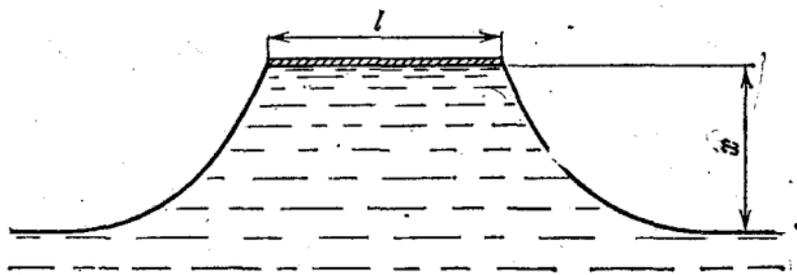
К задаче 5.8.

5.8. Во сколько раз плотность вещества длинной палочки с квадратным сечением больше плотности жидкости, если палочка плавает на ее поверхности так, как это показано на рисунке?

5.9. Определите максимальную массу единицы площади пластины, которая не «утонет», если ее осторожно положить на поверхность воды. Пластина водой не смачивается.

5.10. Оцените, каким должно быть ускорение свободного падения на планете, чтобы человек мог «ходить» по воде в обуви с несмачиваемыми водой подошвами.

5.11\*. Длинная пластина ширины  $l$  приведена в соприкосновение с поверхностью жидкости. Затем пластину стали



К задаче 5.11\*.

поднимать вверх. Как зависит сила, действующая на единицу длины пластины, от высоты ее подъема  $x$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ . Масса единицы длины пластины  $m$ .

5.12. а) Сумма сил, действующих на выделенный на рисунке объем жидкости, равна нулю. Пользуясь этим, определите высоту, на которую жидкость поднимется по верти-

кальной стенке. Краевой угол  $\theta$ . Поверхностное натяжение и плотность жидкости  $\sigma$  и  $\rho$ .

б) На какую высоту поднимется вода по вертикальной стенке, которую она полностью смачивает?

5.13. а) Определите толщину слоя жидкости, разлитой на горизонтальной плоскости. Краевой угол  $\theta$ , плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

б) Определите толщину слоя воды, разлитой на горизонтальной плоскости, покрытой парафином.

5.14\*. а) Большой участок жидкости покрыт слоем масла. Поверхностное натяжение и плотность жидкости  $\sigma_{ж}$  и  $\rho_{ж}$ , поверхностное натяжение и плотность масла  $\sigma_{м}$  и  $\rho_{м} < \rho_{ж}$ , поверхностное натяжение границы жидкость — масло  $\sigma_{жм}$ . Определите толщину слоя масла.

б) «... «Арго-Мерчент», танкер водоизмещением 28 691 т, напоролся на риф; корпус танкера развалился надвое, выплеснув в море полный груз нефти. Черные пятна нефти расплозлись на тысячи квадратных миль...» (Неделя, 1977, № 19). Оцените общую площадь этих пятен. Поверхностное натяжение нефти 30 дин/см, плотность нефти 0,8 г/см<sup>3</sup>, нефть не смачивается водой.

5.15\*. Докажите, что объем жидкости, который поднимется над ее общим уровнем (на рисунке этот объем отделен штриховой линией), зависит только от периметра сечения погруженной палочки и не зависит от формы сечения.

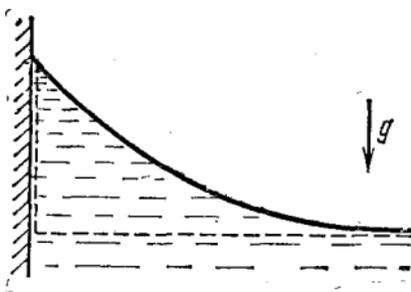
5.16. а) Докажите, что давление под цилиндрической поверхностью жидкости радиуса  $R$  равно  $\sigma/R$  ( $\sigma$  — поверхностное натяжение жидкости). Для доказательства воспользуйтесь условием равновесия объема жидкости, лежащего над плоскостью  $A$ .

б) Докажите, что давление в этой же жидкости под сферической поверхностью радиуса  $R$  равно  $2\sigma/R$ .

5.17. Определите минимальное и максимальное давления внутри сферической капли жидкости, которая плавает в другой жидкости. Расстояние центра капли от поверхности жидкости  $h$ , радиус капли  $R$ , плотности жидкостей  $\rho$ , поверхностное натяжение на границе раздела жидкостей  $\sigma$ .

5.18. Жидкость смачивает вертикальную стенку (см. рис. к задаче 5.12). Как зависит радиус кривизны поверхности жидкости от высоты  $x$ , на которую поднимается жидкость над своим уровнем? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

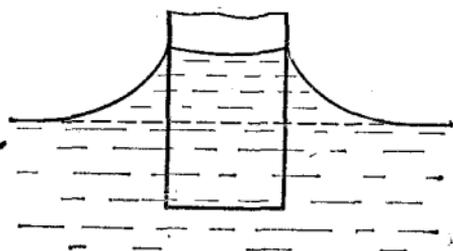
5.19. Внешний радиус мыльного пузыря  $R$ , толщина стенки  $h$ . Чему равно давление воздуха внутри пузыря?



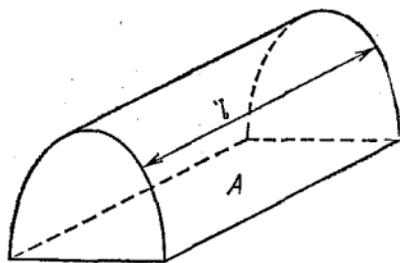
К задаче 5.12,



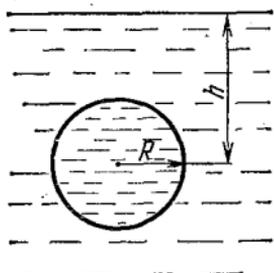
К задаче 5.13а.



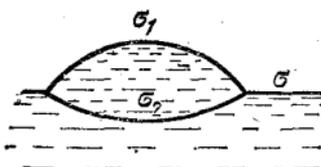
К задаче 5.15\*.



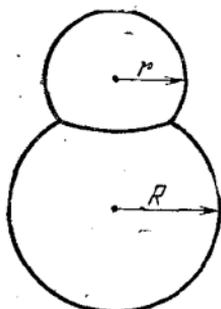
К задаче 5.16а.



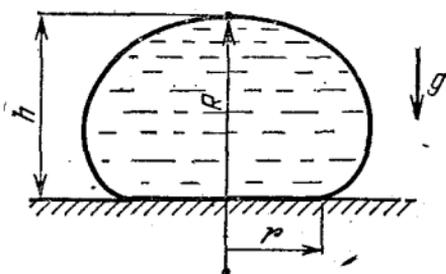
К задаче 5.17.



К задаче 5.22\*.



К задаче 5.23.



К задаче 5.24\*.

В пленке жидкости? Давление воздуха вне пузыря равно  $P$ .

5.20. Оцените, сколько можно унести воды в решетке? Размер ячейки  $1 \times 1 \text{ мм}^2$ , площадь решета  $0,1 \text{ м}^2$ . Решето водой не смачивается.

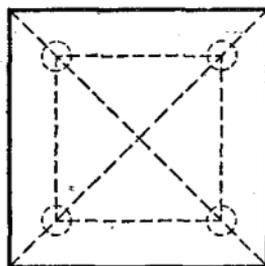
5.21\*. Два легких тела, оба смачиваемые или оба не смачиваемые водой, плавающая на поверхности воды, притягиваются друг к другу. Если же одно тело смачивается водой, а другое не смачивается, то тела будут отталкиваться. Объясните это явление.

5.22\*. Маленькая капля жира плавает на поверхности жидкости с поверхностным натяжением  $\sigma$ . Поверхностное натяжение жира на границе воздух — жир  $\sigma_1$ , на границе жир — жидкость  $\sigma_2$ . Определите толщину капли, если ее радиус равен  $r$ .

5.23. На мыльном пузыре радиуса  $R$  «сидит» пузырек радиуса  $r$ . Какой радиус кривизны имеет пленка, их разделяющая? Какие углы образуют пленки в местах их соприкосновения?

5.24\*. Радиус кривизны капли в верхней точке  $R$ . Чему равна масса капли, если высота капли  $h$ , радиус соприкосновения капли с горизонтальной плоскостью, на которой она «сидит», равен  $r$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ , плоскость не смачивается жидкостью.

5.25\*. На четыре ртутных шарика, лежащих на горизонтальной плоскости, осторожно кладут квадратную пластину так, как изображено на рисунке. Радиус шариков  $1 \text{ мм}$ , масса пластины  $80 \text{ г}$ , поверхностное натяжение ртути  $500 \text{ дин/см}$ . Смачивания нет.



К задаче 5.25\*.

а) На каком расстоянии от горизонтальной плоскости будет находиться нижняя поверхность пластины?

б) Определите частоту малых вертикальных колебаний пластины.

5.26. Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы: а) разбить сферическую каплю ртути радиуса  $3 \text{ мм}$  на две одинаковые капли; б) увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиуса  $1 \text{ см}$ ?

## § 4.6. Капиллярные явления

6.1. а) При удалении с поверхности ткани жирного пятна рекомендуется смачивать пропитанной бензином ватой края пятна, а не само пятно. Почему?

б) Для того чтобы мазь лучше впитывалась в лыжные ботинки, как их нужно нагревать: снаружи или изнутри?

6.2. Капилляр радиуса  $R$  опускают в смачивающую жидкость с поверхностным натяжением  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ . Определите высоту, на которую поднимется жидкость. Нарисуйте график зависимости давления в столбе жидкости в капилляре от расстояния до уровня жидкости в сосуде. Определите работу, совершенную силами поверхностного натяжения, и потенциальную энергию жидкости в капилляре. Почему эти величины не совпадают?

6.3. Какую относительную ошибку мы допускаем при измерении атмосферного давления по высоте ртутного столба, если внутренний диаметр барометрической трубки 5 мм, поверхностное натяжение ртути 480 дин/см?

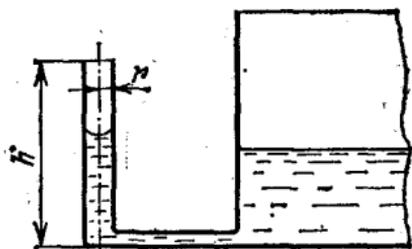
6.4. В трех открытых капиллярах находится вода. При вертикальном положении капилляров вода образует столбики длины 2, 4 и 2,98 см. Внутренний диаметр капилляров 1 мм. Найдите радиусы кривизны нижних менисков в каждом из капилляров, если смачивание полное.

6.5. Вертикальный капилляр радиуса  $r$  и высоты  $h$  соединен с широким сосудом трубкой. Уровень жидкости в сосуде повышается со скоростью  $v$ . Как зависит разность уровней жидкости в сосуде и капилляре от времени? Через какое время жидкость начнет выливаться из капилляра? Поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ , плотность  $\rho$ , смачивание полное.

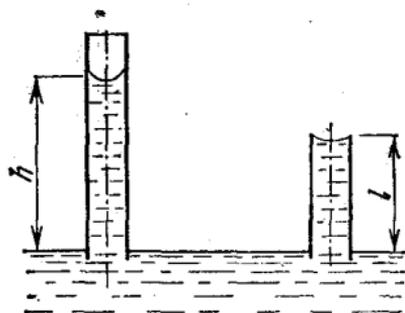
6.6. Жидкость в длинном капилляре поднимается на высоту  $h$ . Определите радиус кривизны поверхности жидкости на конце короткого капилляра длины  $l < h$ . Радиусы капилляров  $R$ , краевой угол  $\theta$ .

6.7\*. Капилляр, наполовину заполненный жидкостью, вращается вокруг оси  $OO'$ . Длина капилляра  $2l$ , радиус  $r$ . Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ . Жидкость полностью смачивает капилляр. При какой угловой скорости жидкость начнет вытекать из капилляра?

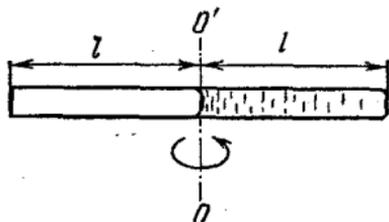
6.8. В капилляре, опущенном вертикально в воду на глубину  $l$ , вода поднялась на высоту  $h$ . Нижний конец капилляра закрывают, вынимают капилляр из воды и вновь



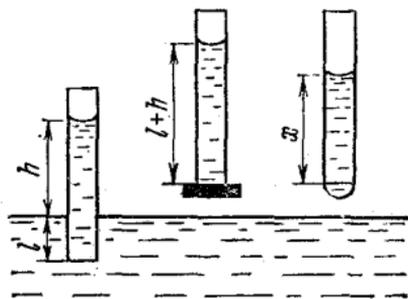
К задаче 6.5.



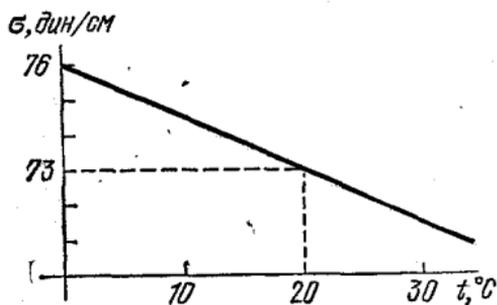
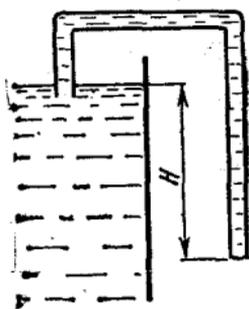
К задаче 6.6.



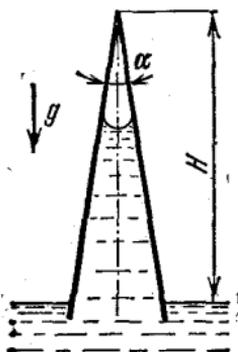
К задаче 6.7\*.



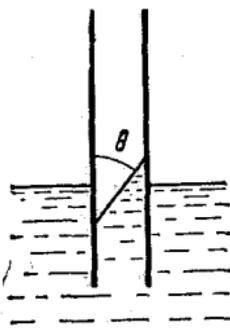
К задаче 6.8.



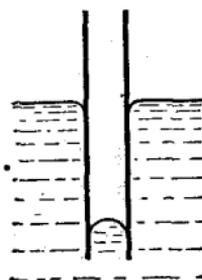
К задаче 6.9\*.



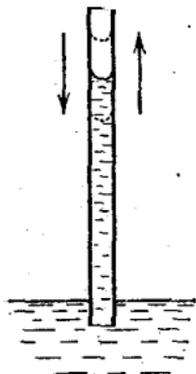
К задаче 6.11.



К задаче 6.13.



К задаче 6.14\*.



К задаче 6.15\*.

открывают. Определите длину столба воды, оставшейся в капилляре, если смачивание полное.

6.9\*. В сосуд с водой опускают изогнутый стеклянный капилляр радиуса  $r = 0,1$  мм. Температурная зависимость поверхностного натяжения показана на рисунке. В каком диапазоне температур вода потечет из сосуда, если  $H = 15$  см?

6.10. Куда будет двигаться капля смачивающей и несмачивающей жидкости в горизонтально расположенном коническом капилляре?

6.11. На какую высоту поднимется жидкость по вертикальному коническому капилляру с углом при вершине  $\alpha \ll 1$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ . Жидкость полностью смачивает капилляр, высота капилляра  $H$ .

6.12. На какую высоту поднимется жидкость между двумя вертикальными пластинами, расстояние между которыми  $\Delta$ , если краевой угол у первой пластины  $\theta_1$ , у второй  $\theta_2$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

6.13. Какая сила действует на параллельные квадратные пластины  $a \times a$ , частично погруженные в жидкость, если краевой угол у внешних поверхностей  $90^\circ$ , у внутренних  $\theta$  и  $\pi - \theta$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

6.14\*. С какой силой притягиваются друг к другу две параллельные пластины  $a \times a$ , частично погруженные в жидкость, если они не смачиваются жидкостью? Плотность жидкости  $\rho$ , расстояние между пластинами  $\Delta$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

6.15\*. Найдите период малых вертикальных колебаний жидкости в капилляре радиуса  $r$ . Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

## Глава 5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

### § 5.1. Тепловое движение частиц

1.1. Оцените массу инфузории, на направленное движение которой со скоростью  $1$  мкм/с не слишком влияет тепловое движение.

1.2. Оцените среднюю кинетическую энергию и среднеквадратичную скорость частичек тумана диаметра  $10$  мкм, находящихся в воздухе с температурой  $5^\circ\text{C}$ .

1.3. Во сколько раз различаются среднеквадратичные скорости двух частичек, совершающих броуновское движение в капле воды, если их массы различаются в 4 раза?

1.4. Определите среднеквадратичное отклонение маятника от положения равновесия, вызываемое тепловым движением шарика маятника. Температура воздуха  $20^\circ\text{C}$ . Масса шарика 1 мг, длина нити маятника 10 м.

1.5\*. Зеркальце гальванометра подвешено на кварцевой нити. На зеркальце падает параллельный пучок лучей и, отражаясь от него, попадает на экран. Оцените размер пятна на экране, если при повороте зеркальца на угол  $\varphi$  со стороны нити действует момент силы  $N = -\kappa\varphi$ , где  $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-15}$  Н·м. Температура воздуха 300 К, расстояние до экрана 20 м. Как изменится ответ, если температуру воздуха понизить до 100 К?

1.6. Сосуд разделен на две части пористой перегородкой. В левом объеме находится газ из легких молекул, в правом — из тяжелых. Давления газов в обоих объемах были одинаковыми. Через некоторое время давление в правом объеме увеличилось. Затем, через более длительный промежуток времени, давления в объемах выравнялись. Объясните этот эффект.

1.7. В объеме 1 находится смесь гелия с водородом. Давления водорода и гелия одинаковы. На короткое время открывают отверстие А, а затем закрывают. Определите отношение давления гелия к давлению водорода в объеме 2.



К задаче 1.7.



К задаче 1.8\*.

1.8\*. Имеется  $n$  одинаковых изолированных объемов. В объеме 1 находится одинаковое число молекул с молекулярными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . На короткое время открывают одинаковые небольшие отверстия, соединяющие соседние объемы так, как показано на рисунке. Затем отверстия закрывают. Оцените отношение числа молекул с молекулярной массой  $\mu_1$  к числу молекул с молекулярной массой  $\mu_2$  в  $n$ -м объеме.

1.9\*. Через отверстие в стенке сосуда разреженный газ течет в вакуум. Через время  $\tau$  в сосуде осталась половина молекул. Размеры сосуда и отверстия увеличили в  $n$  раз. Через какое время после того, как открыли отверстие, в объеме останется половина молекул?

1.10. Оцените, во сколько раз поток газа из сосуда через цилиндрический канал радиуса  $R$  и длины  $L$  меньше потока через отверстие радиуса  $R$ . Считать, что стенки канала поглощают молекулы.



К задаче 1.11\*.

1.11\*. Два одинаковых объема  $V$  соединены узким каналом. В объемах находится небольшое число частиц  $N$  (частиц так мало, что они почти не сталкиваются друг с другом).

Сколько частиц окажется в каждом из объемов, если температура первого объема  $T_1$ , а второго  $T_2 > T_1$ ? Какие давления будут при этом в объемах? В канал поместили легкий флажок. В какую сторону он отклонится?

## § 5.2. Функция распределения

2.1. В  $1 \text{ см}^3$  при давлении  $0,1 \text{ МПа}$  содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул азота, движущихся в разных направлениях и с разными скоростями. Число молекул, вертикальные составляющие скоростей которых лежат в интервале  $999-1001 \text{ м/с}$ , равно  $1,3 \cdot 10^{12}$ .

а) Какое число таких молекул содержится в  $1 \text{ л}$  азота?

б) Сколько молекул азота, движущихся вертикально в интервалах скоростей  $1000 \pm 0,1$  и  $1000 \pm 10 \text{ м/с}$ , содержится в  $1 \text{ м}^3$ , если считать, что число молекул пропорционально интервалу скоростей?

в) Число молекул, составляющие скоростей которых вдоль какого-либо выделенного направления лежат в определенном интервале, не зависит от составляющих скоростей этих же молекул в других направлениях. Пользуясь этим, определите: число молекул азота в  $1 \text{ см}^3$ , горизонтальные составляющие скоростей которых, так же как и вертикальные, лежат в интервале  $999-1001 \text{ м/с}$ ; число молекул, горизонтальные составляющие скоростей которых лежат в интервале  $1000 \pm 0,1 \text{ м/с}$ , а вертикальные — в интервале  $1000 \pm 2 \text{ м/с}$ .

2.2. Число молекул идеального газа  $dN$ , составляющие скоростей которых вдоль произвольной оси  $x$  лежат в интер-

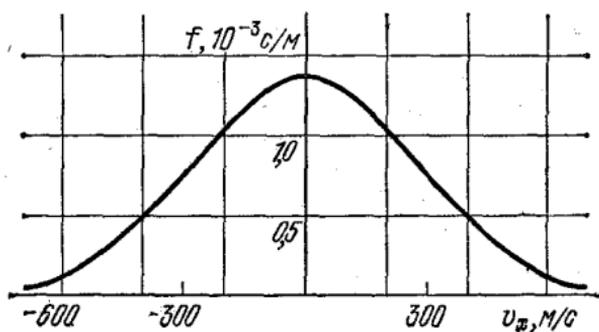
вале ( $v_x, v_x + dv_x$ ), определяется распределением Максвелла

$$dN = N \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\} dv_x,$$

где  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Функция

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\}$$

называется функцией распределения. На рисунке приведена функция распределения молекул азота при комнатной температуре ( $T = 293$  К). Используя график, найдите: а) сколько в  $1 \text{ см}^3$  воздуха содержится молекул азота, име-



К задаче 2.2.

ющих вертикальные составляющие скоростей от 499 до 501 м/с; б) сколько в  $1 \text{ м}^3$  воздуха содержится молекул азота, имеющих вертикальные составляющие скоростей от 498 до 502 м/с. Давление воздуха 0,1 МПа.

2.3. Найдите отношение числа молекул водорода, составляющие скоростей которых вдоль оси  $x$  лежат в интервале 3000 — 3010 м/с, к числу молекул водорода, имеющих вдоль той же оси составляющие скоростей 1500—1505 м/с. Температура водорода 300 К.

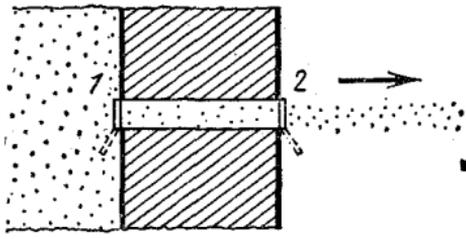
2.4. Найдите отношение числа молекул водорода, имеющих составляющие скоростей: вдоль  $x$  3000—3010 м/с, вдоль  $y$  3000—3010 м/с, вдоль  $z$  3000—3002 м/с, к числу молекул водорода, имеющих составляющие скоростей: вдоль  $x$  1500—1505 м/с, вдоль  $y$  1500—1501 м/с, вдоль  $z$  1500—1502 м/с. Температура водорода 300 К.

2.5. Представим, что удалось сфотографировать на киноплёнку газ с температурой  $T$ . Функция распределения молекул по скоростям  $f(v)$ .

а) Найдите функцию распределения «частиц» по скоростям, если изображение проецируется на экран с увеличением  $l$ .

б) Пленку начали прокручивать в  $l$  раз быстрее. Найдите функцию распределения «частиц» по скоростям в этом случае.

2.6. В стенке сосуда с разреженным газом, находящегося в большом вакуумном объеме, сделано малое отверстие. Как будет изменяться температура газа в сосуде?

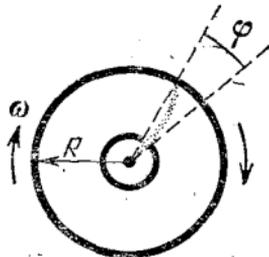


К задаче 2.7\*.

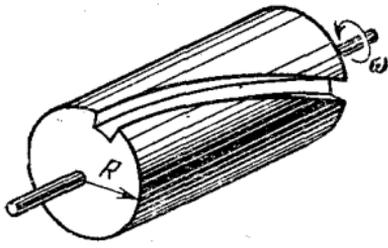
2.7\*. В толстой стенке сосуда, содержащего газ, сделан прямой канал длины  $l$ , который соединяет сосуд с откачанным объемом. Для формирования короткого пучка частиц

канал снабжен двумя затворами, которые можно на короткое время открыть. Затвор 1 расположен на выходе канала в сосуд, затвор 2 — на выходе канала в объем. Пучок частиц формируется следующим образом: сначала на время  $\tau$  открывают затвор 1, затем, после того как этот затвор закроется, через время  $t$  открывается на время  $\tau$  затвор 2. Частицы, пролетевшие во время этого процесса канал, образуют в откачанном объеме пучок. Чему равна длина пучка через время  $\tau_1$  после закрытия затвора 2?

2.8. Молекулярная пушка создает узкий ленточный пучок атомов серебра, которые попадают на внутреннюю поверхность цилиндра радиуса  $R = 30$  см и оседают на



К задаче 2.8.



К задаче 2.9.

ней в виде пятна. Устройство вращается с угловой скоростью  $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$ . Определите скорость молекулярного пучка, если пятно отклонилось на угол  $\phi = 0,314$  рад от первоначального положения.

2.9. На поверхности цилиндра прорезан узкий винтовой канал с шагом  $h$ . По одну сторону торца цилиндра находится разреженный газ, по другую — вакуум. Молекулы газа легко поглощаются стенками канала. Цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Какими скоростями будут обладать молекулы, прошедшие через канал?

2.10\*. В пучке частиц скорости имеют одно направление и лежат в интервале  $(v, v + \Delta v)$ ,  $\Delta v \ll v$ . В единице объема пучка  $n$  частиц, масса каждой  $m$ .

а) В течение времени  $\tau$  на частицы в направлении их движения действовала сила  $F$ . Определите скорости и число частиц в единице объема после действия силы.

б) Определите скорости и число частиц в единице объема после прохождения области, где на расстоянии  $l$  вдоль направления движения на частицы действовала сила  $F$ .

2.11\*. Пусть создан направленный пучок молекул с функцией распределения

$$f(v_x) = 2\sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha v_x^2).$$

Масса молекулы  $m$ . Как изменятся функция распределения и число молекул в единице объема, если пучок пройдет область ширины  $l$ , в которой на каждую молекулу действует тормозящая сила  $F$ ?

2.12. На высоте 3 км в 1 см<sup>3</sup> воздуха содержится примерно 10<sup>2</sup> пылинок, у поверхности земли — примерно 10<sup>5</sup>. Определите среднюю массу пылинки и оцените ее размер, предполагая, что плотность пылинки 1,5 г/см<sup>3</sup>. Температура воздуха 27 °С.

2.13. У поверхности земли молекул гелия почти в 10<sup>5</sup> раз, а водорода почти в 10<sup>6</sup> раз меньше, чем молекул азота. На какой высоте число молекул гелия будет равно числу молекул азота? А водорода? Принять среднюю температуру атмосферы равной 0 °С.

2.14\*. а) Испарение жидкости можно рассматривать как «уход» из жидкости молекул, кинетическая энергия которых в направлении, нормальном к поверхности жидкости, больше энергии связи молекул в жидкости. Испарение жидкости «прекращается», как только число «уходящих» молекул сравняется с числом молекул, которые приходят в жидкость из газовой фазы. Газ, состоящий из тех же молекул, что и жидкость, носит название «насыщенный пар», если он находится в равновесии с жидкостью. Оцените, пользуясь этой моделью, число частиц в единице объема насыщенного пара при температуре  $T$ , если молярная теплота испарения

жидкости  $q$ , а число частиц в единице объема жидкости  $n_0$ . Частицы в жидкости и газовой фазе имеют максвелловское распределение по скоростям.

б) При  $100^\circ\text{C}$  молярная теплота испарения воды около  $4 \cdot 10^4$  Дж/моль. В  $1 \text{ см}^3$  насыщенного пара содержится  $2 \cdot 10^{19}$  частиц. Какой результат даст задача а)? При какой температуре число частиц в  $1 \text{ см}^3$ , рассчитанное по формуле, будет равно  $2 \cdot 10^{19}$ ?

### § 5.3. Столкновения молекул. Процессы переноса

3.1. При атмосферном давлении и температуре  $0^\circ\text{C}$  длина свободного пробега молекул водорода  $\lambda_3$  мкм. Оцените диаметр молекул водорода.

3.2. Оцените длину свободного пробега молекул азота в воздухе при нормальных условиях. Радиус молекул азота и кислорода принять равным  $0,18 \text{ нм}$ .

3.3. Оцените, сколько раз в  $1 \text{ с}$  в  $1 \text{ см}^3$  воздуха сталкиваются молекулы азота друг с другом и молекулы азота с молекулами кислорода.

3.4. а) Идеальный газ нагревают при постоянном давлении. Как изменяются длина свободного пробега  $l$  и число столкновений  $\nu$  отдельной молекулы в единицу времени в зависимости от температуры?

б) Газ сжимают изотермически. Найдите зависимость  $l$  и  $\nu$  от давления.

в) Газ сжимают адиабатически. Найдите зависимость  $l$  и  $\nu$  от давления. Показатель адиабаты  $\gamma$ .

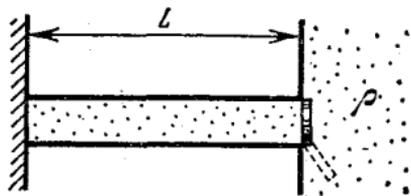
3.5. В объеме находится смесь двух газов. В единице объема смеси содержится  $n_1$  молекул одного и  $n_2$  другого газа. Радиусы молекул  $R_1$  и  $R_2$ . Оцените длины свободного пробега молекул этих газов.

3.6\*. При нормальных условиях в  $1 \text{ см}^3$  атомарного водорода содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  атомов. Оцените время, в течение которого  $0,1$  часть атомов водорода превращается в молекулы водорода. Считать, что каждое столкновение двух атомов водорода приводит к образованию молекулы. Радиус атомов водорода  $0,06 \text{ нм}$ .

3.7. а) Относительное содержание радиоактивных атомов в газе невелико. Их число в единице объема линейно растет с высотой:  $n = ah$ . Масса атома  $m$ , длина свободного пробега  $l$ , температура атомов  $T$ . Оцените плотность потока этих атомов на Землю.

б) Оцените коэффициент диффузии паров воды через воздух при  $20^\circ\text{C}$ . Радиус молекул воды  $0,21$  нм. Радиусы молекул азота и кислорода  $0,18$  нм.

3.8. Коэффициенты диффузии молекул  $A$  через газы  $B_1$  и  $B_2$  равны  $D_1$  и  $D_2$ , если в единице объема этих газов содержится  $n$  частиц. Найдите коэффициент диффузии молекул  $A$  через смесь, в единице объема которой содержится  $n_1$  молекул газа  $B_1$  и  $n_2$  молекул газа  $B_2$ .



К задаче 3.9\*.

3.9\*. В тонком сосуде длины  $L$  и сечения  $S$  находится сухой воздух, изолированный заслонкой от воздуха, насыщенного парами воды. Левая стенка сосуда может замораживать воду. Заслонку убирают.

а) Оцените время, за которое в сосуде установится стационарное состояние пара.

б) Определите массу воды, замораживаемой в единицу времени, когда в сосуде установится стационарный поток.

Коэффициент диффузии насыщенных паров  $D$ , плотность  $\rho$ .

3.10. а) Хотя температура газа линейно увеличивается с высотой  $h$  ( $T = T_0 + ah$ ), относительное изменение температуры  $ah/T_0$  остается много меньше единицы. Длина свободного пробега молекул газа  $l$ , масса каждой молекулы  $m$ , число молекул в единице объема  $n$ . Оцените плотность теплового потока на Землю. Изменится ли плотность этого потока, если число молекул в единице объема газа увеличится?

б) Во сколько раз теплопроводность водорода больше теплопроводности воздуха? Радиус молекул водорода  $0,14$  нм, молекул азота и кислорода  $0,18$  нм. Температуры газов одинаковы.

3.11\*. Теплопроводности газов  $A_1$  и  $A_2$  равны  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Определите теплопроводность смеси, в которой молекул газа  $A_1$  в  $\alpha$  раз больше, чем молекул газа  $A_2$ . Температуры газов одинаковы, газы одноатомные. Молекулярные массы газов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

3.12. Нагретое тело остывает за время  $t$ . За какое время остынет тело из того же материала, если все его линейные размеры увеличить в  $n$  раз?

3.13. Почему металл и дерево одной и той же температуры на ощупь кажутся неодинаково нагретыми? Почему бумага, плотно намотанная на металлический стержень, на огне не загорается, а на деревянный — загорается?

#### § 5.4. Разреженные газы. Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела \*)

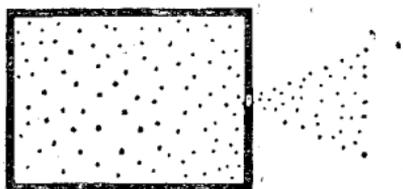
4.1. Оцените, сколько ударов со стороны молекул воздуха испытывает  $1 \text{ см}^2$  стены вашей комнаты в 1 с. Какой импульс передается стенке в течение 1 с?

4.2. Во сколько раз изменится давление газа, если  $k$ -я часть молекул, ударяющихся о стенку, вдруг начнет поглощаться ею?

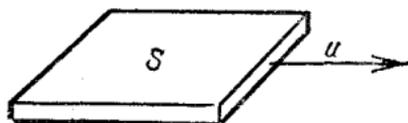
4.3. В разреженном газе с постоянной скоростью  $v$  движется шар радиуса  $R$ . Число молекул в единице объема  $n$ , масса молекулы  $m$ ; тепловые скорости молекул значительно меньше скорости шара. Оцените силу сопротивления, действующую на шар.

4.4. Почему метеориты раскаляются в атмосфере Земли?

4.5. В разреженном газе с молекулярной массой  $\mu$  движется диск радиуса  $a$  со скоростью  $u$ , направленной вдоль оси диска. Оцените силу сопротивления, действующую на диск. Скорость диска много меньше тепловой скорости молекул. Давление газа  $P$ , температура  $T$ .



К задаче 4.6.



К задаче 4.7.

4.6. В замкнутом сосуде находится газ под давлением  $P$ . В стенке сосуда имеется отверстие площади  $\sigma$ , размеры которого малы по сравнению с длиной свободного пробега мо-

\*) В этом параграфе для оценки считать, что молекулы в разреженном газе (длина свободного пробега молекул много больше характерных размеров системы) уходят с поверхности твердого тела со среднеквадратичной скоростью, соответствующей температуре твердого тела.

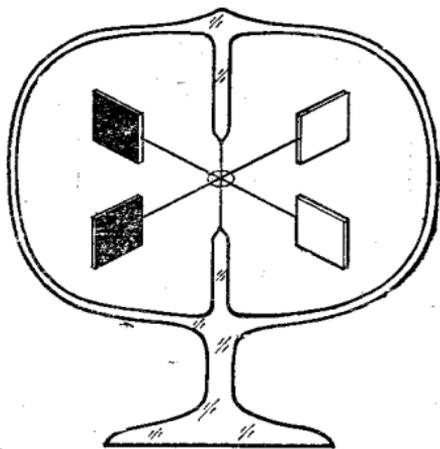
лекул газа. Определите реактивную силу  $F$ , испытываемую сосудом при истечении газа в вакуум.

4.7. В разреженном газе с молекулярной массой  $\mu$  движется тонкая плоская пластина так, как показано на рисунке. Оцените, какую силу необходимо прикладывать к пластине, чтобы она двигалась с постоянной скоростью  $u$ . Площадь пластины  $S$ , давление газа  $P$ , температура  $T$ . Скорость пластины мала по сравнению с тепловой скоростью молекул.

4.8. В объеме, в котором можно менять давление газа, находятся два параллельных диска. Один диск подвешен на упругой нити, другой вращается. Угол закручивания первого диска при давлении  $P$  был равен  $\varphi_1$ . При увеличении давления газа угол закручивания сначала увеличивался, а затем, достигнув величины  $\varphi_2$ , перестал зависеть от давления. Объясните этот эффект.

4.9. Между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиусов  $r$  и  $R$  находится разреженный газ. Внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Оцените установившуюся угловую скорость внешнего цилиндра.

4.10. Легкие слюдяные пластины с зеркальной поверхностью зачернили с одной стороны и закрепили на оси вращения так, как показано на рисунке. Затем эту систему поместили в стеклянный сосуд, из которого частично откачали воздух. Если теперь этот сосуд поставить в ярко освещенное помещение, то система начнет вращаться по часовой стрелке, причем тем быстрее, чем больше света в помещении. Таким образом, мы изготовили радиометр — прибор для измерения интенсивности светового излучения. Объясните принцип действия этого прибора.



К задаче 4.10.

4.11\*. Оцените подъемную силу пластины площади  $1 \text{ м}^2$ , нижняя поверхность которой находится при температуре  $100^\circ\text{С}$ , верхняя — при  $0^\circ\text{С}$ . Температура воздуха  $20^\circ\text{С}$ , давление  $0,1 \text{ Па}$ .

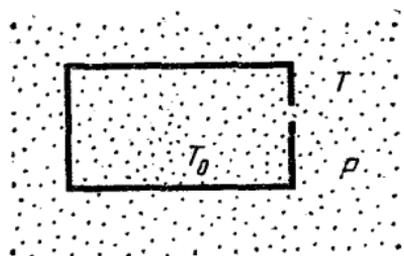
4.12. Оцените по порядку величины скорость, с которой будет двигаться в сильно разреженном воздухе плоский

диск, одна из сторон которого нагрета до температуры 310 К, а другая — до 300 К. Температура воздуха 300 К.

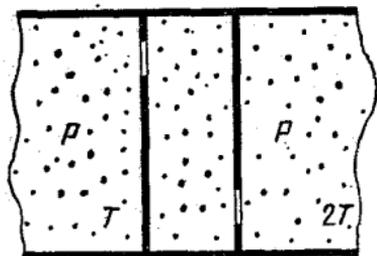
4.13\*. Две одинаковые параллельные пластины площади  $S$  расположены в сосуде близко друг к другу; их температуры  $T_1$  и  $T_2$ , температура стенок сосуда  $T_1$ . Пластины отталкиваются друг от друга с силой  $F$ . Оцените давление разреженного газа в сосуде.

4.14\*. В объеме поддерживается температура  $T_0$ . Вне объема находится газ с давлением  $P$  и температурой  $T$ . Чему равно давление газа внутри объема, если он связан с окружающим газом небольшим отверстием? Газы разрежены.

4.15\*. Теплоизолированная полость связана небольшими одинаковыми отверстиями с двумя объемами, содержащими газообразный гелий. Давления газа в обоих объе-



К задаче 4.14\*.

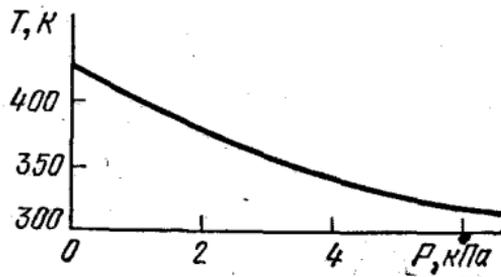


К задаче 4.15\*.

мах поддерживаются постоянными и равными  $P$ , а температура равна  $T$  в одном объеме и  $2T$  — в другом. Найдите давление и температуру, установившиеся внутри полости. Газы разрежены.

4.16\*. Между двумя плоскими параллельными пластинами, расположенными на расстоянии  $\delta$  друг от друга, находится разреженный газ (длина свободного пробега молекул  $l \gg \delta$ ).

Вычислите плотность потока тепла, если температуры пластин поддерживаются равными  $T$  и  $T + \Delta T$ . В единице объема газа содержится  $n$  молекул. Показатель адиабаты  $\gamma$ .



К задаче 4.17.

4.17. В тепловом манометре давление газа опре-

деляют по температуре теплового элемента, на котором в единицу времени выделяется всегда одно и то же количество тепла. На рисунке приведен график зависимости температуры элемента от давления азота. Как, пользуясь этим графиком, получить аналогичную кривую для водорода?

4.18. Оцените массу жидкого воздуха, испарившегося за час из плохо откачанного сосуда Дьюара, если давление воздуха (при комнатной температуре 293 К), оставшегося между стенками, равно 0,133 Па. Поверхность сосуда 600 см<sup>2</sup>, удельная теплота испарения воздуха 0,2 МДж/кг, его температура 81 К. Зазор между стенками сосуда мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул.

4.19. Две параллельные пластины находятся на расстоянии  $\delta$ , малом по сравнению с их размерами. Между пластинами помещают несколько тонких и хорошо теплопроводящих перегородок-экранов. Влияют ли экраны на теплопроводность между пластинами?

4.20\*. Из-за небольшой разницы в температурах между двумя параллельными пластинами в разреженном газе, в единице объема которого содержится  $n$  частиц, возник тепловой поток  $Q_1$ . При увеличении давления газа тепловой поток сначала увеличивается, а затем, достигнув величины  $Q_2$ , перестает зависеть от давления газа. Объясните этот эффект. Оцените радиус молекул газа. Расстояние между пластинами  $\delta$ .

## § 5.5. Уравнение состояния идеального газа

5.1. Объем газа уменьшили в 2 раза, а температуру увеличили в 1,5 раза. Во сколько раз увеличилось давление газа?

5.2. Чтобы изотермически уменьшить объем газа в цилиндре с поршнем в  $n$  раз, на поршень поместили груз массы  $m$ . Какой груз следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в  $k$  раз?

5.3. Баллон объема 50 л наполнили воздухом при 27 °С до давления 10 МПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине 40 м? Температура воздуха после расширения 3 °С.

5.4. Почему в батискафе баллоны для всплытия обычно наполняют керосином, а не воздухом?

5.5. Газ находится в сосуде при давлении 2 МПа и температуре 27 °С. После нагревания на 50 °С в сосуде осталась

только половина газа (по массе). Определите установившееся давление.

5.6. Давление воздуха внутри бутылки равно  $0,1$  МПа при температуре  $7^\circ\text{C}$ . На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть силой  $10$  Н. Сечение пробки  $2$  см<sup>2</sup>.

5.7. Почему электрическая лампочка заполняется инертным газом при давлении, существенно меньшем атмосферного?

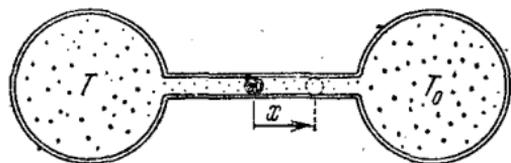
5.8\*. В вертикальной узкой трубке длины  $2L$  нижний конец запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре  $T_0$ , а верхняя половина заполнена до конца ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление (в мм рт. ст.)  $L$ . Поверхностное натяжение не учитывать.

5.9. За сколько качаний поршневым насосом с рабочим объемом  $V$  можно повысить давление от атмосферного  $P_0$  до  $P$  в сосуде объема  $V_0$ ? Нагревом газа пренебречь.

5.10. За сколько качаний поршневым насосом с рабочим объемом  $V$  можно откачать сосуд объема  $V_0$  от давления  $P_0$  до  $P$ ?

5.11. Зависит ли подъемная сила аэростата от температуры окружающего воздуха?

5.12\*. Фабричная труба высоты  $50$  м выносит дым при температуре  $60^\circ\text{C}$ . Определите перепад давления в трубе, обеспечивающий тягу. Температура воздуха  $-10^\circ\text{C}$ , плотность воздуха  $1,29$  кг/м<sup>3</sup>.



К задаче 5.13.

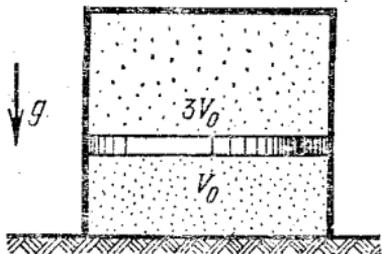
5.13. Газовый термометр состоит из двух одинаковых сосудов с газом объема  $V_0$  каждый, соединенных трубкой длины  $l$  и сечения  $S$ . Трубку перекрывает капля ртути. Если температуры газов в объемах одинаковы, ртуть находится посередине трубки. Правый объем помещают в термостат с температурой  $T_0$ . Проградуируйте термометр, найдя зависимость температуры газа в левом объеме от смещения  $x$  ртути от положения равновесия.

5.14. Два объема  $200$  и  $100$  см<sup>3</sup> разделены подвижным поршнем, не проводящим тепло. Сначала температура газа была равна  $300$  К и давление  $10^{13}$  гПа, затем малый объем

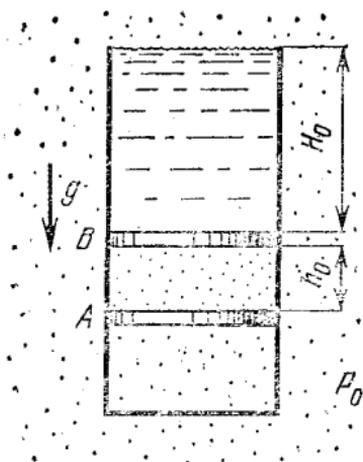
охладили льдом до 273 К, а большой нагрели паром до 373 К. Какое давление установится в объемах?

5.15. В цилиндрическом сосуде находится в равновесии тяжелый поршень. Над поршнем и под ним находятся одинаковые массы газа при одинаковой температуре. Отношение верхнего объема к нижнему равно 3. Какое будет соотношение объемов, если температуру газа увеличить в 2 раза?

5.16. В цилиндре над поршнем  $A$  находится газ, закры-

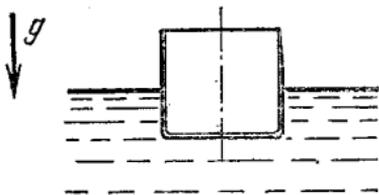


К задаче 5.15.



К задаче 5.16.

тый поршнем  $B$ , на который до верха цилиндра налита жидкость плотности  $\rho$ . На какое расстояние  $x$  надо сместить вверх поршень  $A$ , чтобы над поршнем  $B$  остался столб жидкости высоты  $H$ ? Массой поршня  $B$  и трением его о стенки пренебречь. Атмосферное давление  $P_0$ , начальные высоты столба жидкости  $H_0$ , столба газа  $h_0$ . Температура газа при смещении поршня не меняется.



К задаче 5.17.

5.17. На поверхности жидкости плотности  $\rho$  плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость.

а) На сколько погрузится нижняя кромка стакана в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана  $h$ , давление воздуха  $P_0$ .

б) На какую глубину нужно погрузить перевернутый стакан, чтобы он вместе с заключенным в нем воздухом пошел ко дну?

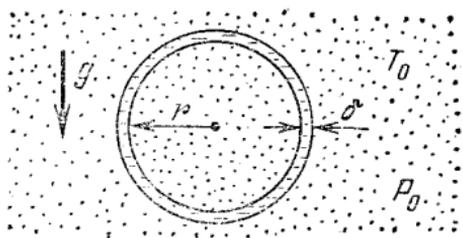
5.18\*. Герметически закрытый бак полностью заполнен жидкостью, только на дне его имеется пузырек воздуха. Давление на дно бака  $P_0$ . Каким оно станет, если пузырек воздуха всплывет? Глубина бака  $H$ , плотность жидкости  $\rho$ .

5.19\*. Герметически закрытый бак высоты 3 м полностью заполнен водой, только на дне его находятся два одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака 0,15 МПа. Каким станет давление, если всплывет один пузырек? Два пузырька?

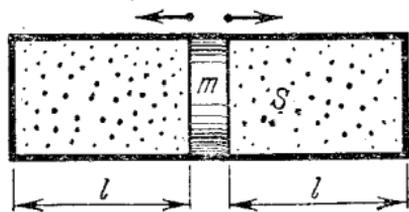
5.20. Найдите формулу соединения азота с кислородом, если 1 г его в газообразном состоянии в объеме 1 л создает при температуре  $17^\circ\text{C}$  давление 314 гПа.

5.21. При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует в двуокись азота:  $\text{N}_2\text{O}_4 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$ . В откачанный объем  $250\text{ см}^3$  вводится 0,92 г чистой  $\text{N}_2\text{O}_4$  при  $0^\circ\text{C}$ . Когда температура в сосуде увеличивается до  $27^\circ\text{C}$ , жидкость целиком испаряется, а давление становится равным 128 кПа. Определите долю четырехокси азота, которая диссоциировала.

5.22. Мыльный пузырь, заполненный горячим воздухом, неподвижно висит в атмосфере (давление и температура ее  $P_0$  и  $T_0$ ). Плотность мыльной пленки  $\rho$ , толщина  $\delta$ , радиус  $r \gg \delta$ . Найдите температуру воздуха внутри пузыря. Поверхностное натяжение пленки  $\sigma$ , молекулярная масса воздуха  $\mu$ .



К задаче 5.22.



К задаче 5.24.

5.23. Два мыльных пузыря радиусов  $r_1$  и  $r_2$  сливаются в один. Найдите поверхностное натяжение мыльной пленки, если радиус образовавшегося пузыря  $r$ , атмосферное давление  $P$ .

5.24. Найдите период малых колебаний поршня массы  $m$  в гладком цилиндрическом сосуде сечения  $S$ . По обе стороны от поршня находится газ с параметрами  $P_0$ ,  $V_0 = Sl$  и  $T_0$ . Процесс считать изотермическим.

## § 5.6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость \*)

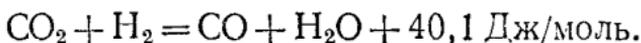
6.1. Сжатую пружину растворили в кислоте. На что пошла потенциальная энергия деформации?

6.2. Чему равна внутренняя энергия (в джоулях) при нормальных условиях  $1 \text{ см}^3$  воздуха?  $1 \text{ кг}$  воздуха?

6.3. Воздух в комнате нагрели от температуры  $T_0$  до  $T$ . Давление не изменилось. Как изменилась внутренняя энергия воздуха внутри комнаты?

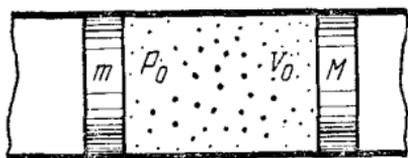
6.4. В объеме  $V_1$  находится одноатомный газ при давлении  $P_1$  и температуре  $T_1$ , а в объеме  $V_2$  — одноатомный газ при давлении  $P_2$  и температуре  $T_2$ . Какое давление и какая температура окажутся в этих объемах после их соединения? Объемы теплоизолированы от окружающего пространства.

6.5. В теплоизолированном сосуде при температуре  $800 \text{ К}$  находится  $1 \text{ моль}$   $\text{CO}_2$  и  $1 \text{ моль}$   $\text{H}_2$ . Происходит химическая реакция

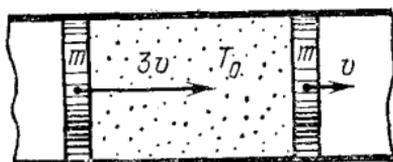


Во сколько раз возрастет давление в сосуде после окончания реакции?

6.6. В бесконечной гладкой теплоизолированной трубе находятся поршни масс  $M$  и  $m$ , между которыми находится одноатомный газ объема  $V_0$  при давлении  $P_0$ . Поршни отпускают. Оцените их максимальные скорости. Массой газа по сравнению с массой поршня пренебречь.



К задаче 6.6.



К задаче 6.7.

6.7. В длинной теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями масс  $m$  находится  $1 \text{ моль}$  одноатомного газа при температуре  $T_0$ . В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны  $3v$  и  $v$ . До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни

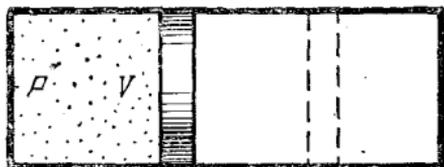
\*) Во всех задачах этого параграфа колебательные степени свободы считать вымороженными.

тепло не проводят. Массой газа по сравнению с массами поршней пренебречь.

**6.8.** Оцените скорость вылета пули из патрона, брошенного в костер.

**6.9.** Объясните, почему расширение газа при постоянной температуре (изотермическое расширение) возможно только при подведении к газу тепла.

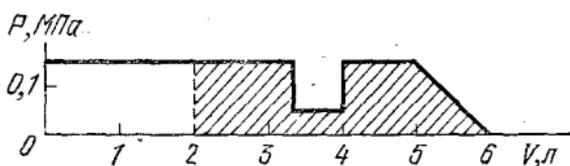
**6.10.** Объем газа увеличился в 2 раза: один раз изотермически, другой раз изобарически. В каком из этих двух случаев газ совершит большую работу?



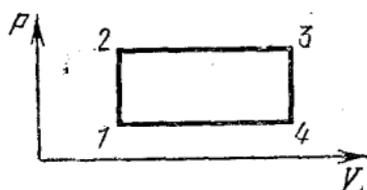
К задаче 6.12.

при перемещении поршня увеличится в 2 раза, а давление газа при перемещении поршня: а) будет оставаться постоянным; б) будет с увеличением объема линейно возрастать до давления  $2P$ ?

**6.13.** На рисунке дан график зависимости давления газа от объема. Найдите графически работу газа при расширении от 2 до 6 л.



К задаче 6.13.



К задаче 6.17.

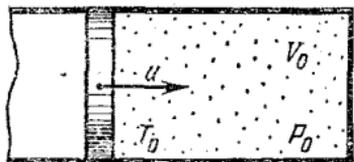
**6.14.** Воздух изотермически расширялся от 2 до 10 л. Начальное давление 0,8 МПа. Определите работу, совершенную воздухом, пользуясь графическим и аналитическим методами.

**6.15.** Газ, занимавший объем 2 л при давлении 0,1 МПа, расширился изотермически до 4 л. После этого, охлаждая газ изохорически (при постоянном объеме), уменьшили давление в 2 раза. Далее изобарически газ расширился до 8 л. Найдите работу, совершенную газом. Начертите график зависимости давления от объема.

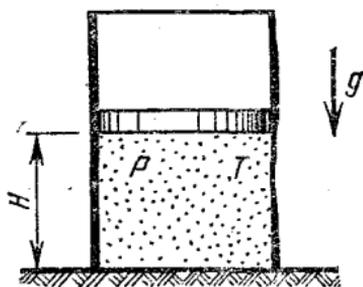
**6.16.** 1 моль водорода нагревается при постоянном давлении от  $0^\circ\text{C}$ . Какое количество тепла необходимо сообщить газу, чтобы объем его удвоился? Какая работа при этом будет совершена газом?

**6.17.** Над 1 моль газа совершают замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Температуры в точках 1 и 3 равны  $T_1$  и  $T_3$ . Определите работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

**6.18.** Поршень массы  $M$ , замыкающий объем  $V_0$  с одноатомным газом при давлении  $P_0$  и температуре  $T_0$ , движется со скоростью  $u$ . Оцените температуру и объем газа при максимальном сжатии. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня и сосуда пренебречь.



К задаче 6.18.



К задаче 6.19\*.

**6.19\*.** В откачанном пространстве вертикально стоит цилиндрический сосуд, перекрытый сверху подвижным поршнем массы  $M$ . Внутри перекрытого объема находится одноатомный газ при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Внутреннее сечение цилиндра  $S$ , высота объема, внутри которого находится газ,  $H$ . Поршень отпустили. Он начал двигаться. Чему равна максимальная скорость, развиваемая поршнем, если газ сжимается поршнем изотермически? Адиабатически? Ускорение свободного падения  $g$ .

**6.20\*.** Два компрессора адиабатически сжимают двухатомный газ. Сначала работает один компрессор, сжимающий газ от объема  $V_0$  до промежуточного объема  $V_1$ . Затем сжатый газ охлаждается до начальной температуры, после чего в работу вступает второй компрессор, сжимающий газ до объема  $V_2$ . При каком объеме  $V_1$  полная работа обоих компрессоров минимальна и чему она равна? Объемы  $V_0$  и  $V_2$  считать заданными, начальное давление газа  $P_0$ . Работа какого компрессора при оптимальном  $V_1$  больше?

6.21. 1 м<sup>3</sup> водорода при 0 °С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим поршнем массы 1 кг и сечения 0,5 м<sup>2</sup>. Атмосферное давление 973 гПа. Какое количество тепла потребуется на нагревание водорода до 300 °С? Найдите изменение внутренней энергии. Найдите удельную теплоемкость водорода, ограниченного этим подвижным поршнем.

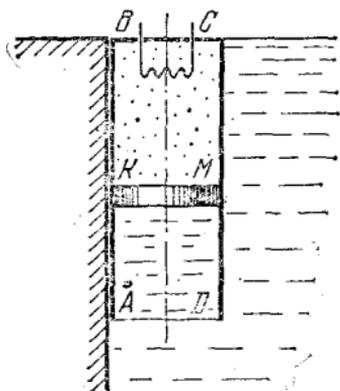
6.22. При нагревании 1 кг неизвестного газа на 1 К при постоянном давлении требуется 912 Дж, а при нагревании при постоянном объеме 649 Дж. Что это за газ?



К задаче 6.23\*,

6.23\*. Горизонтально расположенный цилиндр, содержащий 1 моль газа при начальной температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ , закрыт поршнем сечения  $S$ . Справа от поршня постоянное атмосферное давление

$P_0$ . Газ нагревается спиралью. При движении поршня на него действует сила трения со стороны стенок цилиндра  $F$ . Половина тепла, выделяющегося при трении поршня о стенки цилиндра, идет в газ. Внутренняя энергия газа  $U = cT$ . Как зависит температура газа  $T$  от количества тепла  $Q$ , переданного газу спиралью? Постройте график этой зависимости.



К задаче 6.24,

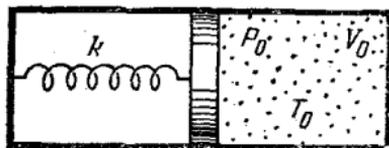
6.24. Цилиндр  $ABCD$ , закрытый сверху и открытый снизу, прикреплен к стенке бассейна, заполненного водой. В верхней части цилиндра  $KBCM$  находится 1 моль гелия, отделенный от воды поршнем ( $BK = 2h$ ). Гелий нагревают, пропуская ток по спирали. Какое

количество тепла нужно подвести к газу, чтобы поршень опустился на расстояние  $h$  ( $AK > h$ )? Массой поршня, трением и теплопроводностью пренебречь. Бассейн широкий. Плотность воды  $\rho$ , сечение сосуда  $S$ .

6.25\*. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью  $c$ . Найдите уравнение политропы для газа. Рассмотрите частные случаи: 1)  $c = c_V$ ; 2)  $c = c_P$ ; 3)  $c = 0$ ; 4)  $c = \infty$ .

6.26. Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону  $PV^2 = \text{const}$ ? Найдите его молярную теплоемкость в этом процессе.

6.27. Найдите теплоемкость системы, состоящей из ограниченного поршнем сосуда с одноатомным газом (параметры газа  $P_0, V_0, T_0$ ). Поршень удерживается пружиной жесткости  $k$ . Слева от поршня вакуум. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь. Если газ откачать, поршень будет находиться вплотную к правой стенке цилиндра, а пружина не будет деформирована.



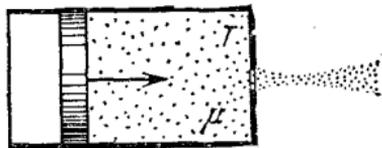
К задаче 6.27.

6.28\*. Найдите теплоемкость воздуха, находящегося внутри мыльного пузыря. Поверхностное натяжение мыльной пленки  $\sigma$ , атмосферное давление  $P_0$ , радиус пузыря  $r$ .

6.29\*. В откачанном объеме вертикально стоит цилиндрический сосуд, закрытый сверху подвижным поршнем массы  $M$ . Внутри сосуда находится одноатомный газ при давлении  $P$ . Внутреннее сечение цилиндра  $S$ , высота объема, внутри которого находится газ,  $H$ . Поршень отпустили. После непродолжительных колебаний поршень останавливается. На каком расстоянии от начального положения остановится поршень, если теплоемкость газа при постоянном объеме много больше теплоемкости поршня и цилиндра? Вся система теплоизолирована от окружающего пространства.

## § 5.7. Истечение газа

7.1. Газ с показателем адиабаты  $\gamma$  вытекает через малое отверстие из замкнутого объема в вакуум. Постоянное давление газа в объеме поддерживается перемещением подвижного поршня. При адиабатическом истечении газа температура его в объеме также не меняется, а газ, который выходит в вакуум из-за адиабатического расширения, охлаждается практически до 0 К. Оцените, пользуясь законом сохранения энергии, скорость газовой струи в вакууме. Температура газа в объеме  $T$ , молекулярная масса газа  $\mu$ .



К задаче 7.1.

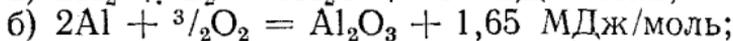
7.2.\*. Определите скорость адиабатического истечения смеси двухатомных газов с молекулярными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Число молекул первого газа в  $k$  раз больше числа молекул второго газа. Температура смеси  $T$ .

7.3\*. Экспериментатору нужны атомы ксенона, скорость которых равна 1 км/с. Молекулярная масса ксенона 131.

а) При какой температуре можно получить атомы с такими скоростями при адиабатическом истечении газа в вакуум?

б) Какую скорость могут приобрести атомы ксенона при истечении в вакуум смеси водорода и малого количества ксенона при комнатной температуре?

7.4. Определите максимальную скорость истечения газа из сопла ракеты, если тяга ракеты создается реакциями:



7.5. Температура горения химического топлива в ракетном двигателе  $T = 3000 \text{ К}$ , средняя молекулярная масса продуктов сгорания  $\mu = 30$ . Истечение продуктов сгорания происходит адиабатически. Молярная теплоемкость  $c_p$  продуктов сгорания  $33,4 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Давление газа на выходе из ракеты много меньше давления газа в ракете. Определите минимальный массовый расход топлива, обеспечивающий старт с Земли ракеты массы  $M = 1000 \text{ т}$ .

7.6\*. Газ адиабатически вытекает из сосуда через трубку. Температура газа в сосуде  $T_1$ , давление  $P_1$ . На выходе из трубки давление газа  $P_2$ . Определите скорость газа на выходе из трубки. Молекулярная масса газа  $\mu$ , показатель адиабаты  $\gamma$ .

7.7\*. Из баллона, содержащего гелий при давлении 1 МПа, вытекает струя при давлении 0,1 МПа. Температура газа в баллоне 300 К. Определите температуру и скорость гелия в струе.

7.8\*. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре  $0^\circ\text{C}$ , вытекает при атмосферном давлении из трубки со скоростью 400 м/с. Найдите температуру вытекающего воздуха. Чему равно давление воздуха в баллоне? Показатель адиабаты воздуха 1,4.

7.9\*. Газ при нормальных давлении и температуре протекает со скоростью  $v$  через гладкую трубку сечения  $S$ . Когда газ проходит через проволочную сетку, оказываю-

щую пренебрежимо малое сопротивление потоку, он нагревается. Приобретаемая мощность равна  $q$ . Определите скорость газа за проволочной сеткой. Чему равна сила давления газа на сетку?

## § 5.8. Вероятность термодинамического состояния

8.1. а) Разобьем объем  $V$  на две одинаковые части 1 и 2. Пусть в этом объеме движется одна молекула. Будем наблюдать за ней в течение времени  $t$ . В среднем половину этого времени молекула будет находиться в объеме 1, а половину — в объеме 2. Какое время в объеме 1 вместе с первой будет находиться вторая молекула, если в объеме движутся две молекулы?

б) В объеме движутся три молекулы. Как часто они будут находиться одновременно в объеме 1?

в) В объеме движутся  $N$  молекул. Как часто они будут находиться одновременно в объеме 1?

8.2. Долю времени, в течение которого частицы находятся в каком-либо состоянии, часто называют вероятностью  $p$  этого состояния.

а) В сосуде находятся две молекулы. Чему равна вероятность того, что обе молекулы будут находиться в левой половине сосуда? В любой из половин?

б) Чему равна вероятность того, что молекулы будут находиться в разных половинах сосуда?

в) В сосуде находятся три молекулы. Чему равна вероятность того, что две молекулы будут находиться в левой половине сосуда? Что в левой половине сосуда не будет ни одной молекулы?

8.3. В сосуде объема  $V$  находятся  $N$  молекул.

а) Определите вероятность того, что в объеме  $V_1$ , который находится внутри объема  $V$ , не будет ни одной молекулы.

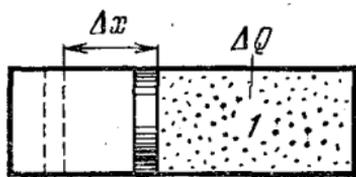
б) Чему должен быть равен этот объем, чтобы вероятность такого события была близка к  $10^{-2}$ ?

8.4\*. Оцените вероятность того, что плотность воздуха в объеме  $0,1 \text{ мм}^3$  в каком-нибудь участке вашей комнаты будет в 2 раза больше обычной плотности. Каким должен быть объем этого участка, чтобы эта вероятность была достаточно велика?

8.5. Зачем в молекулярной физике нужно понятие «вероятность состояния системы»? Часто можно реализовать

маловероятное событие. Например, в сосуде, разделенном на две одинаковые части перегородкой, в одной половине находится газ. Перегородку очень быстро убирают. Осуществлено состояние газа, вероятность которого равна  $2^{-N}$ , где  $N$  — число частиц газа в сосуде. Такой результат дает решение задачи 8.1в. В последующие моменты времени в сосуде будут осуществляться другие состояния. А в начальное состояние система не перейдет — слишком мала его вероятность! Следовательно, будет происходить необратимый переход в новые, более вероятные состояния, молекулы будут заполнять весь объем сосуда.

Этот пример показывает, что знание вероятности состояния новой системы является очень полезным. Это знание дает возможность предсказать дальнейшее поведение системы — маловероятные состояния будут переходить в более вероятные. А как вычислить эту вероятность для других систем? Не слишком ли сложными будут вычисления? Вычисления, оказывается, не очень сложные. Вычислять, во сколько раз вероятность одного состояния больше вероятности другого, нужно следующим способом. Если мы состоянию 1 при температуре  $T$  сообщим количество тепла  $Q$ , то оно перейдет в другое состояние, вероятность которого в  $\exp(Q/kT)$  раз больше вероятности состояния 1 ( $k$  — постоянная Больцмана).



К задаче 8.5.

Приведем пример, как проводятся такие вычисления. Найдем этим способом, во сколько раз вероятность состояния, когда все  $N$  молекул газа находятся в одной половине объема, меньше вероятности состояния, когда молекулы движутся во всем объеме. Перегородим объем, в котором находятся все молекулы, подвижным поршнем (см. рис.). Назовем это состояние состоянием 1. При движении поршня влево на  $\Delta x$  газ совершит работу  $\Delta A$  и охладится. Для того чтобы сохранить температуру газа постоянной, мы должны сообщить молекулам газа количество тепла  $\Delta Q = \Delta A$  (для восполнения энергетических потерь в газе). И надо делать так в течение всего процесса передвижения поршня влево, чтобы температура газа оставалась постоянной. Следовательно, при перемещении поршня влево мы передадим газу при температуре  $T$  количество тепла  $Q = A$ .

При изотермическом расширении  $A = \nu RT \ln(V_k/V_n)$ , где  $\nu$  — количество газа (в молях),  $R = kN_A$  — газовая

постоянная,  $N_A$  — постоянная Авогадро,  $V_k$  — конечный объем,  $V_n$  — начальный объем. В нашем случае  $N = \nu N_A$ ,  $V_k/V_n = 2$ . Поэтому формулу для работы мы можем переписать в виде  $A = NkT \ln 2$ . Следовательно, вероятность состояния 2 в  $\exp(A/kT) = \exp(N \ln 2)$  раз больше вероятности состояния 1. Мы получили решение задачи 8.1в, используя термодинамический процесс.

С помощью термодинамического процесса определите вероятность того, что в объеме  $V_1$ , который находится внутри объема  $V$ , соберутся все молекулы, движущиеся в объеме  $V$ . Используя термодинамический процесс, решите задачу 8.3. Можно ли таким способом решить задачу 8.1?

8.6. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы при комнатной температуре увеличить концентрацию золота в 1 кг породы от  $10^{-6}$  до 1 %?

8.7\*. Докажите, что в разбавленном растворе на полупроницаемую перегородку действует при температуре  $T$  давление  $P = nkT$ , где  $n$  — число молекул растворенного вещества в единице объема раствора. Почему эта формула верна только для разбавленного раствора?

8.8\*. В объеме  $2V$  движется  $2N$  молекул. Во сколько раз вероятность обнаружить  $N$  молекул в объеме  $V$  —  $V_1$  меньше вероятности обнаружить  $N$  молекул в объеме  $V$ ?

8.9\*. В сосуд с водой при температуре  $20^\circ\text{C}$  поместили в герметичной коробке 1 г льда при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Определите, во сколько раз вероятность процесса превращения льда в воду больше вероятности обратного процесса — растаявшая вода в коробке вдруг начнет отдавать тепло окружающей воде и превратится в лед. Температура воды в сосуде при таянии льда практически не менялась.

8.10. Поршень первоначально делит цилиндрический объем на две равные части, в которых находятся одинаковые массы идеального газа с одной и той же температурой. Реален ли процесс, в котором при движении поршня температура правой части увеличивается в 2 раза, а левой — уменьшается в 2 раза? Теплоемкостями поршня и цилиндра пренебречь, система изолирована.

8.11. Газодинамическое ружье представляет собой цилиндр, наполненный одноатомным газом и закрытый подвижным поршнем: Газ, расширяясь, разгоняет поршень. Реален ли процесс, когда при увеличении объема в  $n$  раз температура газа уменьшается в  $n$  раз? В  $\sqrt{n}$  раз? Система изолирована.

## § 5.9. Второе начало термодинамики

9.1. Два одинаковых тела, нагретых до разных температур, приводятся в тепловой контакт друг с другом. Температуры тел уравниваются. Покажите, что при этом процессе энтропия системы увеличивается.

9.2. Найдите приращение энтропии 1 кг льда при его плавлении.

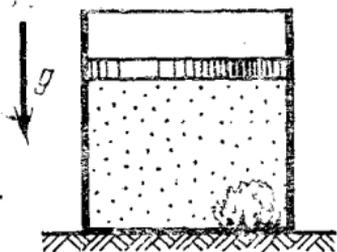
9.3. На сколько возрастет энтропия 1 кг воды, находящейся при температуре 293 К, при превращении ее в пар?

9.4. Найдите приращение энтропии водорода при расширении его от объема  $V$  до  $2V$ : а) в вакуум; б) изотермическом. Масса газа  $m$ .

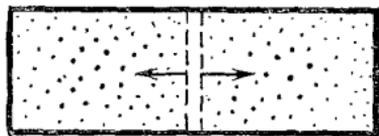
9.5. Вычислите приращение энтропии водорода массы  $m$  при переходе от объема  $V_1$  и температуры  $T_1$  к объему  $V_2$  и температуре  $T_2$ ; если газ: а) нагревается при постоянном объеме  $V_1$ , затем изотермически расширяется; б) расширяется при постоянной температуре  $T_1$  до объема  $V_2$ , затем нагревается при постоянном объеме; в) адиабатически расширяется до объема  $V_2$ , затем нагревается при постоянном объеме.

9.6\*. Кусок льда массы 0,1 кг при температуре  $0^\circ\text{C}$  бросают в теплоизолированный сосуд, содержащий 2 кг бензола при  $50^\circ\text{C}$ . Найдите приращение энтропии системы после установления равновесия. Удельная теплоемкость бензола  $1,75 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ .

9.7\*. В теплоизолированном сосуде находится 0,5 кмоль гелия и 1 кг льда. В начальный момент температура льда  $273 \text{ K}$ , гелия  $303 \text{ K}$ . Сосуд закрыт подвижным поршнем. Найдите приращение энтропии системы при переходе к равновесию.



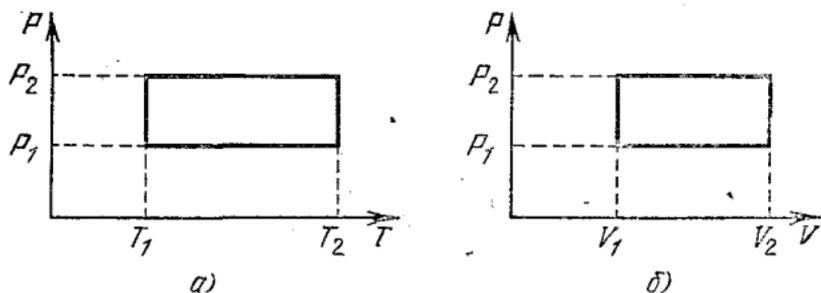
К задаче 9.7\*.



К задаче 9.8.

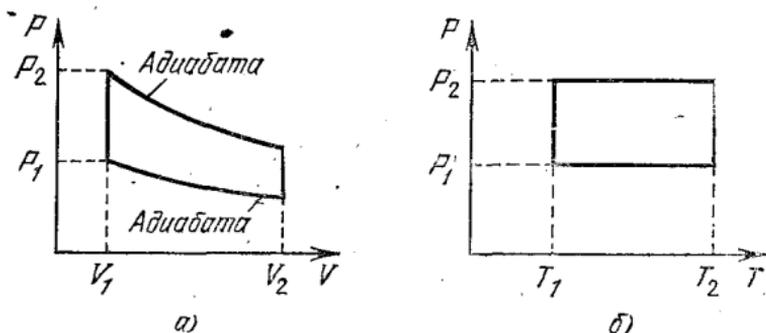
9.8. Объем  $V$  разделен на две одинаковые части двумя перегородками, проницаемыми только для того газа, кото-

рый с ней соприкасается. Первоначальные давления газов  $P$ , температуры  $T$ . Под действием газов перегородки движутся до границ объема. Найдите приращение энтропии при этом движении. Почему такой процесс невозможен, если газы с обеих сторон одинаковы или невозможно экспериментально отличить один газ от другого (например, в прошлом веке невозможно было отличить изотопы)?



К задаче 9.9\*.

9.9\*. Тепловая машина с 1 моль идеального одноатомного газа в качестве рабочего тела работает по замкнутым циклам, изображенным на рисунке. Найдите приращение энтропии в машине за один цикл. Температуры нагревателя и холодильника  $T_1$  и  $T_2$ .



К задаче 9.10\*.

9.10\*. Найдите к. п. д. циклов, изображенных на рисунке, если рабочим телом является одноатомный идеальный газ.

9.11. Существует ли процесс, при котором все переданное телу от нагревателя тепло превращается в работу?

9.12. Можно ли практически всю внутреннюю энергию газа превратить в механическую работу?

9.13. Паровая машина мощности 14,7 кВт потребляет за 1 ч работы 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания

$3,3 \cdot 10^7$  Дж/кг. Температура котла  $200^\circ\text{C}$ , холодильника  $58^\circ\text{C}$ . Найдите фактический к. п. д. машины и сравните его с к. п. д. идеальной тепловой машины.

9.14. Почему к. п. д. тепловой машины в циклическом процессе максимален, когда энтропия системы не меняется?

9.15. Почему к. п. д. двигателя внутреннего сгорания резко падает при детонации (взрывном сгорании горючей смеси)?

9.16. В океане находится лодка с куском льда массы 1 кг при  $0^\circ\text{C}$ . Определите максимальную работу, которую можно получить, используя процесс таяния льда. Температура воды  $27^\circ\text{C}$ .

9.17. Оцените, какую работу можно совершить, имея айсберг объема  $1 \text{ км}^3$  в качестве холодильника и океан в качестве нагревателя. Какое время понадобится Красноярской ГЭС, чтобы выработать такое же количество энергии?

9.18\*. Нагретое тело с начальной температурой  $T_1$  используется в качестве нагревателя в тепловой машине. Теплоемкость тела не зависит от температуры и равна  $C$ . Холодильником служит неограниченная среда, температура которой постоянна и равна  $T_0$ . Найдите максимальную работу, которую можно получить за счет охлаждения тела. Провести расчет для 1 кг кипящей воды и тающего льда.

9.19\*. Имеются два тела с начальными температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Теплоемкости этих тел равны  $C_1$  и  $C_2$  и не зависят от температуры. Одно тело используется как нагреватель, другое — как холодильник в тепловой машине. Найдите максимальную работу, которую можно получить таким образом. Провести расчет, когда первое тело — 1 кг кипящей воды, второе — 1 кг воды при  $0^\circ\text{C}$ .

9.20. Как изменится температура в комнате, если дверцу работающего холодильника оставить открытой?

9.21. Идеальная тепловая машина с к. п. д.  $\eta$  работает по обратному циклу. Какое максимальное количество тепла можно забрать из холодильника, совершив механическую работу  $A$ ?

9.22. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, передает тепло от холодильника с водой при температуре  $0^\circ\text{C}$  кипятивнику с водой при температуре  $100^\circ\text{C}$ . Какую массу воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 1 кг воды в кипятивнике?

**9.23.** С помощью электрической плитки мощности 1 кВт в комнате поддерживается температура  $17^\circ\text{C}$  при температуре наружного воздуха  $-23^\circ\text{C}$ . Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеального теплового насоса?

**9.24\*.** Какую минимальную работу нужно затратить для того, чтобы заморозить 1 кг воды, находящейся при температуре окружающей среды 300 К?

**9.25.** Известно, что при растворении в воде некоторых веществ (например, гипосульфита) температура раствора понижается. Используя этот раствор в качестве холодильника, а окружающую среду в качестве нагревателя, мы можем получить некоторую работу. Затем, дождавшись высыхания раствора, повторяем цикл. Получим ли мы таким образом вечный двигатель второго рода?

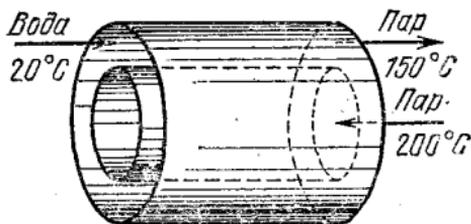
### § 5.10. Фазовые переходы

**10.1.** В кастрюлю налили холодной воды (температура  $10^\circ\text{C}$ ) и поставили на плиту. Через 10 мин вода закипела. Через какое время она полностью испарится?

**10.2.** В колбе находилась вода при  $0^\circ\text{C}$ . Откачиванием паров всю воду в колбе заморозили. Какая часть воды испарилась?

**10.3.** В 100 г воды при температуре  $10^\circ\text{C}$  опущено 40 г льда, имеющего температуру  $-10^\circ\text{C}$ . Каким будет состояние теплового равновесия в этой системе, если она теплоизолирована? Удельная теплоемкость льда  $2,5 \text{ кДж/кг}$ .

**10.4.** Теплообменник состоит из двух длинных коаксиальных труб. По внутренней трубе медленно пропускается водяной пар, имеющий начальную температуру  $200^\circ\text{C}$ . Во внешнюю трубу поступает в 1 с противотоком 0,1 кг воды при температуре  $20^\circ\text{C}$ , которая выходит с противоположной стороны в виде пара с температурой  $150^\circ\text{C}$ . Какая масса пара поступает во внутреннюю трубу теплообменника? Давление в трубах атмосферное.



К задаче 10.4.

**10.5\*.** Определите толщину льда, образующегося за 1 сут на поверхности озера при температуре воздуха  $-10^\circ\text{C}$ . Теплопроводность льда  $2,2 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ , плотность  $0,9 \text{ г/см}^3$ .

10.6. Почему кастрюля прогорает лишь после того, как вода выкипит?

10.7. Можно ли вскипятить воду в бумажном стаканчике?

10.8. Почему капли воды на очень раскаленной плитке «живут» дольше, чем на просто горячей?

10.9. Почему перед закипанием воды чайник шумит?

10.10. Почему вода в кастрюле с крышкой закипает быстрее, чем без крышки?

10.11. На электрической плитке мощности 1 кВт кипит вода в чайнике. Найдите скорость истечения пара из носика чайника, если пар считать идеальным газом. Давление пара на конце носика 1 атм, сечение носика 1 см<sup>2</sup>. Считать, что вся энергия плитки передается воде.

10.12\*. В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод (CCl<sub>4</sub>) и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl<sub>4</sub> кипит при 76,7 °С, вода — при 100 °С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5 °С. Определите, какая из жидкостей быстрее (по массе) выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при 65,5 °С составляет 25,6 кПа.

10.13. Почему в паровых котлах перегревают пар?

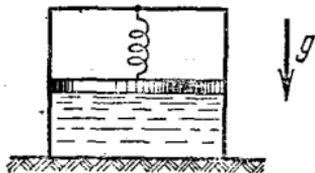
10.14. Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?

10.15. При критической температуре теплота парообразования любой жидкости равна нулю. Почему?

10.16. Почему иней на деревьях иногда исчезает без оттепели?

10.17. Почему продукты в закрытом холодильнике сохнут?

10.18. На улице моросит холодный осенний дождь. В кухне развесили много выстиранного белья. Быстрее ли высохнет белье, если открыть форточку?



К задаче 10.19.

10.19. Цилиндр сечения 20 см<sup>2</sup> разделен поршнем массы 5 кг на две части. В нижней части вначале находится вода, а верхняя часть откачана. Поршень соединен с цилиндром пружиной жесткости 15 Н/м.

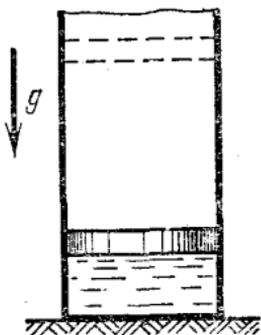
Вначале пружина не деформирована. Определите массу образовавшегося пара при нагревании воды от 0 до 100 °С. Трения нет.

**10.20.** В цилиндре, закрытом поршнем, при температуре  $20^\circ\text{C}$  находится воздух. На дне цилиндра находится капля воды. Чему будет равно давление в цилиндре после изотермического уменьшения объема в 2 раза? Какую для этого нужно совершить работу? Первоначальный объем цилиндра  $0,5\text{ м}^3$ , давление насыщенного пара при температуре  $20^\circ\text{C}$  равно  $1,73\text{ кПа}$ . Начальное давление в цилиндре  $101,3\text{ кПа}$ .

**10.21.** В прочном сосуде находится азот при температуре  $300\text{ К}$  и давлении  $P_0$ . В сосуд впрыскивается некоторое количество распыленного жидкого азота при температуре кипения  $77,3\text{ К}$ , который быстро испаряется. Спустя продолжительное время, когда температура станет равна начальной, в сосуде устанавливается давление  $2P_0$ . Определите, каким было минимальное давление азота в сосуде после впрыскивания. Молярная теплоемкость азота  $c = \frac{5}{2}R$ , молярная теплота испарения  $5,53\text{ кДж/моль}$ ,  $R = 8,3\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**10.22.** В достаточно большой откачанный объем, имеющий форму цилиндра, закрытого поршнем, помещена смесь воды со льдом в небольшом количестве. Масса льда  $m$ , температура  $0^\circ\text{C}$ , давление насыщенного пара при  $0^\circ\text{C}$  равно  $P_0$ . На сколько нужно изменить объем с помощью поршня, чтобы лед весь растаял? Какую при этом нужно совершить работу? Удельная теплота парообразования  $q$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ .

**10.23\*.** Цилиндр сечения  $100\text{ см}^2$  поставлен вертикально в объем, из которого откачан воздух. В цилиндре находится подвижный поршень, который перекрывает  $100\text{ см}^3$  воды. Цилиндр с поршнем и вода имеют температуру  $100^\circ\text{C}$ . Поршень отпускают. Когда он остановился, оказалось, что под поршнем находятся лед при  $0^\circ\text{C}$  и пары воды. Давление насыщенных паров над льдом при  $0^\circ\text{C}$  равно  $610\text{ Па}$ . Вся система теплоизолирована от окружающего пространства. Теплоемкость цилиндра с поршнем  $42\text{ Дж/}^\circ\text{C}$ . На какую высоту поднялся бы поршень, если бы такую систему можно было сделать?



К задаче 10.23\*.

**10.24.** Какая часть переохлажденной до температуры  $-4^\circ\text{C}$  воды замерзнет, если бросить в нее кусочек льда и вызвать этим кристаллизацию?

10.25. Лед при температуре  $0^\circ\text{C}$  заключен в тепло- непроницаемую оболочку и подвергнут давлению 100 МПа. Какая часть льда расплавилась, если при повышении давления на 13,8 МПа температура плавления льда понижается на  $1^\circ\text{C}$ ? Удельная теплоемкость льда  $2,5 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ .

## § 5.11. Тепловое излучение

11.1. Поверхность тела, нагретого до температуры  $T$ , излучает с  $1 \text{ см}^2$  поверхности в  $1 \text{ с}$  энергию, пропорциональную четвертой степени температуры:  $\varphi = \varepsilon\sigma T^4$  (плотность потока энергии), где  $\varepsilon$  — коэффициент излучения тела,  $\sigma = 5,672 \cdot 10^{-12} \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{K}^4)$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $T$  — абсолютная температура.

а) Оцените, сколько тепловой энергии излучает в  $1 \text{ с}$  наше тело (поток излучения с поверхности нашего тела). Коэффициент излучения тела принять равным  $0,3$ .

б) Солнце излучает как абсолютно черное тело при температуре  $6300 \text{ К}$ . Определите, какова плотность потока излучения поверхности Солнца.

11.2. Оцените температуру спирали электроплитки мощности  $0,5 \text{ кВт}$  и нити накала электролампы мощности  $150 \text{ Вт}$ . Принять, что теплопередача осуществляется только излучением.

11.3\*. Определите плотность энергии теплового излучения в полости тела с температурой  $T$ . Скорость света  $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

11.4. Используя условие теплового равновесия двух тел, которые обмениваются энергией через тепловое излучение, докажите, что коэффициенты излучения тел равны коэффициентам поглощения излучения этими телами.

11.5. а) «Нагревая кусок стали, мы при температуре  $800^\circ\text{C}$  будем наблюдать яркое вишнево-красное каление; но прозрачный стерженек плавленого кварца при той же температуре совсем не светится» (Ландсберг Г. С. Оптика. — М.: Гостехиздат, 1954). Объясните этот эффект.

б) Почему мел выглядит среди раскаленных углей темным?

11.6\*. а) Определите установившуюся температуру металлического шара вблизи плоской черной поверхности, нагретой до температуры  $T$ .

б) Определите установившуюся температуру шара, который находится между двумя параллельными черными плоскостями, нагретыми до температур  $T_1$  и  $T_2$ .

11.7. Шар радиуса  $R$  нагрет до температуры  $T$ . Коэффициент излучения поверхности шара  $\varepsilon$ . Определите установившуюся температуру сферической пылинки, находящейся на расстоянии  $L$  от центра шара.

11.8. Расстояния между Солнцем и планетами Земля, Меркурий, Венера и Марс равны  $1,5 \cdot 10^8$ ;  $5,8 \cdot 10^7$ ;  $1,1 \cdot 10^8$  и  $2,3 \cdot 10^8$  км. Средняя температура на поверхности Земли  $20^\circ\text{C}$ .

а) Оцените среднюю температуру поверхностей Меркурия, Венеры и Марса.

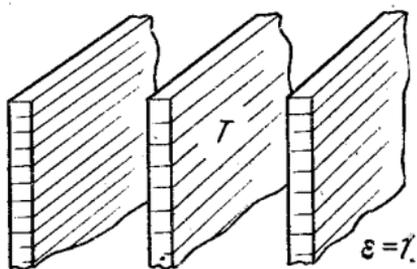
б) Оцените энергию, излучаемую Солнцем в 1 с (поток излучения с поверхности Солнца).

в) Оцените температуру на поверхности Луны в момент, когда солнечные лучи перпендикулярны ее поверхности. Почему при этом же условии такая температура не наблюдается на поверхности Земли?

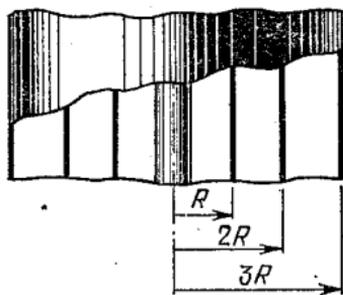
11.9. Плотность потока излучения звездного неба около  $2 \cdot 10^{-10}$  Вт/см<sup>2</sup>. Оцените, пользуясь этой величиной, температуру внутригалактической пыли.

11.10. Какая температура установится внутри сферического космического корабля, который вращается вокруг Земли? Корабль не имеет внутреннего источника энергии.

11.11\*. Определите поток теплового излучения, передаваемого от одной параллельной пластины к другой, если температура пластин  $T_1$  и  $T_2$ , коэффициенты излучения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между пластинами много меньше их размеров.



К задаче 11.12,



К задаче 11.13\*.

11.12. Внутренняя плоскость поддерживается при температуре  $T$ .

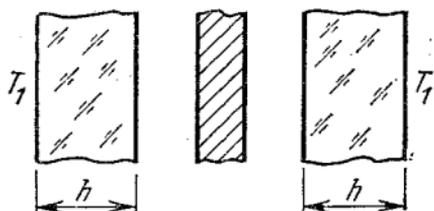
а) Чему равны температуры внешних экранных пластин?

б) Сколько экранных пластин нужно поставить с обеих сторон нагревательной плоскости, чтобы уменьшить температуру внешней экранной пластины до  $T/2$ ?

в) Чему будет равна температура внутренней плоскости, если внешние пластины будут поддерживаться при температурах  $T_0$  и  $2T_0$ ?

11.13\*. Накальная нить радиуса  $r$  экранируется тремя цилиндрами радиусов  $R$ ,  $2R$ ,  $3R$ . Температура нити  $T$ .

Определите температуру внешнего экрана. Материал нити и экрана одинаков, коэффициент излучения  $\epsilon = 1$ .



К задаче 11.14\*.

11.14\*. В вакуумном объеме находится нагреваемая металлическая плоскость, которую с двух сторон экранируют керамические пластины толщины  $h$ . Коэффициенты излучения плоскости и пластин  $\epsilon$ , теплопроводности пластин  $\kappa$ . Температуры пластин с внешних сторон  $T_1$ , температура вакуумной камеры  $T_2$ . Определите температуру металлической плоскости.

11.15. а) Излучение — это фотонный газ. Энергия фотона  $E$  связана с его импульсом  $p$  соотношением  $p = E/c$ , где  $c$  — скорость фотона, равная скорости света. Докажите, что давление фотонного газа  $P$  связано со средней энергией  $\langle E \rangle$  газа соотношением  $\langle E \rangle = P/3$ .

б\*) Докажите, что энергия излучения пропорциональна четвертой степени температуры. Для доказательства воспользоваться условием независимости изменения энтропии системы при переходе из одного состояния в другое от характера перехода. Можно провести, например, следующие переходы: при температуре  $T$  перейти от нулевого объема к объему  $V$ , заполненному фотонным газом при температуре  $T$ ; затем нагреть объем  $V$  до температуры  $T + \Delta T$  ( $\Delta T \ll T$ ); при температуре  $T + \Delta T$  перейти от нулевого объема к объему  $V$ , заполненному фотонным газом при температуре  $T + \Delta T$ .

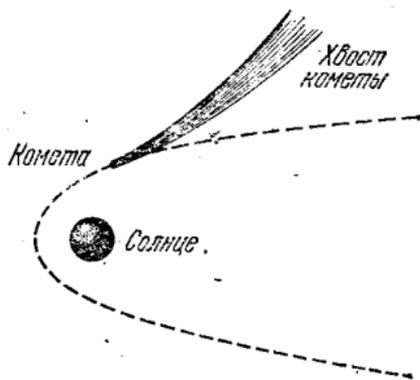
11.16. «...Космическая яхта представляет собой нечто вроде сферы, внешняя оболочка которой — необычайно тонкий и легкий парус — вздувалась и перемещалась в пространстве, улавливая давление световых лучей... Если бы этот кораблик остался без управления поблизости от какой-либо звезды... и сила притяжения была невелика,

он устремился бы прочь от звезды по прямой линии» (Бюль П. Планета обезьян. — Библиотека современной фантастики, 1967, т. 13, с. 27).

а) Какое максимальное ускорение может развить эта космическая яхта на расстоянии  $R$  от звезды, если поток излучения звезды  $\Phi$ ? Площадь паруса  $S$ , масса яхты  $M$ .

б\*) Какую скорость приобрела бы яхта, пройдя под действием излучения расстояние по радиусу от  $R_1$  до  $R_2$ ? Парус полностью отражает излучение.

11.17. а) Объясните форму кометного хвоста, изображенного на рисунке. Штриховая линия, огибающая Солнце, — траектория кометы.



К задаче 11.17.

б) Оцените максимальный размер алюминиевых пылинок, которые в космическом пространстве под действием солнечного излучения удалялись бы от Солнца.

## Глава 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 6.1. Закон Кулона \*)

1.1. а) Найдите силу взаимодействия зарядов 1 Кл и 2 Кл на расстоянии 1 км.

б) С какой силой взаимодействуют два электрона на расстоянии  $10^{-8}$  см? Заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

1.2. 1 см<sup>3</sup> воды разделили на разноименные заряды, которые удалили друг от друга на расстояние 1 м. С какой силой будут притягиваться эти заряды?

1.3. Сила взаимодействия между двумя одинаковыми зарядами на расстоянии 1 м равна 1 Н. Определите эти заряды в СИ и СГС.

1.4. Найдите натяжение нити, соединяющей одинаковые шарики радиуса  $r$ , в центре которых находятся одинаковые заряды  $Q$ . Один из шариков плавает на поверхности жид-

\*) Если в задаче не приводится значение диэлектрической проницаемости вещества, считать ее равной единице.

кости плотности  $\rho$ , второй шарик имеет массу  $m$  и висит на нити внутри жидкости. Расстояние между центрами шариков  $l$ .

1.5. Три заряда  $q_1, q_2, q_3$  связаны друг с другом двумя нитями длины  $l$ . Найдите натяжения нитей.

1.6. а) В горизонтальной трубе длины  $l$  находится положительно заряженный шарик. Вблизи концов трубы находятся с одной стороны закрепленный заряд  $q_1$ , с другой — закрепленный заряд  $q_2$ . Найдите положение равновесия шарика, если оба заряда положительны. Устойчиво ли это положение равновесия? Будет ли положение равновесия устойчивым, если трубу убрать? Будет ли отрицательно заряженный шарик в трубе находиться в устойчивом положении равновесия?

б) В вертикальной трубе закреплен заряд  $Q$ . В каком месте по отношению к этому заряду будет находиться в положении равновесия шарик массы  $m$  с зарядом  $Q$ ? —  $Q$ ?

Считать, что взаимодействие между заряженным шариком и закрепленными зарядами не отличается от взаимодействия точечных зарядов.

1.7. Четыре заряда  $q, Q, q, Q$  связаны пятью нитями длины  $l$  так, как показано на рисунке ( $Q > q$ ). Определите натяжение нити, связывающей заряды  $Q$ .

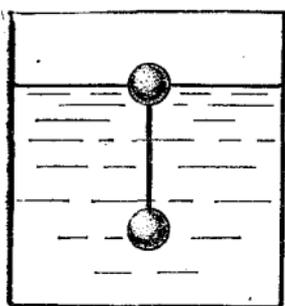
1.8. Четыре заряда  $Q, q, Q, q$  связаны четырьмя нитями длины  $l$  так, как показано на рисунке. Определите угол  $\beta$  между нитями.

1.9. Какой минимальный заряд  $q$ , закрепленный в нижней точке сферической полости радиуса  $R$ , удержит в поле тяжести в ее верхней точке шарик массы  $m$  с зарядом  $Q$ ?

1.10. а) Электрон движется вокруг тяжелого протона с угловой скоростью  $\omega$  по круговой орбите. Заряд электрона  $-e$ , масса  $m_e$ , заряд протона  $+e$ . Найдите радиус орбиты (в см), если  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС,  $\omega = 10^{16}$  рад/с,  $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$  г.

б) Вокруг протона вращаются по круговой орбите четыре электрона, располагаясь в углах квадрата со стороной  $a$ . Протон находится в центре этого квадрата. Определите угловую скорость движения электронов по орбите.

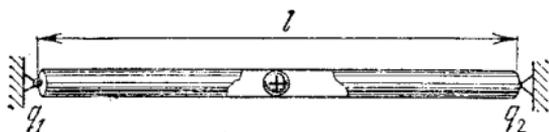
1.11. На каком расстоянии будут находиться два заряда  $q$ , соединенные резиновыми шнурами с неподвижными стенками так, как показано на рисунке? Расхождение шнуров, вызываемое взаимодействием зарядов, много меньше их длины  $l$ . Расстояние между стенками  $2l$ . Жесткость резиновых шнуров  $k$ .



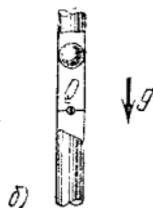
К задаче 1.4.



К задаче 1.5.

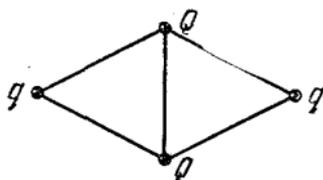


a)

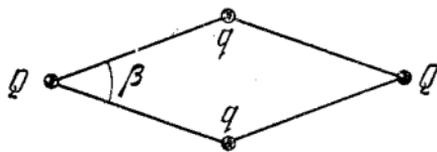


б)

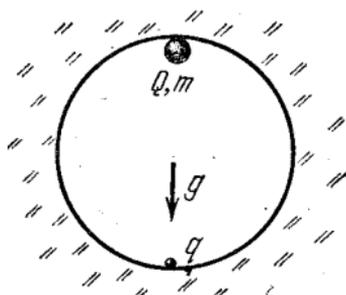
К задаче 1.6.



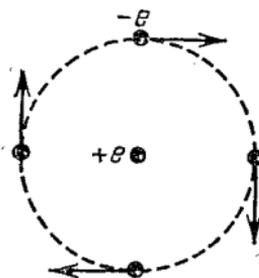
К задаче 1.7.



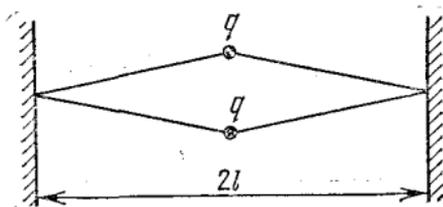
К задаче 1.8.



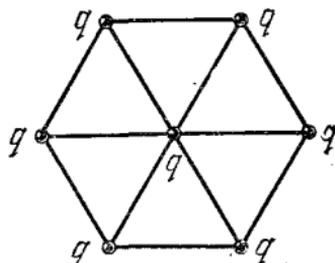
К задаче 1.9.



К задаче 1.106.



К задаче 1.11.



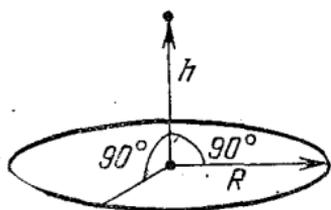
К задаче 1.12\*.

1.12\*. Семь одинаковых зарядов  $q$  связаны друг с другом одинаковыми упругими нитями так, как показано на рисунке. После того как заряды отпустили, длины нитей стали равны  $l$ . Определите натяжение каждой нити.

1.13. Два одинаково заряженных шарика масс  $M$ , подвешенных в одной точке на нитях длины  $l$ , разошлись так, что угол между нитями стал прямым. Определите заряд шариков.

## § 6.2. Напряженность электрического поля

2.1. Чему равна напряженность электрического поля, создаваемого зарядом  $10$  Кл, в СИ и СГС на расстоянии  $1$  и  $20$  м от него? С какой силой действуют эти электрические поля на заряд  $0,001$  Кл? На заряд  $1000$  СГС?

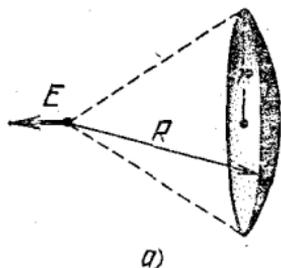


К задаче 2.3.

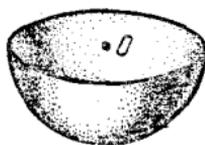
2.2. а) Сила, действующая на заряд  $1$  Кл, равна  $1$  Н. Чему равна напряженность электрического поля, действующего на этот заряд, в СИ и СГС?

б) Сила, действующая на заряд  $10$  СГС, равна  $100$  дин. Чему равна напряженность электрического поля, действующего на этот заряд, в СИ и СГС?

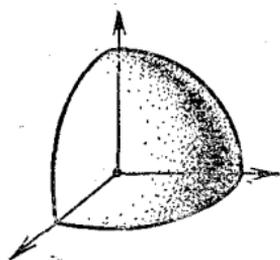
2.3. Чему равна напряженность электрического поля в центре равномерно заряженной окружности радиуса  $R$ ? Чему равна она на расстоянии  $h$  от центра окружности? Заряд окружности  $Q$ .



а)



б)



в)

К задаче 2.4\*.

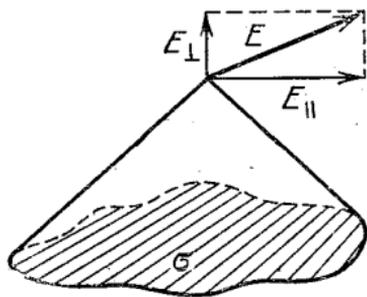
2.4\*. а) Докажите, что напряженность электрического поля равномерно заряженного сферического сегмента в цен-

тре сферы радиуса  $R$ , из которой он вырезан, равна  $E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi r^2}{R^2}$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда сегмента,  $\pi r^2$  — площадь круга, который его замыкает.

б) Определите напряженность электрического поля в центре равномерно заряженной полусферы (в точке  $O$ ). Поверхностная плотность заряда на полусфере  $\sigma$ .

в) Найдите напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным участком сферы радиуса  $R$ , лежащим между тремя координатными плоскостями, в центре сферы, расположенном в начале координат. Поверхностная плотность заряда на этом участке  $\sigma$ .

2.5. Докажите, что составляющая напряженности электрического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости, равна  $E_{\perp} = \sigma\Omega/4\pi\epsilon_0$ ,



К задаче 2.5.



К задаче 2.7\*.

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым виден этот участок из рассматриваемой точки пространства,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Определите, пользуясь этим, напряженность электрического поля:

а) в центре куба, пять граней которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma$ ;

б) в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma_1$ , а четвертая — с поверхностной плотностью  $\sigma_2$ ;

в) равномерно заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда  $\sigma$ ;

г) на оси длинной трубы с сечением в виде правильного треугольника, если поверхностные плотности зарядов граней трубы равны  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

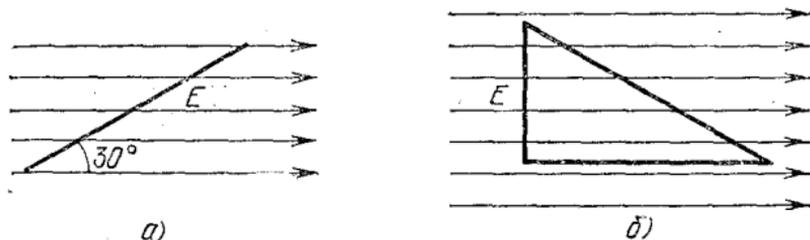
2.6. а) Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен  $Q$ . Сделали точно такое же новое кольцо, но из материала, прочность

которого в 10 раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо?

б) Какой заряд разорвет новое кольцо, сделанное из прежнего материала, если все размеры нового кольца в 3 раза больше размеров старого кольца?

2.7\*. Грани правильного тетраэдра равномерно заряжены с одинаковой постоянной плотностью. Чтобы сложить две грани тетраэдра вместе, необходимо совершить работу  $A$ . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить все грани тетраэдра вместе?

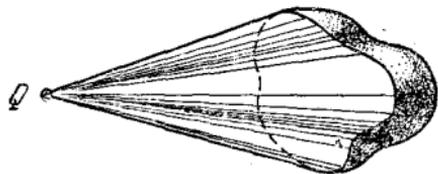
2.8. а) Напряженность однородного электрического поля равна  $E$ . Чему равен поток напряженности электрического поля через квадрат со стороной  $a$ , плоскость



К задаче 2.8.

которого расположена под углом  $30^\circ$  к направлению электрического поля?

б) Когда рассчитывают поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, потоки, входящие в объем, берутся со знаком минус, выходящие потоки берутся со знаком плюс. Используя это правило, найдите отрицательные и положительные потоки однородного электрического поля напряженности  $E$  через замкнутую поверхность прямой трехгранной призмы, высота которой равна  $h$ . Передняя грань призмы, ширина которой равна  $h$ , перпендикулярна  $E$ , нижняя грань параллельна  $E$ .



К задаче 2.9.

в) Докажите, что поток напряженности однородного электрического поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

2.9. Докажите, что поток напряженности электрического поля точечного заряда  $Q$  через любую поверхность равен

телесному углу, под которым видна эта поверхность, умноженному на  $Q/\epsilon_0$ .

**2.10.** Используя закон Гаусса, определите напряженность электрического поля:

а) равномерно заряженной сферы внутри и вне сферы, если полный заряд сферы  $Q$ ;

б) равномерно заряженной бесконечной нити, если линейная плотность заряда нити  $\rho$ ;

в) равномерно заряженной бесконечной плоскости, если поверхностная плотность заряда плоскости  $\sigma$ ;

г) равномерно заряженного шара радиуса  $R$  внутри и вне шара, если объемная плотность заряда  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до центра шара;

д) равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса  $R$  внутри и вне цилиндра, если объемная плотность заряда внутри цилиндра равна  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до оси цилиндра;

е) равномерно заряженной бесконечной пластины толщины  $h$  вне и внутри пластины, если объемная плотность заряда в пластине  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до пластины.

**2.11.** Найдите напряженность электрического поля распределенного заряда, объемная плотность которого: а) обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  до точки  $O$ :  $\rho = \rho_0 (r_0/r)^2$ ; б) обратно пропорциональна расстоянию  $r$  до бесконечной прямой  $AB$ :  $\rho = \rho_0 (r_0/r)$ .

**2.12.** Найдите распределение объемной плотности электрического заряда: а) в шаре радиуса  $R$  (вектор напряженности электрического поля  $E_0$  в шаре направлен вдоль его радиуса и не меняется по модулю); б) в бесконечном цилиндре радиуса  $R$  (вектор напряженности электрического поля  $E_0$  в цилиндре направлен вдоль его радиуса и не меняется по модулю).

**2.13\*.** а) С какой силой действует на грани тетраэдра заряд  $q$ , помещенный в его центре? Поверхностная плотность заряда граней  $\sigma$ .

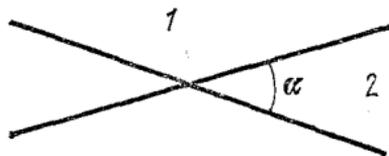
б) С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? Тетраэдра? Поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , длина ребра  $l$ .

**2.14.** а) Чему равна напряженность электрического поля между двумя параллельными бесконечными плоско-

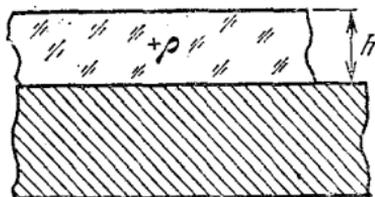
стями с поверхностными плотностями зарядов  $+\sigma$  и  $-\sigma$ ?  $+\sigma$  и  $+\sigma$ ?  $-2\sigma$  и  $+\sigma$ ? Чему равна в этих же случаях напряженность электрического поля вне плоскостей?

б) Чему равна напряженность электрического поля системы трех параллельных бесконечных плоскостей с поверхностными плотностями зарядов  $+\sigma$ ,  $+\sigma$ ,  $+\sigma$ ?  $+\sigma$ ,  $-\sigma$ ,  $+\sigma$ ?  $+\sigma$ ,  $-2\sigma$ ,  $+\sigma$ ?  $+\sigma$ ,  $-4\sigma$ ,  $+3\sigma$ ?

2.15. а) Две пересекающиеся под углом  $\alpha$  бесконечные плоскости делят пространство на четыре области. Чему



К задаче 2.15а.

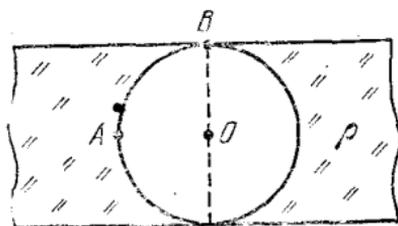


К задаче 2.16.

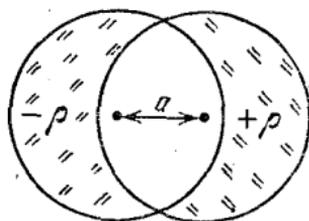
равна напряженность электрического поля в областях 1 и 2, если поверхностные плотности зарядов плоскостей  $+\sigma$  и  $-\sigma$ ?  $+\sigma$  и  $+\sigma$ ?

б) Четыре пересекающиеся бесконечные плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  ограничивают объем в форме правильного тетраэдра. Определите напряженность электрического поля внутри и вне этого объема.

2.16. Две бесконечные заряженные пластины наложены друг на друга. Толщина первой пластины  $h$ , объемная плотность заряда внутри первой пластины  $+\rho$ . Чему равна максимальная напряженность электрического поля в этой системе, если толщина и объемная плотность заряда второй пластины равны  $h$  и  $-\rho$ ?  $2h$  и  $-\rho/2$ ?  $2h$  и  $+\rho$ ?



К задаче 2.17.



К задаче 2.19\*.

2.17. В равномерно заряженной с объемной плотностью  $\rho$  бесконечной пластине вырезали сферическую полость так, как показано на рисунке. Толщина пластины  $h$ . Чему равна

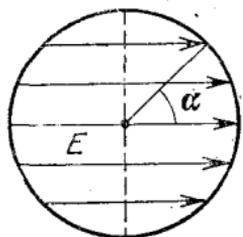
напряженность электрического поля в точке  $A$ ? В точке  $B$ ? Найдите зависимость напряженности электрического поля вдоль прямой  $OA$  от расстояния до точки  $O$ .

**2.18.** В равномерно заряженном с объемной плотностью  $\rho$  шаре вырезали сферическую полость радиуса  $r$ , центр которой находится на расстоянии  $a$  от центра шара. Найдите напряженность электрического поля вдоль прямой, соединяющей центр полости и центр шара. Радиус шара  $R$ . Докажите, что электрическое поле в полости однородно.

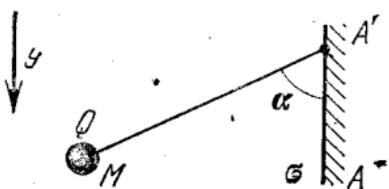
**2.19\*.** а) При пересечении двух шаров радиуса  $R$ , центры которых находятся на расстоянии  $a$  друг от друга, образуются два «полумесяца». Объемы «полумесяцев» равномерно заряжены разноименными электрическими зарядами. Объемная плотность электрического заряда слева  $-\rho$ , справа  $+\rho$ . Докажите, что электрическое поле в области пересечения шаров однородно. Найдите напряженность этого поля.

б) Используя результат задачи а), применяя метод предельного перехода  $a \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $a\rho = \text{const}$ , найдите распределение заряда на сфере радиуса  $R$ , которое даст внутри сферы однородное электрическое поле напряженности  $E$ . Как связана с напряженностью максимальная плотность заряда?

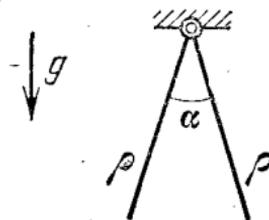
**2.20\*.** Найдите распределение заряда на поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , которое дает внутри цилиндра однородное электрическое поле напряженности  $E$ .



К задаче 2.20\*.



К задаче 2.23.



К задаче 2.24.

**2.21\*.** Чему равна напряженность электрического поля равномерно заряженной нити длины  $l$  на прямой, которая является продолжением нити, на расстоянии  $x$  от ближайшего конца нити? Линейная плотность заряда нити  $\rho$ .

**2.22.** Известно, что вблизи поверхности Земли существует электростатическое поле напряженности порядка  $100 \text{ В/м}$ . Предложите эксперименты для измерения этого поля.

2.23. На рисунке изображены бесконечная плоскость  $A'A$  с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  и прикрепленный к ней нитью одноименно заряженный зарядом  $Q$  шарик массы  $M$ . Шарик находится в равновесии. Найдите натяжение нити и угол  $\alpha$ .

2.24. Оцените поверхностную плотность заряда  $\sigma$  пластин электроскопа, которые расходятся на угол  $\alpha$ , если  $\alpha \ll 1$ . Масса единицы площади пластин  $\rho$ . Распределение заряда на пластинах считать равномерным.

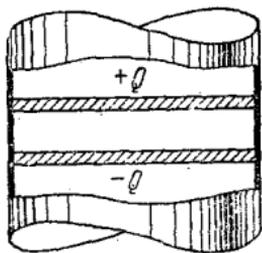
2.25\*. С помощью закона Гаусса докажите, что система заряженных частиц не может находиться в состоянии устойчивого равновесия.

### § 6.3. Электрическое давление. Энергия электрического поля

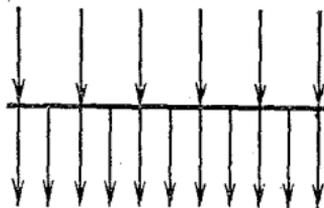
3.1. а) С какой силой притягиваются друг к другу две параллельные разноименно заряженные плоскости? Поверхностные плотности зарядов плоскостей  $\pm\sigma$ . Площадь каждой плоскости  $S$ , расстояние между ними много меньше размеров плоскостей. Чему равна сила, действующая на единицу поверхности плоскости (электрическое давление)?

б) Напряженность электрического поля между параллельными плоскостями равна нулю, вне плоскостей  $E$ . Определите поверхностную плотность заряда на плоскостях. Чему равно электрическое давление на плоскости?

в) Напряженность поля между параллельными плоскостями  $10\ 000$  В/см, вне плоскостей равна нулю. Определите электрическое давление на каждую плоскость и поверхностную плотность заряда.



К задаче 3.2.

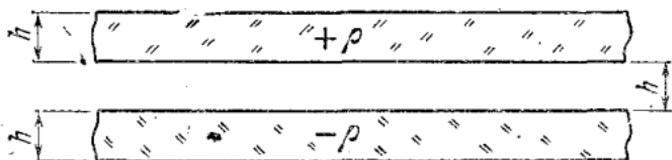


К задаче 3.3.

3.2. Два электропроводящих поршня площади  $S$  в трубке из изолятора образуют плоский конденсатор, заполненный

воздухом при атмосферном давлении  $P_0$ . Как изменится расстояние между поршнями, если их зарядить разноименными зарядами  $\pm Q$ ? Система хорошо проводит тепло, трение отсутствует.

3.3. Чему равна поверхностная плотность заряда и электрическое давление на границе раздела двух полей напряженностей  $+E$  и  $+2E$ ?  $+E$  и  $-2E$ ? Поверхностная плотность заряда во втором случае в 3 раза больше. Почему же электрическое давление в обоих случаях одинаково?



К задаче 3.4.

3.4. Расстояние между двумя пластинами  $h$ . Толщина пластин тоже  $h$ . Пластины разноименно заряжены с объемной плотностью  $\pm \rho$ .

а) Определите силу, действующую на участок пластины с единичной площадью. Почему эта сила зависит только от электрического заряда в выделенном объеме  $\rho h$  и не зависит от толщины пластины, если  $\rho h = \text{const}$ ?

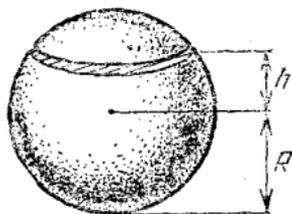
б) Докажите, что электрическая сила, действующая на выделенную часть заряженной пластины, равна  $S\epsilon_0 (E_1^2 - E_2^2) / 2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — напряженности однородного электрического поля на поверхности пластин, перпендикулярные пластинам,  $S$  — площадь выделенной части. Почему эта сила не зависит от распределения объемной плотности электрического заряда пластины  $\rho(x)$ , а зависит только от полного заряда в выделенной части пластины?

3.5. Определите силу, действующую на единицу поверхности (электрическое давление) сферы радиуса  $R$ , равномерно заряженной зарядом  $Q$ .

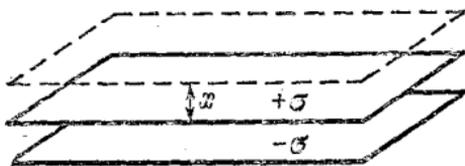
3.6\*. Равномерно заряженная сфера радиуса  $R$  разрезана на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии  $h$  от центра сферы. Найдите силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд сферы  $Q$ . Какой мини-

мальный заряд нужно поместить в центр сферы, чтобы части сферы не расталкивались?

3.7. Две параллельные разноименно заряженные пластины находятся на расстоянии, много меньшем размеров пластин. Поверхностная плотность зарядов на пласти-



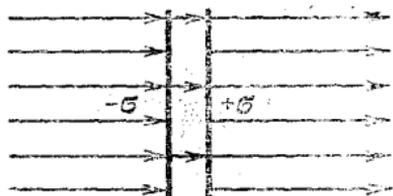
К задаче 3.6\*.



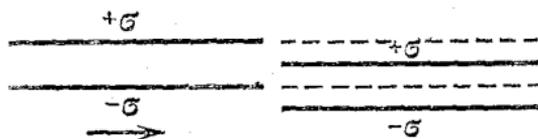
К задаче 3.7.

нах  $\pm\sigma$ , площадь каждой пластины  $S$ . Докажите, что при раздвижении этих пластин на расстояние  $x$  нужно совершить работу, равную объему, который заполнит вновь созданное электрическое поле напряженности  $E$ , умноженному на плотность энергии  $\epsilon_0 E^2/2$ .

3.8. В однородном электрическом поле напряженности  $E$  перпендикулярно направлению поля расположены две плоские разноименно заряженные пластины. Поверхностные плотности зарядов пластин  $\pm\sigma$ , расстояние между пластинами  $h$  много меньше линейных размеров пластин. Какую работу нужно совершить, чтобы поменять пластины местами?



К задаче 3.8.



К задаче 3.9.

3.9. Какую работу нужно совершить, чтобы вставить одну систему разноименно заряженных параллельных пластин в другую так, как показано на рисунке? Поверхностная плотность зарядов на пластинах  $\pm\sigma$ , площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $h$  много меньше линейных размеров пластин.

3.10. В поле напряженности  $E$  перпендикулярно направлению поля расположены две непроводящие плоские противоположно заряженные пластины. Напряженность поля внутри пластин  $E_1$ . Какую работу нужно совершить, чтобы поставить эти пластины параллельно внешнему полю? Площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $h$  много меньше размеров пластин.

3.11. Определите энергию  $W$  поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R$ . Заряд сферы  $Q$ .

3.12. Энергия любой системы  $W$  связана с массой системы  $m$  соотношением Эйнштейна  $W = mc^2$ . Следовательно, электрическое поле обладает массой. Предположим, что вся масса электрона «электрическая». Определите «классический» радиус электрона, считая, что заряд электрона распределен по его поверхности. Масса электрона  $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$  кг, заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

3.13. В экспериментах на ускорителях проверено, что взаимодействие электронов вплоть до расстояний  $10^{-16}$  см подчиняется закону Кулона. Используя решение задачи 3.12, определите, во сколько раз масса электрического поля вне сферы радиуса  $10^{-16}$  см больше массы электрона.

3.14\*. Определите энергию электрического поля равномерно заряженного шара радиуса  $R$ . Полный заряд шара  $Q$ .

3.15. Какую работу против электрических сил нужно совершить, чтобы уменьшить в 2 раза радиус заряженной сферы? Первоначальный радиус сферы  $R$ , заряд сферы  $Q$ .

3.16. Какую работу против электрических сил нужно совершить на единице длины участка бесконечной цилиндрической заряженной поверхности, чтобы уменьшить радиус этой поверхности в 3 раза? Первоначальная поверхностная плотность заряда цилиндра  $\sigma$ , первоначальный радиус  $R$ .

3.17. Тело вместе с зарядом, распределенным в нем, сжали так, что все линейные размеры тела уменьшились в  $n$  раз. Во сколько раз увеличилась энергия электрического поля?

3.18. Равномерно заряженный лист в форме прямоугольного равнобедренного треугольника сложили пополам. При этом была совершена работа  $A$  против сил электрического поля. Какую работу нужно совершить, чтобы еще раз так же сложить полученный треугольник?

3.19. На сколько увеличится энергия электрического поля двух точечных зарядов  $Q$ , удаленных друг от друга на большое расстояние, при сближении их на расстояние  $a$ ?

3.20. Напряженность электрического поля между двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) равна  $E$  и радиально направлена, а в остальном пространстве поля нет. Как распределена объемная плотность электрического заряда при  $R_1 < r < R_2$ ? Чему равна энергия поля?

## § 6.4. Проводники в постоянном электрическом поле

4.1. а) Почему к заряженному шару притягиваются легкие металлические пылинки?

б) К электрическому заряду поднесли две незаряженные металлические палочки — одну длинную, другую короткую. Концы палочек одинаково удалены от заряда. Какая из палочек притягивается к заряду сильнее?



К задаче 4.1б.

в) Может ли сила взаимодействия двух металлических заряженных шаров равняться нулю?

г) Можно ли, используя шарик с зарядом  $Q$ , зарядить проводник зарядом, большим  $Q$ ?

4.2. а) Почему электрическое поле внутри проводника равно нулю?

б) Докажите, что объемная плотность электрического заряда в проводнике равна нулю.

в) Почему электрическое поле на поверхности проводника перпендикулярно к его поверхности?

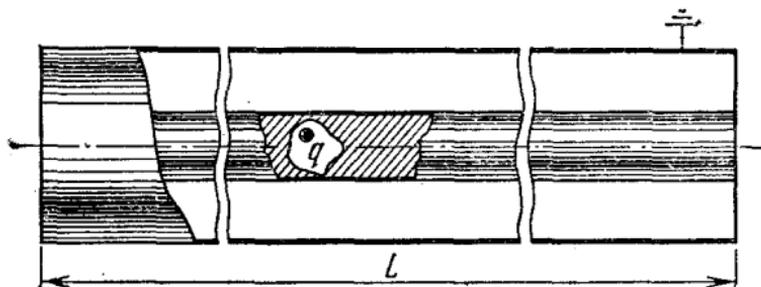
г) Используя закон Гаусса, докажите, что поверхностная плотность заряда проводника  $\sigma$  связана с напряженностью электрического поля вблизи поверхности проводника  $E$  соотношением  $E = \sigma/\epsilon_0$ .

4.3. а) В полости металлического шара радиуса  $R$  находится заряд  $Q$ . Найдите заряд, индуцируемый этим зарядом на поверхности полости.

б) Почему на поверхности шара заряд будет распределен с постоянной плотностью? Чему равна поверхностная плотность, если полный заряд шара равен нулю? Найдите напряженность электрического поля вне шара на расстоянии  $L$  от его центра в случае, если полный заряд шара равен  $Q$ . Зависит ли это поле от места, где расположена полость в шаре? От ее формы?

4.4. Металлический шар радиуса  $R$  помещен в сферическую концентрическую полость радиуса  $2R$  другого металлического шара, радиус которого равен  $3R$ . Центры шаров совпадают. Полный заряд малого шара  $Q$ , большого шара  $8Q$ . Постройте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до центра шаров.

4.5\*. Внутри полости длинного незаряженного проводника радиуса  $r$  находится заряд  $q$ . Проводник окружен



К задаче 4.5\*.

цилиндрическим экраном радиуса  $R$ . Длина проводника  $L \gg R$ . Как зависит напряженность электрического поля вне полости от расстояния до оси вдали от концов проводника?

4.6. В однородное электрическое поле напряженности  $E$  вставили тонкую металлическую пластину. Плоскость пластины перпендикулярна направлению электрического поля.

а) Чему равна поверхностная плотность заряда на пластине? Чему равно электрическое давление на поверхность пластины?

б) Толщина пластины  $h$ , площадь  $S$ . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вытащить пластину из электрического поля?

4.7. Какую минимальную работу против сил электрического поля нужно совершить, чтобы собрать каплю ртути радиуса  $R$  с зарядом  $Q$  из  $N$  одинаковых заряженных капель?

4.8. а) В однородное электрическое поле напряженности  $E$  поместили незаряженный металлический шар. Определите распределение плотности электрического заряда по поверхности шара. Чему равно максимальное электрическое давление на поверхность шара?

б) В однородное электрическое поле напряженности  $E$  поместили незаряженный металлический цилиндр. Ось

цилиндра перпендикулярна направлению поля. Определите распределение плотности электрического заряда по поверхности цилиндра. Чему равно максимальное электрическое давление на поверхность цилиндра?

Воспользоваться результатами решения задач 2.19\*, 2.20\*.

4.9\*. В однородном электрическом поле находится проводник, суммарный заряд которого равен нулю. Изменится ли поверхностная плотность заряда проводника, если все его размеры уменьшить в  $n$  раз?

4.10\*. По аналогии с центром масс можно ввести понятие центра зарядов. Обозначим в изолированном проводнике, полный заряд которого равен нулю, через  $x_0$  расстояние между центрами положительных и отрицательных зарядов. Произведение  $x_0$  на положительную часть заряда носит название дипольного момента.

а) Определите дипольный момент металлического шара радиуса  $R$  в однородном электрическом поле напряженности  $E$ . Определите отношение этого момента к напряженности электрического поля (эта величина носит название поляризуемости проводника). Чему равна поляризуемость тонкой металлической пластины толщины  $h$  и площади  $S$  в электрическом поле, перпендикулярном плоскости пластины?

б) Линейные размеры изолированного проводника уменьшили в  $n$  раз. Как изменилась поляризуемость проводника?

4.11. Точечный заряд  $Q$  находится на расстоянии  $h$  от бесконечной металлической плоскости. Какая сила действует на заряд со стороны плоскости? Чему равно максимальное электрическое давление на плоскость?

4.12. Определите силы, действующие на каждый из двух зарядов  $Q$ , находящихся на расстоянии  $h$  от металлической плоскости и на расстоянии  $2h$  друг от друга.

4.13. Равномерно заряженная пластина площади  $S$  находится на расстоянии  $h$  от параллельной ей бесконечной металлической плоскости. Поверхностная плотность заряда на пластине  $\sigma$ ,  $h$  много меньше размеров пластины. Определите заряд на металлической плоскости в области, где ее прикрывает заряженная пластина, и найдите энергию электрического поля.

4.14. Две бесконечные проводящие плоскости, пересекаясь под прямым углом, делят пространство на четыре

области. В области  $I$  находится заряд  $q$  на одинаковом расстоянии  $a$  от обеих плоскостей.

а) Есть ли электрическое поле в областях  $II, III, IV$ ?

б) Какая сила действует на заряд  $q$ ?

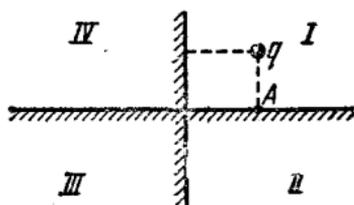
в) Чему равно электрическое давление вблизи точки  $A$ ?

С какой силой заряд  $q$  действует в этой области на единицу площади заряженной поверхности?

4.15\*. Оцените силу, действующую на заряд  $q$ , расположенный в центре изолированной незаряженной металлической сферической оболочки радиуса  $R$ , если в ней имеется небольшое отверстие радиуса  $r \ll R$ . Толщина оболочки  $\Delta \ll r$ .

4.16\*. Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $L$  от центра изолированного металлического шара радиуса  $R$ . Полный заряд шара равен нулю. Докажите, что электрическое поле вне шара совпадает с полем, которое получается наложением на поле точечного заряда  $q$  поля зарядов  $\pm Rq/L$ . Первый заряд находится в центре шара, второй расположен на прямой, соединяющей центр шара с  $q$ , на расстоянии  $R^2/L$  от центра.

4.17. Как изменится сила взаимодействия заряженного металлического шара с точечным зарядом  $q$ , который находится на расстоянии  $L$  от его центра, если заряд шара увеличить на  $Q$ ?



К задаче 4.14.



К задаче 4.18.

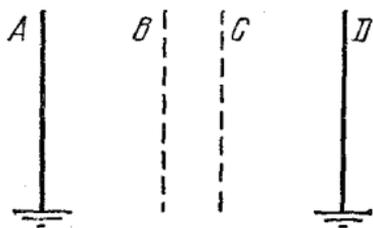
4.18. Две бесконечные проводящие изолированные плиты заряжены так, что суммарный заряд на единицу площади поверхности обеих сторон первой плиты равен  $\sigma_1$ , а второй  $\sigma_2$ . Найдите заряды на единицу площади на каждой стороне.

## § 6.5. Потенциал электрического поля

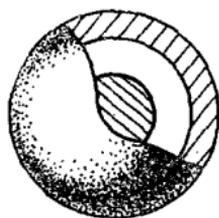
5.1. а) Потенциал заряженного металлического шара 300 В. Какой минимальной скоростью должен обладать электрон, чтобы улететь с поверхности шара на бесконечно далекое расстояние? Заряд электрона  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса  $9 \cdot 10^{-31}$  кг.

б) Протон на большом расстоянии от проводника имел скорость  $10^8$  см/с. Потенциал проводника  $-10$  СГС. Траектория протона заканчивается на поверхности проводника. Какую скорость имел протон вблизи поверхности проводника? Масса протона  $1,7 \cdot 10^{-24}$  г, заряд  $4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС.

5.2. Пластины  $A$  и  $D$  заземлены, сетки  $B$  и  $C$  имеют по отношению к земле потенциалы 200 и 100 В. Из пластины  $A$  без начальной скорости вылетает электрон. С какими скоростями он пересечет сетки  $B$  и  $C$ ?



К задаче 5.2.



К задаче 5.5.

5.3. а) Чему равен потенциал поля точечного заряда  $q$  в точке, удаленной от заряда на расстояние  $r$ ?

б) В вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся четыре заряда  $q$ . Чему равен потенциал поля в центре квадрата?

в) Заряд 0,1 Кл удален от заряда 0,2 Кл на расстояние 20 м. Чему равен потенциал поля в середине отрезка, соединяющего заряды?

г) Заряды 100, 10, 1,  $-10$ ,  $-1$ ,  $-10$  СГС находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2 см. Чему равен потенциал поля в центре шестиугольника в СИ и СГС?

5.4. Сфера радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Чему равен потенциал поля в центре сферы? Зависит ли потенциал в центре сферы от распределения зарядов на сфере? Зависит ли потенциал поля в какой-либо точке на поверхности сферы от распределения заряда по сфере?

5.5. Металлический шар радиуса 10 см помещен внутри сферического металлического слоя, имеющего внешний радиус 30 см и толщину 10 см, так, что их центры совпадают. На шаре находится заряд  $10^{-5}$  Кл, на слое заряд  $8 \cdot 10^{-5}$  Кл. Постройте график зависимости потенциала (в вольтах) от расстояния до центра шара.

5.6. Потенциал внутренней сферы радиуса  $r$  равен нулю (сфера заземлена). Потенциал внешней сферы ра-

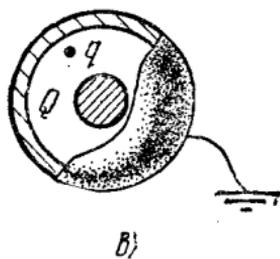
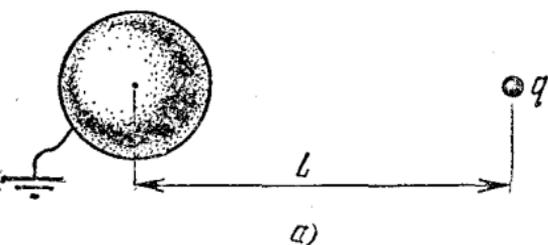
диуса  $2r$  равен  $\phi$ . Определите заряды сфер. Центры сфер совпадают.

5.7. Три концентрические сферы радиусов  $r$ ,  $2r$  и  $3r$  имеют заряды  $+q$ ,  $+2q$  и  $-3q$ . Определите потенциал каждой сферы.

5.8. а) Металлический шар радиуса  $R_1$ , заряженный до потенциала  $\phi$ , окружают концентрической проводящей оболочкой радиуса  $R_2$ . Чему станет равен потенциал шара, если заземлить внешнюю оболочку? Соединить шар с оболочкой проводником?

б) Как изменится потенциал шара в задаче а), если его окружить металлическим слоем с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним  $R_3$ ?

5.9. Найдите предельный заряд шара радиуса  $R$ , облучаемого ультрафиолетовыми лучами, если электроны вследствие фотоэффекта вылетают с кинетической энергией  $K$ . Заряд электрона  $e$ .



К задаче 5.10\*.

5.10\*. а) Чему равен заряд, индуцируемый на поверхности заземленного металлического шара точечным зарядом  $q$ , расположенным на расстоянии  $L$  от центра шара? Радиус шара  $R$ .

б) На расстоянии  $L$  от центра заряженного металлического шара радиуса  $R$  находится точечный заряд  $Q_1$ . Полный заряд шара  $Q_2$ . Чему равен потенциал шара?

в) Металлический шар радиуса  $R$ , заряд которого  $Q$ , и точечный заряд  $q$ , который находится на расстоянии  $L$  от центра этого шара, окружены заземленным сферическим металлическим слоем, внутренний радиус которого  $2L$ , а внешний  $3L$ . Определите потенциал шара.

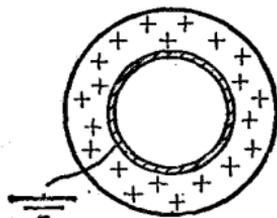
5.11\*. Оси двух бесконечных металлических цилиндрических поверхностей совпадают. Радиус внешней поверхности  $2R$ , внутренней  $R$ . Поверхностная плотность заряда

на внутренней поверхности  $\sigma$ . Внешняя поверхность заземлена. Определите потенциал внутренней поверхности.

5.12. Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найдите зависимость потенциала шара от расстояния до его центра.

5.13. Бесконечный цилиндр радиуса  $r$  заряжен с объемной плотностью  $\rho$  и окружен соосной с ним заземленной цилиндрической металлической поверхностью радиуса  $R$ . Найдите зависимость потенциала поля этой системы от расстояния до оси цилиндра.

5.14. Внутри шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ , находится заземленная металлическая сфера радиуса  $r$ . Их центры совпадают. Определите заряд сферы. Найдите зависимость потенциала поля этой системы от расстояния до центра сферы.



К задаче 5.14,

5.15. а) Определите разность потенциалов электрического поля между точками 1 и 2, если известно, что электрон, двигаясь в этом электрическом поле в отсутствие других сил,

в точке 1 имел скорость  $10^9$  см/с, а в точке 2 скорость  $2 \cdot 10^9$  см/с. Чему была бы равна скорость электрона в точке 2, если в точке 1 электрон имел бы нулевую скорость?

б) В электронной лампе электроны «ускоряются разностью потенциалов» 220 В. Чему равна скорость электронов? Какую нужно взять разность потенциалов, чтобы скорость электронов была равна  $1/3$  скорости света ( $10^{10}$  см/с)?

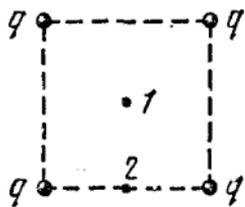
5.16. а) Две параллельные разноименно заряженные металлические пластины находятся на расстоянии 1 см, много меньшем размеров пластин. Поверхностная плотность заряда пластин  $\pm 3$  СГС/см<sup>2</sup>. Определите разность потенциалов между пластинами в СГС и СИ.

б) Две параллельные разноименно заряженные металлические пластины находятся на расстоянии 5 см, много меньшем размеров пластин. Поверхностная плотность заряда пластин  $\pm 10^{-10}$  Кл/см<sup>2</sup>. Определите разность потенциалов между пластинами в СГС и СИ.

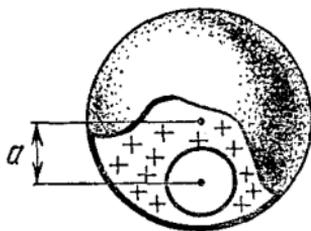
в) Чему равна разность потенциалов между крайними пластинами в системе, состоящей из трех параллельных бесконечных пластин, заряженных с поверхностной плотностью  $+\sigma, +\sigma, +\sigma$ ?  $+\sigma, -\sigma, +\sigma$ ?  $+\sigma, -2\sigma, +\sigma$ ?  $+\sigma,$

— $4\sigma$ ,  $+3\sigma$ ? Внутренняя пластина находится на расстоянии  $h_1$  от первой и на расстоянии  $h_2$  от третьей пластины.

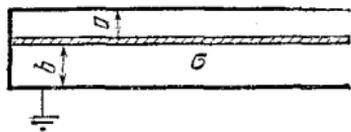
5.17. Заряды  $q = 10^{-9}$  Кл находятся в углах квадрата со стороной 10 см. Найдите разность потенциалов в поле этих зарядов между центром квадрата (точка 1) и серединой одной из сторон квадрата (точка 2).



К задаче 5.17.



К задаче 5.18б\*.



К задаче 5.19а.

5.18. а) Чему равна разность потенциалов между центром и поверхностью шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ ? Между осью и поверхностью бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ ? Между поверхностью плоской пластины толщины  $h$ , равномерно заряженной с объемной плотностью  $\rho$ , и серединой пластины?

б\*) Чему равна разность потенциалов между центром шара, равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ , и центром сферической полости радиуса  $r$ , который находится на расстоянии  $a$  от центра шара (см. рис.)?

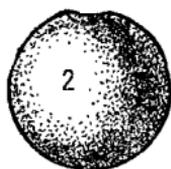
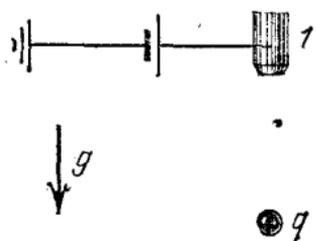
5.19. а) Между двумя заземленными металлическими пластинами находится одинаковая с ними по размерам тонкая пленка с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Расстояние от нее до верхней пластины  $a$ , до нижней  $b$  ( $a$  и  $b$  много меньше линейных размеров пластин). Найдите напряженность электрического поля вблизи верхней и нижней пластины. Определите поверхностные плотности зарядов, индуцируемых на них.

б\*) Между заземленными параллельными пластинами на расстоянии  $a$  и  $b$  от них находится заряд  $q$ . Линейные размеры пластин много больше расстояния между ними. Докажите, что заряды, индуцируемые на заземленных пластинах, не изменятся, если заряд  $q$  распределить по плоскости, лежащей между пластинами на том же расстоянии, что и заряд  $q$ . Определите заряды пластин.

в) Найдите напряженность электрического поля между тремя пластинами в случае, если центральная пластина

взаемлена, Расстояния между центральной пластиной и крайними  $a$  и  $b$ . Потенциалы крайних пластин  $\phi$ .

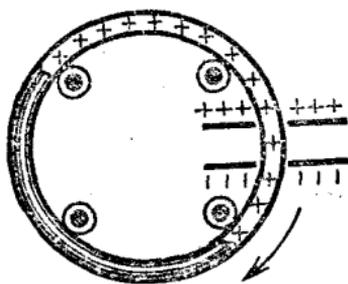
5.20, Из капельницы 1 в полый изолированный металлический шар 2 радиуса  $R$  падают капли воды, каждой из которых сообщают заряд  $q$ . Какой должна быть наименьшая высота падения капль для того, чтобы шар полностью заполнился? Радиус капль  $r \ll R$ .



К задаче 5.20,

Какой должна быть наименьшая высота падения капль для того, чтобы шар полностью заполнился? Радиус капль  $r \ll R$ .

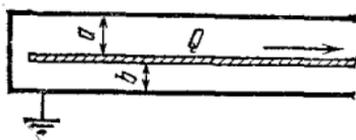
5.21. Положительно заряженный обруч опирается на



К задаче 5.21,

четыре ролика и может вращаться. Один участок обруча проходит через отверстие, сделанное в параллельных разноименно заряженных пластинах. По мысли изобретателя, участок обруча внутри пластин будет притягиваться к отрицательной пластине и отталкиваться от положительной, а вне пластин поля нет. Благодаря этому будет поддерживаться вращение обруча даже при наличии сопротивления движению — получается вечный двигатель. В чем ошибка изобретателя?

5.22. Для того чтобы сложить две одинаковые пластины с равными зарядами, которые были удалены друг от друга на большое расстояние, необходимо совершить работу  $A$ . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить вместе три таких пластины?  $n$  пластин?



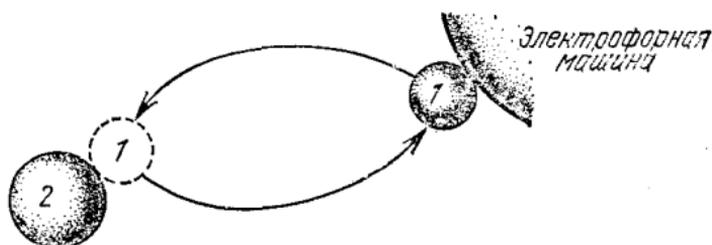
К задаче 5.23,

5.23. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить внутреннюю проводящую пластину наполовину из системы двух параллельных заземленных пластин? Заряд внутренней пластины  $Q$ . Площадь пластин  $S$ .

наполовину из системы двух параллельных заземленных пластин? Заряд внутренней пластины  $Q$ . Площадь пластин  $S$ .

Расстояния между внутренней пластиной и крайними пластинами  $a$  и  $b$ .

5.24. Электрофорной машиной шарик 1 можно зарядить до заряда  $Q$ . Затем, через соприкосновение с шариком 2, можно передать тому часть заряда. При первом соприкос-



К задаче 5.24.

новении на шарик 2 перешел заряд  $q$ . Определите, до какого заряда  $Q_x$ , многократно повторяя процесс, можно зарядить шарик 2.

5.25. При медленном сближении двух одинаковых металлических шаров с зарядом  $Q$  была совершена работа  $A$ . Определите изменение потенциала на шарах.

5.26. Как изменится емкость уединенного проводника, если его размеры утроить?

5.27. Определите емкость шара.

## § 6.6. Конденсаторы

6.1. а) Что называется электрическим конденсатором? Что такое емкость конденсатора? Чем отличается определение емкости уединенного проводника от определения емкости конденсатора?

б) Размеры пластин плоского конденсатора увеличили в 2 раза. Как изменится емкость конденсатора?

в) Как изменится емкость плоского конденсатора, если расстояние между пластинами удвоить? Увеличить в  $n$  раз?

г) Определите емкость плоского конденсатора, если известна площадь пластин  $S$  и расстояние между пластинами  $d$ .

д) Площадь пластин плоского конденсатора  $20 \text{ см}^2$ , расстояние между пластинами  $3 \text{ мм}$ . Определите емкость конденсатора в СГС и СИ.

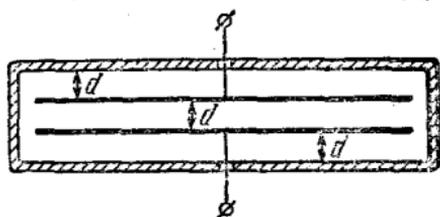
6.2. Площадь обкладок плоского конденсатора  $S$ , расстояние между ними  $d$ .

а) Как изменится емкость конденсатора, если между его обкладками поместить металлическую пластину толщины  $d/3$ ?

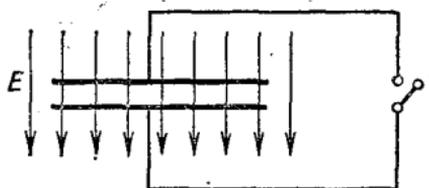
б) Как изменится емкость конденсатора, если между его обкладками поместить металлическую пластину той же толщины, но площади  $S' < S$ ?

в) Изменится ли емкость конденсатора, если эта пластина коснется одной из обкладок?

6.3. а) Как изменится емкость плоского конденсатора, если поместить его в металлическую коробку? Расстояние



К задаче 6.3.



К задаче 6.7.

от обкладок до стенок коробки равно расстоянию между обкладками  $d$ .

б) Как изменится емкость, если коробку соединить с одной из обкладок?

6.4. а) Определите емкость конденсатора, образованного двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (сферический конденсатор).

б) Определите емкость сферического конденсатора, если между его обкладками поместить проводящий сферический слой толщины  $d < R_1 - R_2$ . Радиус внешней поверхности этого слоя  $R_0$ .

6.5\*. Найдите емкость цилиндрического конденсатора, образованного двумя соосными цилиндрами радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Длина цилиндров  $l \gg R_1, R_2$ .

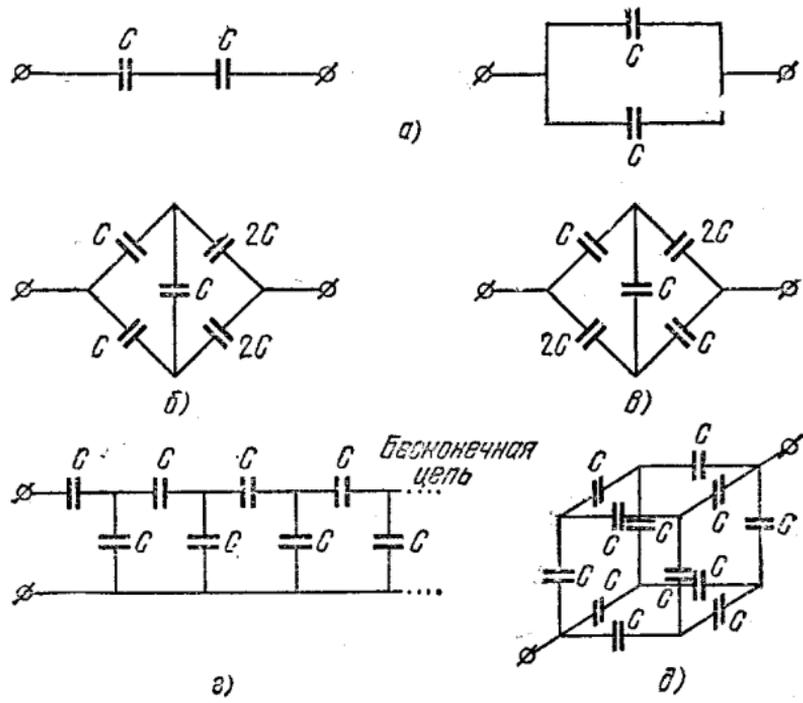
6.6. а) Найдите предельные значения емкости цилиндрического и сферического конденсаторов, если выполняется условие  $R_1 - R_2 = \Delta R \ll R_1, R_2$ . Сравните с емкостью плоского конденсатора.

б) Плоский конденсатор изготовлен из двух лент ширины  $a$  и длины  $l$ . Расстояние между лентами  $d \ll a, l$ . Чему будет равна емкость конденсатора, если его свернуть в рулон, причем число витков  $n \gg 1$  и внутренний радиус рулона  $R \gg d$ ?

6.7. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряженности  $E$ , перпенди-

кулярном пластинам. Площадь пластин конденсатора  $S$ . Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко?

6.8. Определите емкости систем конденсаторов, изображенных на рисунке



К задаче 6.8.

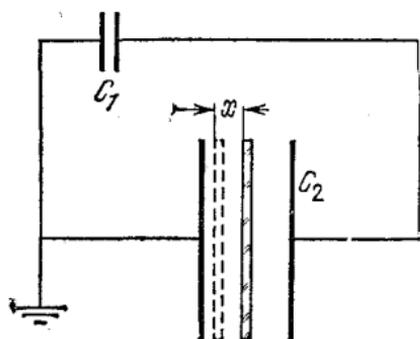
6.9. Два плоских конденсатора соединены параллельно. Емкость одного  $C_1$ , другого  $C_2$ . Между пластинами одного конденсатора, точно посередине, вставлена пластина площади  $S$  с зарядом  $q$ . Пластину сдвигают на расстояние  $x$ . Какой заряд при этом протечет по проводам?

6.10. Найдите энергию электрического поля следующих конденсаторов, заряженных до разности потенциалов  $V$ :

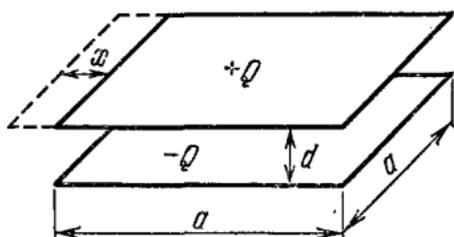
- плоского конденсатора с площадью пластин  $S$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, если площадь пластин  $1 \text{ м}^2$ , расстояние  $1 \text{ мм}$ , разность потенциалов между пластинами  $1 \text{ кВ}$ ;
- сферического конденсатора с радиусами сфер  $r_1$  и  $r_2$ ;
- цилиндрического конденсатора длины  $l$  с радиусами обкладок  $r_1$  и  $r_2$ .

6.11. Как изменится энергия конденсатора, если при той же разности потенциалов между пластинами изменить все его геометрические размеры в  $k$  раз? При тех же раз-

мерах увеличить заряд в  $n$  раз? За счет чего меняется энергия конденсатора?



К задаче 6.9.



К задаче 6.12.

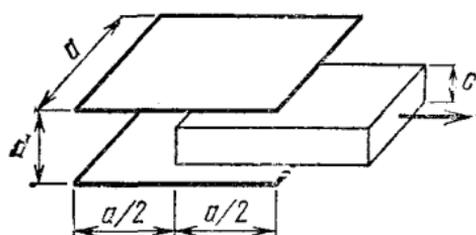
**6.12.** На пластины плоского конденсатора помещен заряд  $Q$ . Площадь пластин  $S$ , расстояние между ними  $d$ .

а) Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами на  $d$ ?

б) Какую работу нужно совершить, чтобы сдвинуть пластины на расстояние  $x$  друг относительно друга? Расстояние между пластинами остается неизменным. Пластины имеют форму квадратов.

в) Какая совершается работа в случаях а) и б), если между пластинами конденсатора поддерживается батареей постоянная разность потенциалов? Почему эти работы будут другими?

**6.13.** Определите силу (в ньютонах), с которой притягиваются пластины плоского конденсатора, если источник напряжения, зарядивший конденсаторы до разности потенциалов 1000 В, отсоединен. Площадь пластин  $100 \text{ см}^2$ , расстояние между пластинами 1 мм. Изменится ли сила взаимодействия пластин, если источник напряжения будет постоянно подсоединен к пластинам?



К задаче 6.14.

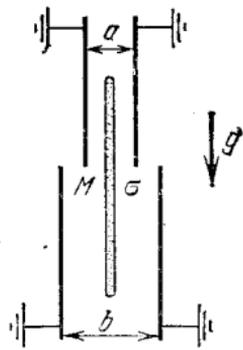
Изменится ли сила взаимодействия пластин, если источник напряжения будет постоянно подсоединен к пластинам?

**6.14.** В плоский конденсатор с размерами пластин  $a \times a$  и расстоянием между ними  $d$  помещена

проводящая пластинка толщины  $c$  и с размерами  $a \times a$ . Определите, какую силу нужно приложить к пластинке, чтобы удержать ее на месте, если: а) на пластины поме-

щены заряды  $\pm Q$ ; б) между пластинами поддерживается постоянная разность потенциалов  $V$  ( $d \ll a$ ).

**6.15\*.** Внутри двух пар заземленных металлических пластин расположена тонкая непроводящая пластина, которую можно равномерно зарядить по всей поверхности. Масса этой пластины  $M$ , ее ширина по горизонтали  $l$ . Расстояние между заземленными пластинами  $a$  и  $b$ . Размеры пластин много больше расстояния между ними. Вся система находится в вертикальном положении в поле тяжести. При какой поверхностной плотности заряда непроводящая пластина начнет двигаться вверх?



К задаче 6.15\*.

**6.16.** Найдите электрическое давление на внутреннюю поверхность сферического конденсатора, заряженного до разности потенциалов  $V$ . Внешний радиус конденсатора  $R$ ; внутренний  $r$ .

## § 6.7. Электрическое поле при наличии диэлектрика

**7.1. а)** Чем объясняется уменьшение напряженности электрического поля в веществе?

б) Что такое диэлектрическая проницаемость вещества?

в) Как зависит диэлектрическая проницаемость газа от его давления? От температуры?

**7.2\*.** а) Найдите дипольный момент проводящего шарика радиуса  $r$ , помещенного в однородное электрическое поле напряженности  $E$ .

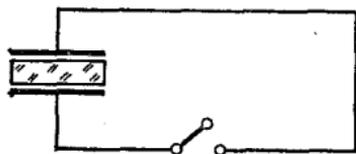
б) Среда составлена из проводящих шариков радиуса  $r$ . Шарики распределены равномерно по объему. Число шариков в единице объема  $n$ . Найдите диэлектрическую проницаемость среды, пренебрегая взаимным влиянием шариков.

в) Диэлектрическая проницаемость гелия при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм равна 1,000074. Найдите дипольный момент атома гелия в однородном электрическом поле напряженности 300 В/см.

г) Радиус атома Ag 0,3 нм. Оцените диэлектрическую проницаемость Ag при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм.

**7.3\*.** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполняется газом. Число молекул в единице объема  $n$ . Дипольный момент каждой молекулы  $p_0$ . Диполи жесткие, поэтому в электрическом поле они могут

только поворачиваться. Температура газа  $T$ . Площадь обкладок  $S$ , расстояние между обкладками  $h$ . Найдите в случаях  $|p_0 E| \ll kT$  и  $|p_0 E| \gg kT$ : а) напряженность поля  $E$  внутри конденсатора и разность потенциалов  $V$  между его обкладками, если на пластины помещены заряды  $\pm Q$ ; б) дипольный момент единицы объема вещества и напряженность поля  $E$ , если конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд протечет в цепи конденсатора при полной откачке газа из конденсатора?



К задаче 7.4.

конденсатора при полной откачке газа из конденсатора?

7.4. Конденсатор заполнен диэлектриком и заряжен до разности потенциалов между обкладками конденсатора  $V$ . Ключ замкнули на очень короткое время и разомкнули, когда разность потенциалов на конденсаторе уменьшилась в 3 раза. После этого она медленно возросла в 2 раза.

а) Какую модель диэлектрика можно предложить для объяснения этого эффекта?

б) Найдите диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего конденсатор.

7.5. Плоский конденсатор (см. задачу 7.4) разрядили ключом от разности потенциалов  $V_0$  до нуля за время, в течение которого состояние поляризации диэлектрика не изменилось, а затем ключ разомкнули. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе после размыкания ключа, если диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon$ ?

7.6. а) Как изменится емкость конденсатора, если пространство между его обкладками заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

б) Отсоединенный от батареи конденсатор заряжен до разности потенциалов  $V$ . Как изменится разность потенциалов между обкладками конденсатора, если его заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

7.7. Конденсатор емкости  $C$  подсоединен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

7.8. а) Два одинаковых конденсатора заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Конден-

саторы соединены параллельно к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

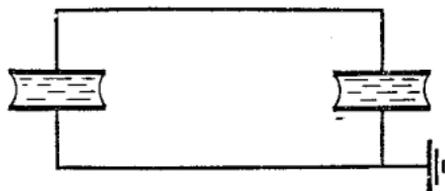
б) Два одинаковых конденсатора соединены последовательно к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

7.9. Конденсатор емкости  $C$  подсоединен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

8. Два одинаковых конденсатора соединены параллельно к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

9. Два одинаковых конденсатора соединены последовательно к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через батарею при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

саторы соединены друг с другом параллельно и заряжены до разности потенциалов  $V$ . Как изменится разность потенциалов, если у одного из конденсаторов вытечет диэлектрик? Как изменится разность потенциалов в батарее из  $n$  параллельно соединенных конденсаторов, заряженной до разности потенциалов  $V$ , если из одного конденсатора вытечет диэлектрик?

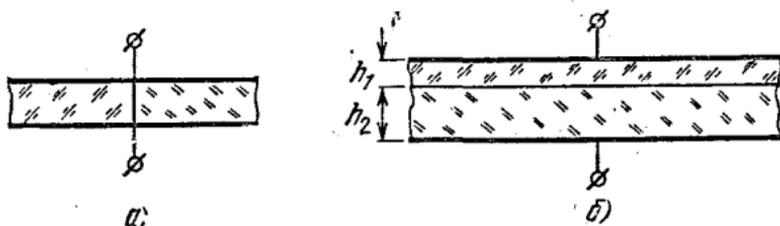


К задаче 7.8а.

б) Батарея из  $n$  последовательно соединенных конденсаторов заряжена до разности потенциалов  $V$ . Конденсаторы заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Как изменится разность потенциалов, если из  $k$  конденсаторов вытечет диэлектрик?

Конденсаторы отсоединены от источника напряжения.

7.9. а) Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком, состоящим из двух



К задаче 7.9.

половинок равных размеров, но с разными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Найдите емкость такого конденсатора. Площадь пластин конденсатора  $S$ , расстояние между пластинами  $h$ .

б) Пространство между обкладками заполнено двумя слоями диэлектриков толщины  $h_1$  и  $h_2$ . Диэлектрические проницаемости диэлектриков  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , площадь пластин  $S$ . Найдите емкость конденсатора.

7.10. Между обкладками плоского конденсатора, площадь пластин которого  $S_1$  и расстояние между обкладками  $h_1$ , помещена диэлектрическая пластина площади  $S_2$  и толщины  $h_2$ . Диэлектрическая проницаемость пластины  $\epsilon$ . Найдите емкость конденсатора.

7.11. Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещена в однородное электрическое поле напряженности  $E$  так, что ее нормаль составляет угол  $\alpha$

с направлением напряженности. Найдите напряженность поля внутри пластины.

**7.12.** Обкладкам плоского конденсатора сообщены заряды  $\pm q$ . Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая проницаемость которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении  $x$  по закону  $\epsilon = \epsilon_1 (1 + x/d)$ , где  $x$  — расстояние от положительной пластины,  $d$  — расстояние между пластинами. Найдите объемную плотность заряда  $\rho$  как функцию  $x$ . Площадь пластин  $S$ .

**7.13.** Шар радиуса  $r$  с зарядом  $Q$  окружен сферической оболочкой радиуса  $R$ , как показано на рисунке. Диэлектрическая проницаемость вещества оболочки  $\epsilon$ . Найдите поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Нарисуйте линии напряженности электрического поля  $E$ . Нарисуйте график зависимости напряженности и потенциала поля системы от расстояния до центра шара.

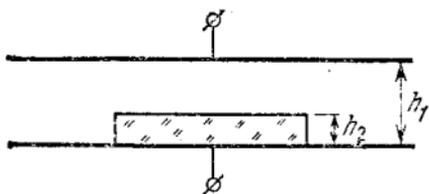
**7.14.** Сила, действующая между шариками в жидкости с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , в  $\epsilon$  раз меньше, чем в воздухе. Почему же «двигатель», показанный на рисунке, не работает?

**7.15.** В плоский конденсатор вставили диэлектрическую пластину. С какой силой растягивается пластина полем конденсатора? Площадь обкладок конденсатора  $S$ , заряды  $\pm Q$ . Диэлектрическая проницаемость материала пластины  $\epsilon$ . Чему равно отрицательное давление внутри пластины, вызываемое электрическим полем конденсатора?

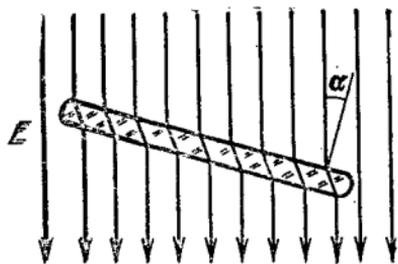
**7.16.** Какая сила втягивает диэлектрическую пластину в конденсатор (см. задачу 7.15), когда она лишь наполовину входит в пространство между обкладками? Высота пластин  $h$  чуть меньше расстояния между обкладками. Размеры пластин  $a \times b$ .

**7.17.** В электрическое поле напряженности  $E$  внесли тонкую диэлектрическую пластину толщины  $h$  и площади  $S$ . Диэлектрическая проницаемость вещества пластины  $\epsilon$ . Как зависит сила, действующая на единицу поверхности диэлектрика, от угла  $\alpha$  между нормалью к пластине и направлением напряженности? Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поставить пластину перпендикулярно электрическому полю?

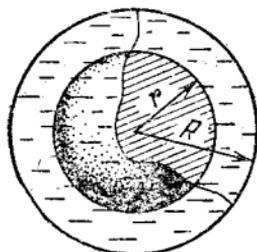
**7.18\*.** Электрофильтр состоит из длинной металлической трубы и нити, между которыми создается разность потенциалов  $V$ . По трубе пропускают воздух с пылью,



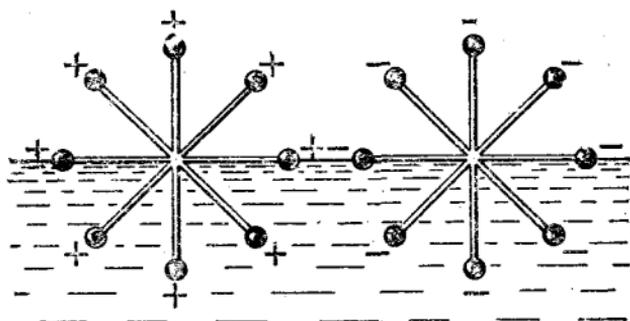
К задаче 7.1



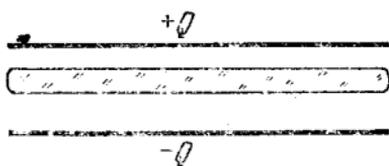
К задаче 7.11.



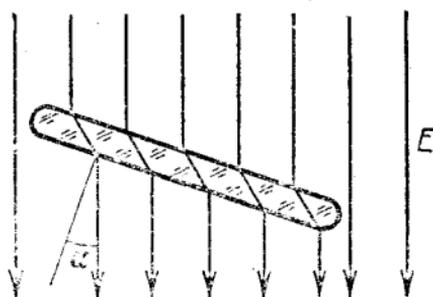
К задаче 7.13.



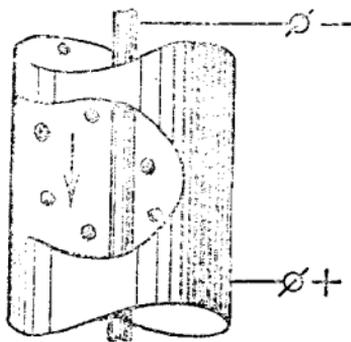
К задаче 7.14



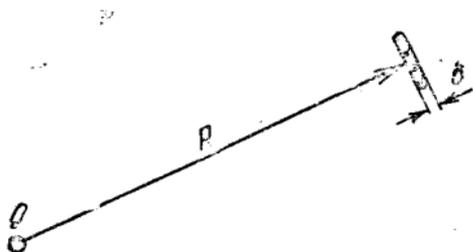
К задаче 7.15.



К задаче 7.17.



К задаче 7.18\*.



К задаче 7.19\*.

а) К какому электроду притягиваются пылинки?

б) Чему равна сила, действующая на пылинку с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , если сила, действующая на пылинку такого же радиуса, но с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , равна  $F_1$ ? Обе пылинки одинаково удалены от нити.

в) Как зависит сила, действующая на пылинку, от разности потенциалов? От расстояния до нити?

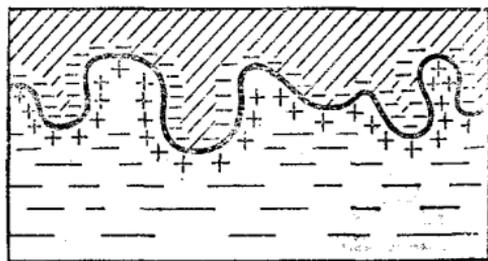
г) Во сколько раз сила, действующая на пылинку радиуса  $R$ , больше силы, действующей на пылинку радиуса  $r$ ? Диэлектрическая проницаемость пылинок одинакова, и они находятся на одинаковом расстоянии от нити.

7.19\*. Вдали от точечного заряда  $Q$  расположена диэлектрическая пластина площади  $S$ , причем ее линейные размеры много меньше расстояния  $R$  от пластины до заряда. Плоскость пластины перпендикулярна направлению на заряд. Толщина пластины  $\delta$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ .

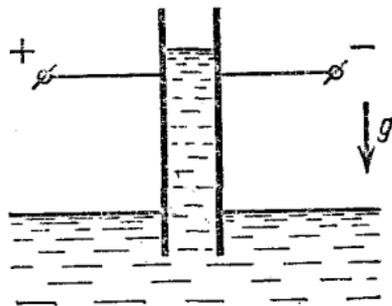
а) Найдите силу, с которой пластина притягивается к заряду.

б) Устойчиво ли это положение пластины по отношению к малым поворотам?

7.20\*. Плоский конденсатор заполнен жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Жидкость заходит в микронеровности внутренней поверхности обкладок так, как изображено на рисунке. Напряженность электрического поля внутри конденсатора  $E$ . Какое отрицательное давление создает электрическое поле в жидкости?



К задаче 7.20\*.



К задаче 7.21.

7.21. В широкий сосуд с жидкостью ставится вертикально плоский конденсатор так, что нижняя часть пластин конденсатора входит в жидкость. Конденсатор подсоединен к батарее, которая поддерживает на обкладках конден-

сатора разность потенциалов  $V$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $h$ . Плотность жидкости  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ . Жидкость несжимаема. Поверхностное натяжение мало. На какую высоту поднимется жидкость в конденсаторе?

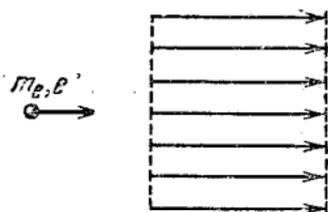
7.22. Заряженный до потенциала  $V$  металлический шар радиуса  $r$  окружен слоем жидкого диэлектрика. Внешний радиус слоя диэлектрика  $R$ . Какое давление оказывает диэлектрик на шар, если его диэлектрическая проницаемость равна  $\epsilon$ ? Металл не смачивается диэлектриком. Поле тяжести пренебречь.

## Глава 7. ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

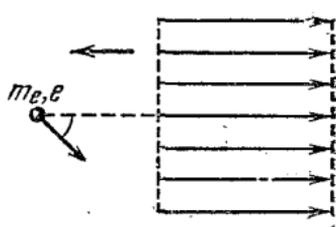
### § 7.1. Движение в постоянном электрическом поле

1.1. В каком случае заряженная частица в электрическом поле движется вдоль силовых линий?

1.2. Электрон влетает в область однородного электрического поля напряженности  $200 \text{ В/м}$  со скоростью  $10^7 \text{ м/с}$ . Скорость направлена вдоль электрического поля. Какое время электрон будет находиться в области электрического поля? Определите, на каком расстоянии от места влета электрон выйдет из поля, если он влетает под углом  $45^\circ$  к направлению поля.



К задаче 1.2.



К задаче 1.3\*.

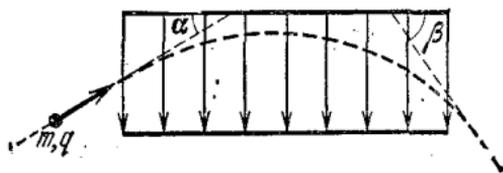
1.3\*. Область с электрическим полем в условиях задачи 1.2 движется навстречу электрону со скоростью  $2 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ . Какова должна быть минимальная ширина области электрического поля, при которой электрон не пролетает через эту область? Электрон влетает под углом  $45^\circ$  к направлению поля.

1.4. Частица массы  $m$  с зарядом  $q > 0$  влетает в плоский конденсатор, обкладками которого являются металлические сетки. Напряженность поля в конденсаторе  $E$ , расстояние между сетками  $d$ . Начальная скорость  $v$  частицы составляет угол  $\alpha$  с плоскостью первой сетки. С какой скоростью и под каким углом к плоскости второй сетки вылетит частица из конденсатора?

1.5. Протон и  $\alpha$ -частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения  $\alpha$ -частицы?



К задаче 1.4.



К задаче 1.6.

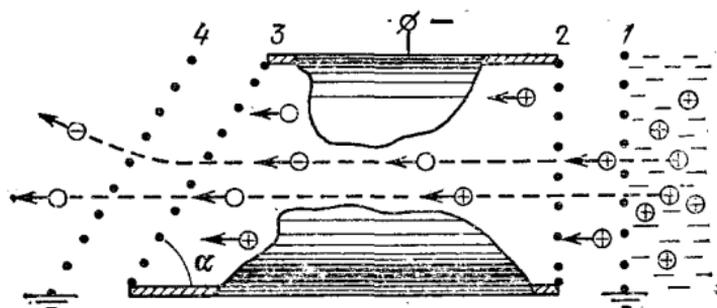
1.6. Частицы масс  $m$  с зарядами  $q$  влетают в плоский конденсатор длины  $l$  под углом  $\alpha$  к плоскости пластин, а вылетают под углом  $\beta$ . Определите первоначальную кинетическую энергию частиц, если напряженность поля внутри конденсатора  $E$ .

1.7. Пучок электронов входит со скоростью  $v$  в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Напряжение на конденсаторе  $U$ , длина пластин в направлении пучка  $l$ . Сколько электронов попадает на пластину конденсатора в единицу времени, если на входе в конденсатор пучок равномерно заполняет все расстояние между пластинами  $d$  и имеет ширину  $b$  в направлении, параллельном пластинам? Число электронов в единице объема пучка  $n$ .

1.8. Пылинка массы  $m = 10^{-12}$  кг падает между пластинами плоского конденсатора на одинаковом расстоянии от них. Из-за сопротивления воздуха скорость пылинки постоянна и равна 1 мм/с. Конденсатор подключают к источнику напряжения 490 В, и через время 10 с пылинка достигает одной из пластин. Определите заряд пылинки. Расстояние между пластинами конденсатора 0,1 м. Силу сопротивления считать пропорциональной скорости пылинки.

1.9. На рисунке изображена схема выделения из пучка разнозарядных ионов водорода. Сетки 1 и 4 заземлены. На трубку с сетками 2, 3 подан отрицательный потенциал,

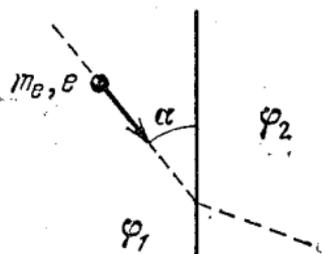
Сетка 2 вытягивает из водородной плазмы, которая находится за сеткой 1, протоны. В трубку напускается газ. Протоны, проходя через газ и захватывая электроны молекул газа, частично превращаются в нейтральные атомы водорода  $H^0$ , частично в ионы  $H^-$ . Определите, под каким углом к оси трубки будут двигаться ионы  $H^-$  за сеткой 4.  $\alpha$  — угол между плоскостями сеток 3, 4 и осью трубки.



К задаче 1.9.

тоны, проходя через газ и захватывая электроны молекул газа, частично превращаются в нейтральные атомы водорода  $H^0$ , частично в ионы  $H^-$ . Определите, под каким углом к оси трубки будут двигаться ионы  $H^-$  за сеткой 4.  $\alpha$  — угол между плоскостями сеток 3, 4 и осью трубки.

1.10\*. Электрон, движущийся со скоростью  $v_1$ , переходит из полупространства с потенциалом  $\varphi_1$  в полупространство с потенциалом  $\varphi_2$ . Под каким углом к границе раздела будет двигаться электрон во втором полупространстве, если он подлетел к ней под углом  $\alpha$ ?

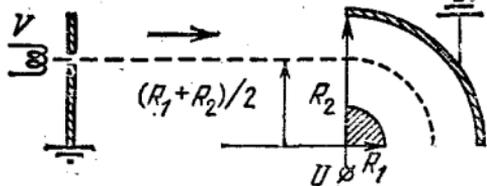


К задаче 1.10\*.

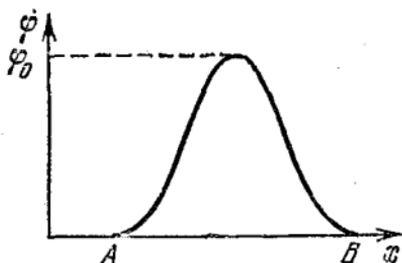
1.11. Оцените, при какой разности потенциалов между плоскими электродами зажигается газовая лампа, если энергия ионизации атомов газа  $3 \cdot 10^{-16}$  Дж. Средняя длина пробега электронов в газе 1 мм, расстояние между пластинами 1 см.

1.12\*. Определите, какова должна быть ускоряющая разность потенциалов  $V$ , чтобы электроны пошли по пути, указанному на рисунке. Радиусы обкладок цилиндрического конденсатора  $R_1$  и  $R_2$ . Принять, что поле в зазоре совпадает с полем цилиндрического конденсатора. Разность потенциалов между обкладками  $U$ .

1.13. Электрон, двигаясь прямолинейно, попадает в электрическое поле, потенциал которого имеет вид, показанный на рисунке. В точке  $B$  электрон вылетает из поля. Изменится ли скорость частицы в точке  $B$  и время пролета расстояния  $AB$ , если вместо электрона полетит позитрон?

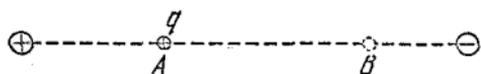


К задаче 1.12\*.



К задаче 1.13.

1.14\*. Между двумя закрепленными зарядами в точке  $A$  отпускают заряд  $q$ . Расстояние  $AB$  этот заряд проходит за время  $t$ . За какое время пройдет это же расстояние заряд  $3q$ , если его отпустить в точке  $A$ ? Массы зарядов одинаковы.



К задаче 1.14\*.



К задаче 1.15\*.

1.15\*. На рисунке показана траектория движущегося в электрическом поле тела массы  $m$  с зарядом  $q$ . Скорость тела в точке  $A$  равна  $v$ . Какой скоростью в точке  $A$  обладало бы тело массы  $M$  с зарядом  $Q$ , которое в этом же электрическом поле двигалось бы по той же траектории?

1.16. Две сферы радиуса  $R$  имеют одинаковый заряд  $Q$ , распределенный равномерно по поверхности. Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону на поверхности одной из сфер, чтобы он достиг второй сферы? Расстояние между центрами сфер  $l > 2R$ .

1.17\*. В тонкостенной, непроводящей, равномерно заряженной зарядом  $Q$  сфере массы  $M$  и радиуса  $R$  имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. В начальный момент сфера покоится. По прямой, соединяющей отверстия, из бесконечности движется со скоростью  $v$  частица массы  $m$  с зарядом  $q$ , одноименным с  $Q$ . Найдите время, в течение которого частица будет находиться внутри сферы.

1.18. Неподвижная гантель с шариками масс  $m$  расположена поперек электрического поля напряженности  $E$ . Заряды шариков гантели  $\pm q$ , расстояние

между шариками  $l$ . Определите скорость шариков в момент, когда ось гантели будет расположена вдоль поля.

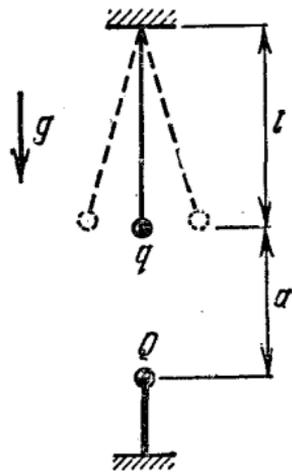
1.19. Найдите период малых колебаний гантели длины  $l$  с шариками масс  $m$ , расположенной вдоль однородного электрического поля напряженности  $E$ . Заряды шариков гантели  $\pm q$ .

1.20. Найдите период малых колебаний маятника, состоящего из шарика массы  $m$  с зарядом  $Q$ , подвешенного на нити длины  $l$ , если маятник поместить в электрическое поле напряженности  $E$ , направленное: а) вдоль поля тяжести; б) под углом  $\pi/2$  к направлению поля тяжести.

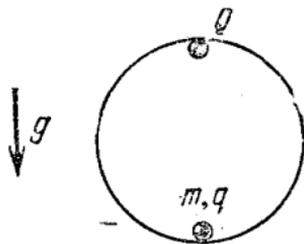
1.21. Тело массы  $M$  с зарядом  $q$  находится между двумя закрепленными зарядами  $Q$ . Расстояние от тела до каждого из этих зарядов  $l$  ( $Qq > 0$ ). Определите частоту малых колебаний тела вдоль линии, соединяющей заряды  $Q$ .

1.22. Найдите частоту малых колебаний математического маятника относительно его нижнего положения равновесия, если на расстоянии  $a$  по вертикали от равновесного положения шарика закреплен заряд  $Q$ . Длина нити  $l$ , масса шарика  $m$ , заряд  $q$ .

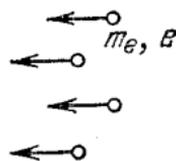
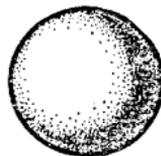
1.23\*. Найдите период малых колебаний тела массы  $m$  с зарядом  $q$  внутри гладкой сферы радиуса  $R$ , если в верхней точке сферы закреплен заряд  $Q$ .



К задаче 1.22,



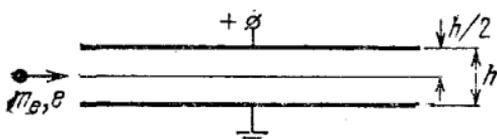
К задаче 1.23\*.



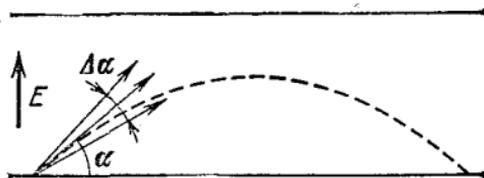
К задаче 1.24\*.

1.24\*. Электроны, обладающие на бесконечности скоростью  $v$ , падают на металлический изолированный шар радиуса  $R$ . На сколько повысится температура шара, если его теплоемкость равна  $C$ ?

1.25. Электрон ускоряется разностью потенциалов  $U$  и далее пролетает между пластинами конденсатора. Расстояние между пластинами  $h$ , длина пластин  $5h$ . Оцените, на каком расстоянии от конденсатора электрон пересечет продолжение верхней пластины, если на пластины конденсатора подано напряжение  $0,01U$ ,  $0,001U$ . Смещением электрона в вертикальном направлении внутри конденсатора пренебречь.

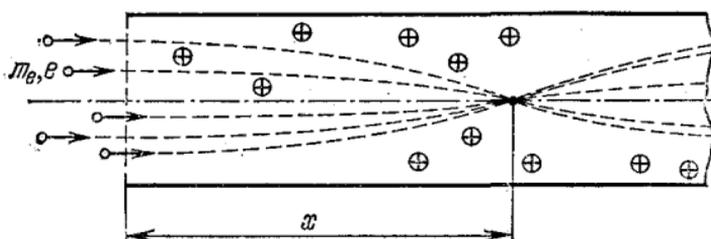


К задаче 1.25.



К задаче 1.26\*.

1.26\*. Одна из пластин плоского конденсатора испускает электроны с энергией  $K$  под углом  $\alpha$  к плоскости пластины (угловой разброс электронов  $\Delta\alpha$  мал). Электроны разворачиваются электрическим полем конденсатора и снова попадают на пластину. Каким должен быть угол  $\alpha$ , чтобы площадь, на которую попадают электроны, была минимальной? Оцените размер площади.

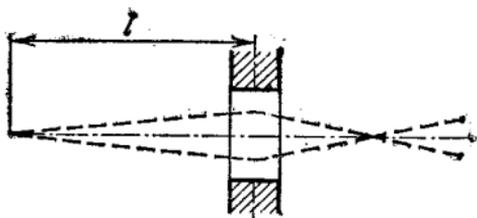


К задаче 1.27\*.

1.27\*. Электронный пучок фокусируется положительным объемным зарядом прямого ионного пучка с круглым сечением. На каком расстоянии  $x$  фокусируются электроны, если их скорость на входе  $v$ , а заряд единицы объема ионного пучка  $\rho$ ?

1.28\*. Почему система осесимметричных электродов, как правило, фокусирует узкий электронный пучок, проходящий вдоль оси?

1.29. На расстоянии  $l$  от электрической линзы испускаются под малым углом к оси линзы электроны. На каком

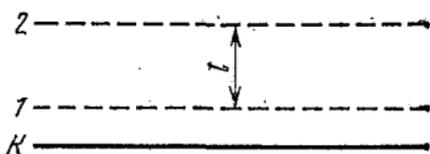


К задаче 1.29.

расстоянии соберутся эти электроны, если параллельный пучок этой же энергии собирается на расстоянии  $f$ ?

## § 7.2. Движение в переменном электрическом поле

2.1. Одна из пластин плоского конденсатора (катод) является источником электронов. Электрическое поле напряженности  $E$  между пластинами через равные промежутки времени  $\tau$  меняет знак. За какое время электрон долетит до противоположной пластины (анода)? Расстояние между катодом и анодом  $l$ .



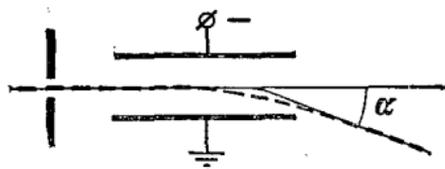
К задаче 2.2.

2.2. На рисунке изображены электроды трехэлектродной плоской лампы. Электроны вытягиваются из катода  $K$  плоской сеткой  $1$ , на которой поддерживается постоянное напряжение  $U$ . Напряжение  $\Delta U$  между сетками  $1$  и  $2$  через равные промежутки времени  $\tau$  меняет знак на противоположный. Расстояние между сетками  $1$  и  $2$  равно  $l$ .

а) Определите, какими скоростями будут обладать электроны за второй сеткой, если время  $\tau$  много меньше времени пролета электронами межсеточного промежутка. б) Определите, какими скоростями будут обладать электроны за второй сеткой, если время  $\tau$  много больше времени пролета электронами межсеточного промежутка.

2.3. В электронном генераторе используется триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно  $1$  мм. Оцените максимальную частоту колебаний, которую можно получить, используя этот генератор, если напряжение между анодом и катодом  $200$  В.

2.4. Найдите зависимость угла отклонения электрона от первоначального направления движения постоянным полем плоского конденсатора от ускоряющего напряжения  $U$ . Считать угол отклонения малым.

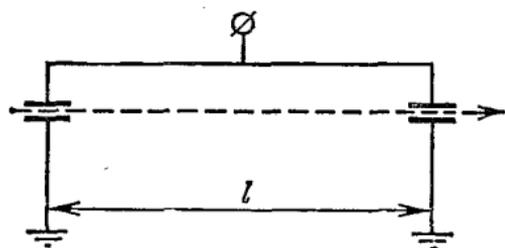


К задаче 2.4.

пятна на экране, вызванное напряжением 1 В на управляющих пластинах. Длина пластин  $l$ , расстояние между ними  $d$ , расстояние от конца пластин до экрана  $L$ . Ускоряющее напряжение  $U$ .

б) Определите чувствительность электроннолучевой трубки (в мм/В), если  $U = 10$  кВ,  $L = 30$  см,  $l = 3$  см,  $d = 5$  мм.

2.6. Тонкий пучок электронов, ускоренный напряжением  $U$ , проходит последовательно электрические поля двух



К задаче 2.6.

небольших конденсаторов, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$ . Конденсаторы соединены параллельно и присоединены к источнику переменного напряжения. При частоте изменений поля  $f$  пучок после прохождения обоих конденсаторов движется параллельно первоначальному направлению.

Определите отношение заряда электрона к его массе.

2.7. В осциллографе на горизонтальную пару пластин подано напряжение  $U_1 = U_0 \sin \omega t$ , а на вертикальную  $U_2 = U_0 \cos \omega t$ . Чувствительность осциллографа  $S = 5/U_0$  см/В. Какое изображение возникает на экране осциллографа?

2.8. При каких частотах электрических сигналов изображение на осциллограмме будет искажаться?

2.9. При подаче на пластины осциллографа высокочастотного сигнала с частотой  $\nu \gg 1/\tau$  ( $\tau$  — время пролета электрона через пластины) на осциллографе получена полоса ширины  $\delta$ . Чувствительность осциллографа в обычном режиме  $S$ . Определите амплитуду ВЧ сигнала.

2.10\*. Упруго связанный электрон имеет резонансную частоту  $\omega_0$ . Коэффициент затухания колебаний  $\gamma$ . Найдите установившуюся амплитуду вынужденных колебаний электрона в электрическом поле напряженности  $E_0 \sin \omega t$ .

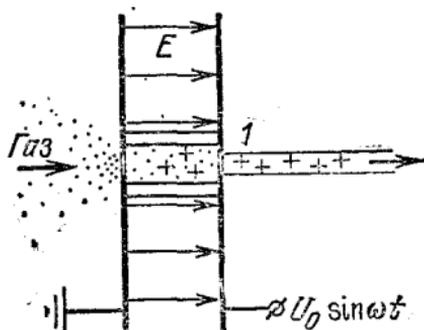
2.11\*. Определите диэлектрическую проницаемость среды, состоящей из электронов, упруго связанных в молекуле, в электрическом поле напряженности  $E_0 \sin \omega t$ . Резонансная частота  $\omega_0$ , коэффициент затухания  $\gamma \ll \omega_0$ , число молекул в единице объема  $n$ .

2.12. На свободный электрон, начиная с момента времени  $t = 0$ , действует электрическое поле напряженности  $E_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Найдите среднюю скорость электрона.

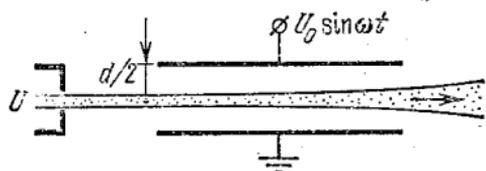
2.13\*. Какой максимальный импульс может приобрести покоящаяся первоначально частица с зарядом  $q$ , если включить электрическое поле, меняющееся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ ? Амплитуда напряженности поля  $E_0$ .

2.14\*. Какую энергию (в электронвольтах) могут приобретать электроны в электрическом поле лазерного пучка? Амплитуда напряженности поля  $E_0 = 10^{11}$  В/м, частота  $\omega = 3 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>.

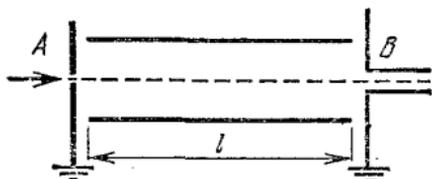
2.15\*. Простейший источник ионного пучка состоит из кварцевой трубки, находящейся внутри плоского конденсатора, на пластины которого подается переменное напряжение  $U_0 \sin \omega t$ , зажигающее газовый разряд в трубке. Из отверстия 1 летят ионы, энергия которых зависит от  $U_0$  и  $\omega$ . Объясните это явление и определите энергию ионов. Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , масса ионов  $M \gg m_e$ .



К задаче 2.15\*.



К задаче 2.16\*.



К задаче 2.17.

2.16\*. Тонкий пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов  $U$ , входит в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Определите угловой разброс электронов,

если на пластины конденсатора подается напряжение  $U_0 \sin \omega t$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$  много меньше длины конденсатора  $l$ .

2.17. Сепаратор скоростей электронного пучка состоит из плоского конденсатора длины  $l$ , перекрытого с двух сторон экранами с входным отверстием  $A$  и длинным каналом  $B$ . На пластины конденсатора подается переменное напряжение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $U_0$ .

а) Какие скорости выделяет сепаратор из электронного пучка, влетающего параллельно пластинам?

б\*) На сколько отверстие  $A$  должно быть уже канала  $B$  для того, чтобы группа электронов с выделенными скоростями прошла через канал? Расстояние между пластинами  $d$ .

### § 7.3. Взаимодействие заряженных частиц

3.1. Чему будут равны скорости двух электронов на расстоянии  $\lambda r$  ( $\lambda > 1$ ) друг от друга, если они начали разлетаться с расстояния  $r$ ?

3.2. В углах правильного квадрата со стороной  $a$  поместили четыре электрона. Под действием электрических сил электроны разлетаются. Определите их скорости на бесконечности.

3.3\*. В углах правильного квадрата со стороной  $a$  по диагоналям поместили два протона и два позитрона. Оцените отношение скоростей протонов и позитронов на бесконечности. Масса протона в 1840 раз больше массы позитрона, а заряды одинаковы.

3.4. Из бесконечности навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $v$  движутся два электрона. Определите минимальное расстояние, на которое они сблизятся.

3.5. Из бесконечности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  движутся два электрона. Определите минимальное расстояние, на которое они сблизятся.

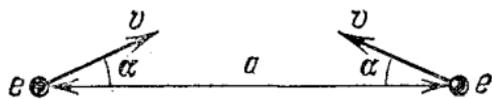
3.6. По направлению к центру неподвижного заряженного шара из бесконечности движется второй заряженный шар. Заряды распределены по поверхности шаров равномерно. Какой скоростью должен обладать второй шар, чтобы столкнуться с первым? Масса, заряд, радиус первого шара равны  $m_1, q_1, R_1$ . Параметры второго шара  $m_2, q_2, R_2$ .

3.7. Скорости  $v$  двух электронов равны по модулю, лежат в одной плоскости и при расстоянии  $a$  между электронами образуют угол  $\alpha$  с прямой, соединяющей электроны. На какое минимальное расстояние сблизятся электроны?

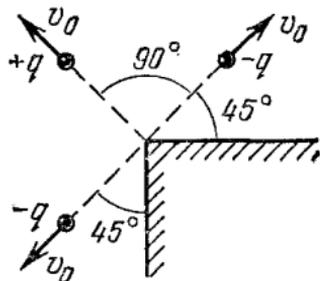
3.8\*. Два электрона находятся на расстоянии  $r$  друг от друга, причем скорость одного из них равна нулю, а скорость другого направлена под острым углом к линии, соединяющей электроны. Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии  $r$  друг от друга?

3.9\*. Из бесконечности к металлической плоскости движется тело массы  $m$  с зарядом  $q$ . Определите скорость тела в тот момент, когда оно будет находиться на расстоянии  $d$  от плоскости. Начальная скорость тела равна нулю, его размеры много меньше  $d$ .

3.10\*. Векторы скоростей трех частиц масс  $m$  изображены на рисунке. Расстояние от каждой частицы до ребра металлического двугранного угла  $a$ . Заряды частиц, летящих в противоположных направлениях, равны  $-q$ , заряд третьей



К задаче 3.7.



К задаче 3.10\*.

частицы  $+q$ . Определите скорости этих частиц на бесконечности.

3.11. В одной из моделей иона  $\text{H}_2^+$  электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости симметрии иона. Расстояние между протонами  $R$ . Найдите скорость, с которой движется электрон по орбите радиуса  $r$ .

3.12. Вокруг тяжелого ядра с зарядом  $Ze$  на расстоянии  $r$  вращается по круговой орбите электрон. Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону, чтобы он оторвался от ядра?

3.13\*. Расстояние между электроном и позитроном в позитронии  $r$ . Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону, чтобы позитроний распался?

3.14\*. Две частицы масс  $m$  и  $M$  с противоположными зарядами под влиянием взаимного электрического притяжения движутся по окружностям. Скорость частицы массы  $m$  мгновенно увеличивают в  $n$  раз, не изменяя ее направления. При каком минимальном  $n$  частицы после этого разлетятся?

3.15\*. На покоящийся позитроний налетает поток таких же частиц. Какова должна быть минимальная ско-

рость частиц в потоке, чтобы иногда происходил полный «развал» двух столкнувшихся позитрониев? Скорость орбитального движения частиц в позитронии  $\nu$ .

3.16. Возможен ли захват свободным протоном электрона (образование атома водорода), если нет излучения?

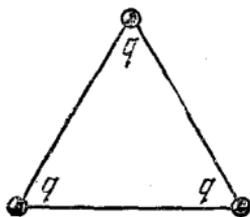
3.17\*. На покоящийся протон налетает из бесконечности другой протон со скоростью  $\nu$ . Прицельный параметр  $\rho$ . Определите, на какое расстояние они сблизятся.

3.18\*. Два заряда поместили на расстоянии  $l$  друг от друга и отпустили. Через время  $t_0$  расстояние между зарядами удвоилось. Эти же заряды поместили на расстоянии  $2l$  и отпустили. Через какое время расстояние между зарядами удвоится?

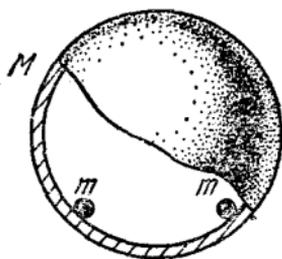
3.19. Частица массы  $m$  с зарядом  $q$  движется с большого расстояния по направлению к центру равномерно заряженной незакрепленной сферы. Радиус сферы  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $M$ . Какой скоростью должна обладать частица на бесконечности, чтобы пролететь через сферу?

3.20. Частица массы  $m$  с зарядом  $q$  со скоростью  $v_0$  приближается с большого расстояния к заряженному незакрепленному кольцу, двигаясь по его оси. Радиус кольца  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $M$ . Вначале кольцо покоилось. Чему будет равна скорость частицы, когда она будет проходить через центр кольца?

3.21\*. Частица массы  $m$  с зарядом  $q$  приближается с большого расстояния к равномерно заряженному незакрепленному шару, двигаясь по направлению к центру шара. Радиус шара  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $M$ . Вначале шар покоился. Какую наименьшую скорость должна иметь частица на бесконечности, чтобы пройти через центр шара?



К задаче 3.22\*.



К задаче 3.23.

3.22\*. Три одинаковых одноименных заряда  $q$  масс  $m$  соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими

нитями длины  $l$ . Одну из нитей пережигают. Определите максимальные скорости зарядов.

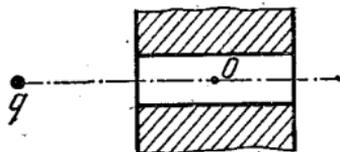
3.23. Внутри гладкой непроводящей сферы массы  $M$  и радиуса  $R$  находятся две одинаковые бусинки масс  $m$  с зарядами  $q$ . Расстояние между бусинками  $l$ . Найдите максимальную скорость сферы, если бусинки освободить. Полюем тяжести пренебречь.

3.24. Два заряженных шара масс  $m$  с зарядами  $q$  соединяют недеформированной пружиной длины  $l$  и отпускают. Спустя некоторое время возникшие колебания шаров из-за трения в пружине прекратились и шары оказались на расстоянии  $2l$  друг от друга. Определите тепло, которое выделилось в пружине.

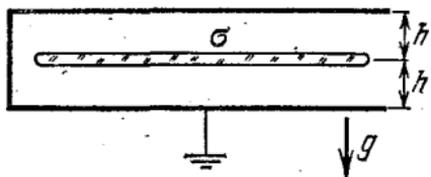
3.25. Сфера массы  $m$  с зарядом  $q$  в результате взрыва распадается на большое число одинаковых осколков, скорость которых в момент взрыва равна  $v$  и направлена вдоль радиуса  $R$  сферы. Определите максимальную скорость осколков.

3.26. На покоящийся шар радиуса  $R$  и массы  $m$  налетает из бесконечности такой же шар со скоростью  $v$ . Найдите скорости шаров после их разлета. Шары упругие, проводящие. Заряд покоящегося шара  $Q$ , движущегося  $q$ . За время удара заряды успевают перераспределиться. Удар центральный.

3.27. Две одинаковые капли ртути радиуса  $R$  летят навстречу друг другу, имея на бесконечности равные по модулю скорости  $v$ . Происходит центральный удар, в результате которого капли сливаются в одну. Определите выделившееся при ударе тепло, если: а) капли имеют одинаковые по модулю, но различные по знаку заряды  $+Q$  и  $-Q$ ; б) одна капля имеет заряд  $+Q$ , другая  $-q$ . Плотность ртути  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .



К задаче 3.28.

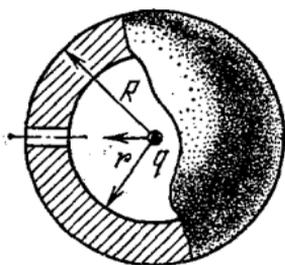


К задаче 3.29.

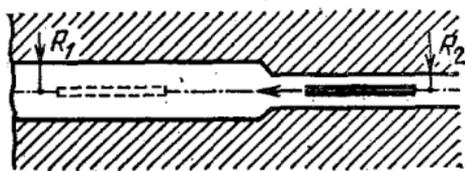
3.28. На оси цилиндрического отверстия в металлической плите на некотором расстоянии от последней находится точечный заряд  $q$ . Заряд отпускают. Опишите качественно его движение.

**3.29.** Между двумя заземленными параллельными горизонтальными металлическими плоскостями на одинаковом расстоянии  $h$  от них находится заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  тонкая пластина. Площадь пластины  $S$ , масса  $m$ . Какую минимальную скорость нужно сообщить этой пластине, чтобы она долетела до верхней плоскости? Расстояние до плоскостей  $h$  много меньше линейных размеров пластины.

**3.30.** Внутри закрепленной проводящей незаряженной сферы радиуса  $R$  имеется сферическая полость радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром шара. Какую минимальную скорость необходимо сообщить находящейся в центре частице массы  $m$  с зарядом  $q$ , чтобы, пройдя через тонкий канал в сфере, она ушла на бесконечность?



К задаче 3.30,



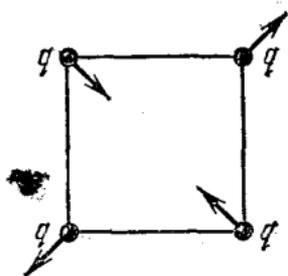
К задаче 3.31,

**3.31.** Вдоль оси длинного цилиндрического канала, вырезанного в проводнике, пролетает тонкий стержень, заряд единицы длины которого  $\rho$ . Длина стержня  $l$  много больше радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Вдали от области сужения канала справа скорость стержня  $v_0$ . Найдите скорость стержня вдали от области сужения канала слева. Масса стержня  $m$ .

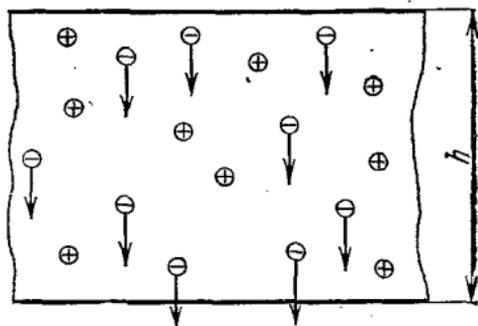
**3.32.** На горизонтальной плоскости на расстоянии  $R$  друг от друга поместили два тела масс  $m$  с зарядами  $Q$ . В результате электрического взаимодействия тела начинают двигаться по плоскости. Какое расстояние пройдет каждое из тел, если коэффициент трения тел о плоскость равен  $\mu$ ? Какие максимальные скорости приобретут тела в процессе движения?

**3.33\*.** Чему равен период малых колебаний четырех заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины  $l$  так, как показано на рисунке? На этом же рисунке показано движение тел при колебаниях. Масса и заряд каждого тела  $m$  и  $q$ .

3.34\*. Плазма состоит из электронов и тяжелых положительно заряженных ионов. Число электронов и ионов в единице объема одинаково и равно  $n$ . В слое плазмы толщины  $h$



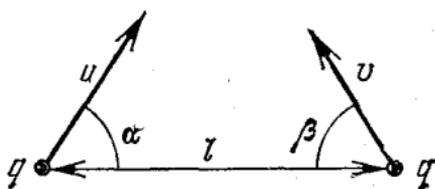
К задаче 3.33\*.



К задаче 3.34\*.

всем электронам сообщили одинаковую скорость  $v$  в направлении, перпендикулярном слою. Через какое время основная масса электронов остановится электрическими силами, если: а)  $v \gg he \sqrt{n/m_e}$ ; б)  $v \ll he \sqrt{n/m_e}$ ?  $e$ ,  $m_e$  — заряд и масса электрона. Оцените в обоих случаях частоту колебания «электронного столбика».

3.35\*. Две одинаковые частицы со скоростями  $u$  и  $v$ , составляющими углы  $\alpha$  и  $\beta$  с линией, их соединяющей, находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. Заряд каждой частицы  $q$ . Определите массы частиц, если известно, что минимальное расстояние, на которое они сближаются, равно  $a$ .



К задаче 3.35\*.

## Глава 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### § 8.1. Ток. Плотность тока. Ток в вакууме

1.1. а) В синхротроне электроны движутся по приблизительно круговой орбите длины 240 м. Во время цикла ускорения на орбите находится примерно  $10^{11}$  электронов, их скорость практически равна скорости света. Чему равен ток?

б) Определите ток, создаваемый электроном, движущимся по орбите радиуса  $0,5 \cdot 10^{-10}$  м в атоме водорода. За-

ряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

1.2. В проводе длины  $l$  полный движущийся заряд, равномерно распределенный по проводу, равен  $q$ . Определите среднюю скорость движения зарядов, если ток равен  $I$ .

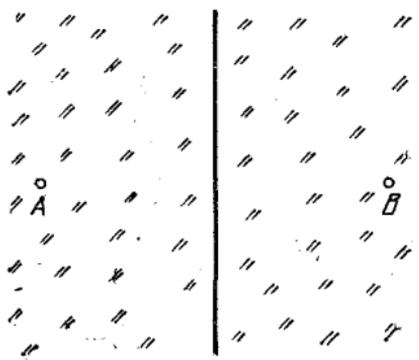
1.3. В генераторе Ван-де-Граафа прорезиненная лента ширины 30 см движется со скоростью 20 м/с. Около нижнего шкива ленте сообщается заряд, настолько большой, что по обе стороны ленты он создает поле напряженности  $1,2 \cdot 10^6$  В/м. Чему равен ток?

1.4. Ток в проводнике создается движением электронов. Докажите, что соударения между электронами не меняют ток.

1.5. Если предположить, что число электронов проводимости в металле равно числу атомов, то какой будет скорость дрейфа электронов проводимости в серебряной проволоке диаметра 1 мм, по которой идет ток 30 А? Определите скорость дрейфа для полупроводника, у которого число электронов проводимости в единице объема меньше в  $10^8$  раз.

1.6. Листочек фольги, покрытый  $\beta$ -радиоактивным веществом, испускает с единицы площади  $\nu$  электронов в единицу времени. Их скорость по модулю равна  $v$ , любое направление скорости равновероятно. Найдите плотность тока.

1.7. В струе  $\beta$ -радиоактивных пылинок, имеющих скорость  $u$ , число электронов в единице объема равно  $n_e$ . Модуль скорости электрона относительно испустившей его пылинки равен  $v$ , а все направления скоростей равновероятны. Определите вектор плотности электронного тока в струе.



К задаче 1.8.

1.8. К точке  $A$  среды подводится ток  $I$ , а от точки  $B$  отводится ток  $I$ . Считая, что каждая точка независимо создает стационарное сферически симметричное поле тока, определите плотность тока в плоскости симметрии точек  $A$  и  $B$ .

Каков полный ток через эту плоскость? Как изменится решение, если и к точке  $B$  подводится ток  $I$ ?

1.9. В рентгеновской трубке пучок электронов с плотностью тока  $0,2 \text{ А/мм}^2$  попадает на участок скошенного торца металлического стержня. Площадь этого участка  $10^{-4} \text{ м}^2$ , а ось пучка образует угол  $30^\circ$  с поверхностью торца. Определите ток в стержне.

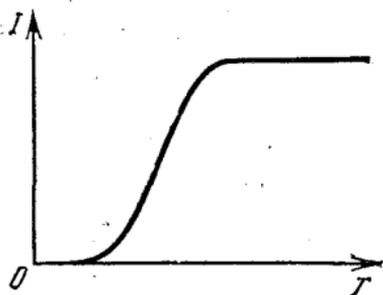
1.10. В электронный пучок с плотностью тока  $1 \text{ мкА/см}^2$  поместили металлический шар радиуса  $10 \text{ см}$ . Определите время, за которое шар зарядится до потенциала  $220 \text{ В}$ . Принять, что этот потенциал достаточно мал в сравнении с кинетической энергией электронов, поэтому можно пренебречь действием его на электронный пучок.

1.11. Скорости электронов в электронном пучке круглого сечения  $10^{10} \text{ см/с}$ , радиус пучка  $3 \text{ см}$ , полный ток в пучке  $100 \text{ А}$ . Определите напряженность электрического поля на поверхности пучка. Оцените, на каком расстоянии радиус пучка под действием собственного электрического поля увеличится в 2 раза.

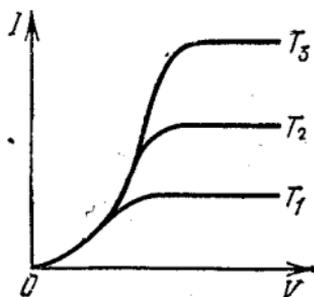
1.12. Плотность тока в пучке электронов  $j$ , скорость электронов  $v$ . Определите плотность заряда в пучке.

1.13\*. Между параллельными сетками создано тормозящее поле напряженности  $E$ . По нормали к передней сетке падает широкий пучок электронов, у которого на входе плотность заряда  $\rho_0$ , а скорость  $v_0$ . Пренебрегая взаимодействием самих электронов, найдите распределение заряда между сетками в случае, если: а) скорость электронов достаточно велика, так что они не возвращаются; б) электроны отражаются назад полем. Начиная с каких  $\rho_0$  во втором случае следует учитывать поле заряда между сетками?

1.14. В вакуумном диоде два электрода: катод, с которого «испаряются» электроны (его специально подогревают),



К задаче 1.14.



К задаче 1.15.

и анод, на который попадают вылетевшие с катода электроны. Объясните, почему диод можно использовать как

выпрямитель. На рисунке показано, как при постоянном напряжении между анодом и катодом ток зависит от температуры катода. Объясните качественно эту зависимость.

1.15. На рисунке приведены три графика зависимости тока от напряжения на электродах диода, снятые при разных температурах катода. Какая кривая принадлежит низкотемпературному катоду, а какая высокотемпературному? Почему все три кривые совпадают при малых напряжениях?

1.16. Когда ток в диоде далек от насыщения, то на внешней поверхности катода образуется тонкий слой электронов, из которого большинство электронов возвращается на катод, притягиваясь наведенным зарядом, а часть диффундирует в противоположную сторону и увлекается полем к аноду. Почему на границе этого слоя поле можно считать нулевым?

1.17\*. Катод и анод в вакуумном диоде — две параллельные металлические пластины с зазором 0,5 см между ними. Площадь каждой пластины 10 см<sup>2</sup>. При напряжении 5000 В между катодом и анодом идет ток 1 А. Считая электрическое поле между пластинами однородным, определите плотность заряда в зависимости от расстояния до катода  $x$ . Примите начальную скорость электронов равной нулю. Можно ли в рассматриваемом случае пренебречь действием на электроны их пространственного заряда?

1.18\*. Для учета влияния пространственного заряда в плоском диоде с расстоянием между анодом и катодом  $d$  нужно установить зависимость плотности заряда  $\rho$ , потенциала  $\phi$  и скорости электронов  $v$  от расстояния до катода  $x$ . Скорость и напряженность поля на катоде при токах, далеких от насыщения, можно считать нулевыми. В случае, когда катод заземлен, ищите потенциал в виде  $\phi = V(x/d)^n$ . Определите отсюда  $\rho(x)$  и  $v(x)$ , а затем, используя условие стационарности тока, найдите показатель степени  $n$ . Получите точные выражения для плотности тока и тока через диод при заданном напряжении  $V$ . Площадь электродов  $S$ .

1.19\*. Анод и катод диода имеют произвольную форму. Пусть при определенном напряжении на диоде в режиме, далеком от насыщения, между электродами установится плотность заряда  $\rho(x, y, z)$ . Во сколько раз увеличится плотность этого заряда, если напряжение на диоде увеличить в  $n$  раз? Во сколько раз увеличится ток диода?

## § 8.2. Проводимость. Сопротивление. Источники э.д.с.

2.1\*. а) Определите удельную проводимость металла, если число электронов проводимости в единице объема  $n_e$ , время между последовательными соударениями электрона с ионами кристаллической решетки  $\tau$ . Заряд электрона  $e$ , масса  $m_e$ . Сразу после удара любое направление скорости электрона равновероятно.

б) Оцените среднее время между последовательными соударениями электрона проводимости с ионами кристаллической решетки меди. Удельная проводимость меди  $6 \cdot 10^7$  См/м, плотность  $8,9$  г/см<sup>3</sup>, молекулярная масса  $63,5$ . Число электронов проводимости и число атомов меди в единице объема одинаково.

2.2\*. Контейнер, наполненный воздухом при комнатной температуре и атмосферном давлении, освещается пучком рентгеновских лучей, ионизирующих небольшую часть молекул. Отрицательными ионами являются молекулы  $O_2^-$ , «захватившие» электрон. Размер контейнера  $10 \times 10 \times 2$  см<sup>3</sup>; две стенки  $10 \times 10$  см<sup>2</sup> сделаны из металла, а остальные — из изолирующего материала. К проводящим стенкам приложено напряжение  $1000$  В, вызывающее ток  $1,5$  мкА. Какова удельная проводимость этого слабоионизованного газа? Принять, что все молекулы имеют одинаковую молекулярную массу, среднюю скорость  $500$  м/с и длину свободного пробега  $10^{-7}$  м. Считая число положительных и отрицательных однократно заряженных ионов одинаковым, определите долю ионизованных молекул газа.

2.3. Под действием постоянного электрического поля в проводнике устанавливается постоянный ток, т. е. постоянная средняя скорость, а не постоянное ускорение. Это означает обязательное наличие силы, действующей на носители тока со стороны вещества. Выразите эту силу через удельную проводимость вещества  $\lambda$ , плотность носителей тока  $n_e$ , скорость их дрейфа  $v$  и заряд  $e$ .

2.4. Проволочное медное кольцо радиуса  $0,1$  м раскрутили до угловой скорости  $10^3$  рад/с. Определите, какой ток пойдет через кольцо при равномерном замедлении вращения до остановки в течение  $10^{-3}$  с. Сечение проволоки  $0,5$  см<sup>2</sup>, удельная проводимость меди  $6 \cdot 10^7$  См/м.

2.5. Средняя скорость направленного движения зарядов в проводах не больше нескольких сантиметров в се-

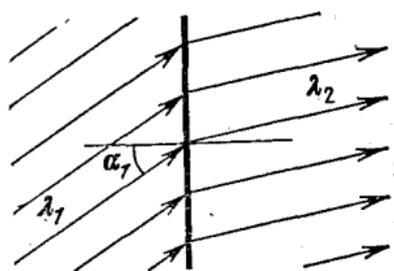
кунду. Почему же настольная лампа зажигается сразу после нажатия кнопки?

2.6\*. По таблице теплопроводности и удельной проводимости ряда металлов при  $0^\circ\text{C}$  определите их отношение. Чем объяснить полученный результат? Попробуйте вычислить отношение теплопроводности к удельной проводимости теоретически. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  Дж/К.

К задаче 2.6\*

Металлы	$\kappa$ , Вт/(м·К)	$\lambda$ , $10^7$ См/м	$\rho$ , $10^{-8}$ Ом·м
Медь	385	6,0	1,7
Алюминий	210	3,2	3,1
Железо	60	0,91	11
Свинец	34	0,5	20

2.7. Плотность тока в проводнике  $j$ , его удельная проводимость  $\lambda$ . Определите напряженность электрического поля и разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , если ток идет под углом  $\alpha$  к направлению прямой  $AB$ . Найдите разность потенциалов, если линия тока соединяет точки  $A$  и  $B$  и является полуокружностью. Расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $l$ .



К задаче 2.9.

2.8. Плотность тока  $j$  перпендикулярна плоскости раздела двух сред с удельными проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Найдите поверхностную плотность заряда на этой плоскости.

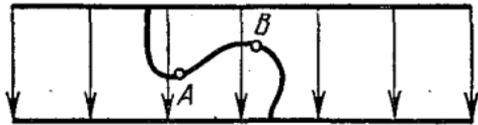
2.9. На плоскость раздела двух сред с удельными проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  из первой среды идут линии тока, образуя угол  $\alpha_1$  с нормалью к плоскости. Какой угол образуют с этой нормалью линии тока во второй среде? Чему равна поверхностная плотность заряда на границе раздела сред?

2.10. Удельная проводимость среды меняется по закону  $\lambda = \lambda_0 a/(a + x)$ . Определите плотность заряда при стационарной плотности тока  $j$ , направленной вдоль оси  $x$ .

2.11\*. Внутри металла с удельной проводимостью  $\lambda_0$  имеется небольшое включение с удельной проводимостью  $\lambda$ .

Это включение изменяет электрическое поле, которое в отсутствие включения было бы однородно. Качественно опишите изменение поля на больших расстояниях от включения. Ток стационарен.

**2.12.** В центре проводящего шара с удельным сопротивлением  $\rho$  оказался избыточный заряд  $Q_0$ . Как будет меняться заряд в центре со временем? Где в конце концов окажется заряд? Для решения воспользуйтесь теоремой Гаусса. Означает ли появление поверхностного заряда, что заряды из центра переместились на поверхность? Для меди удельное сопротивление  $1,7 \cdot 10^{-6}$  Ом·см. Какой постоянной времени для процесса перераспределения заряда это соответствует?

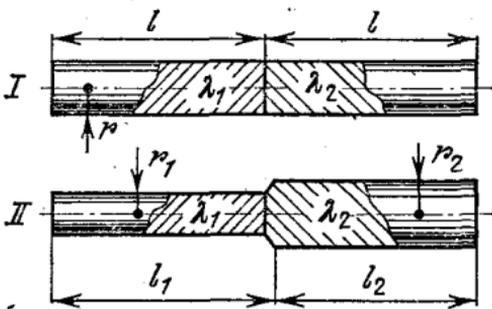


К задаче 2.13.

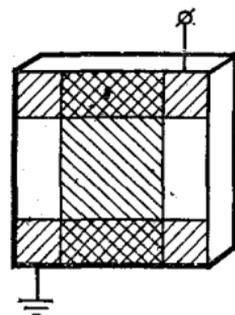
**2.13.** Пластины заряженного конденсатора соединены тонким изогнутым проводником. Как направлен ток между точками  $A$  и  $B$ ? Как это согласовать с направлением поля в конденсаторе?

**2.14.** Цилиндр из проводящего вещества с удельной проводимостью  $\lambda$  имеет длину  $l$  и поперечное сечение  $S$ . Разность потенциалов между его торцами равна  $U$ . Определите ток через сечение цилиндра. Каково его сопротивление?

**2.15.** Из металлов с удельными проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  изготовлены длинные стержни. Между концами стержней



К задаче 2.15.



К задаче 2.16.

поддерживается разность потенциалов  $U$ . Определите полное сопротивление каждого из стержней и токи в них. При каких условиях можно считать токи параллельными осям стержней?

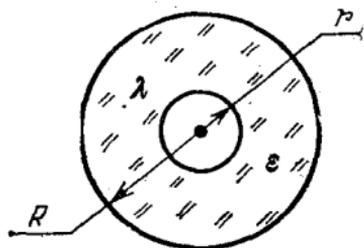
**2.16.** Экспериментатор хочет приготовить слой алюминия толщины 500 нм, напыляя в вакууме алюминий на чистую

поверхность стекла. Сначала он наносит довольно толстый слой, оставляя в центре чистую полоску, закрытую маской. Потом, используя другую маску, он напыляет на стекло поперек зазора полоску той же ширины. Одновременно толстые слои используются как выводы для измерения сопротивления. При каком сопротивлении напыление следует остановить, если удельное сопротивление алюминия при комнатной температуре равно  $2,83 \cdot 10^{-6}$  Ом·см?

2.17. В среде с малой удельной проводимостью  $\lambda$  находится металлический шар радиуса  $a$ . Определите ток, стекающий с шара, если его потенциал равен  $V$ . Если такой шар подсоединить изолированным проводом к громоотводу, то каким будет сопротивление заземления?

2.18. а) Два электрода — металлические шары диаметра 30 см — висят в море на изолированных кабелях на глубине 60 м. Расстояние между шарами 300 м. Удельная проводимость морской воды 4 См/м. Оцените сопротивление между шарами.

б) Системы, одной из частей которых являются зонды из проводника, опущенные в слабопроводящую среду, важны в физических, геофизических и многих биологических исследованиях. Придумайте эксперименты, в которых можно использовать зонды.



К задаче 2.19.

2.19. Радиусы обкладок сферического конденсатора  $r$  и  $R$ , заряды  $\pm q$ . Найдите сопротивление и ток утечки в этом конденсаторе, если между обклад-

ками находится вещество с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и малой удельной проводимостью  $\lambda$ .

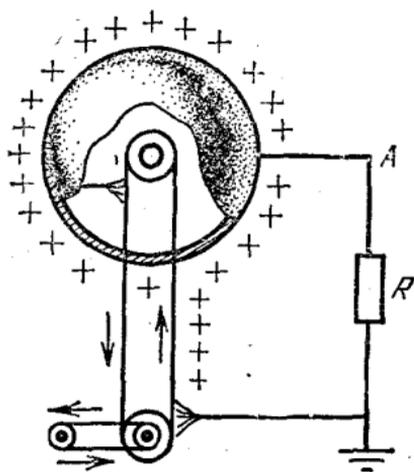
2.20\*. После заполнения конденсатора средой с удельной проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  сопротивление между его зажимами оказалось равным  $R$ . Найдите емкость конденсатора. Зависит ли результат от формы пластин?

2.21\*. Пластинку из слабопроводящего материала вставляют между двумя электродами. При каком положении пластинки ее сопротивление минимально?

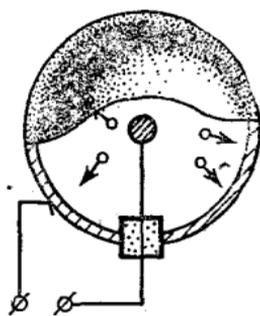
2.22. При рассмотрении токов в веществе кинетическую энергию носителей тока, связанную с их упорядоченным движением, не учитывают. Оцените кинетическую энергию одного электрона (в электронвольтах) при токе  $I = 100$  А

в проволочке из металлического натрия сечения  $S = 1 \text{ мм}^2$ . Число электронов проводимости в единице объема  $n_e = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

2.23. В генераторе Ван-де-Граафа носители заряда, «приклеившиеся» к непроводящей ленте, переносятся против поля. Внутри шара заряды снимаются с ленты сильным полем, локализованным на контактной щетке. Необходимо для движения ленты энергию может поставлять электродвигатель, бензиновый мотор или человек, вращающий ручку. Пусть полный заряд на ленте  $q$ , ее длина  $l$ . Определите потенциал  $\phi$  в точке  $A$  в двух случаях: а) ленту двигают с постоянной скоростью  $u$  независимо от сопротивления  $R$ ; б) ленту двигают, прикладывая к ней постоянную силу  $F$ .



К задаче 2.23.

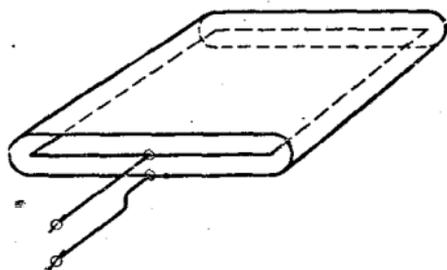


К задаче 2.24.

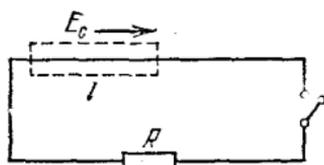
2.24. Электрическая «атомная» батарея представляет собой металлическую сферу с изолированным от нее кусочком  $\beta$ -радиоактивного вещества. Число атомов, распадающихся в единицу времени, равно  $\nu$ . Энергия вылетевших электронов  $W$ . Определите напряжение на разомкнутых клеммах батареи. При каких сопротивлениях нагрузки напряжение на батарее можно считать таким же? Какой наибольший ток может давать эта батарея? До каких сопротивлений нагрузки батарею можно считать генератором тока?

2.25\*. Источник тока состоит из тонкой пластины радиоактивного вещества, окруженной проводящим корпусом. Зазор между корпусом и пластиной много меньше линейных размеров пластины. Как зависит ток от напряже-

ния на источнике  $U$ , если ток короткого замыкания  $I_0$  и энергия вылетающих из пластины электронов  $eU_0$ ? Электроны вылетают изотропно.

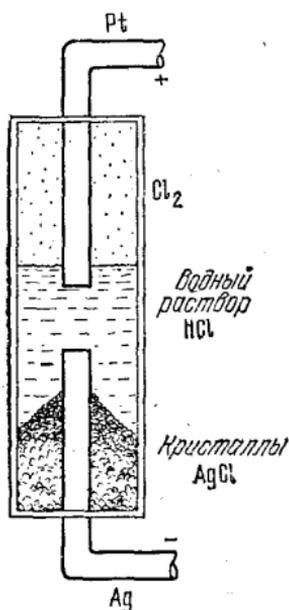


К задаче 2.25\*.



К задаче 2.26.

2.26. Не углубляясь в вопрос о происхождении «сторонних» сил, постройте график потенциала разомкнутой и замкнутой цепи с сопротивлением  $R$ . На участке длины  $l$  сторонняя сила, отнесенная к единице заряда, равна  $E_c$ , вне этого участка — нулю. Как изменится график, если участок  $l$  имеет сопротивление  $r$ ? Какую энергию на единицу заряда передает источник сторонних сил на участке  $l$ ?



К задаче 2.27.

2.27. В химическом элементе идут реакции:  $\text{Ag}(\text{т}) + \text{Cl}^- = \text{AgCl}(\text{т}) + e$  на отрицательном серебряном электроде и  $\frac{1}{2} \text{Cl}_2 + e = \text{Cl}^-$  на положительном платиновом электроде (платина в реакцию не вступает). При очень малом токе на каждый моль образующегося  $\text{AgCl}$  выделяется внутри элемента 3280 кал тепла. При реакции  $\text{Ag} + \frac{1}{2} \text{Cl}_2 = \text{AgCl}$  на каждый моль образующегося  $\text{AgCl}$

выделяется 29 380 кал. Найдите э. д. с. элемента, т. е. энергию, сообщаемую элементом единице прошедшего заряда (1 кал  $\approx 2,6 \cdot 10^{19}$  эВ).

2.28. При растворении в  $\text{H}_2\text{SO}_4$  цинка выделяется тепло  $4,40 \cdot 10^5$  Дж/моль, на выделение меди из  $\text{CuSO}_4$  требуется затратить энергию  $2,34 \cdot 10^5$  Дж/моль. Казалось бы, э. д. с. элемента Даниэля можно рассчитать, приравнявая разность энергий протекшему заряду, умноженному на э. д. с. Вычислите э. д. с. таким образом с точностью до 1%.

Однако истинное значение э. д. с. оказывается бóльшим (при нормальной температуре оно равно 1,09 В). В чем дело? Откуда берется энергия?

2.29. Элемент Даниэля дает ток 0,1 А в течение 8 ч. Найдите расход цинка и медного купороса  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  (в молях). Постоянная Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

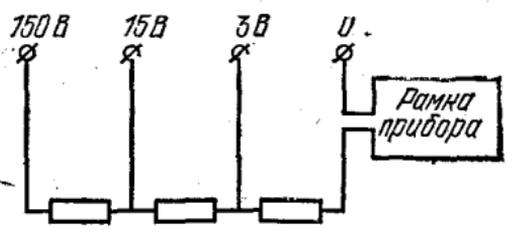
2.30\*. При разрядке конденсатора с зарядом  $q$  через электролитическую ванну с подкисленной водой выделяется масса  $m$  гремучего газа. Масса выделяющегося при электролизе вещества зависит только от прошедшего заряда. Значит, разрядив конденсатор через  $k$  последовательно соединенных ванн, получим массу  $km$  гремучего газа. Сжигая этот газ, получим большое количество энергии. При достаточно большом  $k$  эта энергия превзойдет первоначальную энергию заряженного конденсатора! Следовательно, в чем-то наши рассуждения ошибочны. Найдите эту ошибку.

2.31. Полная плотность тока в электролитах является суммой тока положительных ионов и тока отрицательных ионов:  $j = e_+ n_+ v_+ + e_- n_- v_-$ , где  $e$  — заряд иона,  $v_+$  и  $n_+$  — скорости положительных и отрицательных ионов и их число в единице объема. Почему масса вещества, выделившегося на катоде, пропорциональна полному току, а не току  $e_+ n_+ v_+$ ?

2.32\*. Противо-э. д. с. одной электролитической ванночки  $\mathcal{E}$ . Имеется конденсатор, заряженный до напряжения  $U$  ( $U \gg \mathcal{E}$ ). Сколько одинаковых ванночек нужно соединить последовательно, чтобы, разрядив конденсатор, выделить на них максимальную массу металла из раствора соли?

### § 8.3. Электрические цепи

3.1. Шкала вольтметра (см. рис.) имеет 150 делений. Вольтметр имеет четыре клеммы, рассчитанные на измерение напряжения до 3, 15 и 150 В. Стрелка прибора отклоняется на 50 делений при прохождении через него тока 1 мА. Каково внутреннее сопротивление прибора при включении его на различные диапазоны?



К задаче 3.1.

3.2. Какой шунт нужно присоединить к гальванометру со шкалой 100 деле-

ний, ценой деления 1 мкА и внутренним сопротивлением 180 Ом, чтобы им можно было измерять токи до 1 мА?

3.3. Вольтметр со шкалой на 100 В имеет внутреннее сопротивление 10 кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерять этим прибором, если присоединить к нему добавочное сопротивление 90 кОм?

3.4. Как будут реагировать приборы на перемещение движков реостатов в направлении стрелок в схемах а)—в) и на замыкание ключей в схемах г)—е)? Внутренние сопротивления генераторов очень малы \*).

3.5. а) Требуется определить напряжение на сопротивлении  $R$ . Для этого к концам сопротивления подключают вольтметр. Какая относительная ошибка будет допущена, если показания вольтметра принять за то напряжение, которое имело место до его включения? Сила тока в цепи поддерживается постоянной. Сопротивление вольтметра  $r$ .

б) Для измерения тока в цепи с сопротивлением  $R$  включен амперметр. Какая относительная ошибка будет допущена, если считать, что включение амперметра не изменило тока? Напряжение на концах цепи поддерживается постоянным. Сопротивление амперметра  $r$ .

3.6. Вольтметр включен параллельно сопротивлению  $r_1 = 4$  Ом и показывает 34,8 В. Напряжение на клеммах источника тока поддерживается постоянным и равным 100 В. Найдите отношение тока, идущего через вольтметр, к току, идущему через сопротивление  $r_2 = 6$  Ом.

3.7\*. От сети с постоянным напряжением 120 В нужно питать прибор, рассчитанный на напряжение 20 В; при этом требуется, чтобы при изменении сопротивления прибора от 100 до 90 Ом напряжение на нем менялось только на 1 %. Можно ли это сделать с помощью делителя напряжения? Какие сопротивления плеч нужно выбрать?

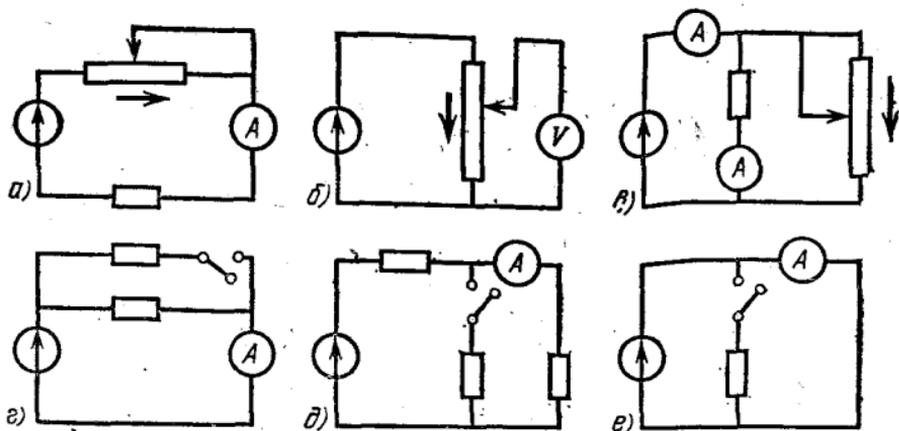
3.8. Чему равна разность потенциалов между клеммами (см. рис.)? Что покажет амперметр, если его подключить к клеммам \*\*)?

3.9. В мосте Уитстона сопротивления подбирают таким образом, что чувствительный гальванометр, подключенный к точкам  $A$  и  $B$ , показывает нуль. Считая  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $r$  известными, определите сопротивление  $r_x$ . Если поменять

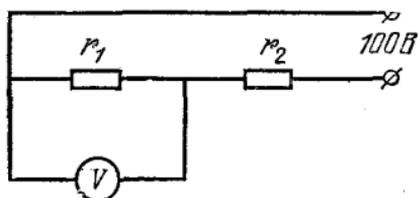
---

\*) Кружком со стрелкой на схемах обозначен генератор. Стрелка указывает направление тока генератора.

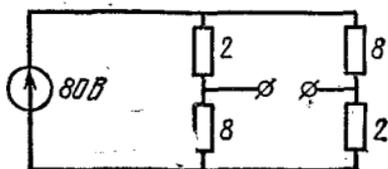
\*\*) Сопротивления на рисунках приведены в омах без указания единиц на схемах.



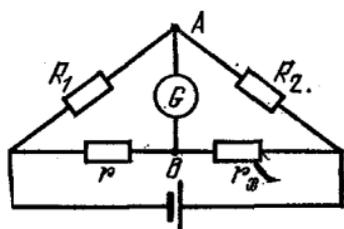
К задаче 3.4.



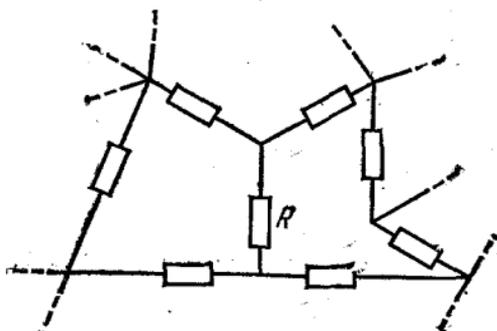
К задаче 3.6.



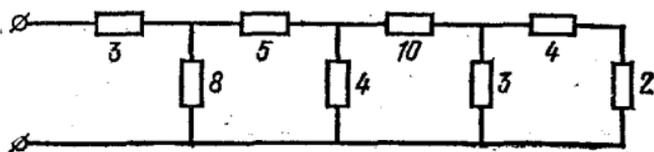
К задаче 3.8.



К задаче 3.9.



К задаче 3.10\*.



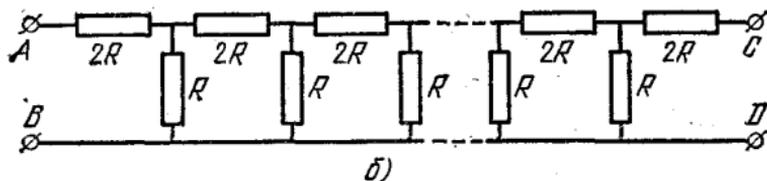
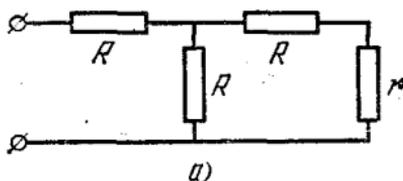
К задаче 3.11.

местами батарею и гальванометр, то снова получится мо-  
стовая схема. Сохранится ли баланс в новой схеме?

3.10\*. Часть схемы состоит из неизвестных сопротивле-  
ний. Как, имея амперметр, вольтметр, батарею и соедини-  
тельные провода, измерить сопротивление  $R$ , не разрывая  
ни одного контакта в схеме?

3.11. Чему равно сопротивление между клеммами в  
схеме, изображенной на рисунке?

3.12\*. а) Каким должно быть сопротивление  $r$ , чтобы  
входное сопротивление между клеммами тоже было  $r$ ?

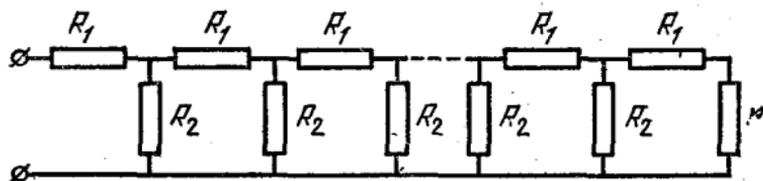


К задаче 3.12\*.

б) Какое сопротивление  $r$  нужно присоединить к клем-  
мам  $C$  и  $D$ , чтобы сопротивление всей цепочки между клем-  
мами  $A$  и  $B$  не зависело от числа элементарных ячеек?

в) Ток от  $A$  к  $B$  равен  $I$  (см. схему б)). Определите токи  
в  $n$ -й ячейке, если цепочка сопротивлений бесконечна.  
Чему равно сопротивление такой цепочки?

3.13\*. Атенюатор представляет собой специальный де-  
литель напряжения, схема которого представлена на ри-

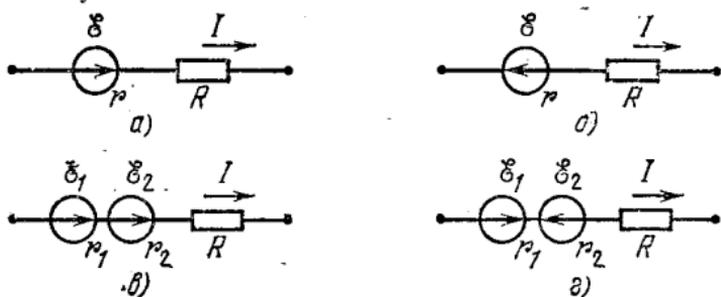


К задаче 3.13\*.

сунке. Каковы должны быть сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , чтобы  
на каждом следующем вертикальном сопротивлении напря-  
жение было в 10 раз меньше, чем на предыдущем?

3.14. В сопротивлении  $R$  на единицу прошедшего зар-  
яда рассеивается энергия  $IR$  независимо от направления

тока  $I$ . Генератор на единицу прошедшего через него заряда передает энергию (э. д. с.)  $\mathcal{E}$ , если направление тока совпадает с направлением напряженности сторонних сил, и забирает энергию  $\mathcal{E}$ , если их направления противоположны. При прохождении тока через генератор на внутрен-

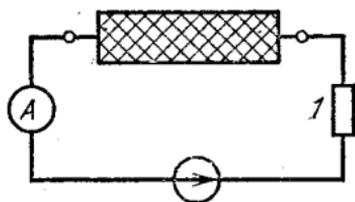


К задаче 3.14.

нем сопротивлению тоже происходит рассеяние энергии. Используя энергетические соображения, определите напряжения на участках цепей, приведенных на рисунке.

**3.15.** Батарея с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнута на сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , включенные параллельно друг другу. Найдите ток через батарею и ток через сопротивление  $R_1$ . Как изменится ток через сопротивление  $R_1$ , если отсоединить сопротивление  $R_2$ ? Как меняется этот ток в случае  $r \ll R_1, R_2$ ?

**3.16.** Батарея, замкнутая на сопротивление 10 Ом, дает ток 3 А; замкнутая на сопротивление 20 Ом, дает ток 1,6 А. Найдите э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи.



К задаче 3.17.

**3.17.** К ящику с двумя клеммами подключили амперметр, сопротивление 1 Ом и источник постоянного напряжения 5 В. Амперметр показал ток 1 А. Когда включили другой источник напряжения 20 В, амперметр показал ток 2 А. Что находится внутри ящика?

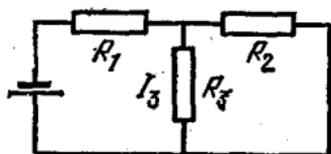
**3.18.** Идеальным генератором напряжения называется такой генератор, когда при любой нагрузке напряжение на нем одинаково. Идеальным генератором тока называется генератор, создающий одинаковый ток при любой нагрузке. Какой смысл имеет утверждение: «У идеального генера-

тора тока бесконечное сопротивление, а у идеального генератора напряжения — нулевое? Реальный генератор напряжения теряет энергию на внутреннем сопротивлении, он эквивалентен идеальному генератору напряжения с последовательно присоединенным сопротивлением. Реальный генератор тока имеет конечное сопротивление утечки, он эквивалентен идеальному генератору тока с параллельно присоединенным сопротивлением (шунтом). Изобразите схему генератора тока с внутренним шунтом, эквивалентного генератору с напряжением 120 В и внутренним сопротивлением 20 Ом \*).

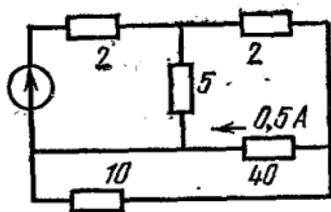
3.19. При одной нагрузке генератор отдает ток 4 А при напряжении 120 В, а при другой нагрузке — ток 2 А при напряжении 160 В. Найдите параметры эквивалентных схем генератора тока и генератора напряжения.

3.20. Через аккумулятор в конце зарядки течет ток 4 А. При этом напряжение на его клеммах 12,6 В. При разрядке того же аккумулятора током 6 А напряжение составляло 11,1 В. Найдите ток короткого замыкания.

3.21. В схеме даны сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и ток  $I_3$  через сопротивление  $R_3$ . Определите токи через сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  и напряжение на батарее.



К задаче 3.21.



К задаче 3.22.

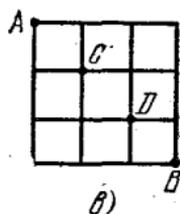
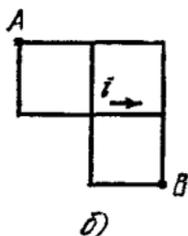
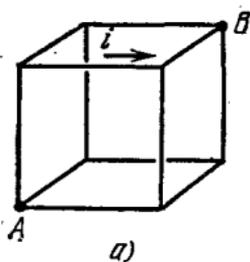
3.22. В схеме указаны сопротивления (в омах) и ток через одно из сопротивлений. Определите все токи и напряжение генератора.

3.23. Используя симметрию схем, решите следующие задачи:

а) Стороны проволочного куба имеют одинаковые сопротивления  $r$ . Ток в одном ребре  $i$ . Определите разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , сопротивление между этими точками и полный ток от  $A$  к  $B$ .

\*) Напряжением генератора называют разность потенциалов на разомкнутом выходе генератора,

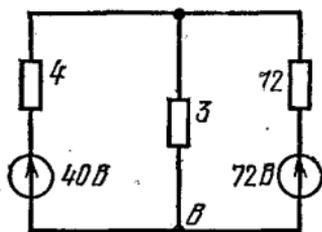
б) Определите токи во всех сопротивлениях, полный ток от  $A$  к  $B$  и полное сопротивление между  $A$  и  $B$ . Сторона каждой ячейки имеет сопротивление  $r$ , и ток на одном из сопротивлений равен  $i$ .



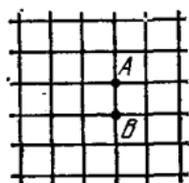
К задаче 3.23.

в) Каждая сторона квадрата имеет сопротивление  $r$ . Определите сопротивление между точками  $A$  и  $B$ . Чему равно сопротивление между точками  $C$  и  $D$ ?

3.24. При решении задач с несколькими источниками э. д. с. возникает искушение сначала рассчитать токи, создаваемые каждым источником э. д. с., потом найти полный ток как сумму этих токов. Этот способ вполне законен, если при расчетах принимать во внимание внутренние сопротивления источников. Он называется методом суперпозиции. Определите, используя этот метод, ток между узлами  $A$  и  $B$ .



К задаче 3.24.



К задаче 3.25\*.

3.25\*. а) Если в бесконечной сетке с квадратными ячейками через один узел  $A$  подводят ток  $i$ , а через соседний узел  $B$  отводят ток  $i$ , то какой ток идет по сопротивлению, соединяющему узлы  $A$  и  $B$ ? Каково эквивалентное сопротивление всей цепи между этими узлами, если сопротивление стороны ячейки  $r$ ? Каково эквивалентное сопротивление между соседними узлами кубической сетки, если сопротивление ребра куба  $r$ ?

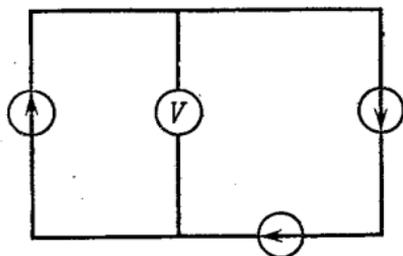
б) Определите сопротивление между узлами двумерной бесконечной сети с ячейками в виде правильных шестиугольников. Сторона каждой ячейки имеет сопротивление  $r$ .

3.26. Две батареи с э. д. с.  $\mathcal{E}_1 = 20$  В,  $\mathcal{E}_2 = 30$  В и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 4$  Ом,  $r_2 = 60$  Ом соединены параллельно. Каковы параметры  $\mathcal{E}$  и  $r$  генератора, которым можно заменить эти батареи без изменения тока в нагрузке?

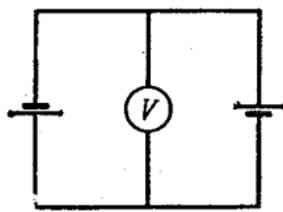
3.27. Две батареи с одинаковыми внутренними сопротивлениями соединены так, что э. д. с. образовавшегося источника напряжения равна  $\mathcal{E}$ . Э. д. с. одной из батарей  $\frac{3}{2}\mathcal{E}$ . Нарисуйте все возможные схемы соединения. Для каждой из схем определите э. д. с. второй батареи.

3.28. Три одинаковые батареи, соединенные параллельно, подключены к внешнему сопротивлению. Как изменится ток на этом сопротивлении, если переключить полярность одной из батарей?

3.29. Что покажет вольтметр, если генераторы одинаковы? Какой ток идет в цепи, если напряжение каждого генератора 1,5 В, а внутреннее сопротивление 2 Ом?



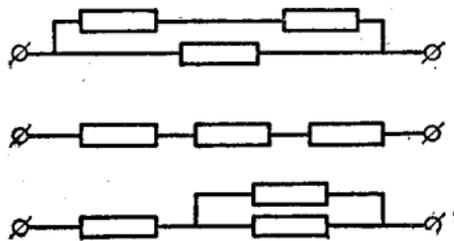
К задаче 3.29.



К задаче 3.30.

3.30. Найдите показания вольтметра, если сопротивление одной батареи 3 Ом, а другой 1 Ом. Э. д. с. каждой батареи 1,5 В.

3.31. Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода в чайнике закипает через 6 мин. Через какое время закипит вода той же массы и той же начальной температуры при соединениях секций, показанных на рисунке?



К задаче 3.31.

3.32. Имеется проволока с сопротивлением  $R$ , через которую можно пропускать

наибольший ток  $I$  без риска ее пережечь. Какую наибольшую мощность может иметь электрический нагреватель, изготовленный из этой проволоки, при включении в сеть с напряжением  $U \ll IR$ ? Проволоку можно разрезать на куски и соединять последовательно и параллельно.

3.33. Две электроплитки, включенные в сеть параллельно, потребляют мощность  $N_1$ . Какую мощность будут потреблять эти электроплитки, включенные последовательно, если одна из электроплиток потребляет мощность  $N$ ?

3.34. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из  $n$  последовательно соединенных банок с внутренними сопротивлениями  $r$ , внутреннее сопротивление одной из банок резко возросло до  $10r$ . Считая э. д. с. всех банок одинаковыми, определите, при каких сопротивлениях нагрузки мощность, выделяемая на нагрузке, не изменится при коротком замыкании поврежденной банки.

3.35. Аккумулятор замыкается один раз внешней цепью с сопротивлением  $R_1$ , другой раз — с  $R_2$ . При этом количество тепла, выделяющееся во внешней цепи в единицу времени, одинаково. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

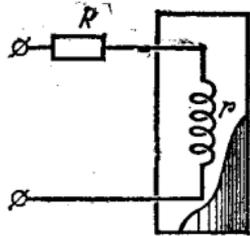
3.36. Сравните напряжения на клеммах, а также мощности, развиваемые во внешней цепи: батареей из 50 элементов, соединенных последовательно и имеющих каждый э. д. с. 2 В, если внешняя цепь имеет сопротивление элемента 0,2 Ом, и электрофорной машиной, создающей на шаровых кондукторах разность потенциалов 100 кВ и обладающей внутренним сопротивлением  $10^8$  Ом, если она подключена к внешней цепи с сопротивлением  $10^5$  Ом. Как изменятся токи и мощности во внешней цепи, если сопротивления внешних цепей удвоятся?

3.37. От источника напряжения 10 кВ требуется передать на расстояние 5 км мощность 500 кВт; допустимая потеря напряжения в проводах 1%. Каково минимальное сечение медного провода? Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в 100 раз в той же линии при передаче той же мощности?

3.38. Как зависит мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении, от тока  $I$ ? Напряжение генератора  $\mathcal{E}$ , внутреннее сопротивление  $r$ . Какому сопротивлению соответствует максимальная мощность?

3.39. Какую наибольшую мощность можно получить от генератора с э. д. с. 100 В и внутренним сопротивлением

20 Ом? Какую мощность можно получить от того же генератора при к. п. д. 80 %? Если максимально допустимый ток через генератор составляет 0,1 от тока короткого замыкания, то какую наибольшую мощность можно получить от генератора, не опасаясь его порчи?

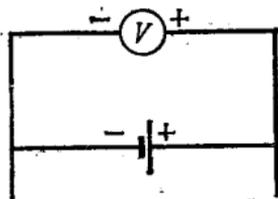


К задаче 3.40\*.

3.40\*. В термостат нужно подводить тепло с постоянной скоростью. Во время опыта в термостате меняется температура, что вызывает изменение сопротивления нагревательной спирали. Нужно сделать рассеиваемую на сопротивлении спирали  $r$  мощность почти не меняющейся при малых изменениях  $r$ . Постройте

график зависимости мощности от  $r$  и определите, используя этот график, при каком соотношении  $R$  и  $r$  достигается желаемая нечувствительность мощности.

3.41. Зарядка аккумулятора с э. д. с.  $\mathcal{E}$  осуществляется зарядной станцией, напряжение в сети которой  $U$ . Внутреннее сопротивление аккумулятора  $r$ . Определите полезную мощность, расходуемую на зарядку аккумулятора, и мощность, идущую на выделение тепла в нем. Превышает ли полезная мощность тепловую мощность аккумулятора? Почему при быстрой зарядке аккумулятора нужно специально заботиться об отводе тепла?



К задаче 3.42.

3.42. Батарея с э. д. с. 4 В и внутренним сопротивлением 1 Ом входит в состав неизвестной цепи. К полюсам

батареи подключен вольтметр, он показывает напряжение +6 В. Определите количество тепла, выделяющегося в единицу времени на внутреннем сопротивлении батареи.

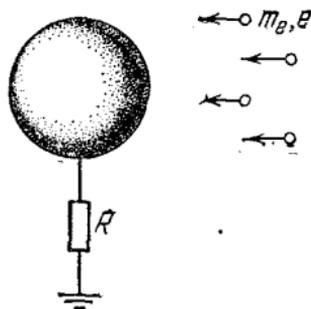
3.43. В сферическом конденсаторе емкости  $C$  поддерживается постоянное напряжение  $U$ . Определите количество тепла, выделившееся в единицу времени на конденсаторе, если удельная проводимость среды, заполняющей конденсатор,  $\lambda$ , а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \approx 1$ .

3.44. Зонд, представляющий собой медную сетку, заземлен через сопротивление  $R$  и помещен в пучок электронов, скорость которых на большом расстоянии от зонда равна  $v$ . Определите тепло, выделяющееся в единицу времени из-за бомбардировки зонда электронами, если ток заземления равен  $I$ .

§.45\*. Шар радиуса  $a$  через сопротивление  $R$  соединен с землей. Из бесконечности на шарик налетает поток электронов со скоростью  $v$  и числом частиц в единице объема  $n_e$ . Определите предельный заряд шара. Считать скорость частиц большой (подумайте, по сравнению с какой величиной).



К задаче 3.44.

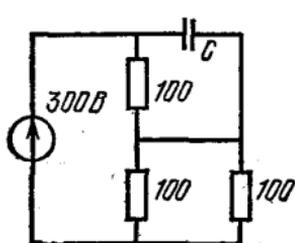


К задаче 3.45\*.

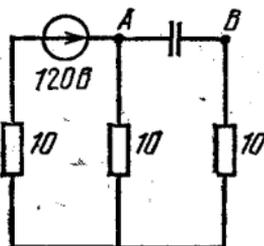
3.46\*. Поток тепла от спирали электроплитки линейно зависит от разности температур спирали и комнатного воздуха:  $N = \kappa (T - T_0)$ . Сопротивление спирали тоже линейно зависит от этой разности:  $R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$ , где  $R_0$  — сопротивление спирали при комнатной температуре. До какой температуры нагреется спираль током  $I$ ?

### § 8.4. Конденсаторы и нелинейные элементы в электрических цепях

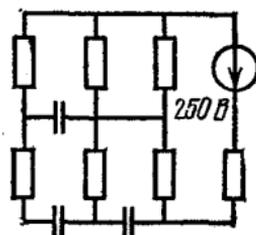
4.1. Схемы цепей постоянного тока с конденсаторами даны на рисунке.



а)



б)



в)

К задаче 4.1.

а) Определите заряд конденсатора емкости  $C = 4$  мкФ в стационарном режиме.

б) Чему равно напряжение между точками  $A$  и  $B$  в стационарном режиме? Что покажет вольтметр с внутренним сопротивлением  $5 \text{ кОм}$ , если его подключить к  $A$  и  $B$ ?

в) Определите стационарные напряжения на всех конденсаторах, если все сопротивления одинаковы.

4.2. Для измерения напряжений применяются вольтметры двух типов: электромагнитные, измеряющие напряжения по току, проходящему через рамку прибора, и электростатические, грубая схема которых дана на рисунке. Через изолирующую пробку к двум параллельным пластинам подходит провод. Пластины удерживаются на месте пружиной жесткости  $k$ . Потенциал проводящей коробочки  $\varphi_B$ . Определите потенциал  $\varphi_A$ , если растяжение пружины  $x$ . В нерастянутом состоянии пружины расстояние от пластин до стенок коробочки  $l$ ; площадь пластин  $S \gg l^2, x^2$ .

4.3. Определите разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ . Каким вольтметром ее следует измерять? Какие заряды будут на конденсаторах при присоединении электромагнитного вольтметра? Почему качество электромагнитного вольтметра определяется его большим внутренним сопротивлением, а электростатического вольтметра — его малой емкостью?

4.4\*. Найдите количество тепла, выделившееся на каждом сопротивлении после замыкания ключа. Один конденсатор вначале был заряжен до напряжения  $U$ , а второй не был заряжен.

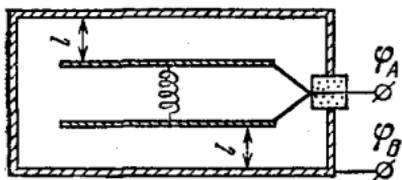
4.5. Найдите количество тепла, выделившееся на сопротивлении, если при поочередном изменении емкости конденсаторов от  $C$  до  $C/2$  затрачивается работа  $A$ . Первоначальный заряд каждого конденсатора  $q$ .

✓4.6. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа? Какое количество тепла выделится на сопротивлении?

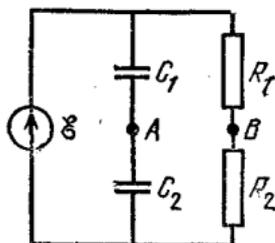
4.7. Диод имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на рисунке. При напряжении  $U_0$  диод открывается. Конденсатор вначале не заряжен. Какое количество тепла выделится на сопротивлении после замыкания ключа?

4.8. Аккумулятор заряжается от конденсатора с первоначальным напряжением  $U$ . Какое количество химической энергии запасается в нем после замыкания ключа? Какое количество тепла выделится при этом?

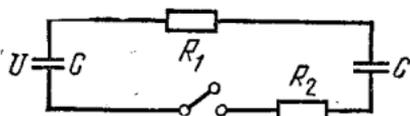
4.9\*. Батарея с э. д. с.  $\mathcal{E}$  состоит из  $n$  последовательно соединенных одинаковых элементов. Как зарядить конден-



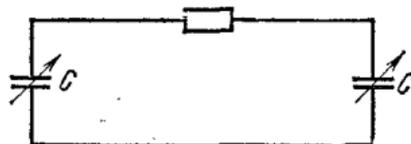
К задаче 4.2.



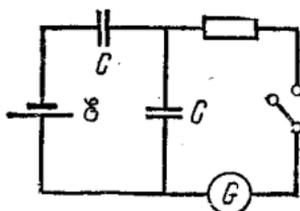
К задаче 4.3.



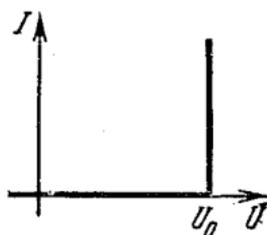
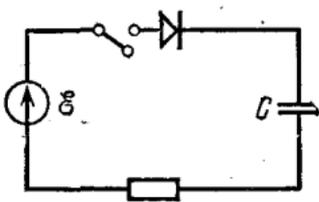
К задаче 4.4\*.



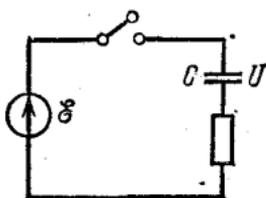
К задаче 4.5.



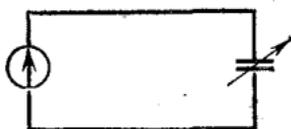
К задаче 4.6.



К задаче 4.7.



К задаче 4.8.



К задаче 4.10\*.

сатор емкости  $C$ , чтобы потери составляли наименьшую возможную долю запасенной энергии? Какова эта доля?

4.10\*.  $C$  и  $q$  — начальные емкость и заряд конденсатора. Емкость конденсатора начинают менять со временем так, что ток в цепи остается постоянным и равным  $I$ . Вычислите мощность, потребляемую от генератора, и сравните ее с мощностью, поглощаемой конденсатором. Почему сравниваемые величины отличаются?

4.11. В цепи течет постоянный ток. Ключ размыкают. Через какое время заряд на конденсаторе изменится на  $1/1000$  первоначальной величины?

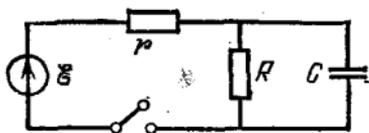
4.12\*. Ключ замыкают поочередно с каждым из контактов на очень малые одинаковые промежутки времени. За время каждого включения изменение заряда конденсатора очень мало. Какой заряд окажется на конденсаторе после большого числа переключений? Определите заряд конденсатора в случае, когда время замыкания первой цепи в  $k$  раз меньше времени замыкания второй цепи.

4.13\*. На схему подаются периодические прямоугольные импульсы напряжения  $U_0$ . Продолжительность импульса  $\tau$ , период повторения  $T$ . Импульсы подаются через диод, который можно считать идеальным ключом. Определите напряжение, установившееся на конденсаторе, если за каждый период напряжение на нем изменяется очень мало.

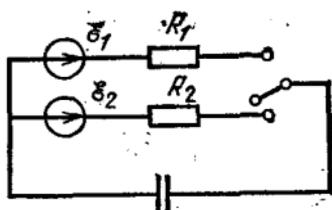
4.14\*. Конденсатор емкости  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$ , после замыкания ключа разряжается через сопротивление  $R$ . Как связана скорость изменения напряжения  $dU/dt$  с напряжением на конденсаторе? Чему равно напряжение на конденсаторе и ток в цепи через время  $\tau$  после замыкания ключа?

4.15. Подключение неоновой лампы осуществляется с помощью схемы, показанной на рисунке. После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Когда напряжение на конденсаторе достигнет некоторого значения  $U$ , лампа загорится. Минимальное напряжение на лампе, при котором она еще горит, 80 В; при этом ток через лампу 1 мА. Э. д. с. батареи 120 В,  $80 \text{ В} < U < 120 \text{ В}$ . При каком сопротивлении лампа будет стационарно гореть (не будет гаснуть)?

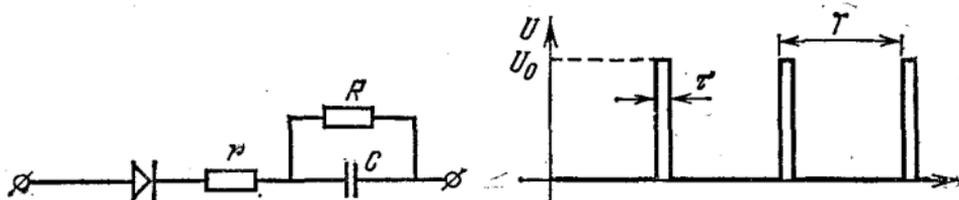
4.16\*. Как зависит частота генератора, изображенного на рисунке, от напряжения  $U$ ? Неоновая лампа загорается при напряжении  $U_1$  и гаснет при напряжении  $U_0 < U_1$ . Сопротивлением горячей лампы пренебречь,



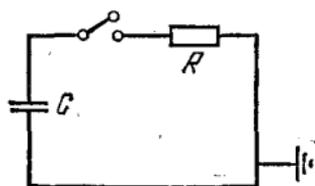
К задаче 4.11.



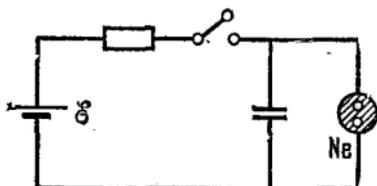
К задаче 4.12\*.



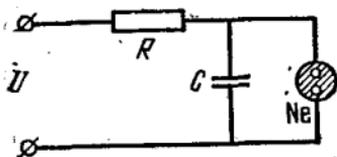
К задаче 4.13\*.



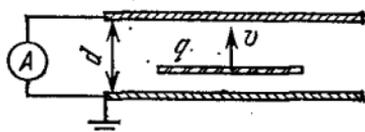
К задаче 4.14\*.



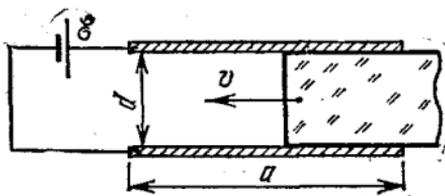
К задаче 4.15.



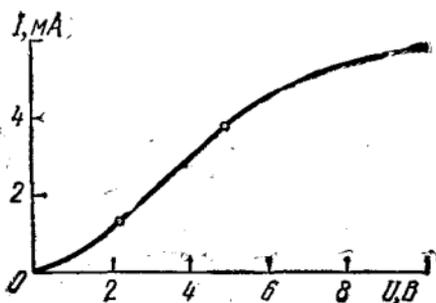
К задаче 4.16\*.



К задаче 4.17\*.



К задаче 4.18.



К задаче 4.20\*.

4.17\*. а) Между пластинами конденсатора с постоянной скоростью  $v$  движется равномерно заряженная тонкая пластина с зарядом  $q$ . Определите ток в цепи, если конденсатор замкнут накоротко, а расстояние между обкладками  $d$ .

б) Изменится ли результат, если между обкладками конденсатора движется точечная заряженная частица? Как в этом случае, измеряя ток в цепи, определить ее заряд и скорость?

4.18. В плоский конденсатор с размерами пластин  $a \times b$  с постоянной скоростью  $v$  вдвигают пластину толщины  $d$ , равной расстоянию между пластинами конденсатора. Какой ток идет в цепи? Э. д. с. батареи  $\mathcal{E}$ , диэлектрическая проницаемость вещества пластины  $\epsilon$ .

4.19. При положительных напряжениях  $V$  на диоде ток через диод  $I = \alpha V^2$ ; при отрицательных напряжениях ток нулевой. Найдите ток в цепи, если этот диод через сопротивление  $R$  подключен к батарее с э. д. с.  $\mathcal{E}$ .

4.20\*. Диод с вольт-амперной характеристикой, изображенной на рисунке, подсоединили к батарее с э. д. с. 6 В через сопротивление 1,5 кОм. Определите ток в цепи. При каких сопротивлениях диод перестает работать на прямолинейном участке характеристики?

## Глава 9. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 9.1. Индукция магнитного поля. Действие магнитного поля на ток

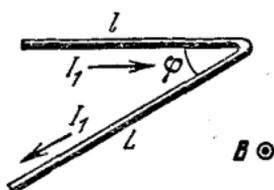
1.1. На линейный проводник длины 10 см, расположенный перпендикулярно магнитному полю, действует сила 15 Н, если ток в проводнике равен 1,5 А. Найдите индукцию магнитного поля.

1.2. На заряд 1 Кл, движущийся со скоростью 1 м/с, в магнитном поле действует сила 10 Н. Заряд движется под углом  $30^\circ$  к вектору индукции магнитного поля. Чему равен модуль этого вектора?

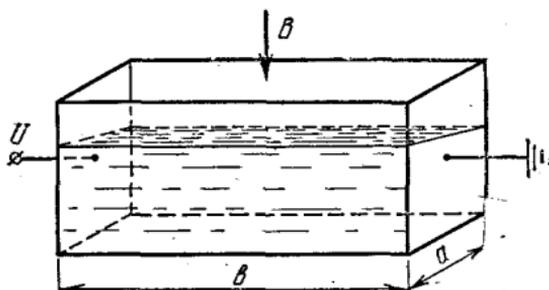
1.3. На линейный проводник длины  $l$ , расположенный перпендикулярно магнитному полю, действует сила  $F$ , если ток в проводнике равен  $I$ . С какой силой магнитное поле будет действовать на:

а) изогнутый под углом  $\varphi$  проводник длины  $l + L$ , если плоскость изгиба перпендикулярна магнитному полю, а ток в проводнике равен  $I_1$  \*);

б\*) полуокружность радиуса  $R$ , через которую течет ток  $I_2$ , если плоскость окружности перпендикулярна магнитному полю?



К задаче 1.3а.



К задаче 1.4\*.

1.4\*. В прямоугольную кювету, две противоположные стенки которой металлические, а остальные сделаны из изолятора, налит до уровня  $h$  электролит, плотность которого  $\rho$ , удельная проводимость  $\lambda$ . К металлическим стенкам приложено напряжение  $U$ , и вся кювета помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукции  $B$ . Определите разность уровней жидкости около передней и задней стенок кюветы. Длина кюветы  $a$ , ширина  $b$ .

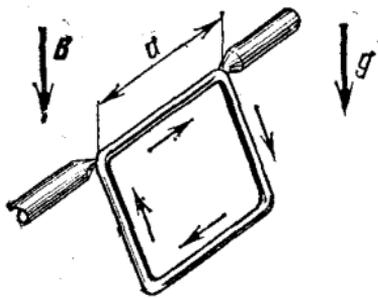
1.5. В однородном магнитном поле (линии индукции вертикальны) на двух тонких невесомых нитях подвешен горизонтально проводник массы  $0,16$  кг и длины  $80$  см. Концы проводника при помощи гибких проводов, находящихся вне поля, подсоединены к источнику тока. Найдите угол, на который отклонятся нити подвеса от вертикали, если по проводнику течет ток  $2$  А, а индукция магнитного поля  $1$  Тл.

1.6. Квадратная рамка с током со стороной  $a$  (масса рамки  $m$ ) закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле индукции  $B$ . Угол наклона рамки к горизонту  $\alpha$ . Найдите ток в рамке.

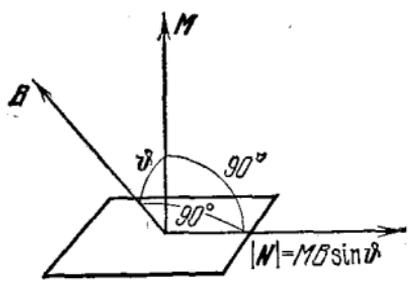
1.7. а) В однородном магнитном поле поместили прямоугольную рамку с током  $I$ . Индукция магнитного поля  $B$

\*) На рисунках кружок с точкой означает, что индукция магнитного поля (или ток) направлена на нас, кружок с крестиком — от нас.

параллельна плоскости рамки. Площадь рамки  $S$ . Докажите, что момент сил, действующий на рамку, равен  $N = = BM$ , где  $M = IS$  — магнитный момент рамки.

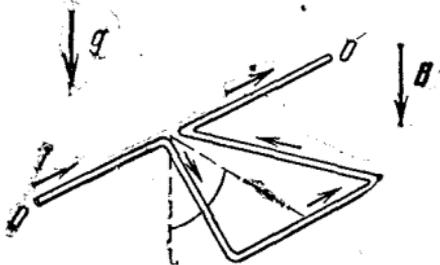


К задаче 1.6.



К задаче 1.76.

б) Докажите, что момент сил, действующий на рамку в задаче а), в случае, когда вектор  $B$  направлен так, как изображено на рисунке, равен  $N = [B \times M]$ , где  $M$  — магнитный момент рамки, модуль которого равен  $IS$ , а направление перпендикулярно площади  $S$ .



К задаче 1.8.

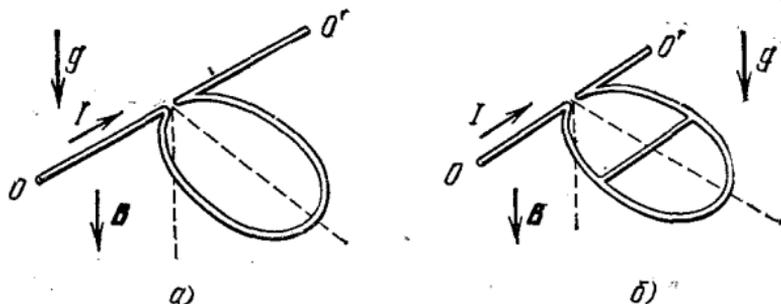
в\*) Докажите, что момент сил, действующий на любую плоскую рамку с током в однородном магнитном поле индукции  $B$ , равен  $N = = [B \times M]$ .

1.8. Треугольная проволочная рамка с током  $I$  может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ , проходящей через вершину треугольника. Масса единицы длины проволоки  $\rho$ . Рамка находится в поле тяжести и в магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости треугольника от вертикали.

1.9. а) Проволочная рамка в виде окружности с током  $I$  может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ . Масса единицы длины проволоки  $\rho$ . Рамка находится в поле тяжести и в магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости окружности от вертикали.

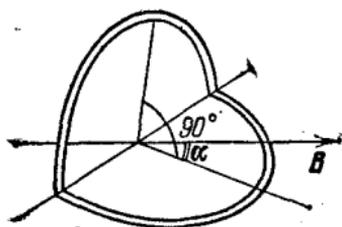
б\*) Проволочная рамка в виде окружности имеет по диаметру проволочную перемычку, параллельную горизонтальной оси  $OO'$ , вокруг которой может вращаться

рамка. Массы единицы длины рамки и перемычки одинаковы и равны  $\rho$ . Ток, входящий в рамку, равен  $I$ . Рамка находится в поле тяжести и магнитном поле индукции  $B$ , направленном параллельно полю тяжести. На какой угол отклонится рамка от вертикали?

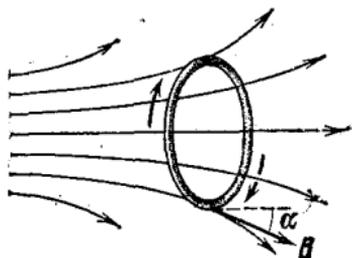


К задаче 1.9.

1.10. Виток радиуса  $R$  согнули по диаметру под прямым углом и поместили в однородное магнитное поле индукции  $B$  так, что одна из плоскостей витка оказалась расположенной под углом  $\alpha$  к направлению индукции  $B$ . Ток в витке  $I$ . Определите момент сил, действующий на виток.



К задаче 1.10.



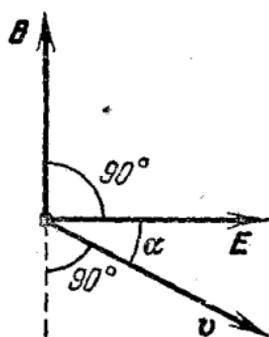
К задаче 1.11.

1.11. Кольцо радиуса  $R$ , по которому циркулирует ток  $I$ , поместили в неоднородное аксиально-симметричное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Индукция магнитного поля  $B$ , действующего на ток, направлена под углом  $\alpha$  к оси симметрии поля. Масса кольца  $m$ . Определите ускорение кольца.

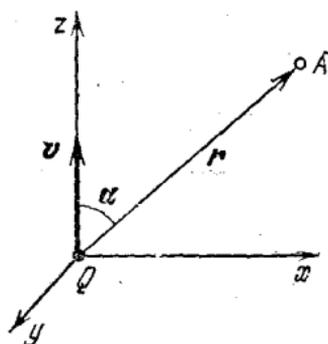
1.12\*. Проводящее кольцо поместили в магнитное поле, перпендикулярное его плоскости. По кольцу циркулирует ток  $I$ . Если проволока кольца выдерживает на разрыв нагрузку  $F$ , то при какой индукции  $B$  кольцо разорвется? Радиус кольца  $R$ . Действием магнитного поля тока  $I$  на кольцо пренебречь.

## § 9.2. Магнитное поле движущегося заряда. Индукция магнитного поля линейного тока \*)

2.1. Электрическое поле напряженности  $E$ , движущееся со скоростью  $v$  (\*\*), создает магнитное поле, индукция которого  $B = K [v \times E]$  ( $|B| = KvE \sin \alpha$ ). Коэффициент  $K$  равен  $\mu_0 \epsilon_0$  в СИ и  $1/c$  в СГС, где  $c$  — скорость света. Пользуясь этим свойством движущегося электрического поля, докажите, что магнитное взаимодействие двух движущихся зарядов слабее их электрического взаимодействия.



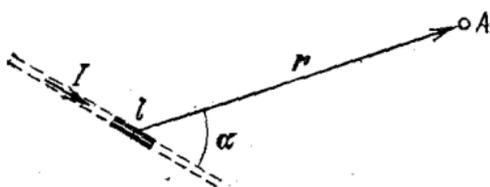
К задаче 2.1.



К задаче 2.2.

2.2. Пользуясь формулой предыдущей задачи, определите в точке  $A$  индукцию магнитного поля, создаваемого зарядом  $Q$ , движущимся со скоростью  $v$ .

2.3. Определите индукцию магнитного поля элемента тока длины  $l$ , по которому течет ток  $I$ , в точке  $A$  на расстоянии  $r \gg l$  от этого элемента. Радиус-вектор  $r$  образует с элементом тока угол  $\alpha$ .



К задаче 2.3.

2.4. а) Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечной нити, заряженной

с линейной плотностью  $\rho$ , в случае, когда нить движется в продольном направлении со скоростью  $v$ .

б) Определите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течет ток  $I$ .

\*) Если в задаче не указано значение магнитной проницаемости среды, считать ее равной единице.

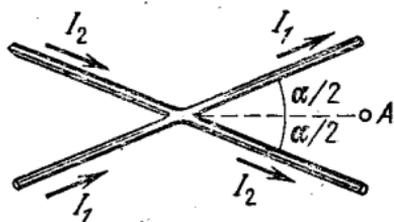
\*\*) Если специально не оговорено в задаче, считать  $v \ll c$ .

2.5. а) На каждый метр прямого длинного провода со стороны такого же параллельного провода действует сила  $2 \cdot 10^{-7}$  Н. Расстояние между проводами 1 м. Токи в проводах одинаковы. Какой ток течет по проводам?

б) На каждый метр прямого длинного провода с током 1 А со стороны второго провода с тем же током действует сила  $2,5 \cdot 10^{-7}$  Н. Расстояние между проводами 1 м. Провода находятся в магнитной среде. Чему равна магнитная проницаемость этой среды?

2.6. По четырем длинным прямым параллельным проводникам, проходящим через вершины квадрата (сторона квадрата 30 см) перпендикулярно его плоскости, текут одинаковые токи 10 А, причем по трем проводникам токи текут в одном направлении, а по четвертому — в противоположном. Определите индукцию магнитного поля в центре квадрата.

2.7. Найдите индукцию магнитного поля в точке А на расстоянии  $l$  от точки пересечения двух прямых проводов с токами  $I_1$  и  $I_2$ .

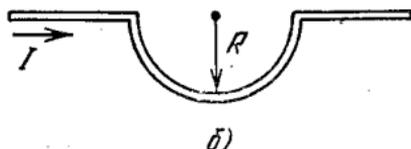
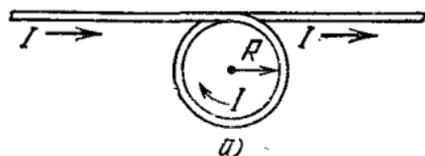


К задаче 2.7.



К задаче 2.8.

2.8. Три прямых провода с токами  $I$ ,  $I/4$  и  $3I/4$  лежат в одной плоскости и соединены в точке  $O$ . Найдите индукцию магнитного поля на прямой, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно всем трем проводам.



К задаче 2.9.

2.9. а) Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии  $h$  от центра кольца.

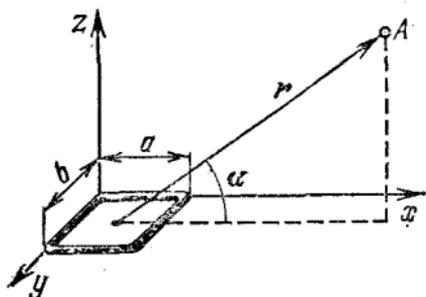
б) Определите индукцию магнитного поля в центре полукольца.

2.10\*. Чему равна индукция магнитного поля в центре квадратной рамки, по которой циркулирует ток  $I$ ? Длина стороны рамки  $a$ .

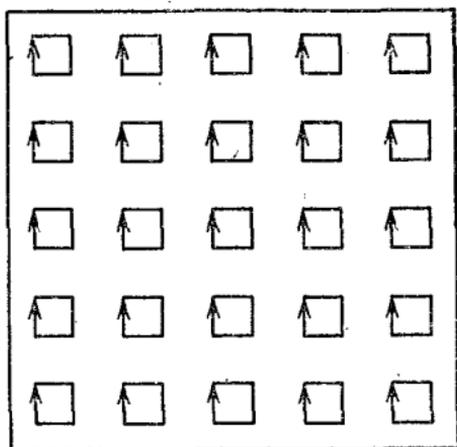
2.11\*. а) Определите индукцию магнитного поля прямоугольной рамки  $a \times b$  с током  $I$  в точке  $A$  на расстоянии  $r \gg a, b$ . Радиус-вектор  $r$  образует с плоскостью рамки угол  $\alpha$ .

б) На больших расстояниях магнитное поле плоского контура с током определяется магнитным моментом контура и не зависит от его формы. Докажите это.

2.12\*. а) Внутри большого квадрата равномерно распределено много микроквадратов с контурными токами. Магнитный момент каждого микроконтура  $M_0$ . Докажите, что на расстояниях, много больших расстояния между



К задаче 2.11\*а,



К задаче 2.12\*а.

микроконтурами, индукция магнитного поля этих микроконтуров совпадает с индукцией магнитного поля большого квадрата с магнитным моментом  $N M_0$ , где  $N$  — число микроконтуров внутри большого квадрата.

б) Тонкая квадратная пластина  $a \times a \times h$  ( $h \ll a$ ) намагничена в поперечном направлении. Индукция магнитного поля в центре пластины  $B$ . Определите магнитный момент единицы объема вещества пластины.

2.13. Из намагниченного железа вырезали тонкий диск радиуса  $R$  и толщины  $h$ . Плоскость диска перпендикулярна направлению намагничивания. Магнитный момент единицы объема железа  $M$ . Определите индукцию магнитного поля на оси диска на расстоянии  $l$  от его центра.

2.14. а) Металлическое кольцо разорвалось, когда ток в кольце был  $I$ . Сделали точно такое же новое кольцо, но

из материала, предел прочности которого в 10 раз больше. Какой ток разорвет новое кольцо?

б\*) Какой ток разорвет новое кольцо, сделанное из этого прочного материала, если все размеры нового кольца в 2 раза больше размеров старого?

### § 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по плоскости или объему

3.1. Используя формулу, приведенную в задаче 2.1, определите индукцию магнитного поля вблизи равномерно заряженной пластины, которая движется со скоростью  $u$  вдоль своей плоскости. Поверхностная плотность заряда пластины  $\sigma$ .

3.2. Найдите индукцию магнитного поля внутри плоского конденсатора, движущегося со скоростью  $9 \text{ м/с}$  параллельно своим обкладкам. Расстояние между обкладками  $10 \text{ мм}$ , напряжение  $10 \text{ кВ}$ .

3.3. Чему равна индукция магнитного поля:

а) бесконечной плоскости, по которой идет ток с линейной плотностью  $i$ ;

б) между двумя параллельными бесконечными плоскостями, по которым в одном направлении текут токи с линейными плотностями  $i$  и  $2i$ ,  $i$  и  $i$ ,  $3i$  и  $4i$ ; вне этих плоскостей;

в) в двух параллельных плоскостях, по которым в противоположных направлениях текут токи с поверхностными плотностями  $i$  и  $2i$ ,  $i$  и  $i$ ,  $3i$  и  $4i$ ; между этими плоскостями?

3.4. а) По двум параллельным шинам текут одинаковые токи  $I$ . Ширина шин  $b$  много больше расстояния между шинами. Чему равна сила, действующая на единицу длины шины?

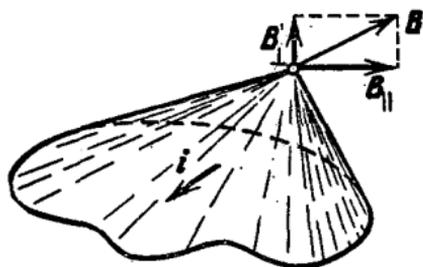
б\*) Через пластину прямоугольного сечения  $a \times b$  ( $a \ll b$ ) пропустили ток  $I$ . Модуль продольной упругости пластины  $E$ . Определите, на какую величину уменьшится размер  $a$  под действием магнитных сил.

в) Мягкая медь «течет» при давлении около  $4 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , а сталь — при давлении  $5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ . Оцените минимальные индукции магнитных полей, под действием которых будут течь медь и сталь в условиях задачи б\*).

3.5. а) По участку плоской поверхности, изображенной на рисунке, течет ток с линейной плотностью  $i$ . Докажите, что составляющая вектора индукции магнитного поля, параллельная поверхности и перпендикулярная  $i$ , опреде-

ляется формулой  $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность.

б) Чему равна индукция магнитного поля бесконечно длинной полосы ширины  $2h$  над средней линией полосы на расстоянии  $h$  от линии, если вдоль полосы течет ток с линейной плотностью  $i$ ?

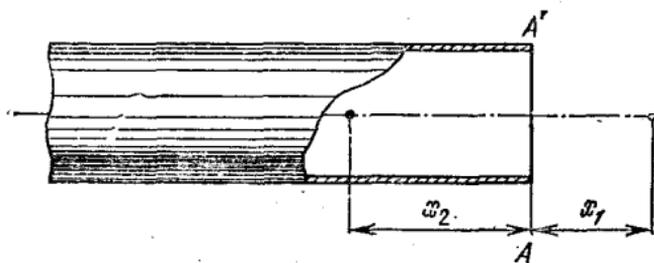


К задаче 3.5а.

3.6\*. а) Чему равна индукция магнитного поля внутри бесконечно длинного цилиндра, по поверхности которого течет поперечный ток с линейной плотностью  $i$ ? Зависит ли этот результат от формы поперечного сечения цилиндрической поверхности?

б) Какое натяжение вызывает в витках длинного соленоида ток  $I$ ? Число витков на единицу длины соленоида  $n$ , его радиус  $R$ .

3.7\*. По поверхности полубесконечного кругового цилиндра течет поперечный ток с линейной плотностью  $i$ .



К задаче 3.7\*.

а) Определите составляющую вектора индукции магнитного поля вдоль оси в крайнем сечении цилиндра  $AA'$ .

б) Как зависит индукция магнитного поля на оси цилиндра от расстояний  $x_1$  и  $x_2$  до его конца? Чему равна эта индукция на больших расстояниях? Радиус цилиндра  $R$ .

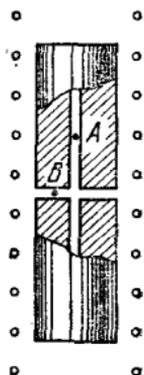
3.8\*. а) Сплошной цилиндр вырезали из намагниченного до насыщения железа так, что ось цилиндра совпала с направлением намагничивания. Докажите эквивалентность поля этого цилиндра полю поперечного тока, текущего по его поверхности с линейной плотностью, равной магнитному моменту единицы объема железа.

б) Из длинного стержня, намагниченного до насыщения вдоль оси, вырезали кубик так, что одно из ребер кубика

было направлено вдоль направления намагничивания. Во сколько раз индукция магнитного поля в центре кубика будет меньше индукции в стержне?

в) Тонкие квадратные пластины  $a \times a \times h$  ( $h \ll a$ ) намагничены до насыщения в поперечном направлении. В центре пластин индукция магнитного поля  $B_0$ . Чему будет равна индукция поля внутри длинного прямоугольного столба сечения  $a \times a$ , собранного из этих пластин?

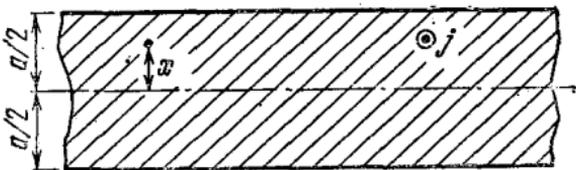
3.9. В длинный соленоид с током  $0,5 \text{ A}$  поместили цилиндрический столбик ферромагнетика с узкими полостями. Число витков на единицу длины соленоида 10, магнитная проницаемость ферромагнетика 600. Определите индукцию магнитного поля в продольной и поперечной полостях (в точках  $A$  и  $B$ ).



К задаче 3.9.

3.10. Диск радиуса  $R$  и высоты  $h \ll R$ , сделанный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu = 1 + \kappa$  ( $\kappa \ll 1$ ), поместили поперек однородного магнитного поля индукции  $B_0$ . На сколько индукция в центре диска будет отличаться от  $B_0$ ?

3.11. Циркуляция вектора индукции постоянного магнитного поля по замкнутому контуру («работа» вектора индукции магнитного поля по контуру) в вакууме всегда



К задаче 3.11б.

равна току через поверхность, ограниченную этим контуром, помноженному на  $\mu_0$ . Приведите примеры, подтверждающие этот закон. Решите, используя его, следующие задачи:

а) По бесконечно длинному прямому проводу радиуса  $r$  течет ток  $I$ . Ток распределен равномерно по сечению провода. Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне провода.

б) По длинной широкой шине с поперечным размером  $a$  течет ток, равномерно распределенный по сечению провод-

ника. Плотность тока  $j$ . Как зависит индукция магнитного поля от расстояния  $x$  до средней плоскости шины?

в) Через тороидальный соленоид, имеющий  $N$  витков, протекает ток  $I$ . Внешний радиус тора  $R$ , внутренний  $r$ . Определите минимальную и максимальную индукции магнитного поля внутри соленоида.

3.12. а) Ток  $I$  идет по длинному прямому проводу, перпендикулярному проводящей плоскости, и растекается по ней. Определите распределение индукции магнитного поля.

б) Длинный провод с током  $I$  пересекает перпендикулярно проводящая плоскость. Ток, уходящий на плоскость, равен  $I_1$ . Определите распределение индукции магнитного поля этой системы токов.

в) Коаксиальный кабель входит в сферическую полость так, как изображено на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля во всем пространстве.

3.13\*. Ток  $I$  по длинному прямому проводу входит в проводник перпендикулярно его поверхности и равномерно растекается по нему. Как зависит индукция магнитного поля внутри проводника от угла  $\beta$  и расстояния  $r$ ?

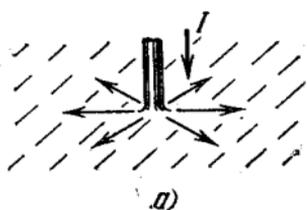
3.14. Распределение тока в двух взаимно перпендикулярных пластинах толщины  $h$  показано на рисунке. В области пересечения пластин тока нет. Нарисуйте график зависимости индукции магнитного поля от  $x$ .

3.15. В бесконечной пластине толщины  $h$  вырезали цилиндрическую полость радиуса  $h/2$ , ось которой параллельна поверхностям пластины. Во всем объеме пластины, за исключением полости, течет ток, направленный вдоль оси полости. Найдите распределение индукции магнитного поля вдоль прямой  $OA$ , которая проходит через ось полости и перпендикулярна поверхностям пластины. Плотность тока  $j$ .

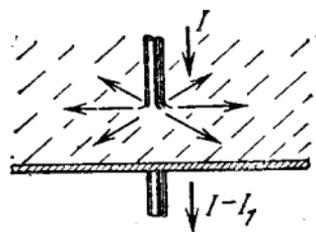
3.16\*. Определите индукцию магнитного поля в длинной цилиндрической полости внутри цилиндрического проводника, если ось полости параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстоянии  $d$ . Ток распределен равномерно по сечению проводника. Плотность тока  $j$ .

3.17\*. а) Заштрихованные области образуются поверхностями двух цилиндров радиуса  $R$ , центры которых находятся на расстоянии  $a$  друг от друга. Через эти области вдоль осей в противоположных направлениях текут токи, плотности которых  $j$ . Найдите индукцию магнитного поля в области, лежащей между заштрихованными областями.

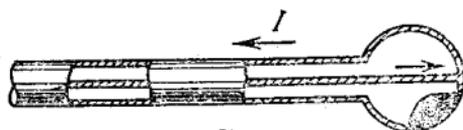
б) Используя результат задачи а), применяя метод предельного перехода  $a \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , найдите распределение



a)

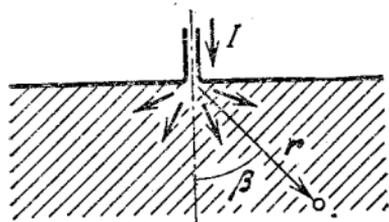


b)

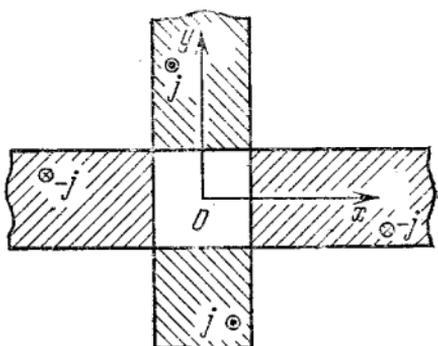


b)

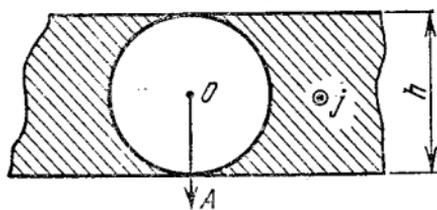
К задаче 3.12.



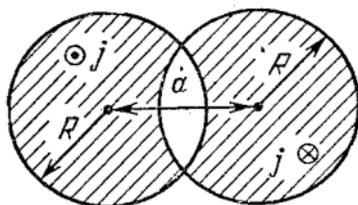
К задаче 3.13\*.



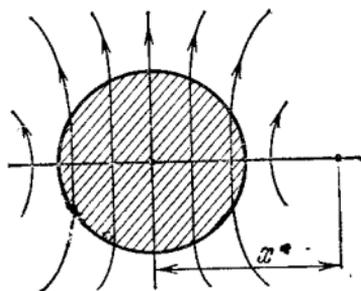
К задаче 3.14.



К задаче 3.15.



К задаче 3.17\*а.



К задаче 3.18\*.

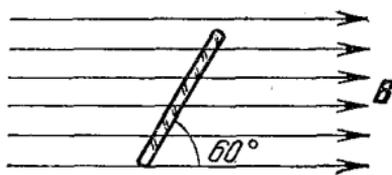
линейной плотности тока на поверхности цилиндра радиуса  $R$ , которое дает внутри цилиндра однородное магнитное поле индукции  $B_0$ . Как связана максимальная линейная плотность тока с индукцией поля  $B_0$ ?

– 3.18\*. Длинный цилиндрический железный стержень радиуса  $r$  намагничен в магнитном поле, перпендикулярном оси стержня. Магнитный момент единицы объема стержня  $M$ . Как зависит индукция магнитного поля от  $x$  на расстояниях, много меньших длины стержня?

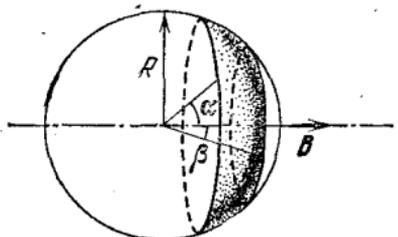
## § 9.4. Магнитный поток

4.1. а) Индукция однородного магнитного поля  $B$ . Чему равен магнитный поток через квадрат со стороной  $a$ , плоскость которого расположена под углом  $60^\circ$  к направлению магнитного поля?

б) Чему равен магнитный поток через плоскую поверхность площади  $S$ , которая расположена под углом  $\alpha$  к направлению магнитного поля?



К задаче 4.1а.



К задаче 4.2.

4.2. Определите магнитный поток через выделенный на рисунке участок сферы радиуса  $R$ . Индукция магнитного поля направлена вдоль оси симметрии этого участка.

4.3. Покажите, что магнитный поток от плоскости с линейной плотностью тока  $i$  через любую замкнутую поверхность равен нулю.

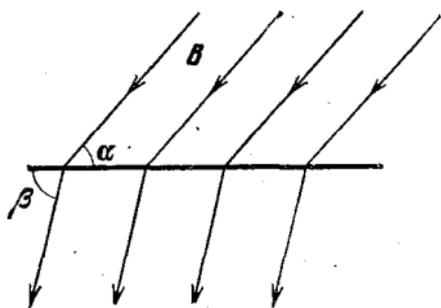
4.4\*. Докажите, что магнитный поток от элемента тока через любую замкнутую поверхность равен нулю.

4.5. Плоская горизонтальная граница делит пространство на две части. В нижней части индукция магнитного поля равна нулю. Докажите, что однородное магнитное поле вблизи поверхности в верхней части направлено параллельно поверхности.

4.6. Вектор индукции магнитного поля  $B$ , переходя через плоскую поверхность, меняет угол наклона к поверх-

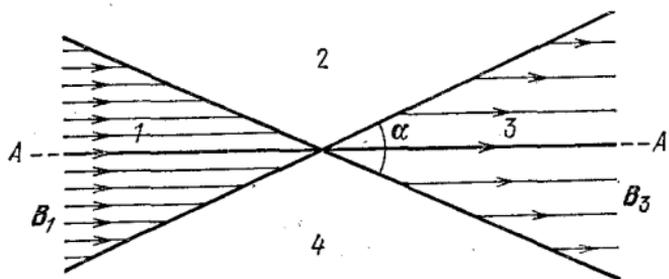
ности с  $\alpha$  на  $\beta$ . Во сколько раз меняется индукция поля? Чему равна линейная плотность тока на поверхности?

4.7\*. Плоскости, пересекающиеся под углом  $\alpha$ , делят пространство на четыре области. Магнитное поле в каждой области однородно. В областях 1 и 3 поля параллельны плоскости симметрии  $AA'$  и направлены в одну сторону. Индукции этих полей  $B_1$  и  $B_3$ . Определите индукции полей в областях 2 и 4.



К задаче 4.6.

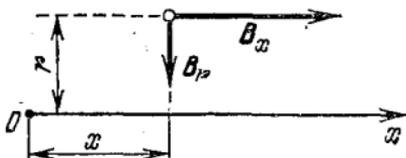
4.8. а) Составляющая индукции аксиально-симметричного магнитного поля вдоль оси симметрии линейно зависит от  $x$ :  $B_x = B_0 x/x_0$ , где  $x_0$  и  $B_0$  — постоянные. Определите зависимость радиальной составляющей индукции поля от расстояния до оси. Как зависит угол наклона поля от  $x$  и  $r$ ? Нарисуйте силовые линии этого поля.



К задаче 4.7\*.

б) Составляющая индукции магнитного поля в задаче а) меняется вдоль оси как  $B_0 (x/x_0)^n$ . Определите радиальную составляющую индукции поля. Как определить  $B_r$  в общем случае, когда  $B_x = B_0 f(x)$ ?

4.9. Составляющая индукции магнитного поля вдоль оси  $OO'$  бесконечного цилиндра радиуса  $R$  меняется как  $B_0 x/x_0$ . Вне цилиндра эта составляющая равна нулю. Как зависит радиальная составляющая поля вне цилиндра от расстояния до оси  $OO'$ ?



К задаче 4.8.

4.10\*. а) Определите магнитный поток через поверхность полубесконечного цилиндра, по которому циркулирует поперечный ток с линейной плотностью  $i$ . Радиус цилиндра  $R$ .

б) С какой силой притягиваются половинки длинного соленоида с током  $I$ ? Радиус соленоида  $R$ , число витков на единицу длины соленоида  $n$ .

в) Два длинных стержня, намагниченных в продольном направлении, притянулись друг к другу своими торцами. Для того чтобы оторвать их друг от друга, нужно приложить в осевом направлении силу  $F$ . Сечение стержней одинаково, площадь сечения  $S$ . Определите индукцию магнитного поля в месте соединения стержней.

г) В неоднородном магнитном поле находится соленоид с током  $I$ . Число витков на единицу длины соленоида  $n$ . Магнитные потоки, входящие и выходящие через торцы соленоида, равны  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Определите силу, действующую на соленоид вдоль его оси.

4.11. Взаимной индуктивностью двух контуров называется коэффициент пропорциональности между током в одном из контуров и создаваемым им магнитным потоком, пронизывающим второй контур. Определите взаимную индуктивность: а) двух круговых контуров радиусов  $r$  и  $R$ , расположенных на одной оси симметрии на расстоянии  $l \gg r, R$ ; б) длинного соленоида радиуса  $r$  с  $n$  витками на единицу длины и кругового соосного контура, охватывающего этот соленоид.

## Глава 10. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛОЖНЫХ ПОЛЯХ

### § 10.1. Движение в электрическом и магнитном полях

1.1. Протон, ускоренный напряжением  $2 \cdot 10^4$  В, влетает в однородное магнитное поле индукции  $0,1$  Тл перпендикулярно силовым линиям. Найдите радиус окружности, по которой движется протон в магнитном поле.

1.2. Электрон, ускоренный напряжением  $200$  В, движется в магнитном поле Земли индукции  $0,7 \cdot 10^{-4}$  Тл. Найдите радиус окружности, по которой движется электрон, если скорость его перпендикулярна полю Земли.

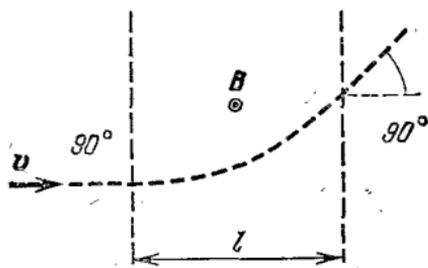
1.3. Два электрона с кинетическими энергиями  $K_1$  и  $K_2$  движутся в магнитном поле, перпендикулярном их скоростям. Найдите отношение их периодов обращения и радиусов траекторий.

1.4. Определите частоту вращения (циклотронную частоту) частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  в магнитном поле индукции  $B$ .

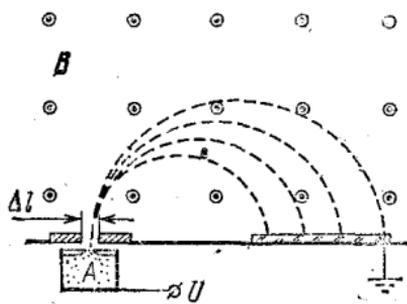
1.5. Через какое время после первой встречи произойдет встреча двух заряженных частиц, движущихся перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ ? При первой встрече частицы двигались взаимно перпендикулярно. Заряд частиц  $q$ , масса  $m$ . Скорости частиц одинаковы, взаимодействием частиц пренебречь.

1.6. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле индукции  $B$ , наблюдают упругое рассеяние  $\alpha$ -частиц на ядрах дейтерия. Найдите начальную энергию  $\alpha$ -частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра и  $\alpha$ -частицы после рассеяния оказались одинаковыми и равными  $R$ . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля.

1.7. Электрон влетает в слой магнитного поля толщины  $l$ . Скорость электрона  $v$  перпендикулярна как индукции поля  $B$ , так и границам слоя. Под каким углом электрон вылетит из магнитного поля?



К задаче 1.7.

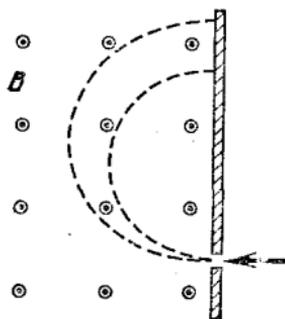


К задаче 1.8.

1.8. На рисунке изображен простейший масс-спектрометр, индукция магнитного поля в котором 0,1 Тл. В ионизаторе  $A$  образуются ионы, которые ускоряются напряжением 10 кВ. После поворота в магнитном поле ионы попадают на фотопластинку и вызывают ее почернение. На каком расстоянии от щели будут находиться на фотопластинке полосы ионов  $H_1^+$ ,  $H_2^+$ ,  $H_3^+$ ,  $He_4^+$ ? Какая должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов  $O_{16}^{+2}$  и  $N_{15}^+$  разделились?

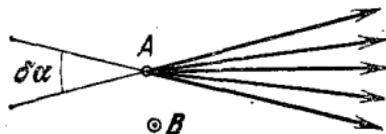
1.9. В устройстве для определения изотопного состава ионы калия  $^{39}\text{K}^+$  и  $^{41}\text{K}^+$  сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле индукции  $B$ , перпендикулярное направлению их движения. В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющее напряжение меняется около среднего значения  $U_0$  на величину  $\pm\Delta U$ . С какой относительной точностью  $\Delta U/U_0$  нужно поддерживать значение ускоряющего напряжения,

чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?



К задаче 1.9.

1.10\*. Из точки  $A$  вылетают частицы со скоростью  $v$ , имея малый угловой разброс  $\delta\alpha$ , и да-



К задаче 1.10\*.

лее движутся в однородном магнитном поле индукции  $B$  перпендикулярно ему. Определите, на каком расстоянии от точки  $A$  соберется пучок, и оцените в этом месте его поперечный размер. Масса частиц  $m$ , заряд  $q$ .

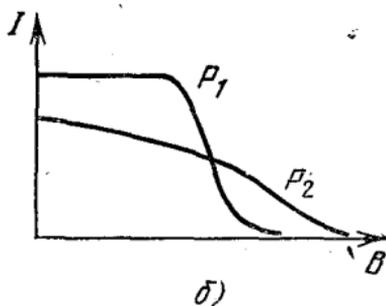
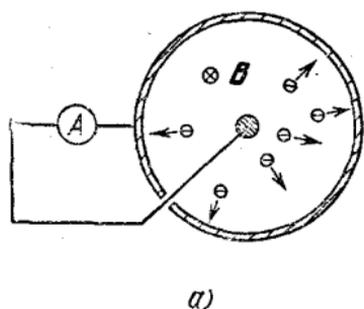
1.11. В однородное магнитное поле индукции  $B$  влетает под углом  $\alpha$  к полю со скоростью  $v$  частица массы  $m$  с зарядом  $q$ . Найдите радиус и шаг спирали, по которой движется частица.

1.12\*. Вдоль однородного магнитного поля индукции  $B$  из одной точки вылетают электроны со скоростью  $v$ , имея малый угловой разброс  $\delta\alpha$ . Определите, на каком расстоянии от места вылета пучок будет иметь минимальный поперечный размер, и оцените его.

1.13. а) Устройство состоит из соосных цилиндра радиуса  $R$  и проволоочки, помещенных в продольное магнитное поле индукции  $B$ . При нагревании проволоочки из нее вылетают электроны с кинетической энергией  $K$ ; при этом во внешней цепи между цилиндром и проволоочкой будет протекать ток. Нарисуйте зависимость  $I$  от  $B$  для вакуумированного устройства. Найдите значения  $B$ , при которых ток в вакууме равен нулю.

б) На рисунке изображены две зависимости  $I$  от  $B$  при различных давлениях остаточных газов  $P_1$  и  $P_2$ . Какое давление больше?

1.14. Два электрона движутся с одинаковыми по модулю скоростями  $u$  в однородном магнитном поле индукции  $B$ . В некоторый момент расстояние между ними равно

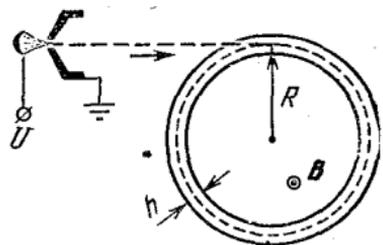


К задаче 1.13.

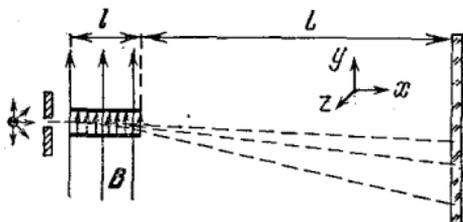
$2R$ , а векторы скоростей антипараллельны друг другу и перпендикулярны  $B$ . При каком  $B$  расстояние между электронами останется неизменным? Устойчива ли система?

1.15. По орбите радиуса  $R$  вокруг протона вращается электрон. Как изменится частота вращения электрона по этой же орбите, если система помещена в слабое магнитное поле индукции  $B$ , направленное вдоль оси вращения?

1.16. Какое напряжение нужно приложить между обкладками цилиндрического конденсатора, чтобы он «захватил на орбиту» электроны, прошедшие ускоряющую разность потенциалов  $U$ ? Конденсатор находится в однородном магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль оси конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора  $h$  много меньше среднего радиуса конденсатора  $R$ .



К задаче 1.16.



К задаче 1.17.

1.17. а) В плоском конденсаторе длины  $l$  напряженность электрического поля равна  $E$ , а индукция магнитного поля, направленного вдоль  $E$ , равна  $B$ . У входа в конденсатор имеется радиоактивный источник, испускающий электроны

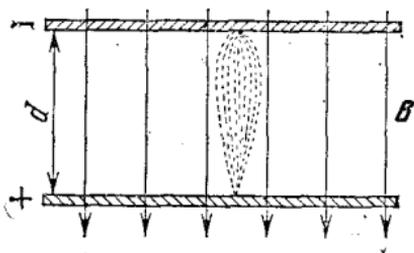
с разными скоростями. Из них формируют тонкий пучок, который проходит через конденсатор, а затем попадает на фотопластинку, расположенную на расстоянии  $L \gg l$ . Какую кривую «вычертят» электроны на фотопластинке, если их отклонения малы?

б) Найдите кривую на фотопластинке для  $B = 1$  Тл,  $E = 5 \cdot 10^5$  В/м,  $l = 5$  см,  $L = 50$  см.

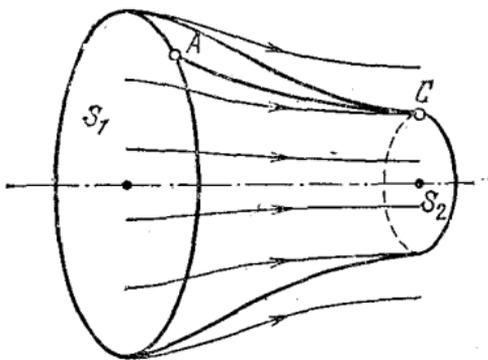
в) При больших скоростях масса электрона заметно изменяется. Согласно формуле Лоренца  $m_e = m_{e0}/\sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $\beta$  — отношение скорости электрона к скорости света,  $m_{e0}$  — масса покоя электрона. Решите задачу а) с учетом эффекта изменения массы электрона.

1.18. Ускоряющее напряжение на дуантах циклотрона  $U$ . Индукция магнитного поля ускорителя  $B$ , его радиус  $R$ . Определите время ускорения протона, входящего в центр ускорителя с кинетической энергией  $K$ . Временем движения протона между дуантами ускорителя пренебречь.

1.19. Пластины плоского конденсатора с зазором  $d$  расположены перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ . Около катода расположен источник медленных электро-



К задаче 1.19.



К задаче 1.21\*a.

нов, вылетающих в разных направлениях к пластинам. При каком напряжении на конденсаторе электроны будут фокусироваться на аноде? Чем определяется размер пятна?

1.20. Определите, какую максимальную скорость разовьет заряженное тело, скользящее по наклонной плоскости в магнитном поле индукции  $B$  и поле тяжести. Масса и заряд тела  $m$  и  $q$ . Магнитное поле параллельно наклонной плоскости и перпендикулярно полю тяжести. Угол наклона к горизонту  $\alpha$ . Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu$ .

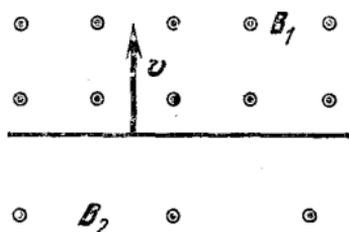
1.21\*. а) Докажите, что полное изменение момента импульса электрона при движении от точки  $A$  до точки  $C$

в аксиально-симметричном магнитном поле равно разнице магнитных потоков через круговые сечения  $S_1$  и  $S_2$ , умноженной на  $e/2\pi$ .

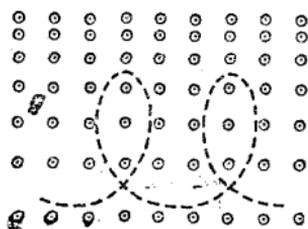
б) Определите минимальный радиус, который может иметь пучок электронов при переходе из поля с индукцией  $B_1$  в поле с индукцией  $B_2$ . Оси симметрии переходного поля и пучка совпадают. В области первого поля скорость электронов параллельна вектору  $B_1$ , а радиус пучка равен  $R$ .

## § 10.2. Дрейфовое движение частиц

2.1. Пространство разделено на две половины плоскостью. В верхней половине создано магнитное поле индукции  $B_1$ , в нижней — индукции  $B_2$ , причем поля однородны и параллельны друг другу. С плоскости раздела перпендикулярно ей стартует электрон со скоростью  $v$  в сторону верхней половины. Опишите дальнейшее движение электрона. Определите дрейфовую скорость электрона вдоль границы раздела магнитных полей.



К задаче 2.1.



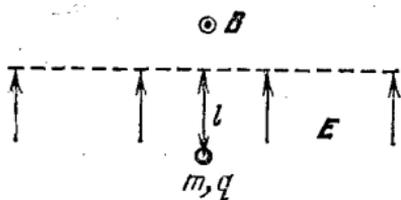
К задаче 2.2\*.

2.2\*. Оцените скорость дрейфа электрона поперек неоднородного магнитного поля, компоненты индукции которого:  $B_x = 0$ ,  $B_y = 0$ ,  $B_z = B_0(1 + ax)$ . Скорость электрона  $v$ .

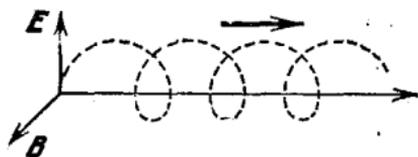
2.3. Области магнитного и электрического полей разделены воображаемой границей — плоскостью. В верхней области однородное магнитное поле индукции  $B$  параллельно плоскости раздела. В нижней области однородное электрическое поле напряженности  $E$  перпендикулярно плоскости раздела. В электрическое поле на расстоянии  $l$  от границы помещается частица массы  $m$  с зарядом  $q$ . Нарисуйте траекторию частицы. Найдите скорость дрейфа частицы вдоль границы раздела полей.

2.4. Взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля называются скрещенными. Какую начальную

скорость должна иметь заряженная частица в направлении, перпендикулярном этим полям, чтобы ее движение в скрещенных полях оставалось прямолинейным? Напряженность электрического поля  $E$ , индукция магнитного поля  $B$ .



К задаче 2.3.

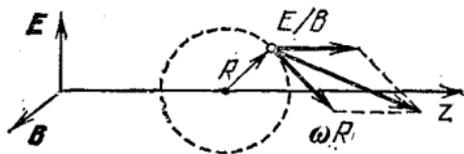


К задаче 2.5.

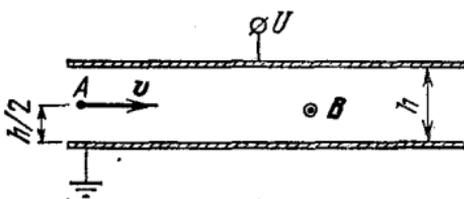
2.5. В скрещенных электрическом и магнитном полях частица «дрейфует» поперек полей. Чему равна дрейфовая скорость частицы?

2.6. Чему равна дрейфовая скорость заряженной частицы поперек электрического и магнитного полей, если угол между  $E$  и  $B$  равен  $\alpha$ ?

2.7. Докажите, что заряженная частица в скрещенных электрическом и магнитном полях вращается с частотой  $\omega = qB/m$  вокруг центра, который движется с дрейфовой скоростью (и поэтому скорость частицы в любой момент времени равна векторной сумме вращательной скорости вокруг мгновенного центра вращения и дрейфовой скорости).



К задаче 2.7.

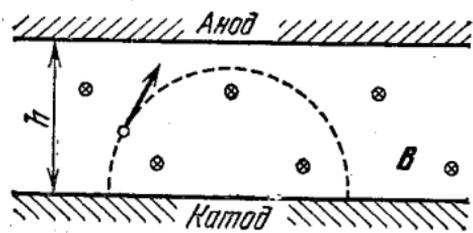


К задаче 2.8.

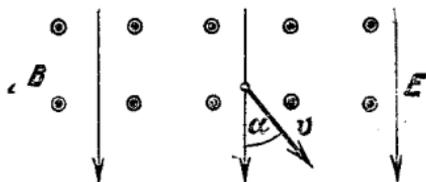
2.8. Плоский конденсатор помещен в однородное магнитное поле индукции  $B$ , параллельное пластинам. Из точки  $A$  вылетают электроны перпендикулярно направлению магнитного поля. Напряжение, приложенное к пластинам, равно  $U$ . При каком условии электроны будут проходить через конденсатор?

2.9. Между плоскими анодом и катодом подается высокое напряжение. Система находится в магнитном поле индукции  $B$ , которое параллельно электродам. Определите, при каких напряжениях электроны достигнут анода. Найдите напряжение, если  $B = 0,1$  Тл,  $h = 2$  см.

**2.10.** Электрон вращается в постоянном магнитном поле индукции  $B$ , имея скорость  $v$ . Включается электрическое поле напряженности  $E$ , которое направлено под углом  $\alpha$  к вектору скорости электрона. Определите дальнейшее движение электрона.



К задаче 2.9.



К задаче 2.10.

**2.11.** Найдите дрейфовую скорость частицы в перпендикулярных друг другу магнитном поле индукции  $B$  и поле постоянной силы  $F$ . Заряд частицы  $q$ .

**2.12.** Найдите дрейфовые скорости электрона и протона в поле тяжести и магнитном поле Земли, индукция которого равна  $0,7 \cdot 10^{-4}$  Тл. Магнитное поле перпендикулярно полю тяжести.

## Глава 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### § 11.1. Движение проводников

#### в постоянном магнитном поле. Электродвигатели

**1.1.** Между какими частями самолета в полете чаще всего возникает максимальное напряжение электрического поля?

**1.2.** Поперек магнитного поля индукции  $0,1$  Тл движется со скоростью  $1$  м/с прямой провод длины  $0,3$  м. Чему равно напряжение электрического поля между концами провода?

**1.3.** Вектор индукций магнитного поля  $B$  перпендикулярен плоскости проволочной квадратной рамки. Найдите распределение напряженности электрического поля по рамке, если рамка движется поперек поля с постоянной скоростью  $v$ .

**1.4.** Индукция постоянного магнитного поля измеряется с помощью квадратной рамки  $a \times a$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ . Ось вращения перпендикулярна направлению магнитного поля. Амплитуда электрического на-

пряжения, снимаемого с рамки, равна  $U$ . Найдите индукцию магнитного поля.

1.5. Металлический брусок  $a \times b \times c$  ( $b \ll a, c$ ) движется со скоростью  $v$  в магнитном поле индукции  $B$ . Найдите разность потенциалов между боковыми сторонами и поверхностную плотность зарядов на них.

1.6. Предположим, что атом можно представить как равномерно заряженный отрицательным электрическим зарядом шар радиуса  $r$ , в центре которого находится точечное ядро с зарядом  $Ze$ . Найдите, с какой скоростью должен двигаться такой атом поперек магнитного поля индукции  $B$ , чтобы ионизоваться.

1.7. Оцените, при какой индукции магнитного поля разрушится атом водорода, влетающий в него со скоростью, близкой к скорости света.

1.8\*. В однородном магнитном поле индукции  $B$  находятся две вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной силовым линиям поля. По рейкам может скользить без трения проводник длины  $l$  и массы  $m$ . Как будет двигаться проводник, если верхние концы реек замкнуты на: а) сопротивление  $R$ ; б) емкость  $C$ ? В какие виды энергии переходит работа силы тяжести? Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением контактов, реек и индуктивностью пренебречь.

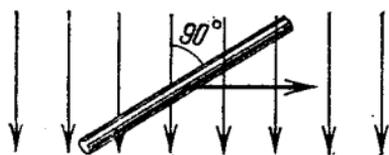
1.9. Квадратный замкнутый виток проволоки, длина стороны которого  $b$ , а сопротивление единицы длины  $\rho$ , проходит с постоянной скоростью  $v$  между башмаками электромагнита, создающего однородное магнитное поле индукции  $B$ . Считая поле вне башмаков равным нулю, определите энергию, превратившуюся в тепло, для случаев, когда размер башмаков в направлении движения витка  $a \ll b$  и  $a \gg b$ .

1.10. Рамка  $a \times b$  помещена в магнитное поле индукции  $B$ , причем в начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна силовым линиям поля. Рамка вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

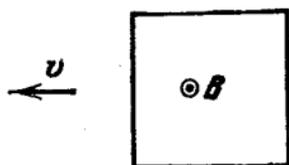
а) Постройте график зависимости тока, текущего в рамке, от времени. Сопротивление рамки  $R$ . Индуктивностью пренебречь.

б) Как зависит от времени момент сил, необходимый для поддержания постоянной скорости вращения рамки?

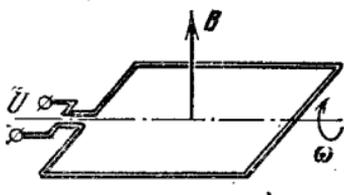
1.11\*. Металлический прут  $AB$ , сопротивление единицы длины которого  $\rho$ , движется с постоянной скоростью  $v$  ( $v \perp AB$ ), замыкая два идеальных проводника  $OC$  и  $OD$ ,



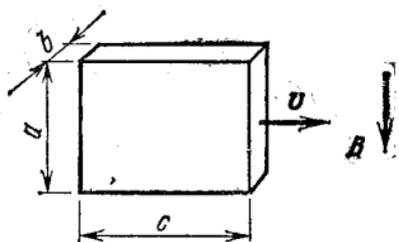
К задаче 1,2.



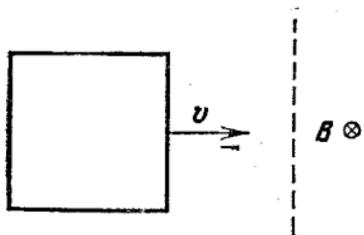
К задаче 1,3.



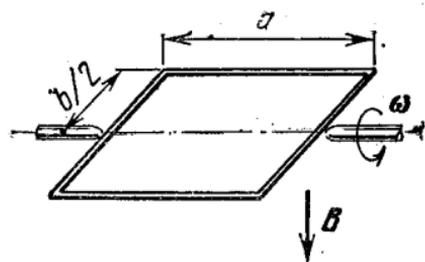
К задаче 1,4.



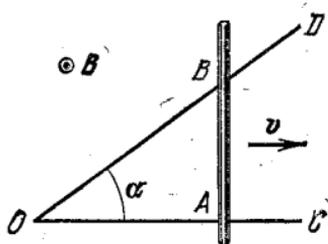
К задаче 1,5.



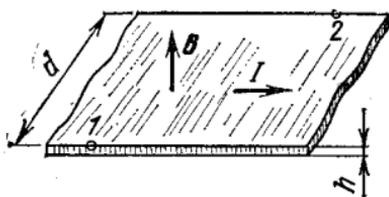
К задаче 1,9.



К задаче 1,10.



К задаче 1,11\*.



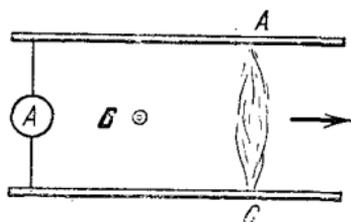
К задаче 1,13.

образующих угол  $\alpha$ . Длина  $OC$  равна  $l$  и  $AB \perp OC$ . Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле индукции  $B$ , перпендикулярном плоскости системы. Найдите полное количество тепла, которое выделится в цепи за время движения прута от точки  $O$  до точки  $C$ . Индуктивностью контура пренебречь.

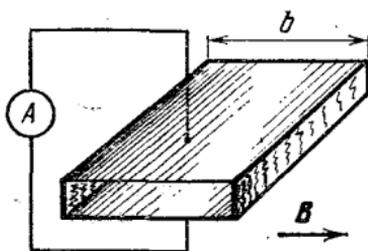
1.12. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью  $\sigma$ . Жидкость движется с постоянной скоростью  $v$  параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле индукции  $B$ , направленном перпендикулярно скорости жидкости и параллельно плоскостям пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление  $R$ ?

1.13. По проводящей ленте ширины  $d$  течет ток  $I$ . Лента находится в магнитном поле индукции  $B$ . Направление поля перпендикулярно плоскости ленты. Найдите разность потенциалов между точками 1 и 2. Толщина ленты  $h$ , объемная плотность заряда носителей тока  $\rho$ .

1.14. а) Рельсовый ускоритель плазмы состоит из двух параллельных проводников, лежащих в плоскости, перпендикулярной магнитному полю индукции  $B$ . Между точ-



К задаче 1.14.



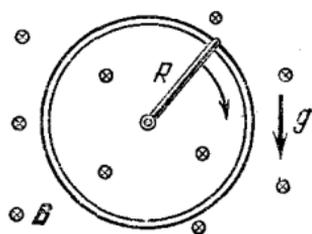
К задаче 1.15.

ками  $A$  и  $C$  в водороде поджигают разряд. Ток  $I$  в разряде поддерживается постоянным. Под действием магнитного поля область разряда перемещается, разгоняясь к концам рельсов, и срывается с них. Чему равна скорость плазменного сгустка, если его масса  $m$ ? Расстояние между рельсами  $l$ ; длина участка, на котором происходило ускорение плазмы, равна  $L$ .

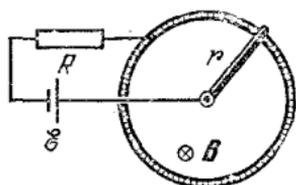
б) Решите задачу а) для  $B = 1$  Тл,  $l = 0,1$  м,  $L = 1$  м,  $I = 10$  А; в плазменном сгустке содержится  $10^{13}$  ионов водорода.

**1.15.** Труба прямоугольного сечения  $a \times b$  заполнена газом плотности  $\rho$ . Вертикальные стенки трубы — изоляторы, горизонтальные — электроды. В крайнем сечении зажигается разряд, после чего ток  $I$  поддерживается постоянным. Возникшая дуга магнитными силами выталкивается внутрь трубы, «сгребая» перед собой газ. Определите скорость плазменной «пробки», считая, что она все время больше скорости звука в газе. Магнитное поле индукции  $B$  перпендикулярно вертикальным стенкам трубы.

**1.16\*.** В поле тяжести помещено вертикально металлическое кольцо. Металлический стержень длины  $R$  и массы  $m$  шарнирно закреплен в центре кольца и касается кольца другим концом. Перпендикулярно плоскости кольца имеется однородное магнитное поле индукции  $B$ . По какому закону надо менять ток в стержне, чтобы стержень вращался равномерно с угловой скоростью  $\omega$ ? Трением пренебречь.



К задаче 1.16\*.



К задаче 1.17\*.

**1.17\*.** На рисунке изображена модель двигателя постоянного тока.

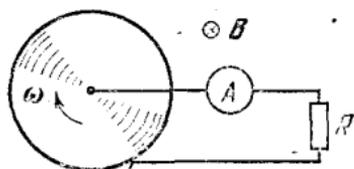
а) Опишите движение подвижной перемычки длины  $r$  и массы  $m$ , если э. д. с. батареи равна  $\mathcal{E}$ , индукция магнитного поля  $B$ , сопротивление цепи  $R$ . Трением пренебречь.

б) Определите установившиеся угловую скорость и ток в цепи, если сила трения в подвижном контакте  $F$ .

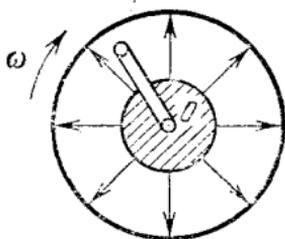
**1.18\*.** Проводящий диск вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле индукции  $B$ , перпендикулярном плоскости диска. Что покажет амперметр, включенный через сопротивление  $R$ ? Найдите числовое значение тока, если  $R = 1$  Ом, радиус диска  $r = 0,05$  м,  $\omega = 2\pi \cdot 50$  с<sup>-1</sup>,  $B = 1$  Тл.

**1.19.** На оси  $O$  шарнирно закреплена одной стороной квадратная проволочная рамка  $a \times a$ . Вокруг этой же оси вращается с угловой скоростью  $\omega$  магнит, создающий в области, где расположена рамка, радиальное магнитное поле. Определите угловую скорость рамки, если сопротив-

ление единицы длины рамки  $\rho$ , момент сил трения на оси  $M$ , а индукция магнитного поля на краю рамки  $B$ .



К задаче 1.18\*.



К задаче 1.19.

1.20. Динамомашинa с э. д. с. 12 В и внутренним сопротивлением 0,2 Ом заряжает батарею аккумуляторов с э. д. с. 10 В и внутренним сопротивлением 0,6 Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением 3 Ом. Определите токи в батарее и лампочке.

1.21. Почему электромотор может сгореть, если остановить его ротор?

1.22. Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с э. д. с. 24 В, при полном сопротивлении цепи 20 Ом делает 600 об/мин при токе в цепи 0,2 А. Какую э. д. с. разовьет тот же мотор, работая в качестве динамомашины при 1400 об/мин?

1.23. Сколько оборотов в единицу времени разовьет электромотор постоянного тока с постоянным магнитом, включенный в цепь с э. д. с.  $\mathcal{E}$ , при полном сопротивлении цепи  $R$ , если, работая в качестве динамомашины, он разовьет э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  при числе оборотов в единицу времени  $n_1$ , а момент сил трения на оси мотора равен  $M$ ?

1.24. Какую э. д. с. развивает динамомашинa постоянного тока, если при сопротивлении цепи 300 Ом на ее вращение затрачивается мощность 50 Вт, а потери на трение составляют 4 % по мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи 60 Ом?

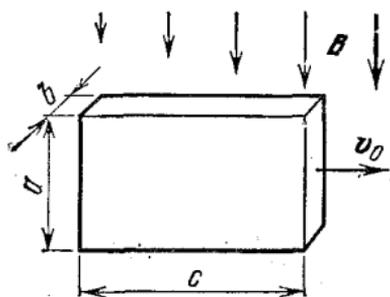
1.25\*. Один конец провода трамвайной линии находится под постоянным напряжением  $U$  относительно земли. На каком расстоянии от этого конца линии находится трамвай, снабженный двумя одинаковыми двигателями, и с какой скоростью он движется, если при последовательном включении двигателей ток в линии равен  $I_1$ , при параллельном  $I_2$ , а скорость трамвая при таком переключении не изменяется?

Сила трения  $F$ , сопротивление единицы длины провода  $\rho$ , сопротивление обмотки каждого двигателя  $R$ .

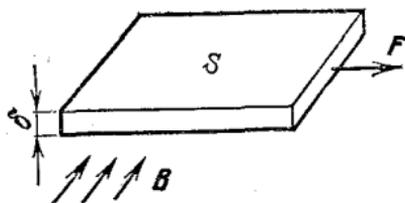
1.26\*. Якоря двух одинаковых электродвигателей постоянного тока соосны и жестко соединены друг с другом. К обмоткам якорей подключены одинаковые источники тока с э. д. с.  $\mathcal{E}$ . При этом угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна  $\omega_0$ . Если двигатели полностью затормозить, то ток в якорях будет равен  $I_0$ . Один из источников переключили так, что вращающие моменты двигателей стали противоположны. Какой момент нужно приложить к соединенным якорям для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью  $\omega$ ? Трение в двигателях пренебрежимо мало; магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

1.27. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиуса  $a$  и массы  $m$ . Плоскость кольца все время горизонтальна. Найдите установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой по закону  $B = B_0(1 + ah)$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивление кольца  $R$ . Индуктивностью кольца пренебречь.

1.28\*. Атом (см. задачу 1.6) влетает в однородное магнитное поле индукции  $B$  со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной полю. Определите скорость атома по истечении большого промежутка времени. Найдите смещение ядра из положения равновесия. Масса атома  $m$ , радиус  $r$ .



К задаче 1.29\*.



К задаче 1.30\*.

1.29\*. Металлический брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда  $a \times b \times c$  ( $b \ll a, c$ ), со скоростью  $v_0$  влетает в магнитное поле, индукция которого меняется от 0 до  $B$  вдоль направления полета. Найдите скорость бруска в области, где индукция достигла значения  $B$ . Масса бруска  $m$ .

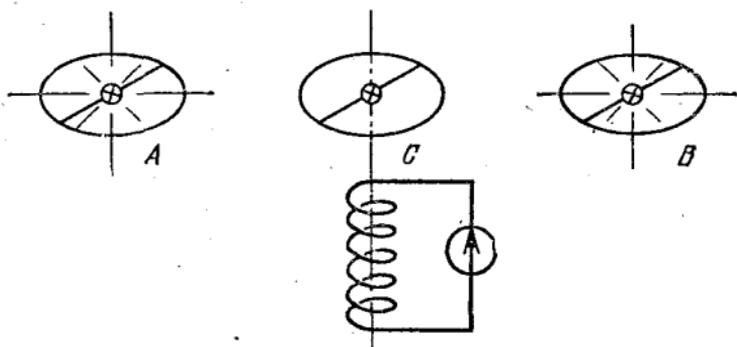
1.30\*. Плоская проводящая пластина массы  $m$ , площади  $S$  и толщины  $\delta$  приводится в движение в однородном магнитном поле, параллельном плоскости пластины, силой  $F$ , перпендикулярной индукции поля  $B$ . Найдите установившееся ускорение пластины, считая  $\delta \ll \sqrt{S}$ .

## § 11.2. Вихревое электрическое поле

2.1. Чему был равен магнитный поток через площадь, ограниченную замкнутым контуром, если при равномерном убывании этого потока в течение 1 с до нуля в контуре возникает э. д. с. индукции 1 В? 100 В? 1 СГС?

2.2. Индукция однородного магнитного поля внутри цилиндра радиуса  $R = 0,1$  м линейно возрастает со временем:  $B = \alpha t$  (коэффициент  $\alpha = 10^{-3}$  Тл/с). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Вне цилиндра поля нет. Чему равна напряженность вихревого электрического поля на расстоянии 0,2 м от оси цилиндра?

2.3. Проводящее кольцо, имеющее по диаметру переключку с электрической лампочкой, проходит над торцом соленоида с током так, что плоскость кольца перпенди-

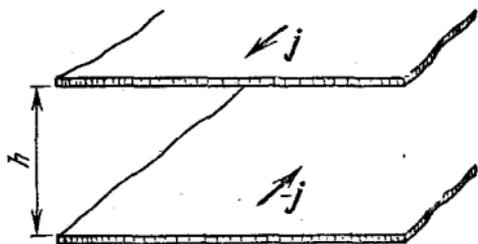


К задаче 2.3.

кулярна оси соленоида, а переключка с лампочкой перпендикулярна направлению скорости движения. В положениях кольца A и B лампочка светится, а в положении C гаснет. Объясните наблюдаемый эффект.

2.4. Индукция магнитного поля внутри цилиндра радиуса 8 см возрастает со временем по закону  $B = \alpha t^2$  (коэффициент  $\alpha = 10^{-4}$  Тл/с<sup>2</sup>). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Чему равна напряженность вихревого электрического поля на расстоянии 0,1 м от оси цилиндра в момент времени  $t_1 = 1$  с?  $t_2 = 4$  с?

2.5. По двум параллельным бесконечным плоскостям текут одинаковые по модулю и противоположные по направлению токи, поверхностные плотности которых изменяются по закону:  $j = at$ . Найдите распределение напряженности вихревого электрического поля между этими плоскостями.



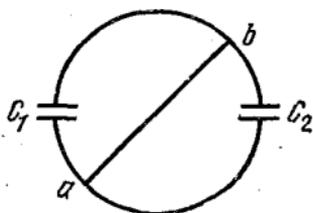
К задаче 2.5.

2.6. Через соленоид длины 20 см и радиуса 2 см течет синусоидальный ток  $I = I_0 \sin(2\pi vt)$ , где  $I_0 = 10$  А,  $\nu = 50$  Гц. Число витков в соленоиде равно 200. Найдите распределение напряженности вихревого электрического поля внутри соленоида. Какой амплитуды напряжение создает это поле в катушке длины 5 см и радиуса 1 см, помещенной внутрь соленоида вдоль его оси? Число витков в этой катушке равно 100.

2.7. Скорость изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, равна  $\Phi$ .

а) Определите заряд на конденсаторе емкости  $C$ , который разрывает этот контур.

б) Контур разрывают два конденсатора емкостей  $C_1$  и  $C_2$ . Определите заряды на обкладках конденсаторов.

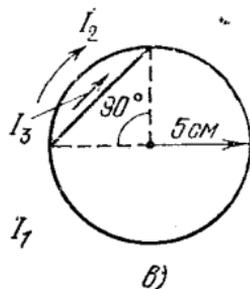
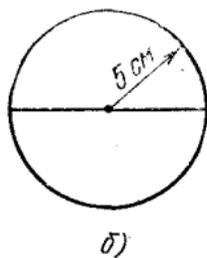
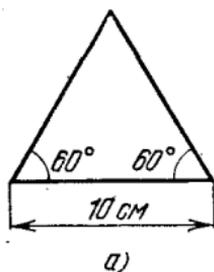


К задаче 2.8.

2.8. а) Контур имеет вид окружности и разрывается двумя конденсаторами емкостей  $C_1$  и  $C_2$ . Контур соединяют по диаметру проводником  $ab$ . Определите заряды на обкладках конденсаторов. Магнитное поле, создающее магнитный поток, однородно, скорость изменения магнитного потока через контур равна  $\Phi$ .

б\*) Чему был бы равен заряд конденсатора емкости  $C_3$ , которым бы разорвали проводник  $ab$  в задаче а)?

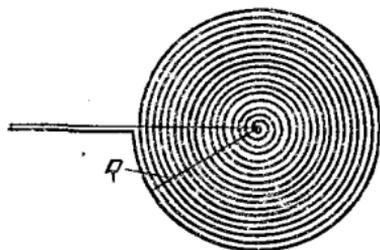
2.9. На рисунке изображены плоские фигуры, сделанные из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно 1 Ом/м. Определите токи в них, если фигуры помещены в однородное магнитное поле, которое меняется во времени. Скорость изменения магнитного потока через единицу площади  $0,1$  Вб/( $m^2 \cdot c$ ).



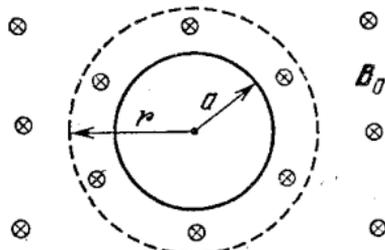
К задаче 2.9.

2.10\*. Плоская спираль с очень большим числом витков и наружным радиусом  $R$  находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости спирали и изменяется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ . Найдите э. д. с. индукции в спирали. Расстояние между витками спирали постоянно.

2.11\*. На непроводящем кольце массы  $m$  и радиуса  $R$  равномерно распределен заряд  $q$ . Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоится. В центральной области кольца радиуса  $a < R$  имеется перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого  $B_0$ . Индукция магнитного поля равномерно уменьшается до нуля. Какую угловую скорость приобретет кольцо к моменту исчезновения поля? Изменится ли результат, если индукция магнитного поля будет уменьшаться до нуля неравномерно? Индукция магнитного поля, создаваемого вращающимся кольцом, много меньше индукции внешнего магнитного поля.



К задаче 2.10\*.



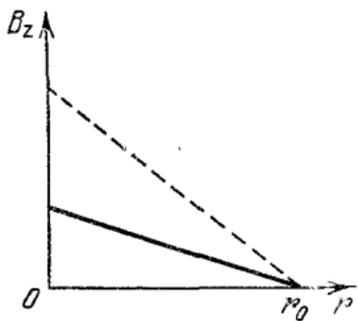
К задаче 2.12\*.

2.12\*. Вне цилиндра радиуса  $a$  индукция однородного магнитного поля нарастает линейно во времени:  $B_0 = at$ . Как должна меняться во времени индукция однородного

магнитного поля. внутри цилиндра, чтобы электрон двигался по окружности радиуса  $r > a$ ? При  $t = 0$  электрон покоится.

2.13\*. В однородном магнитном поле электрон движется по окружности определенного радиуса. Уменьшается или увеличивается радиус кривизны траектории электрона при медленном возрастании индукции магнитного поля?

2.14\*. Индукция магнитного поля зависит от расстояния до оси  $z$  так, как изображено на рисунке. Магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . На каком расстоянии от оси вращается электрон, который при возрастании поля остается на своей орбите? Во сколько раз увеличивается энергия этого электрона при десятикратном увеличении индукции поля? Как будут двигаться при возрастании поля электроны, которые двигались по другим круговым орбитам?



К задаче 2.14\*.

2.15\*. На поверхности длинного сплошного непроводящего цилиндра радиуса  $R$  равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Внешнее однородное магнитное поле индукции  $B_0$  направлено вдоль оси цилиндра. Определите угловую скорость вращения цилиндра после выключения внешнего поля. Плотность вещества цилиндра  $\rho$ .

2.16\*. При ускорении зарядов возникают вихревые электрические поля, которые, если пренебречь излучением, пропорциональны ускорению. Поэтому на движущийся с ускорением  $a$  заряд со стороны этих электрических полей действует сила  $F = m_{эм}a$ . Коэффициент пропорциональности  $m_{эм}$  можно назвать электромагнитной массой заряда.

а) Во сколько раз электромагнитная масса электрона в длинном соленоиде радиуса 0,1 м с числом витков на единицу длины соленоида  $10^3 \text{ м}^{-1}$  больше массы свободного электрона? Сечение провода соленоида  $1 \text{ мм}^2$ , число электронов проводимости в единице объема  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

б) Какими параметрами должен обладать соленоид, чтобы в нем электромагнитная масса электрона была равна массе свободного электрона? Число электронов проводимости в единице объема материала соленоида  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

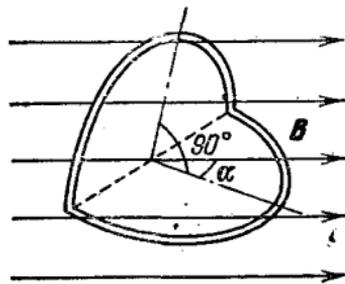
2.17\*. Плоский конденсатор движется с ускорением параллельно своим пластинам. Если ускорение достаточно мало, вихревое электрическое поле в момент, когда скорость конденсатора равна  $v$ , можно рассчитать следующим образом. Вначале рассчитывается индукция магнитного поля как для равномерно движущегося со скоростью  $v$  конденсатора, а затем по изменению индукции этого магнитного поля во времени определяется напряженность вихревого электрического поля. Пусть заряд конденсатора  $q$ , емкость  $C$ . Рассчитайте его ускорение под действием внешней силы  $F$ , если масса незаряженного конденсатора равна  $m$ . Сила  $F$  направлена вдоль пластин.

2.18\*. Эксперименты на встречных электрон-электронных пучках показали, что заряд электрона распределен в области, размеры которой меньше  $10^{-18}$  м. Оцените верхний предел электромагнитной массы электрона. Предложите гипотезу, которая объясняла бы, почему полученная электромагнитная масса  $m_{эм}$  электрона много больше массы свободного электрона  $m_e$ .

### § 11.3. Взаимная индуктивность.

#### Индуктивность проводников. Трансформаторы

3.1. Определите магнитный поток через плоский контур сечения  $S$ , который находится внутри длинного соленоида с током  $I$ . Число витков на единицу длины соленоида  $n$ . Плоскость витка расположена под углом  $\alpha$  к оси соленоида.



К задаче 3.2.

3.2. Виток радиуса  $R$  согнули по диаметру под прямым углом и поместили внутри длинного соленоида так, что одна из плоскостей оказалась расположенной под углом  $\alpha$  к оси соленоида. Число витков на единицу длины соленоида

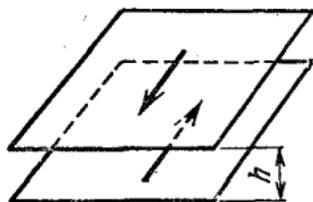
$n$ . Чему равна взаимная индуктивность согнутого витка и соленоида?

3.3. Внутри длинного соленоида находится короткий соленоид радиуса  $r$ . Число витков внутреннего соленоида  $N$ . Радиус внешнего соленоида  $R$ , число витков на единицу длины  $n$ . Чему равна взаимная индуктивность этих соленоидов?

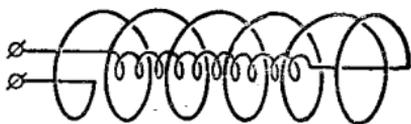
3.4. Короткий соленоид радиуса  $R$  окружает длинный соленоид радиуса  $r$ . Число витков короткого соленоида  $N$ ; число витков на единицу длины длинного соленоида  $n$ . Через короткий соленоид течет ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Определите напряжение на концах длинного соленоида.

3.5. Чему равна индуктивность соленоида радиуса  $R$  и длины  $l$  ( $R \ll l$ )? Число витков на единицу длины соленоида  $n$ .

3.6. Равномерно распределенные токи в двух параллельных плоскостях  $a \times b$  противоположно направлены.



К задаче 3.6.



К задаче 3.10.

Расстояние между плоскостями  $h$ . Оцените индуктивность плоскостей, если  $h$  много меньше линейных размеров плоскостей.

3.7\*. Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек радиусов  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найдите индуктивность линии на единицу длины. По цилиндрам текут равные по модулю, но противоположные по направлению токи.

3.8\*. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $a$  находится коаксиальный провод радиуса  $b$ , магнитная проницаемость которого  $\mu_1$ . Пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ . Найдите индуктивность линии на единицу длины. Ток в проводе равен по модулю и противоположен по направлению току цилиндрической оболочки. Считать, что ток распределен равномерно по сечению провода.

3.9\*. Найдите индуктивность на единицу длины двухпроводной линии. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов радиуса  $a$ , расстояние между осевыми линиями  $h \geq a$ . По проводам текут равные по модулю, но противоположные по направлению токи. Магнитного поля внутри проводов нет.

3.10. Чему равна индуктивность двух соленоидов радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , соединенных так, как показано на рисунке? Внутренний соленоид имеет длину  $l_1$ , внешний  $l_2$ . Число

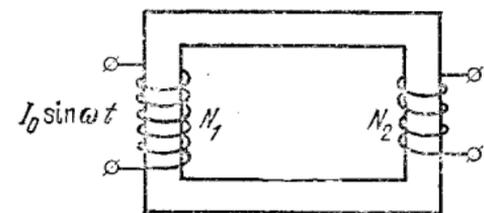
витков на единицу длины внешнего соленоида  $n_1$ , внутреннего  $n_2$ . Рассмотрите случаи, когда направления токов в витках обоих соленоидов: а) одинаковы; б) противоположны.

3.11. Все размеры проводника увеличили в  $k$  раз. Как изменится индуктивность проводника?

3.12. Объем соленоида  $10$  л, его индуктивность  $0,01$  Гн. На соленоид подали напряжение  $10$  В. Через какое время после подачи напряжения индукция магнитного поля в соленоиде станет равной  $0,1$  Тл?

3.13. Цепь состоит из двух последовательно соединенных катушек индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$ . Взаимная индуктивность катушек  $L_{12}$ . Найдите полную индуктивность цепи. Как изменится полная индуктивность, если витки одной катушки перемотать в другую сторону?

3.14\*. На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности  $L_1$  и  $L_2$ . Чему равна взаимная индуктивность? Рассеянием магнитного поля пренебречь.



К задаче 3.15\*.

3.15\*. В первичной катушке трансформатора течет ток  $I_0 \sin \omega t$ . Магнитный поток, создаваемый этим током, практически полностью проходит через железный сердечник

трансформатора. Магнитная проницаемость сердечника  $\mu$ . Определите э. д. с. индукции во вторичной разомкнутой катушке, если число витков в первичной катушке  $N_1$ , а во вторичной  $N_2$ . Какое напряжение подается на первичную катушку? Сечение сердечника трансформатора  $S$ . Эффективная длина сердечника  $l$ .

3.16. Ток в первичной обмотке трансформатора равномерно увеличивают. По какому закону меняется напряжение во вторичной обмотке?

3.17. Покажите, что в трансформаторе без потерь с замкнутой накоротко вторичной обмоткой имеет место соотношение  $I_1/I_2 = N_1/N_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — токи, а  $N_1$  и  $N_2$  — число витков в обмотках.

3.18\*. а) Почему опасно замыкание хотя бы одного витка вторичной обмотки трансформатора?

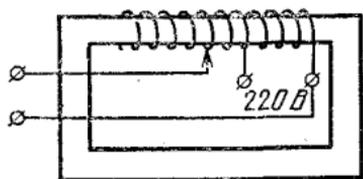
б) Замыкание витка вторичной обмотки приводит иногда к выходу из строя первичной обмотки трансформатора. Почему это происходит?

3.19. Объясните устройство лабораторного регулируемого трансформатора (ЛАТР).

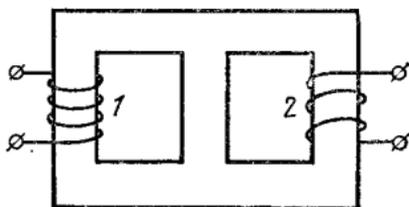
3.20. Почему нагруженный трансформатор гудит? Какова основная частота звука, если трансформатор включен в промышленную сеть?

3.21. Зачем сердечник трансформатора собирают из отдельных пластин?

3.22. Для питания электрического звонка пользуются понижающим трансформатором. Почему обычно кнопка (выключатель) звонка включена во вторичную цепь, а первичная цепь остается постоянно подключенной к сети?



К задаче 3.19.

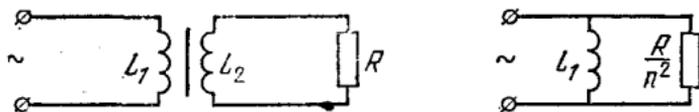


К задаче 3.23.

3.23. На железный сердечник намотаны две катушки. Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в разветвлениях. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напряжением 40 В напряжение на катушке 2 равно 10 В. Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока с напряжением 10 В?

3.24\*. Имеется два одинаковых идеальных трансформатора с коэффициентами трансформации  $1 : 3$ . Первичная обмотка одного из них соединена последовательно со вторичной второго, и свободные концы этих обмоток включены в сеть переменного тока с напряжением 100 В. Вторичная обмотка первого трансформатора последовательно соединена с первичной обмоткой второго. Определите амплитуду переменного напряжения между другими концами обмоток.

3.25\*. Покажите, что трансформатор без рассеяния, омическим сопротивлением обмоток которого можно пренебречь, работающий на омическую нагрузку, представляет для источника э. д. с. такую же нагрузку, как и схема, изображенная на рисунке справа ( $n$  — коэффициент трансформации).



К задаче 3.25\*.

3.26\*. На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью  $\mu = 2000$  намотаны две катушки: первичная содержит 2000 витков, вторичная 4000 витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение 100 В, на разомкнутой вторичной было 199 В. Найдите, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник такого же размера, но из феррита с  $\mu' = 200$ . Рассеянием магнитного потока и потерями в сердечнике пренебречь.

3.27\*. Получите формулу для индуктивности соленоида, не пренебрегая влиянием на индуктивность массы электрона  $m_e$ . Сечение провода соленоида  $S$ ; число электронов проводимости в единице объема проводника  $n_e$ ; длина, радиус и число витков соленоида равны  $l$ ,  $R$  и  $N$ . Можно ли пренебречь этим влиянием для индуктивностей, используемых в радиотехнике?

## § 11.4. Электрические цепи переменного тока

4.1. Батарея без внутреннего сопротивления подключена к соленоиду индуктивности  $L$ . Определите ток в зависимости от времени, если э. д. с. батареи  $\mathcal{E}$ . Найдите работу батареи за время  $\tau$ . В какой вид энергии превращается эта работа?

4.2\*. Генератор с э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  в момент  $t = 0$  подключают к катушке индуктивности  $L$ . Определите ток в цепи в зависимости от времени. Омическим сопротивлением цепи пренебречь. Объясните полученный результат. Можно ли данную схему использовать в качестве выпрямителя?

4.3. В цепи, состоящей из заряженного конденсатора  $C_0$  и соленоида индуктивности  $L$ , замыкают ключ  $K$ . Как в зависимости от времени  $t$  должна изменяться емкость конденсатора, чтобы ток в цепи нарастал прямо пропорционально времени?

4.4. В изображенной на рисунке цепи конденсатор  $C$  заряжен до напряжения  $U_0$ . Сначала замыкают ключ  $K_1$ .

В момент, когда ток через индуктивность  $L$  достигает максимального значения, замыкают ключ  $K_2$ , одновременно размыкая  $K_1$ . Каким оказывается наибольшее значение напряжения на сопротивлении  $R$ ?

4.5. а) В какой момент искрит рубильник — при замыкании или размыкании? Почему искрение прекращается, если параллельно рубильнику включить конденсатор?

б) Частота напряжения в электрической цепи  $\nu$ , индуктивность цепи  $L$ . Какую емкость нужно подсоединить параллельно индуктивности, чтобы при размыкании контакта возникало  $n$ -кратное перенапряжение? Определите эту емкость в случае  $\nu = 50$  Гц,  $L = 0,1$  Гн,  $n = 10$ .

4.6. Источник с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и нулевым внутренним сопротивлением в момент времени  $t = 0$  подключают к последовательно соединенным индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . Найдите максимальный ток в цепи и максимальный заряд конденсатора.

4.7. Найдите максимальные токи в индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$  после замыкания ключа  $K$  в цепи, изображенной на рисунке. Емкость конденсатора  $C$ , начальное напряжение  $U$ .

4.8. В схеме, изображенной на рисунке, в момент времени  $t = 0$  замыкают ключ. Определите ток в цепи, если: а) источник дает постоянное напряжение  $U_0$ ; б) источник дает косинусоидальное напряжение  $U_0 \cos \omega t$ . Определите максимальный ток, если  $U_0 = 100$  В,  $L = 10^{-2}$  Гн,  $C = 10^{-3}$  Ф,  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц.

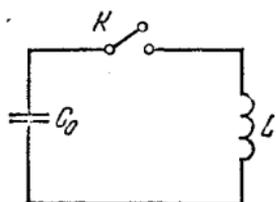
4.9\*. В момент времени  $t = 0$  ток в контуре равен  $I_0$ , а напряжение на индуктивности равно нулю. Найдите ток в последующие моменты времени. Через какое время электромагнитная энергия контура уменьшится вдвое? Считать  $R \ll \sqrt{LC}$ .

4.10. Найдите установившийся ток в цепи, изображенной на рисунке. Катушки не обладают взаимной индуктивностью.

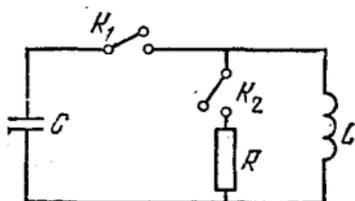
4.11. Схема моста приведена на рисунке. При каких соотношениях величин  $L$  и  $C$  ток через гальванометр будет равен нулю?

4.12. Подберите индуктивность дросселя  $L$  так, чтобы амплитуда напряжения  $U_2$  на выходе фильтра при частоте 100 Гц была в 10 раз меньше амплитуды  $U_1$  на входе.

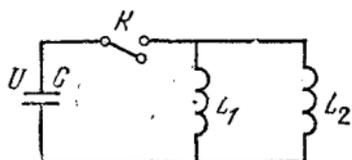
4.13\*. Имеется фазосдвигающая цепь. К клеммам  $A$  и  $B$  подводится напряжение  $V = V_0 \sin \omega t$ , а с клемм  $M$



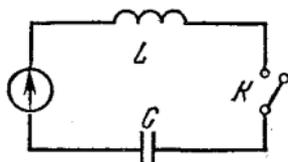
К задаче 4.3.



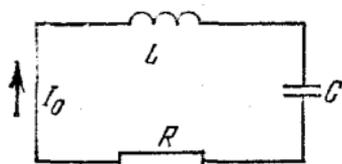
К задаче 4.4.



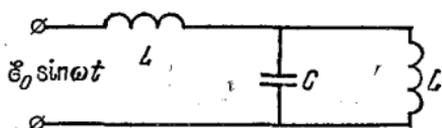
К задаче 4.7.



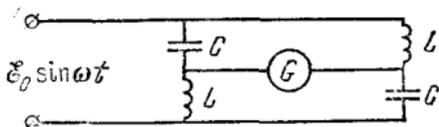
К задаче 4.8.



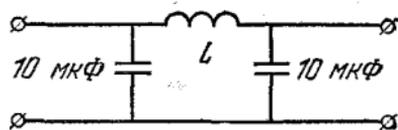
К задаче 4.9\*.



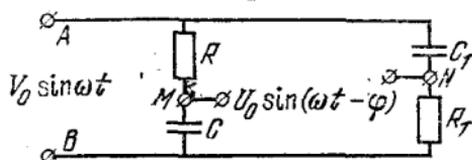
К задаче 4.10.



К задаче 4.11.



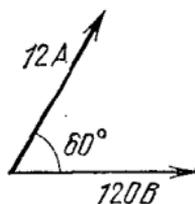
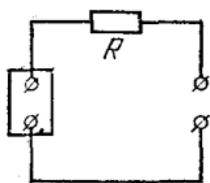
К задаче 4.12.



К задаче 4.13\*.

и  $N$  снимается напряжение  $U = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$ . Найдите  $U_0$  и  $\varphi$  при  $RC = R_1 C_1$ .

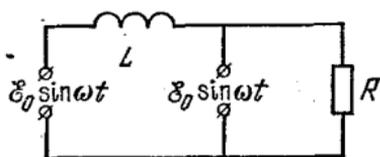
4.14. Значения напряжения, тока и сдвига фаз между напряжением и током в цепи нагрузки показаны на век-



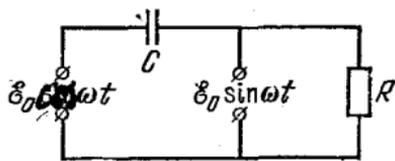
К задаче 4.14.

торной диаграмме. Определите амплитуду э. д. с. источника и к. п. д. установки, если  $R = 10$  Ом.

4.15. Найдите установившиеся токи в электрических цепях, изображенных на рисунке. Внутренние сопротивления источников напряжения равны нулю. Определите



а)



б)

К задаче 4.15.

средние мощности, выделяющиеся в цепях, если  $\mathcal{E}_0 = 200$  В,  $R = 100$  Ом,  $C = 10^{-4}$  Ф,  $L = 1$  Гн. Частота напряжения источника  $\omega = 2\pi \cdot 50$  с $^{-1}$ .

4.16. Последовательно с электроплиткой в городскую сеть подключили катушку индуктивности  $L$ . При этом мощность плитки упала в 2 раза. Найдите индуктивность. Рабочее сопротивление плитки  $R = 50$  Ом. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

4.17. Найдите действующее значение напряжения генератора, вырабатывающего прямоугольные импульсы с периодом  $T$ , длительностью  $\tau$  и амплитудой  $V_0$ .

4.18. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вдвинуть железный сердечник, то свечение лампочки усиливается. Если же сердечник вдвинуть во вторую катушку, то све-

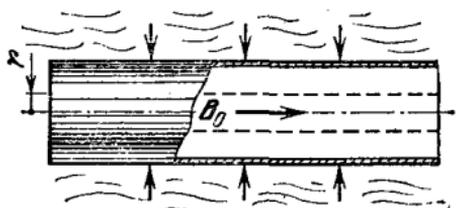


Определите зависимость  $\varphi$  от  $\omega$ ,  $L$ ,  $C$ . Чему равна скорость распространения синусоидальной волны по  $LC$ -цепочке, если длина ячейки  $l$ ? Когда эта скорость слабо зависит от  $\omega$ ?

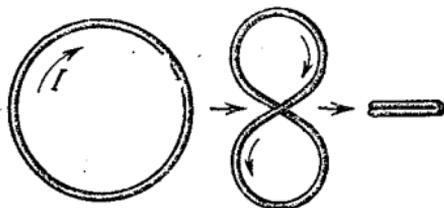
## § 11.5. Сохранение магнитного потока. Сверхпроводники в магнитном поле

5.1. Почему при деформации сверхпроводящего кольца с током полный магнитный поток через кольцо сохраняется?

5.2. Цилиндрическую металлическую оболочку радиуса  $R$ , которая находилась в постоянном магнитном поле индукции  $B_0$ , взрывом сжали до радиуса  $r$ . Определите индукцию магнитного поля внутри сжатой оболочки. Активным сопротивлением оболочки пренебречь.



К задаче 5.2.



К задаче 5.4.

5.3. Как изменится ток в двух удаленных друг от друга одинаковых тонких кольцах из сверхпроводника с током  $I$  при их совмещении?

5.4. Сверхпроводящее кольцо с током  $I$  свернули в «восьмерку», а затем сложили в двойное кольцо. Определите ток в двойном кольце. Во сколько раз индукция магнитного поля в центре двойного кольца больше индукции магнитного поля в центре первоначального кольца?

5.5. Короткозамкнутый длинный соленоид с током  $I$ , сделанный из сверхпроводника, сжали так, что его длина уменьшилась в 3 раза. Как изменится ток в соленоиде? Шаг витка соленоида много меньше его радиуса.

5.6. По короткозамкнутой сверхпроводящей катушке длины  $l_0$  протекает средний ток  $I_0$ . Длина катушки меняется по закону  $l = l_0 + a \cos \omega t$  ( $a \ll l_0$ ). Найдите зависимость тока от времени.

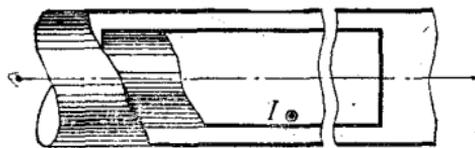
5.7. Проводящее кольцо индуктивности  $L$  находится во внешнем магнитном поле (магнитный поток через контур

кольца равен  $\Phi_0$ ), затем температура понижается и кольцо переводится в сверхпроводящее состояние. Какой ток будет течь по кольцу, если выключить внешнее магнитное поле?

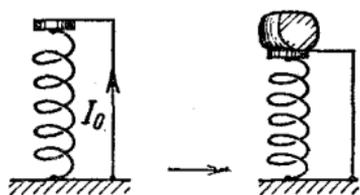
5.8. Сверхпроводящее кольцо индуктивности  $L$ , в котором течет ток  $I_0$ , вносится в однородное магнитное поле индукции  $B_0$ . Найдите ток, который будет протекать по кольцу. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением  $B_0$  угол  $\alpha$ ; радиус кольца  $a$ .

5.9\*. В постоянном однородном магнитном поле индукции  $B$  находится круглое проводящее кольцо радиуса  $a$ . В начальный момент плоскость кольца параллельна полю и ток в кольце отсутствует. Определите ток в кольце после поворота его так, что плоскость стала перпендикулярна магнитным силовым линиям. Вычислите индукцию поля в центре кольца и постройте примерный график изменения индукции поля по одному из диаметров. Индуктивность кольца  $L$ .

5.10\*. Через катушку сечения  $S$  и длины  $h$ , изготовленную из сверхпроводящей проволоки, пролетает с постоянной скоростью сверхпроводящий стержень сечения  $\sigma$  и длины  $l$ . Начертите график зависимости тока в катушке от положения стержня, если катушка замкнута накоротко и начальный ток в ней  $I_0$ . Рассмотрите случаи: а)  $l \geq h$ ; б)  $l < h$ . Краевыми эффектами пренебречь.



К задаче 5.11\*.



К задаче 5.13\*.

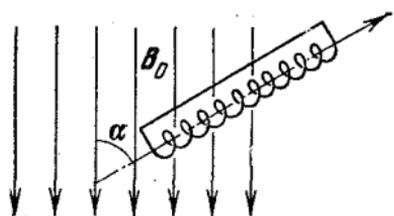
5.11\*. Вычислите индуктивность сверхпроводящего круглого соленоида сечения  $S$  и длины  $h$  ( $h \geq \sqrt{S}$ ), помещенного на оси длинной сверхпроводящей цилиндрической трубы. Площадь зазора между трубой и соленоидом  $\sigma$  ( $h \geq \sqrt{\sigma}$ ). Число витков соленоида  $N$ . Найдите силы, действующие на соленоид при протекании по нему тока  $I$ .

5.12\*. Через длинный прямой провод, который находится на высоте  $h$  над сверхпроводящей плоскостью, пропустили ток  $I$ . Чему равно максимальное магнитное да-

ление на поверхность сверхпроводника? С какой силой действует сверхпроводник на единицу длины провода?

5.13\*. В короткозамкнутом сверхпроводящем соленоиде течет ток  $I_0$ . Определите установившуюся высоту соленоида и ток в нем после того, как на верхний торец соленоида положили груз массы  $m$ , если соленоид не деформируется в радиальном направлении, а при деформации в осевом направлении ведет себя как пружина жесткости  $k$ . Сечение соленоида  $S$ , начальная высота  $h_0$ .

5.14\*. Длинный короткозамкнутый соленоид из сверхпроводника вдвигают в магнитное поле индукции  $B_0$  под углом  $\alpha$  к направлению поля. Как распределится индукция магнитного поля в соленоиде, если он лишь наполовину



К задаче 5.14\*.



К задаче 5.16\*.

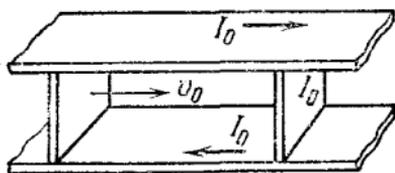
войдет во внешнее поле? Какую работу надо совершить, чтобы вытащить этот соленоид из магнитного поля? Сечение соленоида  $S$ , длина  $l$  ( $l \gg \sqrt{S}$ ).

5.15\*. Вдоль оси длинной сверхпроводящей круглой трубы сечения  $S$  на большом расстоянии расположена короткозамкнутая сверхпроводящая катушка с током  $I$ . Число витков в катушке  $N$ , длина катушки и сечение  $h$  и  $\sigma$ , масса катушки  $m$ . Какую скорость нужно сообщить катушке, чтобы она пролетела сквозь закрепленную трубу?

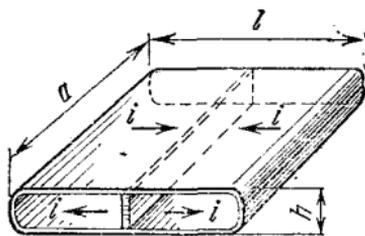
5.16\*. Какой минимальной скоростью должен обладать сверхпроводящий тонкий стержень сечения  $S$ , длины  $l$  и массы  $m$ , чтобы влететь в продольное магнитное поле индукции  $B$ ?

5.17\*. Между двумя шинами с постоянной скоростью  $v_0$  движется поршень по направлению к перемычке массы  $m$ . Они образуют сверхпроводящую цепь. Найдите максимальную скорость перемычки, если в начальный момент она покоилась, ток в цепи был  $I_0$ , а расстояние между поршнем и перемычкой  $x_0$ . Индуктивность на единицу длины шин  $L$ , трения нет.

**5.18\*.** Коробка из сверхпроводника разделена на две равные части сверхпроводящей перемычкой толщины  $d$ . Размеры коробки показаны на рисунке ( $h \ll a, l$ ). По коробке перпендикулярно перемычке циркулирует ток, ли-



К задаче 5.17\*.



К задаче 5.18\*.

нейная плотность которого  $i$ . С какой частотой будет колебаться перемычка, если ей сообщить вдоль коробки небольшую скорость? Масса перемычки  $m$ .

**5.19\*.** Медное кольцо радиуса  $a$  и массы  $m$  висит на нити, совершая малые крутильные колебания с периодом  $T_0$ . Индуктивность кольца  $L$ . Как изменится период колебаний кольца, если его поместить в однородное магнитное поле индукции  $B_0$ , направление которого перпендикулярно плоскости кольца в положении равновесия? Момент инерции кольца относительно оси, проходящей по диаметру, равен  $J$ . Сопротивлением кольца пренебречь.

**5.20\*.** В однородном магнитном поле индукции  $B$  находятся две вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной силовым линиям поля. По рейкам может скользить без трения проводник длины  $l$  и массы  $m$ . Опишите движение проводника, если верхние концы реек замкнуты на индуктивность  $L$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением контактов и реек пренебречь.

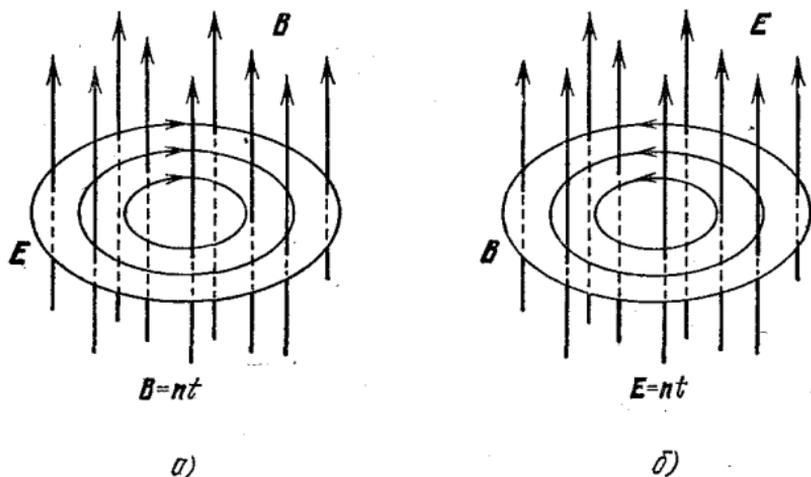
**5.21\*.** Внутри проводящей цилиндрической оболочки создано магнитное поле. Оболочке сообщается скорость  $v$  таким образом, что оболочка начинает сжиматься к оси, не теряя симметрии. Найдите максимальную индукцию магнитного поля, которая может быть получена таким способом, если начальная индукция  $B_0 = 10$  Тл,  $v = 3$  км/с, начальный радиус оболочки  $R = 20$  см, толщина стенки  $0,5$  см, плотность материала оболочки  $8,9$  г/см<sup>3</sup>. Найдите максимальное магнитное давление, действующее на оболочку. Электрическим сопротивлением оболочки пренебречь.

5.22\*. Из-за конечной массы электронов внешнее магнитное поле индукции  $B_0$  не полностью экранируется сверхпроводником и частично проникает в длинную сверхпроводящую трубку. Ось трубки направлена вдоль магнитного поля, радиус трубки  $R$  много больше толщины стенки трубки  $h$ . Число сверхпроводящих электронов в единице объема материала трубки  $n_e$ . Рассчитайте индукцию этого поля в случае  $B_0 = 10$  Тл,  $R = 1$  мм,  $h = 0,1$  мм,  $n_e = 10^{20}$  см $^{-3}$ .

5.23\*. Если раскрутить до угловой скорости  $\omega$  длинный сверхпроводящий тонкостенный цилиндр вокруг его оси, то внутри цилиндра возникает магнитное поле. Найдите его индукцию.

## § 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным

6.1. Согласно закону электромагнитной индукции переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Точно так же переменное электрическое поле

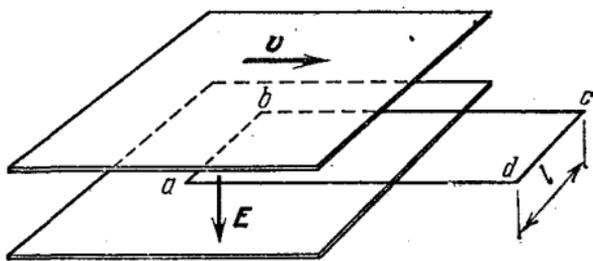


К задаче 6.1.

порождает вихревое магнитное поле, только при изменении электрического поля направление вектора  $B$  образует правый винт с направлением вектора  $dE/dt$ . Коэффициент же пропорциональности в СГС, связывающий абсолютное значение циркуляции (работы) по контуру вектора одного поля со скоростью изменения потока вектора через этот контур другого поля, в обоих явлениях одинаков. Пользуясь этим свойством электромагнитного поля, определите

в СГС и СИ зависимость циркуляции вектора индукции магнитного поля по контуру от скорости изменения потока напряженности электрического поля через этот контур.

6.2. а) Плоский конденсатор движется со скоростью  $v$  вдоль своих пластин. Напряженность электрического поля между пластинами  $E$ . Определите скорость изменения потока напряженности электрического поля через прямоугольный контур  $abcd$  и циркуляцию вектора индукции магнитного поля по этому контуру. Как связаны искомые величины в СИ? В СГС?



К задаче 6.2.

б) Приведите примеры, подтверждающие пропорциональность циркуляции вектора индукции магнитного поля по контуру скорости изменения потока напряженности электрического поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

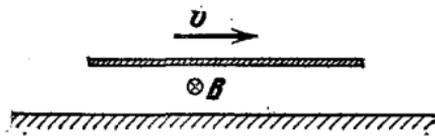
6.3. Чему был равен поток напряженности электрического поля через площадь, ограниченную замкнутым контуром, если при равномерном убывании этого потока до нуля в течение  $1 \text{ мкс}$  в контуре возникает циркуляция вектора индукции магнитного поля  $0,001 \text{ Тл} \cdot \text{м}$ ?

✓ 6.4\*. Магнитное поле при разрядке конденсатора создается не только током в проводнике, но и изменяющимся электрическим полем в пространстве между обкладками конденсатора, причем изменяющееся электрическое поле создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток, равный току в проводнике. Докажите это.

6.5. Напряженность однородного электрического поля внутри плоского конденсатора с обкладками радиуса  $10 \text{ см}$  линейно растет со временем:  $E = at$ , где  $a = 9 \cdot 10^{10} \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{с})$ . Чему равна индукция магнитного поля внутри конденсатора на расстоянии  $5 \text{ см}$  от его оси? Постройте график зависимости индукции магнитного поля от расстояния до оси в средней плоскости конденсатора.

6.6. В колебательном контуре возбудили свободные колебания. Во сколько раз максимальная индукция магнитного поля внутри плоского конденсатора меньше максимальной индукции магнитного поля в катушке индуктивности? Радиус пластин конденсатора  $R$ , длина катушки  $L$ , число витков  $N$ .

6.7. Плоский конденсатор, напряженность электрического поля внутри которого  $E$ , движется со скоростью  $v$ . Вектор скорости образует угол  $\alpha$  с плоскостью пластин. Чему равна индукция магнитного поля внутри конденсатора?



К задаче 6.8.

6.8. При движении равномерно заряженной пластины со скоростью  $v$  параллельно поверхности металла возникает магнитное поле индукции  $B$ . Определите поверхностную плотность заряда пластины.

6.9. а) Внутри плоского конденсатора параллельно его обкладкам движется со скоростью  $v$  пластина из проводника, толщина которой равна половине расстояния между обкладками конденсатора. Между обкладками конденсатора поддерживается напряжение  $U$ , расстояние между ними  $h$ . Чему равна индукция магнитного поля внутри проводника? Между движущимся проводником и обкладками конденсатора?

б\*) Как изменится индукция магнитного поля в движущейся пластине, если проводник в задаче а) заменить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

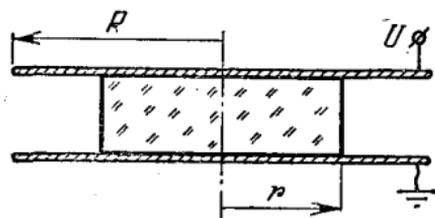
6.10\*. В неподвижной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  движется параллельно своим пластинам плоский заряженный конденсатор. Как изменится индукция магнитного поля внутри конденсатора, если среда будет двигаться вместе с ним?

6.11\*. а) Напряженность электрического поля внутри круглого плоского конденсатора, заполненного веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , линейно растет со временем:  $E = at$ . Определите индукцию магнитного поля внутри конденсатора на расстоянии  $r$  от его центра.

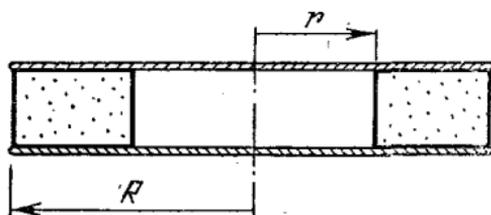
б) Напряжение на обкладках плоского конденсатора линейно растет со временем:  $U = at$ . Радиус обкладок  $R$ , расстояние между ними  $h$ . По оси конденсатора вставлен диэлектрический цилиндр радиуса  $r$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Определите индукцию магнитного поля

на боковой поверхности цилиндра и на краю конденсатора.

6.12\*. Плоский изолированный конденсатор, пластины которого — параллельные металлические круги радиуса  $R$ , заполнен веществом, исключая центральную цилиндрическую область радиуса  $r$ . Конденсатор разряжается через



К задаче 6.11\*б.



К задаче 6.12\*.

это вещество. Ток разрядки равен  $I$ . Определите зависимость индукции магнитного поля внутри конденсатора от расстояния до оси конденсатора. Постройте график этой зависимости.

## Глава 12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн

1.1. На рисунке изображен «моментальный снимок» электромагнитной волны. Векторы  $E$  и  $B$  в волне перпендикулярны друг другу и перпендикулярны направлению распространения волны. Если вращать буравчик с правой нарезкой от вектора  $E$  к вектору  $B$ , то поступательное перемещение буравчика будет совпадать с вектором скорости волны  $c$ . Пользуясь этим правилом, определите, в каком направлении распространяется волна, изображенная на рисунке.

1.2. Как изменится направление распространения электромагнитной волны, если в волне изменить на противоположное направление: а) вектора индукции магнитного поля; б) вектора индукции магнитного поля и вектора напряженности электрического поля?

1.3. а) На рисунке изображено электрическое поле плоской синусоидальной волны в нулевой момент времени. Направление распространения волны указано стрелкой

Как зависит напряженность электрического поля от  $z$  и  $t$ ?

б\*) Получите уравнение плоской синусоидальной волны, которая распространяется вдоль линии, составляющей углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с осями координат. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0$ , длина волны  $\lambda$ .

1.4. Две синусоидальные волны с одной поляризацией  $E_1 \sin [\omega (t - z/c) + \varphi_1]$  и  $E_2 \sin [\omega (t - z/c) + \varphi_2]$  накладываются друг на друга. Чему равна амплитуда напряженности электрического поля результирующей волны? Чему равна фаза этой волны?

1.5. Две плоские синусоидальные волны, амплитуды которых равны  $E_0$ , имеют частоты  $\omega$  и  $\omega + \Delta$  ( $\Delta \ll \omega$ ) и распространяются в одном направлении, накладываются друг на друга. Чему равна максимальная амплитуда результирующей волны? Определите распределение средней плотности энергии результирующей волны вдоль направления распространения волн.

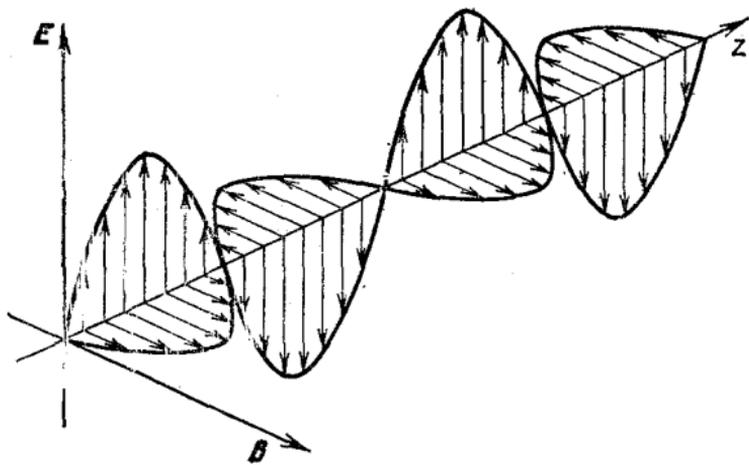
1.6. а) Электромагнитная волна занимает пространство между двумя параллельными бесконечными плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ . Изображенный участок электромагнитного поля движется со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $AB$ . Напряженность электрического поля волны  $E$ . Применяя закон электромагнитной индукции к прямоугольному контуру  $a'b'ba$ , определите индукцию магнитного поля волны в СИ и СГС.

б\*) Синусоидальная волна распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  со скоростью  $c/\sqrt{\epsilon}$ . Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0$ . Определите амплитуду индукции магнитного поля.

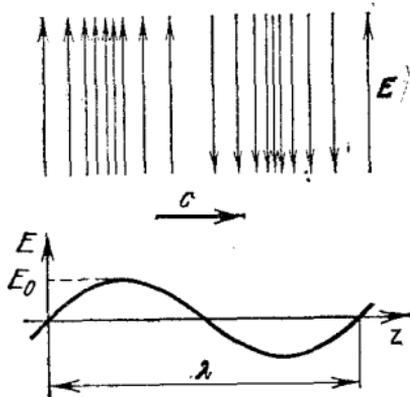
1.7. а) На рисунке изображены напряженности электрического поля бегущих навстречу друг другу плоских электромагнитных волн в нулевой момент времени. Нарисуйте графики распределения  $E$  и  $B$  полей этих волн в моменты времени  $\frac{1}{2} \frac{a}{c}$ ,  $\frac{3}{4} \frac{a}{c}$ ,  $\frac{a}{c}$ . Чему равно отношение энергии электрического поля и энергии магнитного поля к общей энергии в эти моменты времени?

б) Однородное электрическое поле напряженности  $E$  занимает пространство между плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ . Расстояние между плоскостями  $d$ . Это поле образовалось при наложении двух плоских электромагнитных волн. Определите эти волны.

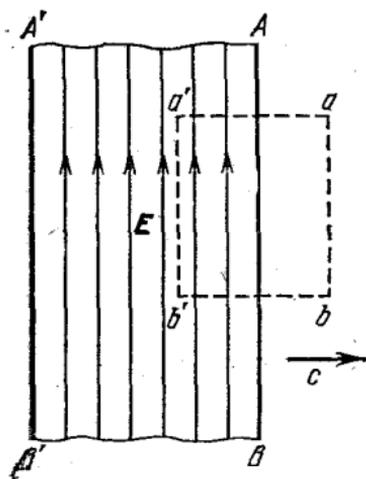
в) На какие электромагнитные волны распадается свободное магнитное поле индукции  $B$ , сосредоточенное между



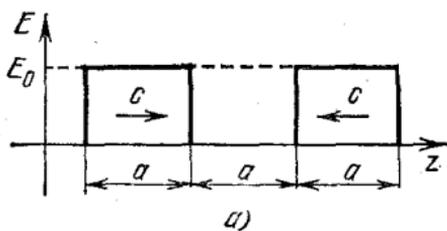
К задаче 1.1.



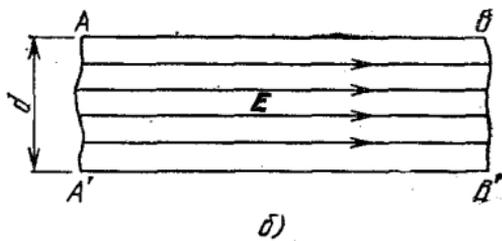
К задаче 1.3а.



К задаче 1.6а.



а)



б)

К задаче 1.7.

плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ ? Вектор индукции магнитного поля параллелен плоскостям.

1.8. а) Движущееся заряженное тело имеет магнитное поле, а неподвижное — нет. Поэтому при мгновенной остановке тела магнитное поле станет «лишним», свободным. Оно распадается на электромагнитные волны. Таким образом, процесс излучения электромагнитных волн можно рассматривать как распад «лишних» полей, возникающих при изменении скорости заряженного тела. Особенно просто этот процесс описывается при остановке плоского конденсатора. Если конденсатор двигался со скоростью  $v$  вдоль своих пластин, то индукция магнитного поля  $B$  в движущемся конденсаторе связана с напряженностью электрического поля  $E$  соотношением  $B = \frac{v}{c^2} E$ . При мгновенной остановке индукция  $B$  оказывается «лишней». Тогда это поле можно считать наложением двух электромагнитных волн с индукцией  $B/2$ , движущихся в противоположных направлениях перпендикулярно пластинам, так как суммарная индукция магнитного поля этих волн равна  $B$ , а суммарная напряженность электрического поля равна нулю. Определите напряженность электрического поля в каждой волне.

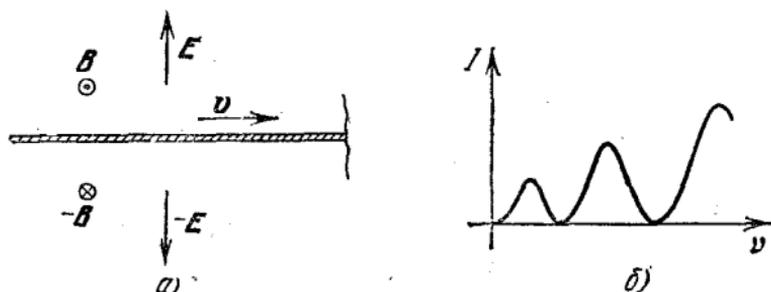
б\*) Какую энергию излучит при мгновенной остановке заряд  $Q$ , распределенный на сфере радиуса  $R$ ? Скорость сферы до остановки  $v$ .

в) Между двумя проводами, разделенными воздушным промежутком, повышали напряжение до тех пор, пока между ними не проскочила искра. После этого возникли электромагнитные колебания тока, которые стали источником электромагнитных волн. Оцените, во сколько раз увеличится мощность излучения этих волн, если пробойное напряжение в два раза увеличится?

1.9\*. а) Заряженная плоскость с электрическим полем напряженности  $\pm E$ , движущаяся вдоль своей плоскости со скоростью  $v$ , создает магнитное поле индукции  $B = \pm \frac{v}{c^2} E$ . Поэтому при уменьшении скорости на  $dv$  в окружающем пространстве возникает «лишнее» магнитное микрополе индукции  $dB = \pm \frac{dv}{c^2} E$ . Распад таких микрополей дает электромагнитную волну, напряженность электрического поля которой зависит лишь от скорости плоскости:

$$E_{\text{изл}}(t, x) = cB_{\text{изл}}(t, x) = c \frac{v_t - x/c}{c^2} E = \frac{v_t - x/c}{c} E.$$

Индекс  $t - x/c$  означает, что на расстоянии  $x$  от плоскости значение скорости плоскости нужно брать в момент времени  $t - x/c$ . Например, напряженность электрического поля излучения пластины, скорость которой равна  $v_0 \sin \omega t$ , на расстоянии  $x$  от пластины в момент времени  $t$  равна  $\frac{v_0}{c} \sin \omega (t - x/c) E$ , так как скорость пластины в момент времени  $t - x/c$  была равна  $v_0 \sin \omega (t - x/c)$ . Пользуясь формулой  $E_{\text{изл}} = \frac{v_{t-x/c}}{c} E$ , определите напряженность электрического поля в плоской волне, излучаемой плоским



К задаче 1.9\*.

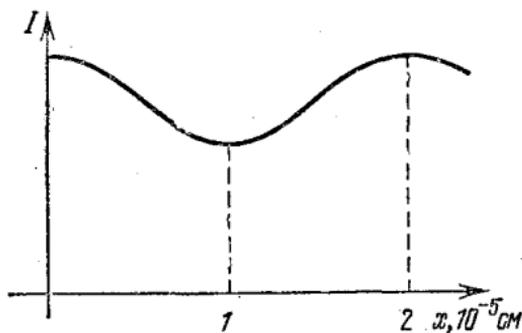
конденсатором при движении с постоянным ускорением  $a$ , направленным вдоль его пластин. Расстояние между пластинами  $d$ , напряженность электрического поля внутри конденсатора  $E$ .

б) Заряженный плоский конденсатор раскачивают вдоль его пластин. С увеличением частоты колебаний  $\nu$  средняя интенсивность излучения конденсатора  $I$  сначала увеличивается, потом уменьшается до нуля, затем опять увеличивается и т. д. (см. рис.). Чем объясняется такое чередование интенсивности излучения? При каких частотах конденсатор не излучает энергию? Оцените частоту, при которой наблюдается 1-й и  $k$ -й максимумы излучения.

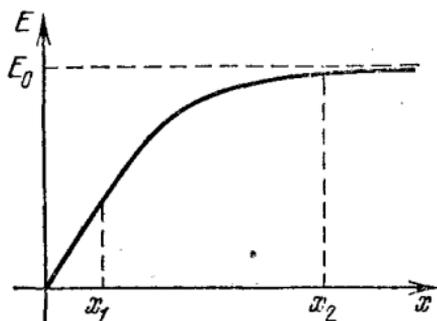
в) Линейная плотность тока на плоскости меняется синусоидально с амплитудой  $i_0$ . Определите амплитуду напряженности электрического поля в волне, излучаемой плоскостью.

г) Определите коэффициент отражения электромагнитной волны, падающей перпендикулярно на тонкую проводящую пленку. Толщина пленки  $\Delta$ , число электронов проводимости в единице объема  $n_e$ , частота волны  $\nu$ .

**1.10.** При раздвигании двух параллельных полупрозрачных зеркальных пластин интенсивность электромагнитного излучения, прошедшего через эти пластины, периодически меняется в зависимости от расстояния между пластинами. Объясните это явление и определите, пользуясь рисунком, длину волны падающего излучения. Излучение распространяется перпендикулярно пластинам.



К задаче 1.10.



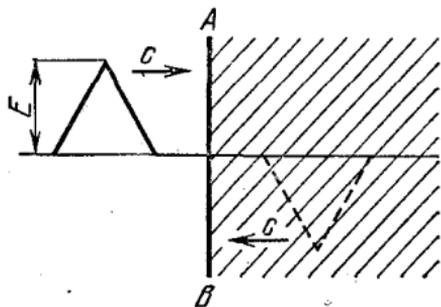
К задаче 1.11.

**1.11.** Амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны, отраженной от проводящей пленки, тем больше, чем толще пленка. На рисунке приведена типичная зависимость амплитуды отраженной волны от толщины пленки. В начальный момент (до точки  $x_1$ ) амплитуда линейно зависела от толщины пленки  $x$ , затем линейная зависимость нарушается, и в области  $x > x_2$  амплитуда отраженной волны мало отличается от амплитуды падающей волны  $E_0$ . Объясните эту зависимость.

**1.12. а)** Оцените глубину проникновения перпендикулярно падающей электромагнитной волны в проводник. Частота волны  $\nu$ , число электронов проводимости в единице объема  $n_e$ .

б) Решите задачу а) в видимой области ( $\nu = 10^{15}$  Гц) для металла с  $n_e = 10^{22}$  см $^{-3}$ .

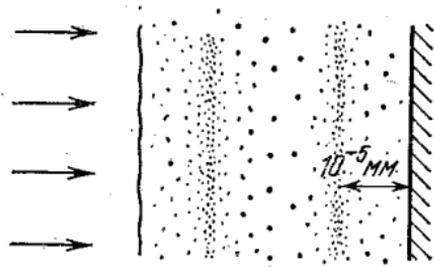
**1.13. а)** При достаточно большом числе электронов проводимости в единице объема металла составляющая напряженности электрического поля волны, параллельная поверхности металла, ослабляется практически до нуля. Поэтому решение задачи взаимодействия электромагнитной



К задаче 1.13а.

волны с металлом сводится к отысканию вблизи поверхности двух таких бегущих волн, наложение которых дает нулевую составляющую напряженности электрического поля вдоль поверхности. Такими электромагнитными волнами являются при перпендикулярном падении на металлическую стенку две волны: одна волна реально движется в пространстве вне металла, а другая, фиктивная, «перевернутая» волна движется навстречу первой внутри металла (на рисунке эта область вместе с фиктивной волной находится справа от плоскости  $AB$ ). Фиктивная волна становится реальной, как только она выходит за границу  $AB$ , где она накладывается на первую волну. Наложение этих волн слева от плоскости  $AB$  дает нулевую напряженность электрического поля вдоль  $AB$  и, следовательно, решает поставленную задачу. Используя описанный прием, найдите напряженность и индукцию электромагнитного поля вблизи плоскости  $AB$  в момент, когда вершина падающей волны достигает плоскости.

б\*) Амплитуда напряженности электрического поля плоской синусоидальной волны равна  $E$ . Какое среднее давление оказывает эта волна при нормальном падении на плоскую металлическую стенку?



К задаче 1.14.

1.14. Слой фотоэмульсии нанесен на зеркальную металлическую подложку. При нормальном падении света на расстоянии  $10^{-5}$  мм от металлической поверхности происходит почернение эмульсии.

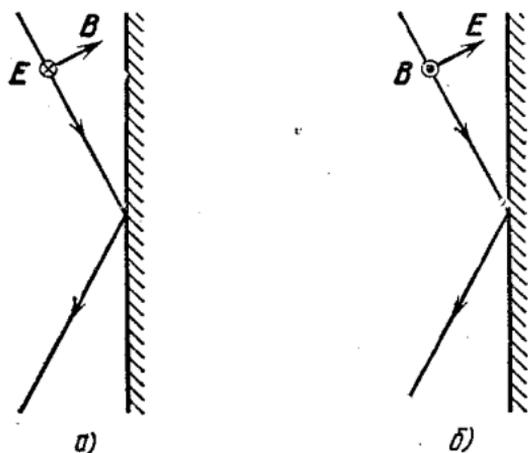
Объясните этот эффект. Определите длину волны света, падающего на металлическую поверхность. На каком расстоянии будет находиться второй слой почернения?

1.15. Пользуясь методом, изложенным в задаче 1.13, докажите, что угол падения электромагнитной волны равен углу отражения. Рассмотрите случаи: а) вектор  $E$  падающей на металл электромагнитной волны параллелен металлической поверхности; б) вектор  $B$  электромагнитной волны параллелен металлической поверхности.

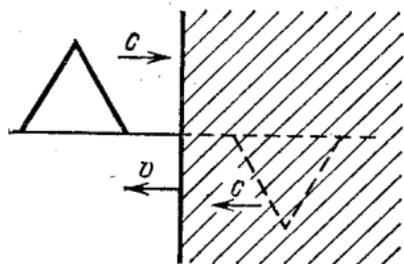
1.16. Среднее давление плоской синусоидальной волны, падающей под углом  $\alpha$  на металлическую поверхность, равно  $P$ . Определите амплитуду напряженности электрического поля этой волны.

1.17\*. а) Оцените максимальный размер алюминиевых пылинок, которые в космическом пространстве под давлением солнечных лучей удалялись бы от Солнца.

б) Чему равно давление солнечных лучей на зеркальную поверхность вблизи Земли при нормальном падении лучей на зеркало? При падении лучей на зеркало под углом  $30^\circ$ ?



К задаче 1.15.



К задаче 1.18\*.

1.18\*. Метод фиктивных волн (см. задачу 1.13) можно использовать и для решения задачи об отражении электромагнитной волны от движущейся со скоростью  $v$  металлической поверхности. Для решения этой задачи нужно подобрать фиктивную волну таким образом, чтобы она, войдя в область вне металла и став «реальной», при наложении на падающую волну давала бы в СГС напряженность электрического поля, в  $v/c$  раз меньшую индукции магнитного. Объясните это условие.

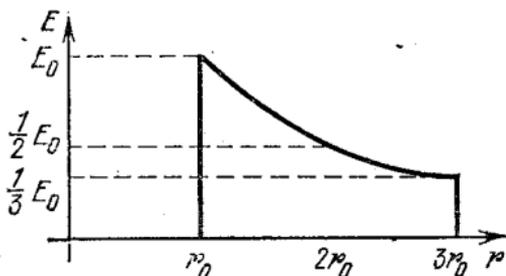
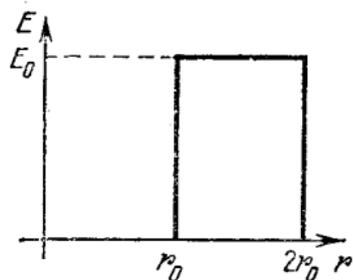
1.19\*. На движущуюся со скоростью  $v$  металлическую стенку падает перпендикулярно плоская электромагнитная волна. Напряженность электрического поля волны  $E$ . Какое давление оказывает волна на стенку?

1.20. При отражении синусоидальной волны, падающей перпендикулярно на движущуюся металлическую стенку, ее частота меняется на  $\Delta$ . Первоначальная частота волны  $\nu_0$ . Определите скорость стенки.

1.21. Почему при переходе электромагнитной волны через плоскую границу вакуум — непроводящая среда: а) нормальная составляющая напряженности электрического поля уменьшается в  $\epsilon$  раз, а параллельная не меняется;

б) нормальная составляющая индукции магнитного поля не меняется, а параллельная увеличивается в  $\mu$  раз?  $\epsilon$  — диэлектрическая,  $\mu$  — магнитная проницаемости среды.

1.22. Как меняется фаза волны, отраженной от плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  в случае  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ? В случае  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ? Волна падает на плоскость раздела перпендикулярно.



К задаче 1.23б.

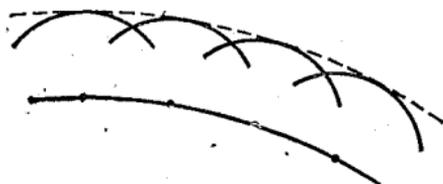
1.23. а) Покажите, что в сферической волне, излучаемой точечным источником, амплитуды напряженности электрического поля и индукции магнитного поля волны убывают обратно пропорционально расстоянию от источника, если энергия волны не поглощается средой.

б) На рисунке изображено распределение электрических полей двух бегущих сферических волн в нулевой момент времени. Изобразите распределение электрических полей в момент времени  $r_0/c$ . Каким будет распределение электрических полей при  $t \rightarrow \infty$ ? Определите энергии этих полей.

б) На рисунке изображено распределение электрических полей двух бегущих сферических волн в нулевой момент времени. Изобразите распределение электрических полей в момент времени  $r_0/c$ . Каким будет распределение электрических полей при  $t \rightarrow \infty$ ? Определите энергии этих полей.

## § 12.2. Распространение электромагнитных волн

2.1. Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждый участок фронта волны является источником вторичной сферической волны. Огибающая этих волн дает новый фронт волны. Покажите, используя этот принцип, что: а) плоский фронт электромагнитной волны перемещается со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости фронта; б) радиус сферического фронта за время  $\tau$  возрастает на  $c\tau$ .



К задаче 2.1.

а) плоский фронт электромагнитной волны перемещается со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости фронта; б) радиус сферического фронта за время  $\tau$  возрастает на  $c\tau$ .

а) плоский фронт электромагнитной волны перемещается со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости фронта; б) радиус сферического фронта за время  $\tau$  возрастает на  $c\tau$ .

2.2. Как изменяются длина и скорость волны при переходе в среду с показателем преломления  $n$ ? Меняется ли частота волны?

2.3. С помощью вторичных волн докажите, что при падении плоской волны на границу раздела двух сред: а) угол падения равен углу отражения ( $\alpha_1 = \alpha_3$ ); б) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скорости волны в первой среде к скорости волны во второй среде ( $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2$ ).

2.4. Найдите углы, определяющие направление минимумов излучения, если плоская волна падает перпендикулярно на щель ширины  $b$ . Длина волны  $\lambda < b$ .

2.5. Ширина штрихов дифракционной решетки много меньше длины волны. Во сколько раз увеличится интенсивность излучения в направлении максимума излучения, если число штрихов дифракционной решетки увеличить в  $k$  раз?

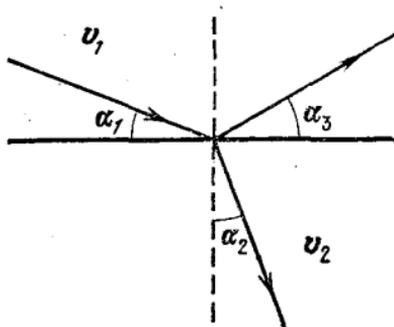
2.6. На стеклянную дифракционную решетку, имеющую 200 линий на 1 мм и покрытую тонким слоем золота, падает очень узкий пучок  $K_\alpha$ -излучения меди ( $\lambda = 1,541 \cdot 10^{-10}$  м) под углом  $20'$  к ее поверхности. Определите разность углов отражения между пучками первого и нулевого порядка.

2.7. На отверстие радиуса  $r$  падает перпендикулярно плоская синусоидальная волна. Длина волны  $\lambda \ll r$ . Интенсивность волны по оси  $z$  периодически меняется. На каком расстоянии от центра отверстия находится последний максимум? Определите расстояние между максимумами интенсивности на удалении  $z_0$  от центра отверстия, если  $r^2 / \lambda \gg z_0 \gg r$ .

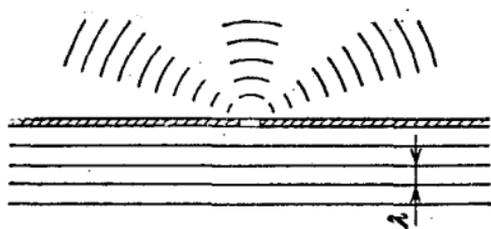
2.8. Если круглое отверстие (например, ирисовая диафрагма) увеличивается таким образом, что размер его от одной зоны Френеля доходит до двух зон, то в точке  $A$  интенсивность излучения значительно уменьшится, падая до нуля, хотя поток излучения через отверстие возрастает почти в два раза. Каким образом согласуются эти два факта?

2.9\*. На экран, имеющий круглое отверстие, падает параллельный пучок света. Радиус отверстия совпадает с радиусом центральной зоны Френеля для точки  $A$  (см. рис. к задаче 2.8). Используя графический метод, определите, во сколько раз интенсивность света от центральной зоны была бы больше интенсивности света, приходящего в эту же точку, если бы не было экрана.

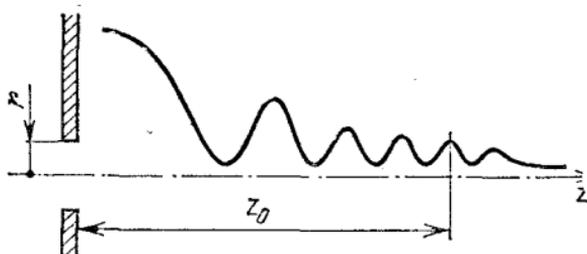
2.10. Изобразите на графике зависимость интенсивности света в точке  $A$  от радиуса отверстия, перекрывающего параллельный поток излучения с длиной волны  $\lambda$ . Расстоя-



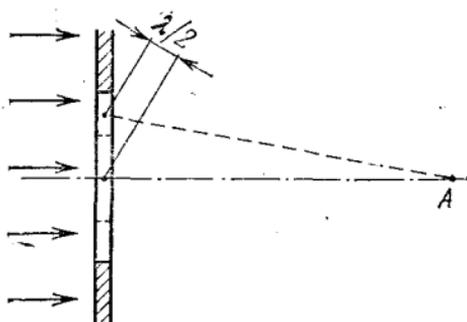
К задаче 2.3.



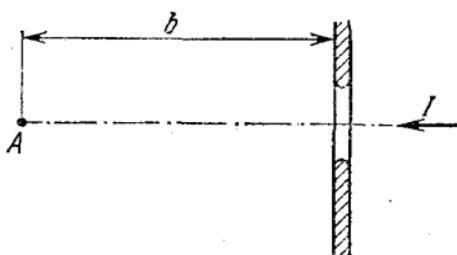
К задаче 2.4.



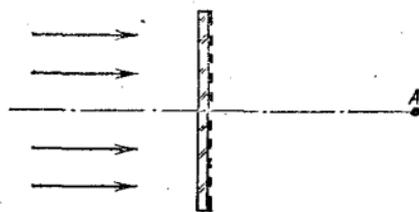
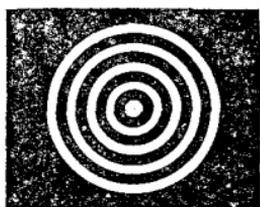
К задаче 2.7.



К задаче 2.8.



К задаче 2.10.



К задаче 2,11\*.

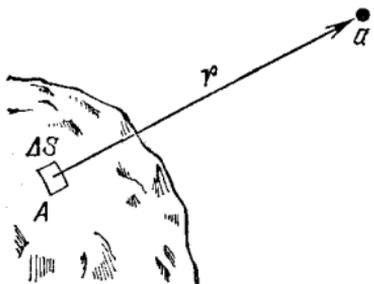
ние от точки  $A$  до центра отверстия  $b$ . Интенсивность излучения в потоке  $I$ .

2.11\*. а) На рисунке изображена плоская стеклянная пластинка. Этой пластинкой перекрыли параллельный поток монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . Оказалось, что зачерненные кольцевые участки пластинки совпали с четными зонами Френеля для осевой точки  $A$ . Как изменилась интенсивность света в этой точке?

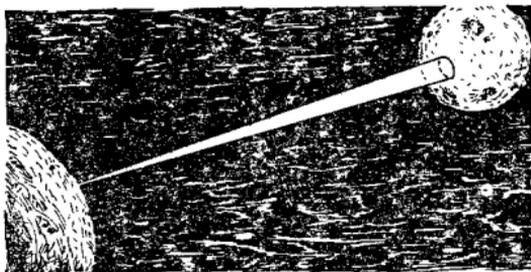
б) Параллельный поток монохроматического света перекрыли пластинкой, которая отличается от пластинки в задаче а) тем, что зачерненные кольцевые участки покрыты слоем диэлектрика, изменяющего фазу проходящей волны на  $\pi$ . Как изменилась интенсивность света в точке  $A$  в этом случае?

2.12\*. Рассчитайте амплитуду элементарной вторичной волны Гюйгенса — Френеля. (Амплитуда  $a$  пропорциональна амплитуде  $A$  колебания, дошедшего от элемента  $\Delta S$ , площади этого элемента и обратно пропорциональна  $r$ , т. е.  $a = c_1 A \Delta S / r$ . Для определения  $c_1$  сравните амплитуду плоской волны в какой-либо точке и амплитуду, рассчитанную по методу Френеля, в этой же точке, когда в качестве вспомогательной поверхности взят фронт плоской волны.)

2.13. а) Оцените размер светового пятна на Луне от лазерного луча. Лазер находится на Земле. Радиус луча



К задаче 2.12\*.



К задаче 2.13а.

лазера 10 см, длина волны  $10^{-5}$  см. (Граница пятна оценивается из условия, что в области пятна лучи, идущие от

отдельных участков фронта волны, не гасят друг друга.)

б) Оцените размеры антенны радара, излучающего трехсантиметровые электромагнитные волны внутри угла  $0,01$  рад.

**2.14.** Оцените минимальный размер предмета на поверхности Земли, который можно сфотографировать со спутника, летящего на высоте  $200$  км, а также минимальный размер предметов на Луне и на Марсе, которые можно сфотографировать с околоземной орбиты. Разрешающая способность фотопленки не ограничивает четкости изображения.

**2.15.** а) Раскаленная нить накала электрической лампы имеет красный оттенок, если смотреть на нее через матовую поверхность плафона. Объясните это явление.

б) Почему красный свет меньше рассеивается туманом?

в) Почему дневное небо голубое?

## Глава 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### § 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света

**1.1.** Определите область полной тени от круглого карандаша, если источником света служит цилиндрическая газосветная лампа. Карандаш и лампа расположены параллельно друг другу.

**1.2.** Матовая электрическая лампочка в виде шара диаметра  $6$  см освещает глобус диаметра  $26$  см. Определите диаметры полной тени и полутени глобуса на стене. Расстояние от глобуса до лампочки  $1$  м, до стены  $2$  м.

**1.3.** «Комната, в которую вступил Иван Иванович, была совершенно темна, потому что ставни были закрыты, и солнечный луч, проходя в дыру, сделанную в ставне, ...ударяясь в противостоящую стену, рисовал на ней пестрый ландшафт из... крыш, деревьев и развешанного на дворе платья, всё только в обращенном виде» (*Н. В. Гоголь. Повесть о том, как поссорился Иван Иванович с Иваном Никифоровичем*). Объясните это явление.

**1.4.** В шторах, затемняющих комнату, образовалось маленькое отверстие. В отверстие заглянуло солнце, и по стене пополз круглый зайчик. Почему форма зайчика не

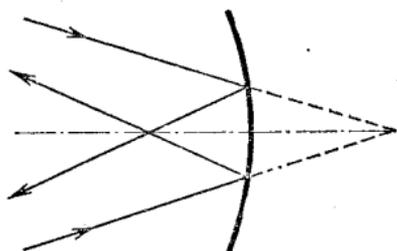
зависит от формы отверстия (треугольное, квадратное)? В каком случае появится зависимость от формы отверстия? (Тот же эффект можно наблюдать при помощи маленького осколка зеркала.)

1.5. При отражении в плоском зеркале предметы кажутся перевернутыми справа налево. Почему же зеркало не «переворачивает» изображение сверху вниз?

1.6. Чтобы получить правильное изображение, нужно составить из двух зеркал двугранный угол с углом при вершине  $90^\circ$ . В такое зеркало можно смотреться из любой точки комнаты. Объясните, почему.

1.7. Определите фокусное расстояние сферического зеркала радиуса  $R$ .

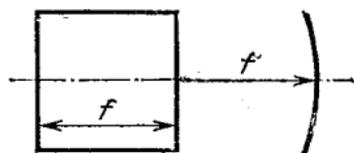
1.8. На вогнутое зеркало падает сходящийся конический пучок световых лучей. На каком расстоянии от фокуса пересекнутся отраженные лучи, если радиус зеркала 80 см, а продолжение лучей пересекает главную оптическую ось на расстоянии 40 см от зеркала?



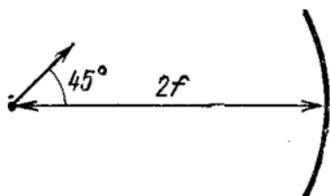
К задаче 1.8.

1.9. Предмет расположен на главной оптической оси вогнутого зеркала на расстоянии 60 см от полюса зеркала. Определите фокусное расстояние зеркала, если изображение предмета действительно и увеличено в 1,5 раза.

1.10. Изображение предмета в вогнутом зеркале увеличено в 3 раза. После того как предмет отодвинули от зеркала на 80 см, его изображение стало в 2 раза меньше предмета. Найдите фокусное расстояние зеркала.



К задаче 1.11.



К задаче 1.12.

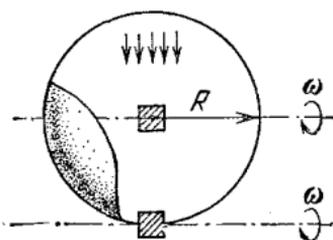
1.11. Постройте изображение квадрата со стороной  $f$ . Передняя сторона квадрата находится на расстоянии  $f$  от полюса сферического зеркала. Фокусное расстояние сферического зеркала  $f$ .

1.12. Постройте изображение стрелки длины  $f/2$ , начало которой расположено в точке  $2f$ . Стрелка наклонена под углом  $45^\circ$  к оптической оси сферического зеркала радиуса  $2f$ .

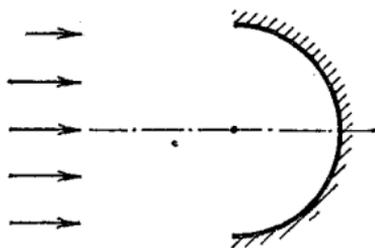
1.13. Покажите, что если расстояния от предмета и изображения до фокуса вогнутого зеркала равны  $l_1$  и  $l_2$ , то  $l_1 l_2 = f^2$ .

1.14\*. Какой формы должна быть отражающая поверхность, чтобы она собирала все параллельные лучи в одной точке?

1.15. Небольшое плоское зеркало вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . С какой скоростью будет перемещаться «зайчик» по сферическому экрану радиуса  $R$ , если зеркало вращается: а) вокруг диаметра экрана; б\*) вокруг касательной? Луч света, падающий на зеркало, перпендикулярен оси вращения.



К задаче 1.15.



К задаче 1.16\*.

1.16\*. Полуцилиндрическое зеркало поместили в широкий пучок света, идущий параллельно плоскости симметрии зеркала. Граница пучка совпадает с плоскостью симметрии зеркала. Найдите максимальный угол между лучами в отраженном от зеркала пучке (угол расхождения).

## § 13.2. Преломление света. Оптические линзы

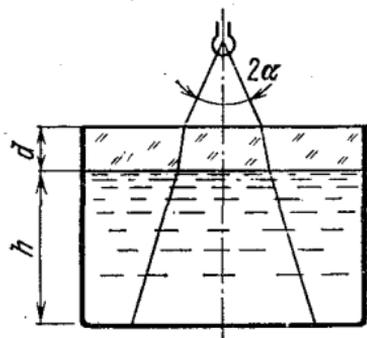
2.1. Рыба видит Солнце под углом  $60^\circ$  к поверхности воды. Какова настоящая высота Солнца над горизонтом? Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

2.2\*. а) Кажущаяся глубина водоема 2 м. Какова истинная глубина водоема?

б) С подводной лодки в погруженном состоянии определили скорость самолета, пролетающего над лодкой. Во сколько раз кажущаяся скорость самолета отличается от истинной?

2.3. Что произойдет с изображением точечного источника в плоском зеркале, если между источником и зеркалом поставить параллельно зеркалу стеклянную пластину толщины  $h$  с показателем преломления  $n$ ?

2.4. Над аквариумом глубины  $h$ , накрытым толстым стеклом (толщина  $d$ , показатель преломления  $n_0$ ), висит источник света. Свет конусом с раствором  $2\alpha$  падает на стекло. Аквариум до стекла наполнен водой, показатель преломления которой  $n$ . На сколько изменится радиус светового пятна на дне, если убрать стекло и вылить воду?



К задаче 2.4.

2.5. Показатель преломления на границе воздух — стекло 1,5, а показатель преломления на границе воздух — вода 1,33. Чему равен показатель преломления на границе вода — стекло?

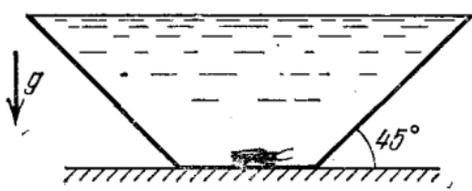
2.6. а) Определите углы полного внутреннего отражения для алмаза ( $n_a = 2,4$ ), воды ( $n_v = 1,33$ ) и для алмаза, погруженного в воду.

б) Почему небольшие пузыри воздуха в воде «серебристые»?

2.7. а) Можно ли увидеть что-нибудь через две смежные грани стеклянного куба? Показатель преломления стекла 1,5.



а)

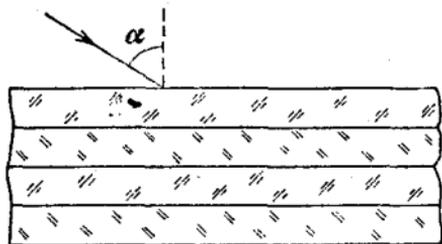


б)

К задаче 2.7.

б) Угол между стенками и дном стеклянного трапецидального сосуда  $45^\circ$ . Сосуд заполнен водой. Виден ли жук на дне этого сосуда через его боковые стенки?

2.8. При каком минимальном угле падения луча света на стопку плоских прозрачных пластин, показатель преломления каждой из которых в  $k$  раз меньше, чем у выше-



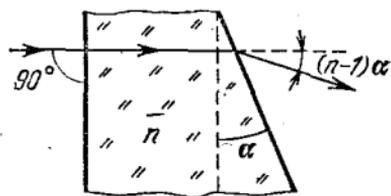
К задаче 2.8.

лежащей, луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины  $n > 1$ , число пластин  $N$ .

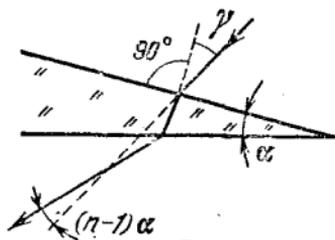
✓ 2.9. а) Через клин с малым углом  $\alpha$  при вершине проходит луч света, который перпендикулярен передней грани клина. Докажите, что угол отклонения луча от первоначального направления

приблизительно равен  $(n - 1)\alpha$ . Показатель преломления клина  $n$ .

б) Через клин с малым углом  $\alpha$  при вершине проходит луч света, который падает под малым углом  $\gamma$  к передней поверхности клина. Докажите, что угол отклонения луча света от первоначального направления приблизительно равен  $(n - 1)\alpha$ . Показатель преломления клина  $n$ .



а)



б)

К задаче 2.9.

в\*) Выведите формулу для фокусного расстояния тонкой линзы. Радиусы кривизны поверхностей линзы  $R_1$  и  $R_2$ , показатель преломления материала линзы  $n$ .

2.10. а) Найдите фокусное расстояние двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны 30 см, изготовленной из стекла с показателем преломления 1,6. Чему равна оптическая сила этой линзы в диоптриях?

б) Одна поверхность линзы плоская, другая — сферическая. Оптическая сила линзы 1 дптр. Линза изготовлена из стекла с показателем преломления 1,6. Определите радиус кривизны сферической поверхности линзы.

2.11. Из стекла с показателем преломления 1,61 изготовили двояковыпуклую линзу с одинаковыми радиусами кривизны обеих поверхностей. Оптическая сила линзы

в воде 1,6 дптр. Найдите радиусы кривизны поверхностей линзы.

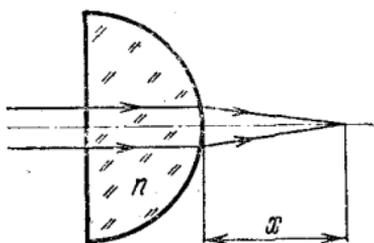
2.12. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом  $\alpha$ . Показатели преломления клиньев  $n_1$  и  $n_2$ . На пластину нормально к поверхности падает параллельный пучок света. За пластиной расположена собирающая линза с фокусным расстоянием  $f$ . В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится светлая точка на экране, если убрать пластину?

2.13\*. На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом  $45^\circ$  световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла  $n$ .

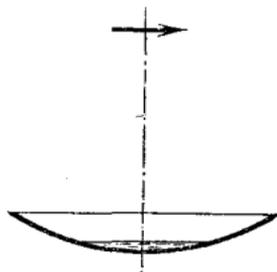
2.14\*. Тонкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиуса  $R$ , фокусируется на расстоянии  $2R$  от его центра. Определите показатель преломления стекла.

2.15. На тонкую сферическую колбу, помещенную в жидкость, падает параллельный пучок света так, что ось пучка проходит через центр колбы. На противоположной стороне колбы пучок имеет диаметр, вдвое больший диаметра пучка света, падающего на колбу. Каков показатель преломления жидкости, в которую погружена колба?

2.16. Узкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления  $n$ , собирается на расстоя-



К задаче 2.16.



К задаче 2.18\*.

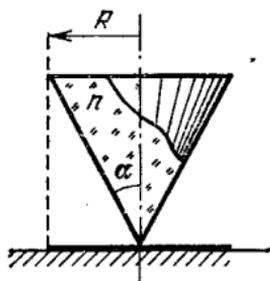
нии  $x$  от выпуклой поверхности. На каком расстоянии от плоской поверхности соберутся лучи, если пучок пустить с обратной стороны?

2.17\*. Если смотреть на капиллярную стеклянную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен  $r$ . Каков истинный внутренний радиус? Показатель преломления стекла  $n$ .

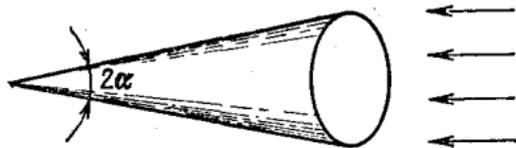
2.18\*. В вогнутое сферическое зеркало радиуса  $R$  налит тонкий слой неизвестной жидкости. При этом оказалось, что данная оптическая система при некотором положении источника дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на расстоянии  $l$ . Найдите показатель преломления жидкости.

2.19\*. Показатель преломления атмосферы планеты при  $h \ll n/\alpha$  уменьшается с высотой  $h$  над ее поверхностью по закону  $n = n_0 - ah$ . Радиус планеты  $R$ . Найдите, на какой высоте над поверхностью планеты луч, испущенный горизонтально, будет обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.

2.20. На горизонтальной плоскости зачернен круг радиуса  $R$ . В центре круга вертикально стоит, опираясь вершиной на центр круга, стеклянный конус. Угол раствора конуса  $2\alpha = 60^\circ$ , радиус основания  $R$ , показатель преломления стекла  $n > 1,5$ . На круг смотрят с большого расстояния вдоль оси конуса. Каков видимый радиус круга?



К задаче 2.20.



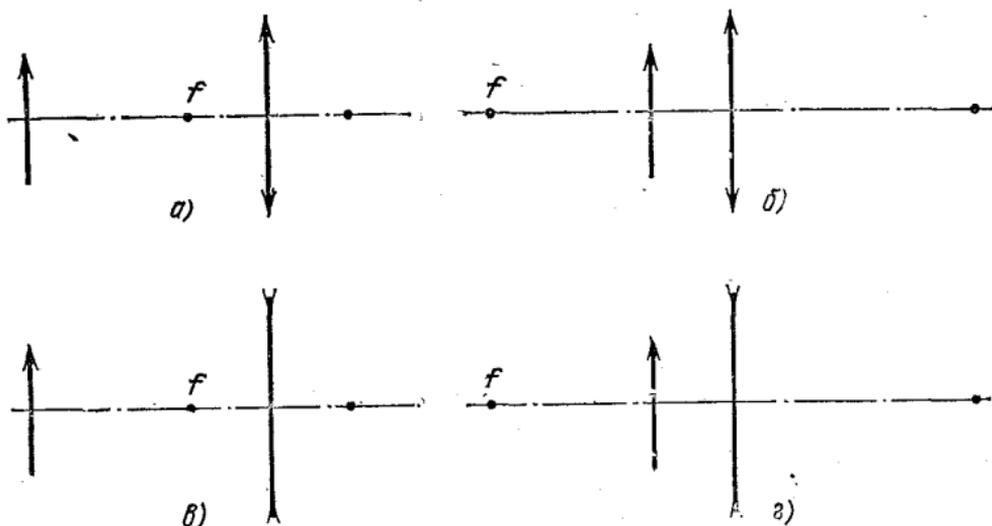
К задаче 2.21.

2.21. Из плексигласа изготовлен конус с углом при вершине  $2\alpha$ . На основание конуса падает параллельный пучок света. Опишите поведение света. Показатель преломления плексигласа 1,5.

2.22. В стеклянном волоконном световоде входные и выходные участки волокон расположены одинаково на его входной и выходной плоскостях. Показатель преломления стекла  $n$ . По световоду передается изображение круга радиуса  $r$ . Как зависит размер изображения на выходе от расстояния от плоскости круга до входной плоскости световода, если радиус круга много больше радиуса волокон?

### § 13.3. Оптические системы

3.1. На рисунках показаны предметы и фокусы линз. Постройте изображения этих предметов. Чему равно увеличение в каждом случае?



К задаче 3.1.

3.2. Источник света находится на расстоянии 90 см от экрана. Тонкая собирающая линза, расположенная между экраном и источником, дает четкое изображение источника на экране в двух положениях. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между положениями линзы, дающими четкое изображение, 30 см.

3.3. а) Какие очки вы пропишете близорукому человеку, который может читать текст, расположенный не далее 20 см? А какие дальнозоркому, который может читать текст, расположенный не ближе 50 см?

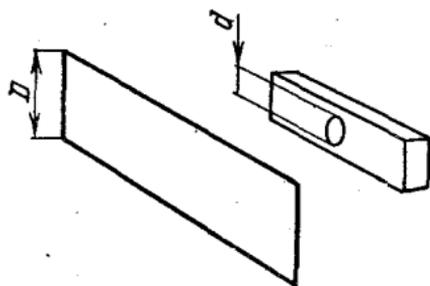
б) Близорукий или дальнозоркий человек, нормально видящий в воде?

3.4. На каком расстоянии от линзы расположен предмет, если расстояние между предметом и его действительным изображением минимально? Фокусное расстояние линзы  $f$ .

3.5. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата с расстояния 15 м получилось высоты 30 мм, а с расстояния 9 м — высоты 51 мм. Найдите фокусное расстояние объектива.

3.6. В течение какого времени может быть открыт затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду с вышки? Фото-

графируется момент погружения в воду. Высота вышки 5 м, фотограф находится на расстоянии 10 м от прыгуна. Объектив аппарата имеет фокусное расстояние 10 см, на негативе допустимо размытие изображения 0,5 мм.



К задаче 3.7.

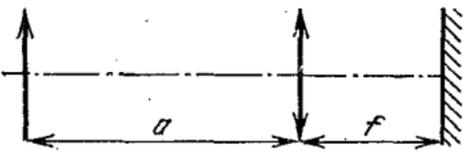
3.7. При фотографировании очень удаленного объекта перед объективом фотоаппарата на расстоянии, равном трем фокусным расстояниям, поместили тонкую линейку ширины  $D$ . Плоскость линейки

перпендикулярна оптической оси. Объектив — тонкая линза диаметра  $d < D$ . Определите ширину тени на пленке (ширину области, в которой линейкой будут затенены все лучи, исходящие от фотографируемого объекта).

3.8. При фотографировании Луны с Земли линзой с фокусным расстоянием  $f$  получено размытое изображение в виде диска радиуса  $r_1$ . Резкое изображение Луны имело бы радиус  $r_2$ . Определите, на какое расстояние нужно сместить фотопластинку, чтобы изображение получилось резким. Диаметр линзы  $D$ . Областью изображения считать область попадания света на фотопластинку. Дифракцию не учитывать.

3.9. Предмет в виде отрезка длины  $l$  расположен вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$ . Середина отрезка расположена на расстоянии  $a$  от линзы, и линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определите продольное увеличение предмета. Каким будет увеличение предмета, когда размер  $l$  предмета значительно меньше  $f$ ?

3.10\*. Острые конуса с углом  $2\alpha$  рассматривается через линзу с фокусным расстоянием  $f$ , расположенную на расстоянии  $a$  от вершины конуса ( $a < f$ ). Каким виден угол конуса через линзу? Ось линзы проходит через ось симметрии конуса.



К задаче 3.11а.

3.11. а) На фокусном расстоянии  $f$  от линзы расположено плоское зеркало. Найдите,

на каком расстоянии от линзы будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии  $a$  от линзы.

б) Плоскую сторону плоско-выпуклой линзы, фокусное расстояние которой было  $f$ , посеребрили. Найдите фокусное расстояние получившегося зеркала.

3.12. Фокусные расстояния двух тонких собирающих линз равны  $f_1$  и  $f_2$ . Чему равно фокусное расстояние системы из этих двух линз, собранных вместе? Чему равна оптическая сила этой системы? Чему будет равно фокусное расстояние системы в случае, если вторая линза будет рассеивающей?

3.13. Две тонкие плоско-выпуклые линзы, фокусные расстояния которых в воздухе равны  $f$ , помещены в оправу так, что выпуклые поверхности соприкасаются. Определите фокусное расстояние такой системы в жидкости с показателем преломления  $n$ . Считать, что внутрь оправы жидкость не попадает. Как изменится ответ, если жидкость попадает между линзами? Показатель преломления стекла, из которого сделаны линзы,  $n_0$ .

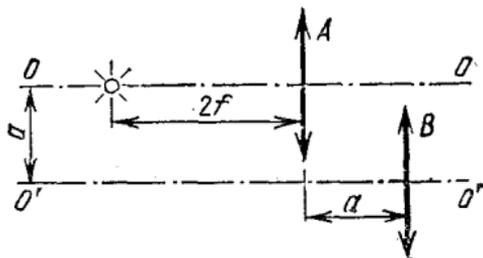
3.14. Постройте изображение предмета, которое дает:  
а) система из собирающей линзы с  $f_1 = 1,5a$  и рассеивающей с  $f_2 = -1,5a$ , где  $a$  — расстояние между линзами;  
б) система из двух собирающих линз с  $f_1 = 1,5a$  и  $f_2 = 0,5a$ . Отметьте положение фокусов систем. Предмет находится на расстоянии  $10a$  от первой линзы.

3.15. Дана система двух линз с общей оптической осью. Расстояние между линзами  $l$ , фокусные расстояния линз  $f_1$  и  $f_2$ . Необходимо найти одну линзу, которая дает изображение предмета, расположенного вне линз, эквивалентное изображению предмета системой. Каково ее фокусное расстояние?

3.16. Линзы с фокусными расстояниями 30 см находятся на расстоянии 15 см. Найдите, при каких положениях предмета система дает действительное изображение.

3.17. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $-0,6$  м расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Каково фокусное расстояние зеркала, если известно, что система дает мнимое изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой? Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения от зеркала.

3.18. Две собирающие линзы  $A$  и  $B$  с одинаковыми фокусными расстояниями  $f$  расположены на расстоянии  $a$  друг от друга. Оптическая ось  $OO$  линзы  $A$  параллельна оптической оси  $O'O'$  линзы  $B$  и находится на расстоянии  $a$  от оси  $O'O'$ . Найдите расстояние между изображением и

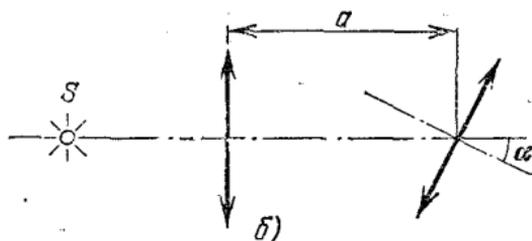
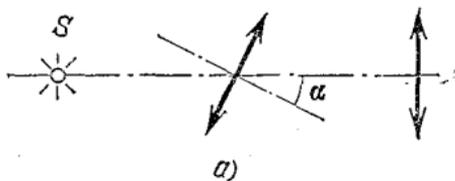


К задаче 3.18.

источником света, расположенным на оси  $OO$  на расстоянии  $2f$  от линзы  $A$ .

3.19. а) Две одинаковые собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями  $f$  расположены так, что их оптические оси образуют угол  $\alpha$  и ось

второй линзы проходит через центр первой. В фокусе первой линзы расположен точечный источник света  $S$ . Найдите расстояние между источником  $S$  и его изображением в паре линз.



К задаче 3.19.

б) На оптической оси собирающей линзы на расстоянии, равном фокусному, расположен точечный источник света  $S$ . По другую сторону линзы на этой же оси на расстоянии  $a$  от ее центра расположен центр такой же линзы, ось которой образует с осью первой линзы угол  $\alpha$ . Найдите расстояние между источником света и его изображением в паре линз.

## § 13.4. Фотометрия

4.1. Согласно нормам освещения рабочего места металлиста, выполняющего тонкую работу, освещенность должна быть 100 лк. На какой высоте от рабочего места должна быть помещена лампа 100 кд? Чему равна мощность этой лампы (в ваттах), если только десятая часть энергии тока переходит в световую энергию?

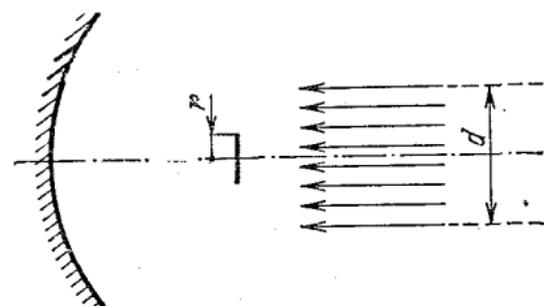
4.2. Во сколько раз нужно изменить время экспозиции, если расстояние фотографической бумаги от источника света увеличивается втрое?

4.3. Освещенность плоской поверхности в точке, ближайшей к точечному источнику, 200 лк. Какова освещенность в точках, где угол падения  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ ?

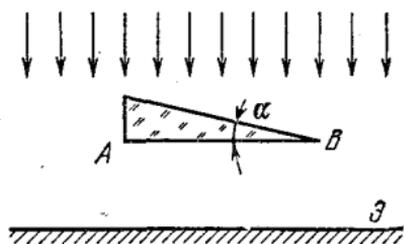
4.4. Над поверхностью на высоте 2 м расположен точечный источник света 120 кд. На расстоянии 1 м от источника перпендикулярно поверхности находится плоское абсолютно отражающее зеркало. Определите освещенность поверхности под источником.

4.5\*. Между лазером и фотодетектором поставили толстую стеклянную пластинку. Показания фотодетектора уменьшились. Когда вместо лазера поставили лампу накаливания, то показания фотодетектора увеличились. Объясните эти эффекты.

4.6\*. Какая часть светового потока параллельного пучка света поглотится на черном кружке радиуса  $r$ , центр



К задаче 4.6\*.



К задаче 4.9.

которого совпадает с фокусом сферического зеркала радиуса  $R$ ? Кружок расположен перпендикулярно оптической оси. Диаметр пучка  $d > 2R$ .

4.7. В фокусе сферического зеркала помещен сосуд, содержащий 100 г воды. Каков должен быть диаметр зеркала, чтобы вода вскипела через 1 мин, если зеркало направить прямо на Солнце? Плотность потока энергии от Солнца  $0,14 \text{ Вт/см}^2$ . Потерями пренебречь.

4.8\*. Можно ли, собирая лучи Солнца в фокусе сферического зеркала, получить освещенность больше яркости поверхности Солнца? Какую максимальную освещенность можно получить в фокусе зеркала? Площадь и радиус кривизны зеркала  $S$  и  $R$ , яркость поверхности Солнца  $I_0$ .

4.9. Экран освещается параллельным пучком света. Как изменится освещенность экрана, если на пути лучей

поставить призму с углом  $\alpha$  и стороной  $AB$ , параллельной экрану? Нарисуйте график изменения освещенности вдоль экрана. Показатель преломления призмы  $n$ . Отражением света от призмы пренебречь.

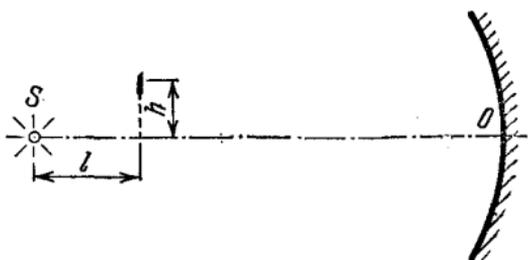
4.10. К каким последствиям приводит диафрагмирование объектива фотоаппарата?

4.11\*. Жука фотографируют в двух масштабах, поднося аппарат на расстояние, равное сначала тройному, а затем пятикратному фокусному расстоянию объектива. Как нужно изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одинаковой? Диаметр диафрагмы в обоих случаях много меньше расстояния до жука.

4.12. Что произойдет с изображением, даваемым линзой, если верхнюю половину линзы закрасить черной краской?



К задаче 4.12.



К задаче 4.16.

4.13. В крышке закрытого ящика высоты  $l$  м имеется круглое отверстие. Изменится ли освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу, оптическая сила которой равна  $1$  дптр? Ящик стоит под открытым небом, затянутым равномерной пеленой облаков.

4.14. Точечный источник расположен на высоте  $h$  над горизонтальной поверхностью. Над источником находится плоское зеркало, параллельное поверхности. Нарисуйте график зависимости освещенности под источником от расстояния между зеркалом и источником.

4.15. Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что Луна рассеивает весь падающий на нее свет равномерно по всей полусфере. Принять расстояние от Луны до Земли равным  $400\,000$  км, радиус Луны  $2000$  км.

4.16. Перед сферическим зеркалом радиуса  $R$ , в фокусе которого находится точечный источник света  $S$ , на

высоте  $h$  над осью зеркала  $SO$  помещена небольшая пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси. Найдите отношение освещенностей левой и правой сторон пластинки, если  $h \ll R$ .

4.17. Пучок света интенсивности  $I$  падает на плоскопараллельную пластинку по нормали к ее поверхности. Пренебрегая поглощением и считая, что коэффициент отражения света на каждой поверхности в любую сторону равен  $k$ , определите интенсивность пучка, прошедшего сквозь пластинку.

4.18\*. Изображение Солнца получено с помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линз ( $f_1 = 10$  см,  $f_2 = -10$  см), расположенных на расстоянии 5 см. Посредине между линзами помещена круглая диафрагма диаметра 0,5 см. Предполагая, что линзы имеют достаточно большие размеры и не ограничивают световых пучков, определите, во сколько раз освещенность изображения больше освещенности экрана прямыми солнечными лучами. Угловой диаметр Солнца принять равным 0,01 рад.

4.19. Точечный источник с помощью телескопа с объективом диаметра  $D_0$  может быть замечен на расстоянии  $L_0$ . На каком расстоянии можно рассмотреть этот же источник в телескоп с объективом диаметра  $D$ ?

4.20. Как изменится освещенность изображения Солнца, даваемого плоско-выпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?

4.21. Почему при наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем?

4.22\*. Интенсивность света маяка на расстоянии  $L$  уменьшилась из-за тумана на 10 %. Радиус капель тумана  $r$ . Оцените количество капель тумана в единице объема воздуха.

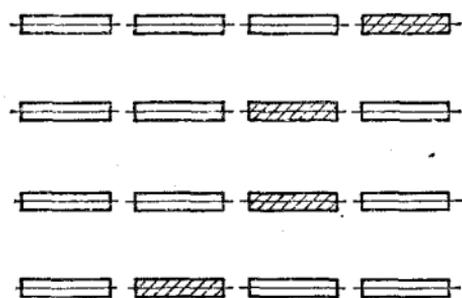
4.23\*. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса 5 мкм при содержании массы вещества 0,04 г в  $1 \text{ м}^3$  воздуха видимость составляет 50 м. Какая масса вещества в  $1 \text{ м}^3$  воздуха распыляется источником завесы, создающим частицы радиуса 10 мкм, если видимость сокращается до 20 м?

4.24. В системе оптической связи передающий луч лазера имеет вид конуса с углом при вершине  $10^{-4}$  рад (угол расходимости). В приемном устройстве световая энергия фокусируется на фотоэлемент с помощью линзы диаметра 1 м. Оказалось, что при изменении расстояния между передатчиком и приемником с 5 до 10 км сигнал на выходе фото-

элемента уменьшился в 2 раза (из-за поглощения в атмосфере). Во сколько раз изменится сигнал при увеличении расстояния с 10 до 20 км?

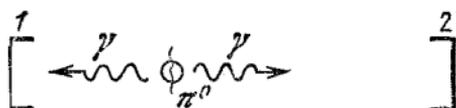
### § 13.5. Квантовая природа света

5.1. На рисунке изображены проволочные цилиндрические разрядники. Частицы света большой энергии ( $\gamma$ -кванты), пролетая через разрядники, зажигают в них разряд.



К задаче 5.1.

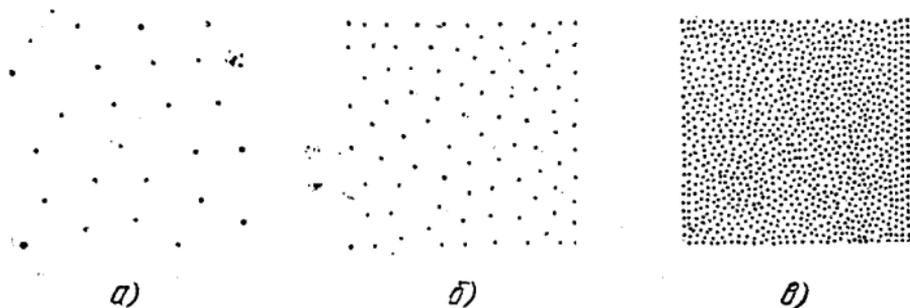
Разрядники, которые «подожглись»  $\gamma$ -квантом, на рисунке заштрихованы. Длина разрядников 5 см. Расстояние между рядами разрядников 6 см,



К задаче 5.2.

расстояние между торцами соседних разрядников 1 см. С какой точностью можно определить направление движения  $\gamma$ -кванта?

5.2. Между двумя фотодетекторами, расположенными на расстоянии 5 м друг от друга, произошел распад  $\pi^0$ -мезона на два  $\gamma$ -кванта. Первый детектор зафиксировал  $\gamma$ -квант спустя  $10^{-8}$  с после срабатывания второго детектора. На каком расстоянии от первого детектора находился  $\pi^0$ -мезон?

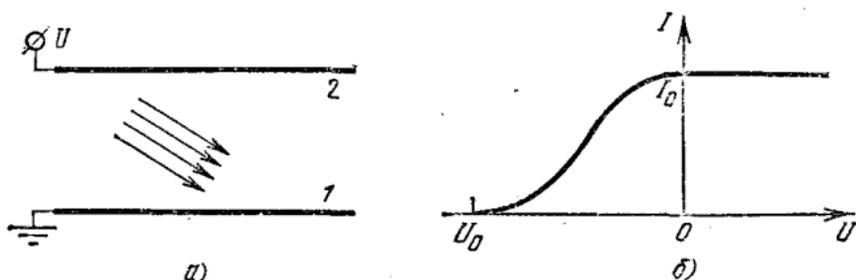


К задаче 5.3.

5.3. Чувствительность фотопластинки была настолько велика, что каждый фотон вызывал на ней появление черного пятна. Три фотографии квадрата получены на длине

волны  $5 \cdot 10^{-5}$  см. Размеры изображения  $10 \times 10$  см<sup>2</sup>. Оцените, пользуясь формулой Планка  $E = h\nu$  ( $h = 6,62 \times 10^{-27}$  эрг/Гц — постоянная Планка), освещенность фотопластинки в каждом случае. Время срабатывания затвора фотоаппарата  $10^{-9}$  с.

5.4. В вакуумном объеме находятся две параллельные металлические пластины. На заземленную пластину падает поток ультрафиолетового излучения с частотой  $\nu$ , которое



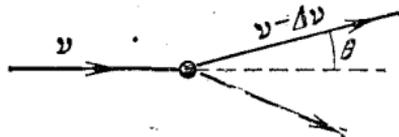
К задаче 5.4.

выбивает из нее электроны. Ток этих электронов зависит от напряжения, подаваемого на вторую пластину, так, как изображено на графике. Определите из графика работу выхода электронов из первой пластины.

5.5. При столкновении позитрона с электроном часто происходит аннигиляция этих частиц: они превращаются в два  $\gamma$ -кванта. В каком случае энергии этих  $\gamma$ -квантов будут равны и они будут двигаться в противоположных направлениях? Чему будет равна минимальная частота таких  $\gamma$ -квантов?

5.6. а) При распаде  $\pi$ -мезона на два фотона зафиксированы фотоны с энергиями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , которые летят в противоположных направлениях. Определите скорость распавшегося мезона. Для фотона связь энергии и импульса имеет вид  $\epsilon = pc$ , где  $c$  — скорость света.

б) При распаде нейтральной частицы на два фотона обнаружены фотоны, летящие под углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  к направлению движения частицы. Определите скорость распавшейся частицы.



К задаче 5.7.

5.7. а)  $\gamma$ -квант с частотой  $\nu$  рассеялся на неподвижной частице под углом  $\theta$  к первоначальному направлению. При этом частота кванта уменьшилась на  $\Delta\nu \ll \nu$ . Определите массу этой частицы.

б) Фотон с частотой  $\nu$  рассеивается на электроне. Определите изменение частоты фотона, рассеянного под углом  $\theta$ .  $h\nu \ll m_e c^2$ .

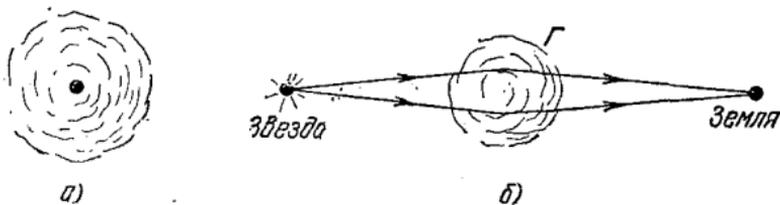
5.8\*. Атомы, летящие со скоростью  $u$ , излучают в направлении движения фотоны с частотой  $\nu$ . С какой частотой излучаются фотоны в направлении: а) противоположном движению атомов; б) перпендикулярном движению атомов? Импульс фотона много меньше импульса атома.

5.9. Свет, излучаемый с поверхности звезды, имеет тем меньшую частоту, чем массивнее звезда и меньше ее радиус. Чем объясняется этот эффект? Почему его называют красным смещением?

5.10. Определите красное смещение для звезды массы  $M$  и радиуса  $R$ , если частота света на поверхности звезды равна  $\nu$ . Оцените красное смещение для Солнца в видимой области. Какие эффекты мешают обнаружить красное смещение в излучении Солнца?

5.11. При каком радиусе звезда массы  $M$  превратится в «черную дыру», т. е. перестанет излучать свет? Оцените этот радиус для Солнца.

5.12\*. Многие гигантские квазизвездные скопления (квазары) окружены туманным облаком. Большинство ученых



К задаче 5.12\*.

считает, что это облако — продукт распада квазара. Один молодой научный сотрудник предложил другую гипотезу. Он считает, что туманное облако — это шаровая галактика, которая фокусирует гравитационным полем свет далекой звезды на нашу Землю, а квазар — это «сфокусированная» звезда. Определите фокусное расстояние шаровой галактики радиуса  $R$  и массы  $M$ , если звезды в ней распределены равномерно. Оцените фокусное расстояние Туманности Андромеды. Радиус Туманности около 20 килопарсек, полная масса около  $3 \cdot 10^{11}$  масс Солнца. Оцените, на каком минимальном расстоянии должна находиться звезда, которая фокусируется на Землю такой галактикой.

## Глава 1. КИНЕМАТИКА

### § 1.1. Движение с постоянной скоростью

1.1.  $v = 200$  м/с.

1.2.  $v = 0,7$  км/с; на юго-восток.

1.3.  $v = 3$  м/с; в 1 м от потолка и 2 м от боковой стены.

1.4.  $x = 1,15$  м.

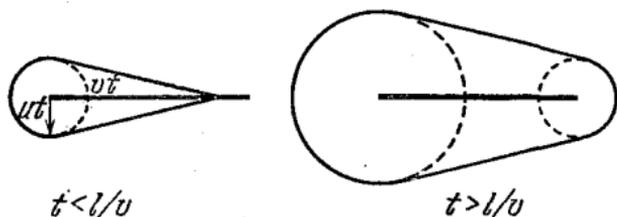
1.5\*.  $AO = L \frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}$ .

1.6.  $l' = l \frac{v-u}{v+u}$ .

1.7.  $v = c \frac{T_0 - T}{T_0 + T}$ .

1.8.  $v' = v \frac{c-u}{c-v}$ .

1.9. а) При  $t < l/v$  граница области — конус с вершиной, находящейся на расстоянии  $vt$  от конца стержня, переходящий в касающуюся



К ответу 1.9а.

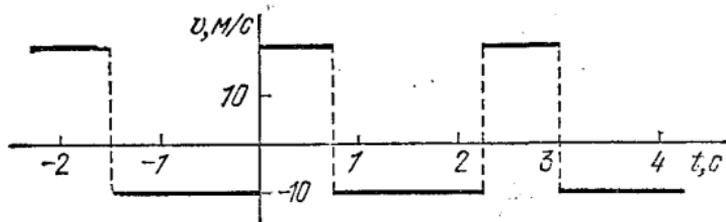
щуюся его сферу радиуса  $ut$ . При  $t > l/v$  — сферы с центрами на концах стержня и радиусами  $ut$  и  $u(t-l/v)$  с касательной к ним конической поверхностью. б)  $\cos \alpha = u/v$ .

1.10\*. Из угла  $60^\circ$  с вершиной в точке А, биссектриса которого — шоссе.

1.11\*.  $v = cl/\sqrt{l^2 - c^2t^2}$ .

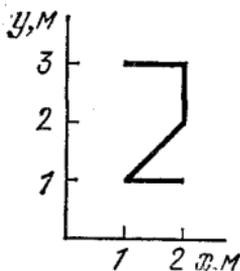
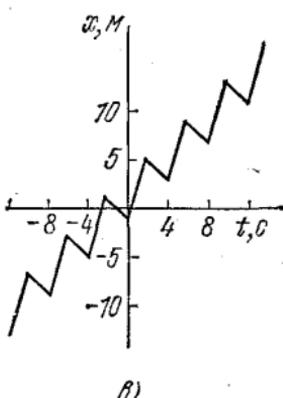
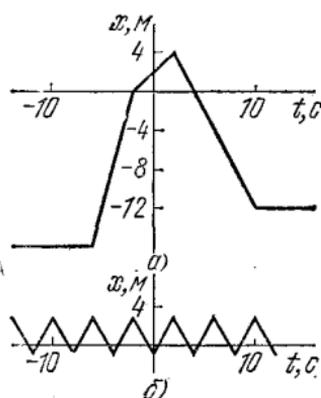
1.12.  $u = v/\sin \alpha$ .

1.13. См. рис.



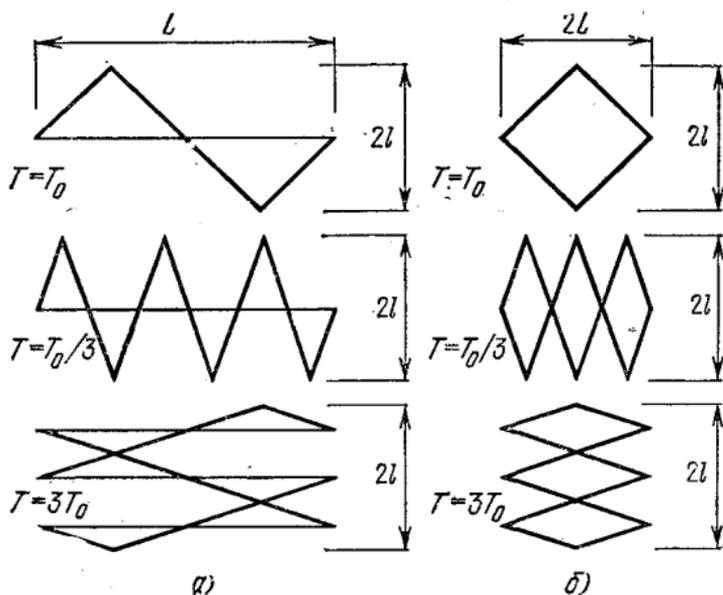
К ответу 1.13.

1.14. Ордината и абсцисса точки пересечения графиков  $x_1 = vt'$  и  $x_2 = a + v(t - \tau)/2$  дают время и координату:  $t' = (2a - v\tau)/v$ ;  $x = 2a - v\tau$ .



К ответу 1.15.

К ответу 1.16.



К ответу 1.17.

1.15. См. рис.; б)  $v_{\text{ср}} = 0$ , в)  $v_{\text{ср}} = 1$  м/с.

1.16. См. рис.

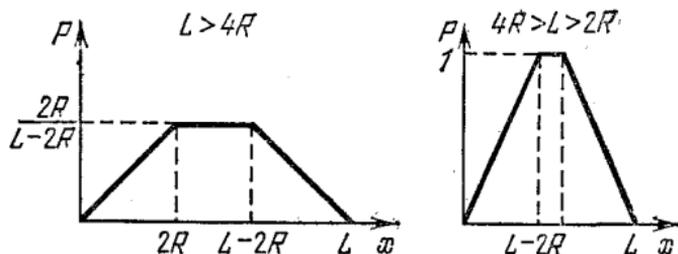
1.17. См. рис. а) Возвращение луча по  $x$  занимает очень малое время, соответственно на единицу длины попадает мало электронов, б) При  $T/T_0 = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — любые целые числа.

$$1.18. x = 2lv \frac{v \sin \alpha + \sqrt{c^2 - v^2 \cos^2 \alpha}}{c^2 - v^2}.$$

1.19.  $\beta = 2\alpha$ . В направлении, противоположном начальному.

1.20\*.  $\text{tg } \varphi = 2ma/nb$ , где  $m$  и  $n$  — любые целые числа.

1.21.  $(-c_x; c_y; c_z)$ ,  $-c$ .



К ответу 1.22\*.

1.22\*. См. рис. Нулевая у стенок. Наибольшая: в любом месте на расстоянии, большем  $2R$ , от стенок и равна  $2R/(L-2R)$  при  $L > 4R$ ; в любом месте на расстоянии, большем  $L-2R$ , от стенок и равна 1 при  $4R > L > 2R$ .

## § 1.2. Движение с переменной скоростью

2.1.  $v_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} v \frac{R-r}{R+r}$ ; направлена по границе раздела.

2.2. Любой график с изменением координаты за указанное время на 20 м и с наибольшим «наклоном» касательной 15 м/с.

2.3.  $t = 12$  с;  $x = 24$  м.

$$2.4. L = v_0 t + \frac{v_0}{2\tau} (t - \tau)^2.$$

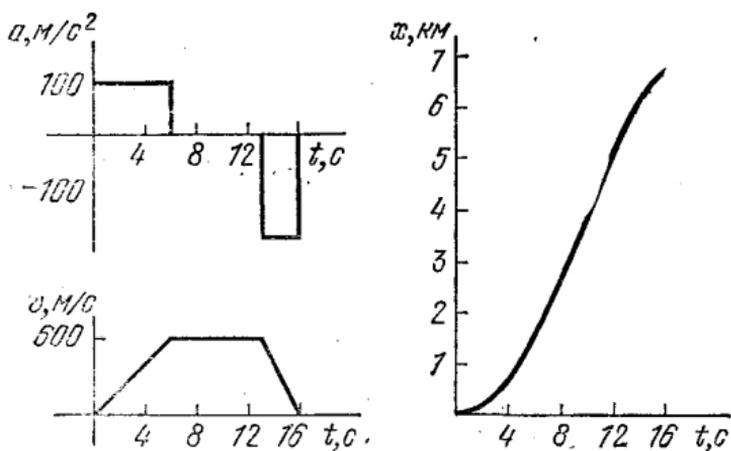
$$2.5. x = \frac{\pi}{4} v_0 t_0.$$

2.6. Средняя скорость больше начальной, а конечная скорость нулевая.

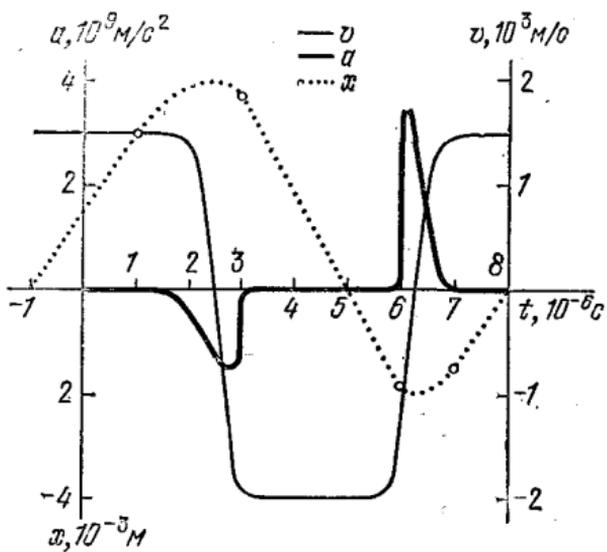
$$2.7. v = \sqrt{La}.$$

$$2.8. v = \sqrt{N/b}.$$

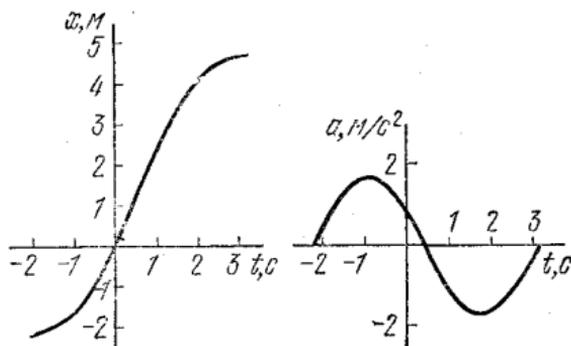
$$2.9. t = R/q.$$



К ответу 2.13.



К ответу 2.15.



К ответу 2.16.

$$2.10^*. \text{ а) } v = \frac{\pi v_0^2 t^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{s}; \quad \text{ б) } v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\pi h t}}.$$

$$2.11. q = 125,6 \text{ см}^3/\text{с}.$$

$$2.12. v_1 = 43 \text{ м/с}; v_2 = 423 \text{ м/с}.$$

2.13. См. рис.;  $v = 600 \text{ м/с}$ . От 6 до 6,9 км.  $x = 6,9 \text{ км}$ . Проверьте равенство площадей на графике ускорения над и под осью  $t$ .

$$2.14. 4 \text{ и } 16.$$

2.15. См. рис. Отношение модулей ускорения равно 2,

2.16. См. рис.

$$2.17. v = 0,72 \text{ см/с}.$$

$$2.18^*. t = (2 + \sqrt{2}) \tau.$$

2.19\*. На 31 с.

### § 1.3. Движение в поле тяжести. Криволинейное движение

$$3.1. t = v/g - \tau/2.$$

3.2. а)  $t = \sqrt{2D/g}$ . б) На окружности диаметра  $gt^2/2$  с верхней точкой  $A$ .

3.3\*. Под углом  $\varphi/2$  к вертикали.

$$3.4. v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}.$$

$$3.5. t = \frac{v}{g} (\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha).$$

$$3.6. \text{ а) } v_x = v \cos \varphi, v_y = v \sin \varphi - gt.$$

$$\text{ б) } x = v \cos \varphi \cdot t, y = v \sin \varphi \cdot t - gt^2/2.$$

$$\text{ в) } y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v^2} (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1).$$

$$\text{ г) } T = \frac{2v \sin \varphi}{g}, H = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2g}, L = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

$$3.7. L = \sqrt{2} v^2/g.$$

$$3.8. L = \frac{2v^2 \cos^2 \beta}{g \cos \alpha} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha),$$

$$3.9. v = \sqrt{L(a+g)}.$$

$$3.10. H = \frac{2u(v \cos \alpha - v) \operatorname{tg}^2 \alpha}{g}.$$

$$3.11. L = \frac{2v^2}{g(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}.$$

$$3.12^*. m = 7 \text{ кг}.$$

$$3.13^*. \text{ а) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2gv^2y - g^2x^2}}{gx}.$$

$$\text{ б) } \text{Параболоид вращения с } L = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$

$$в) v = \sqrt{g(y + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

3.14.  $x_{\text{отн}} = v \cos \varphi \cdot \tau$ ,  $y_{\text{отн}} = v \sin \varphi \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} - g\tau t$ . Относительная скорость постоянна, направлена вертикально вниз и равна по модулю  $g\tau$ .

3.15.  $v = \sqrt{\frac{2\pi Rgn}{\sin 2\alpha}}$ , где  $n$  — любое натуральное число; при  $\alpha = 0$  скорость любая по модулю.

3.16.  $v_3 = 1675$  км/ч,  $a_3 = 0,034$  м/с<sup>2</sup>;  $v_{\text{л}} = 838$  км/ч,  $a_{\text{л}} = 0,017$  м/с<sup>2</sup>.

3.17.  $v = 8$  км/с.

3.18.  $a = -\omega^2 r$ .

3.19.  $v_1 = -\omega x_0 \sin \omega t$ ,

$$v_2 = \omega x_0 \cos \omega t;$$

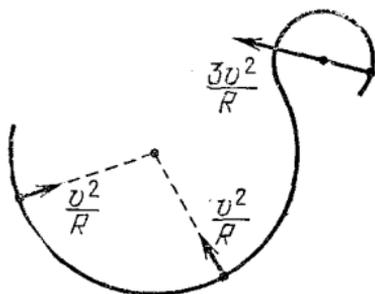
$$a_1 = -\omega^2 x_0 \cos \omega t,$$

$$a_2 = -\omega^2 x_0 \sin \omega t.$$

3.20. См. рис.

3.21. На  $(\sqrt{3}/2) \cdot 10^2$  м/с; на  $5 \cdot 10^{-5}$  рад;  $\omega = 5 \cdot 10^{-3}$  рад/с.

3.22.  $a = \sqrt{k^2 + k^4 t^2 / r^2}$ .



К ответу 3.20,

3.23.  $v = \sqrt{rg}$ .

3.24\*.  $v = \sqrt{3Rg}$ .

3.25. 27,5 и 42,4 км; 18,3 и 52 км; 9,17 и 73,4 км.

3.26.  $a = \frac{v^2}{R} \cos^2 \alpha$ .

## § 1.4. Преобразование Галилея

4.1. В системе отсчета второго корабля первый движется по прямой вдоль вектора  $v_1 - v_2$ . Перпендикуляр, опущенный на эту прямую из местонахождения второго корабля, и будет наименьшим расстоянием.

4.2. См. рис.

4.3. Такую же.

4.4. См. рис.

4.5. а)  $\operatorname{tg} \varphi = u/v$ , где  $\varphi$  — угол с вертикалью в сторону движения.

б)  $10\sqrt{3}$  м/с.

4.6.  $v_{\text{max}} = v\sqrt{3}$ .

4.7.  $t = \frac{2L \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2 - u^2}$ . Вдоль трассы.

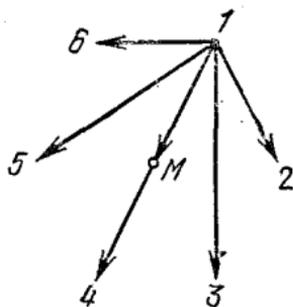
4.8. а)  $\Delta v = -2(v + u)$ ; б)  $\Delta v = -2(v - \omega)$ . Проекция на направление начальной скорости считается положительной.

4.9. а)  $u = v$ ; б)  $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha + 4w^2}$ ;

в)  $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha \cos \beta + 4w^2 \cos^2 \beta}$ .

4.10.  $v = \sqrt{v^2 + u^2/2} (R - r)$ .

4.11.  $t = 2 \sqrt{u^2/g^2 + 2l/g}$ .



К ответу 4.2.



К ответу 4.4.

4.12. Проекция на горизонталь  $v_x = v - 2u$ ; проекция на вертикаль

$$v_y = \frac{(2n-1)L}{v-u} g.$$

4.13.  $n = (v_1 + v_2)/4\pi R$ .

4.14.  $\sin \alpha = u/v$ .

4.15\*.  $u = v\sqrt{3}$ ;  $u = v(\sqrt{3 + \cos^2 \varphi} \pm \cos \varphi)$ .

4.16. В новой системе отсчета геометрия пучков, а значит, и область пересечения те же, что и раньше. Скорость не обязательно направлена вдоль пучка.

4.17. В  $\sqrt{1 + v^2/u^2}$  раз. Вообще да.

4.18\*.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $l = 200\sqrt{3}$  м  $\approx 345$  м.

### § 1.5. Движение со связями

5.1.  $v_B = 2v_A$ .

5.2.  $v_B = \omega R$ ;  $v_C = \omega(R - r)$ ,

5.3.  $v_{кл} = v\sqrt{3}$ .

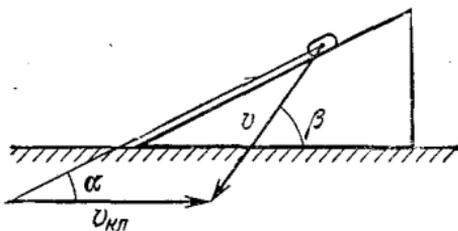
5.4.  $a = g \operatorname{ctg} \alpha$ .

5.5. См. рис.

5.6.  $(-2, 8; 3, 1)$ .

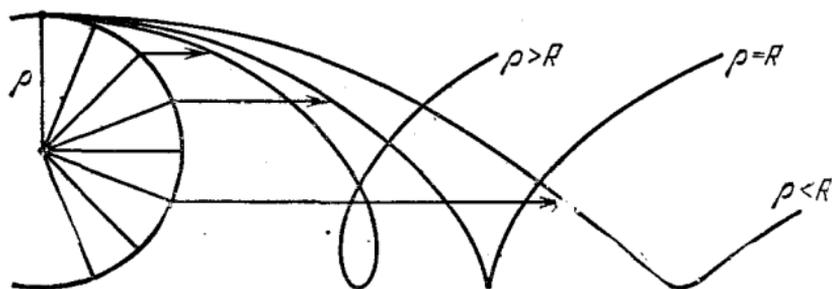
5.7. а)  $u_{AB} = (\sqrt{2}/2)v$ ;

б)  $u_1 = \sqrt{u^2 - v^2}$ .



К ответу 5.5.

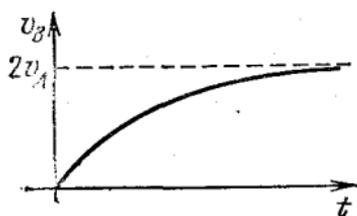
5.8. а) См. рис.; б)  $a = (v^2/R^2) \rho$ ; в)  $r_B = (R + \rho)^2/\rho$ ,  $r_H = (R - \rho)^2/\rho$ .



К ответу 5.8а,

5.9\*.  $u = \frac{vR}{R \cos \alpha - r}$ ,  $\omega = \frac{v}{R \cos \alpha - r}$ ; вправо при  $\cos \alpha > r/R$ , влево при  $\cos \alpha < r/R$ .

5.10.  $n_A = (n_1 R - n_2 r)/(R - r)$ .



К ответу 5.16.

5.11. Диаметр цилиндра.

5.12. а) Один; б) на 4 мин.

5.13.  $a = 4\omega^2 R$ .

5.14.  $u = v \cos \alpha$ .

5.15. В центре квадрата через время  $t = a/v$ .

5.16. См. рис.;  $v_B = 2v_A t / \sqrt{L^2 + v_A^2 t^2}$ .

5.17.  $u = v^2 t / \sqrt{L^2 - v^2 t^2}$ .

5.18.  $\omega = v \sin^2 \alpha / H$ .

5.19.  $\omega' = \omega/2 \sin^2(\alpha/2)$ .

5.20.  $u = v^2 t / \sqrt{R^2 - v^2 t^2}$ .

5.21.  $\omega = v / \sqrt{R^2 - v^2} dt / \pi$ .

## Глава 2. ДИНАМИКА

### § 2.1. Законы Ньютона

1.2.  $T = F(1 - \dot{x}/l)$ .

1.3.  $t = T(m_1 + m_2)/\alpha(2m_1 + m_2)$ .

1.4.  $a_1 = a_2 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $T_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ ,  $T_2 = 2T_1$ .

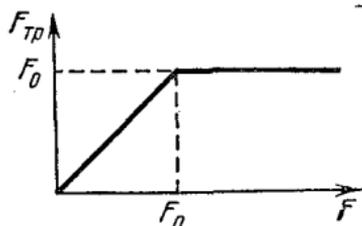
1.5.  $a = 3,3 \text{ м/с}^2$ ;  $N \approx 1,1 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

1.6.  $t = \frac{F\tau}{mg} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{mg}{F}} \right)$ .

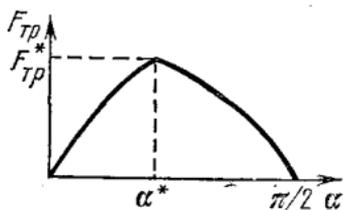
$$1.7*. S = \frac{g\tau^2}{2} \left( \sqrt{\left(\frac{F}{mg}\right)^2 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right).$$

1.8. Ускорение верхнего шарика равно  $3g$ , нижних — нулю.

1.9. См. рис.



К ответу 1.9.



К ответу 1.10.

1.10. См. рис.;  $F_{тp}^* = mg \sin \alpha^*$ ,  $\operatorname{tg} \alpha^* = \mu$ .

1.11.  $a_{\max} = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ .

1.12.  $a = \frac{F}{m} \cos \alpha - \mu g \left( 1 - \frac{F}{mg} \sin \alpha \right)$  при  $F \geq \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \equiv F_0$ ;  $a = 0$  при  $F \leq F_0$ .

1.13\*.  $\beta = \alpha + \operatorname{arctg} \mu$ .

1.14.  $a = g \left( \sin \beta - \frac{\mu \cos \beta}{\sin(\alpha/2)} \right)$ .

1.15.  $F = mg \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$  при  $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ ;  $F = 0$  при  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ .

1.16. а)  $F > \mu(M+m)g$ ;  $t = \sqrt{\frac{2lM}{F_0 - \mu(M+m)g}}$ .

б)  $a_m = \frac{F_0 - \mu mg}{m}$ ;  $a_M = \mu g \frac{m}{M}$ .

1.17.  $a_m = a_M = \frac{F}{2(M+m)}$  при  $F \leq \frac{2\mu mg(M+m)}{M+2m} \equiv F_0$ . Ускоре-

ние правого нижнего груза  $a_1 = \frac{F - \mu mg}{M}$ , остальных  $a_2 = \frac{\mu mg}{M+2m}$  при  $F \geq F_0$ .

1.18.  $|a| = \frac{|m_1 - m_2|g - F}{m_1 + m_2}$  при  $|m_1 - m_2|g \geq F$ ;  $a = 0$  при  $|m_1 - m_2|g \leq F$ .

1.19\*.  $v_3 = u - \frac{\mu}{\alpha}(Mg - F)$ .

1.20. Крупные.

1.21\*. а)  $S_1 = 5$  м; б)  $S_2 = 10$  м.

1.23.  $\sin \alpha = \frac{R\mu}{(l+R)\sqrt{1+\mu^2}}$ .

1.24.  $d = \frac{v}{2\mu g} \sqrt{v^2 + u^2}$ .

$$1.25^*. v = \omega R \sqrt{(F_0/F)^2 - 1}.$$

$$1.26^*. v = u \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$1.27^*. u = v/2.$$

$$1.28^*. \Delta S = Nl \frac{\alpha (t_2 - t_1) \operatorname{tg} \varphi}{\mu}.$$

$$1.29^*. n = 1/2\pi\mu.$$

$$1.30. a_M = \frac{mg \operatorname{tg} (\alpha/2)}{m + 2M \operatorname{tg}^2 (\alpha/2)}; \quad a_m = \frac{mg}{m + 2M \operatorname{tg}^2 (\alpha/2)}.$$

$$1.31. a) N_1 = 3/2 mg; \quad N_2 = 1/2 mg.$$

$$6^*) N_1 = 1/2 mg (5 \cos \varphi + 3 \sin \varphi - 2);$$

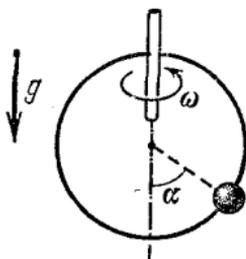
$$N_2 = 1/2 mg (5 \sin \varphi + 3 \cos \varphi - 2).$$

$$1.32^*. a = g \operatorname{tg} \alpha; \quad m = M \sin \alpha / (1 - \sin \alpha)^2.$$

$$1.33^*. \omega = v h / R^2.$$

$$1.34. T = M\omega^2 l; \quad T_x = M\omega^2 l + \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - x^2).$$

$$1.35. T_1 = m_1 \omega^2 l_1; \quad T_2 = m_1 \omega^2 l_1 + m_2 \omega^2 l_2.$$



$$1.36. \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \beta}{l (\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

$$1.37. T = \frac{2mv^2}{l} \sin^2 \alpha.$$

$$1.38. \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} \text{ при } \frac{g}{\omega^2 R} < 1;$$

$$\alpha = 0 \text{ при } \frac{g}{\omega^2 R} \geq 1.$$

К ответу 1.38.

$$1.39^*. R = R_0 \frac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$

$$1.40. \omega = \left( \frac{g^2 \mu^2 - \varepsilon^2 R^2}{R^2} \right)^{1/4}.$$

$$1.42. v = \sqrt{\mu g R}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \mu; \quad \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}}.$$

$$1.43^*. \mu \geq \frac{g + \omega^2 R \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2 R - g \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$1.44. \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g (\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)}{R (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}}.$$

$$1.45^*. \omega > \sqrt{g\sqrt{2}/R}.$$

$$1.46. T = 6mg.$$

$$1.47. x = l \frac{T - 3mg}{T - mg}.$$

1.48. В верхней. В нижней. Ускорение горизонтально, когда нить составляет угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$  с вертикалью.  $T = 3mg$ .

$$1.49. l = 1/2 R \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$1.50. h = 2/3 R.$$

$$1.51. v = \sqrt{(2H + 3R)g}.$$

$$1.52. F = mg(3 \sin \alpha - 2) \cos \alpha \text{ при } \sin \alpha \geq 2/3; F = 0 \text{ при } \sin \alpha \leq 2/3.$$

$$1.53. H_{\min} = 2,5R.$$

$$1.54*. F = \frac{2\pi Rmg}{4\pi^2 R^2 + h^2} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2 + 16\pi^2 H^2}.$$

$$1.55. M = \frac{3}{\pi - 1} m.$$

$$1.56*. t = 2\tau.$$

$$1.57. F = Mg - \rho V a.$$

## § 2.2. Импульс. Центр масс

$$2.1. u = 5/2 v.$$

$$2.2. t = |\Delta p| / mg.$$

$$2.4. m = M/31.$$

$$2.5*. u_m = v - F_0 \tau / m; u_M = F_0 \tau / M.$$

$$2.6. m_1 / m_2 = 1/3.$$

$$2.7. \text{На расстоянии } 4L \text{ от пушки.}$$

$$2.8. S/L = 35/36.$$

$$2.9. p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta}.$$

$$2.10. u' = \sqrt{(mv)^2 + (Mu)^2} / (M - m).$$

$$2.11*. u = v (\alpha_1 - \alpha_2) / 4\pi.$$

$$2.12. T = 2\pi \sqrt{2R/3g}.$$

$$2.13*. F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2) l}.$$

$$2.14. l_m = l \frac{M}{M + m}; l_M = l \frac{m}{M + m}.$$

$$2.15. u = v \frac{\mu t}{M + \mu t}, t \leq \frac{m}{\mu}; u = v \frac{m}{m + M}, t \geq \frac{m}{\mu}.$$

$$2.16. \text{Со скоростью } u/4 \text{ вверх.}$$

$$2.17. n = \frac{Mg \operatorname{tg} \alpha}{mv}.$$

$$2.18. F = \rho S u^2.$$

$$2.19. \text{В } \sqrt{2} \text{ раз.}$$

$$2.20. u = (\sqrt{3}/2) v; N = 1000.$$

$$2.21*. u = v - \sqrt{\mu Mg / 2\rho S}; u = 0 \text{ при } 2\rho S v^2 \leq \mu Mg.$$

$$2.22*. u = v (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \frac{\mu Mg}{\rho S v \sin \alpha};$$

$$u = 0 \text{ при } \mu > \frac{\rho S v^2 \sin 2\alpha}{2(\rho S v^2 \sin^2 \alpha + Mg)}.$$

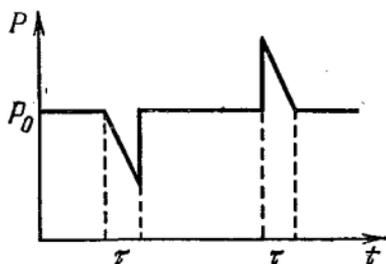
$$2.23. v = u - k/\rho S.$$

$$2.24. v = \sqrt{\frac{F(\rho - \rho_0)}{\pi r^2 \rho \rho_0}}.$$

$$2.25. \mu = Mg/u; \mu' = M(g+a)/u.$$

2.26. Вторая.

$$2.27. a(t) = \frac{F}{M - \Delta m t}; v(t) = -\frac{F}{\Delta m} \ln\left(1 - \frac{\Delta m t}{M}\right).$$



К ответу 2.30.

$$2.37. v = \frac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u.$$

$$2.38*. v = \frac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{\mu}.$$

$$2.28. F = nmg; F' < F.$$

$$2.29. H = h(M/mN + 1).$$

2.30. См. рис.

$$2.31. F = \frac{m}{l}(v^2 + gl).$$

$$2.32. F = 3mg(1 - x/l).$$

$$2.33. N = 2(F - \rho v^2) \cos(\alpha/2).$$

$$2.34. v = \sqrt{gh}.$$

$$2.35. F = \mu_1 u + \mu_2(u - v).$$

$$2.36*. \text{ а) } u = v \ln n; \text{ б) } M \approx$$

$$\approx 5,5 \cdot 10^5 \text{ кг.}$$

## § 2.3. Работа. Энергия

$$3.1. A_{\text{тр}} = -\mu mgh \operatorname{ctg} \beta; A = -mgh.$$

$$3.2. A = \mu mgL.$$

$$3.3*. A = \mu Pl(1 + r/R).$$

$$3.4. N = mgu(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

$$3.5. v = v_1 v_2 \frac{N_1 + N_2}{N_1 v_2 + N_2 v_1}.$$

$$3.6*. v(t) = \mu gt \text{ при } t \leq t_0 \equiv \frac{N}{m(\mu g)^2};$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2N}{m} \left(t - \frac{N}{2m(\mu g)^2}\right)} \text{ при } t \geq t_0.$$

$$3.7. \eta = 2v/(v + u).$$

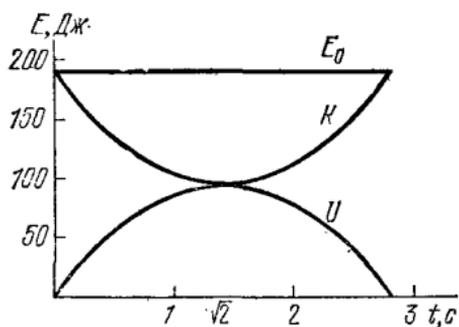
$$3.8. N = Mgu/2.$$

3.9. См. рис.

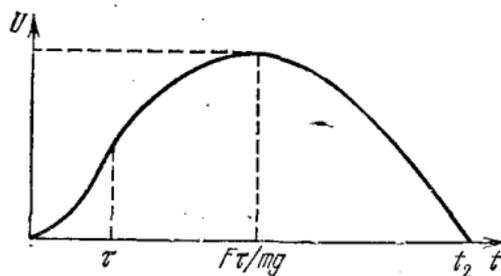
$$3.10. E = 4 \cdot 10^{-4} E_0.$$

$$3.11. A = u^2 m.$$

3.12. В движущейся системе отсчета сила натяжения стержня совершает работу.



К ответу 3.9.

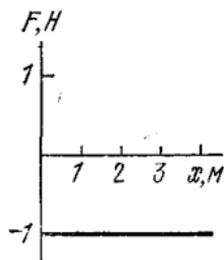


К ответу 3.13.

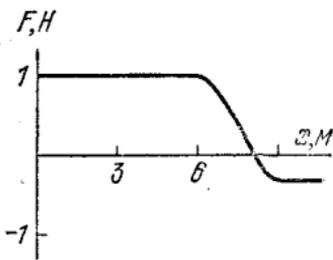
3.13. См. рис.;

$$U_{\max} = F \left( \frac{F}{mg} - 1 \right) \frac{g\tau^2}{2}, \quad t_2 = \frac{F\tau}{mg} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{mg}{F}} \right).$$

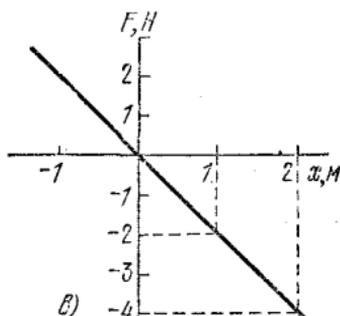
3.14. См. рис.



а)



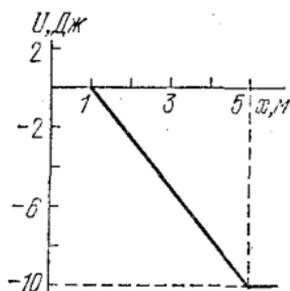
б)



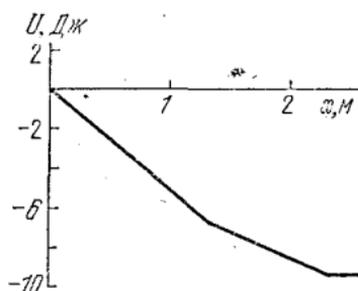
в)

К ответу 3.14.

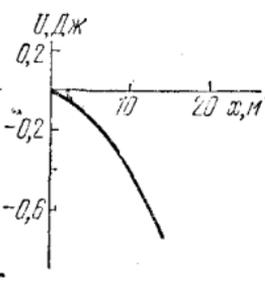
3.15. См. рис.



а)



б)



в)

К ответу 3.15.

3.16. а)  $F = -U_0/x_0$ ; б)  $F = -2U_0x/x_0^2$ ; в)  $F = U_0x_0/x^2$ .

3.17. а)  $U = -F_0x + C$ ; б)  $U = -F_0x^2/2x_0 + C$ ; в)  $U = F_0x_0^2/x + C$ ,

где  $C$  — произвольная постоянная.

$$3.18. F = l/\alpha^2 m.$$

$$3.21. A = 9,8 \text{ Дж.}$$

$$3.22. A = MgL/2.$$

$$3.23*. A = \frac{\pi d^2 l^2}{2} g \left( \rho - \frac{\rho_0}{4} \right) \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right).$$

3.24. Движущееся вдоль спицы.

$$3.25*. t = 0; h = \frac{v^2}{2g} + v\tau + \left( \frac{v}{\tau} + \frac{F}{2M} \right) \left( \frac{F}{M} - g \right) \frac{\tau^2}{g}.$$

$$3.26*. t = \sqrt{2L/g} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$3.27. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{v \cos \alpha}{\sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + 2gh}}.$$

$$3.28. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{v_1 \cos \alpha}{\sqrt{v_1^2 \cos^2 \alpha - 2(U_2 - U_1)/m}}; \quad \text{при} \quad \frac{mv_1^2 \cos^2 \alpha}{2} <$$

$$< U_2 - U_1.$$

$$3.29. \text{ а) и б) } v = \sqrt{2gl}.$$

$$3.30*. v = \sqrt{gl}.$$

$$3.31. v_{\max} = \sqrt{4gl(2 - \sqrt{3})/3}; \quad x_{\max} = 4l/3.$$

$$3.32*. v \approx \sqrt{\frac{gl}{2\pi} \left( 1 - \frac{\rho_M}{\rho_B} \right) (\sqrt{2} + 2)}.$$

$$3.33. v = \sqrt{2gl(1 - l/L)}.$$

$$3.34. F = \frac{5}{6} mg.$$

$$3.35*. a = g \sin(\alpha/2).$$

$$3.36. Q = A \frac{\mu}{\mu + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$3.37. Q = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$3.38. Q = m_2 gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$3.39. S = \frac{F}{\mu Mg} \left( \frac{F}{M} - \mu g \right) \frac{\tau^2}{2}; \quad \text{при } F < \mu Mg \quad S = 0.$$

$$3.40. S = \frac{F}{\mu mg \left( 1 + \frac{m}{M} \right)} \left[ \frac{F}{m} - \mu g \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \right] \frac{\tau^2}{2}; \quad \text{при } F <$$

$$< \mu mg \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \quad S = 0.$$

$$3.41. v = \sqrt{4gH(1 - A/2mgH)}.$$

$$3.42. A = 2\pi\mu mv^2.$$

$$3.43. n = \frac{\omega^2 R (1 + \mu^2)}{4\pi g \mu (1 + \mu)}.$$

$$3.44*. v = \sqrt{gl(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha)}.$$

$$3.45. Q = 2mgR \left( 1 - \sqrt{1 - l^2/4R^2} \right) \sqrt{1 - l^2/4R^2}.$$

$$3.46. h = \frac{v^2}{2g(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}.$$

$$3.47. A = mgH + \frac{m}{2} \left( v + \frac{H}{\tau \sin \alpha} \right)^2.$$

$$3.48. v = 2L\sqrt{k/m}.$$

$$3.49. x = v\sqrt{m/3k}.$$

$$3.50. h = 2mg/k.$$

$$3.51. h = 2mg/k; v = g\sqrt{m/k}.$$

$$3.52. k = Mgx_0/2 (\sqrt{l^2 + 4x_0^2} - l)^2.$$

$$3.53. v = (l - l_0)\sqrt{k/2m} \cos \alpha.$$

$$3.54. F = Mg \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2k}{Mg} (H - l_0)} \right).$$

$$3.55. F = (m_1 + m_2)g.$$

$$3.56*. h \approx 0,25 \text{ м.}$$

$$3.57*. x = \frac{m}{k}(g - a); x_{\max} = \frac{m}{k}(g + \sqrt{2ga - a^2}).$$

$$3.58*. F \geq \mu g(m + M/2).$$

$$3.59*. x = Lm^2/(M^2 - m^2).$$

$$3.60*. m > \mu M/2.$$

$$3.61. x_{\min} = l_0 - F/k; x_{\max} = l_0 + F/k.$$

$$3.62*. Q = F^2/8k.$$

$$3.63*. x = \frac{\mu mg \cos \alpha}{2k} \left[ 1 + \sqrt{1 - 2 \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)^2} \right] \text{ при } \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \leq \\ \leq 3 \operatorname{tg} \alpha; x = \frac{\mu mg \cos \alpha}{k} \text{ при } \mu \leq \operatorname{tg} \alpha; x = \frac{2mg \sin \alpha}{k} \text{ при } \mu \geq 3 \operatorname{tg} \alpha.$$

## § 2.4. Законы сохранения энергии и импульса

$$4.1. u_1/u = (1 - k)/(1 + k); u_2/u = 2k/(1 + k).$$

$$4.2*. \alpha = \pi/2.$$

$$4.3. \cos \beta = \frac{v_1 v_2}{u_1 u_2} \cos \alpha.$$

4.4. Масса нейтрона близка к массе протона. Поэтому при упругом рассеянии на водороде нейтрон теряет больше энергии, чем при рассеянии на ядрах свинца.

$$4.6. t = t_n - t_{n-1} = 2\tau.$$

$$4.7*. \sin \alpha \leq m/M.$$

$$4.8. v_1 = v \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}}; v_3 = v \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_3 (m_1 + m_3)}}.$$

$$4.9. \text{См. рис.}; \operatorname{tg} \beta = \frac{m + M}{m - M} \operatorname{tg} \alpha.$$



К ответу 4.9.

$$4.10. t = \frac{2R \cos \alpha}{v}.$$

$$4.11*. u = \frac{v}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}} \right).$$

$$4.12*. v_{\min} = \sqrt{gH \operatorname{ctg}^2 \alpha / 2 \cos 2\alpha}.$$

$$4.13. v_{\min} = \sqrt{2g(H+h)(1+m/M)}.$$

$$4.14*. H = h + \frac{v^2 - 2gh(1+m/M)}{2g[1+(m/M)\sin^2 \alpha]} \sin^2 \alpha.$$

$$4.15*. v_m = \sqrt{2gR \frac{M}{M+m}}; v_M = \frac{m}{M} \sqrt{2gR \frac{M}{M+m}}.$$

$$N = mg(3+2m/M).$$

$$4.16. v = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta} / M.$$

$$4.17. m_1/m_2 > 20.$$

$$4.18. \frac{Q}{K} = \frac{1}{4} \left( 3 - \frac{m}{M} \right).$$

$$4.19. Q_1 = 2\sqrt{Q_2 m} (v - 2\sqrt{Q_2/m}).$$

$$4.20. E = 35,7 \text{ кэВ}.$$

$$4.21. v_{\min} \approx \sqrt{2E/m}.$$

$$4.22. v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1+m_2)}}; v_2 = \sqrt{\frac{2Em_1}{m_2(m_1+m_2)}}.$$

$$4.23*. v_{\max} = v + 2\sqrt{K/3m}.$$

$$4.24. E = \frac{p_1^2 m_2^2 + p_2^2 m_1^2 - 2m_1 m_2 p_1 p_2 \cos \theta}{2m_1 m_2 (m_1 + m_2)}.$$

$$4.25. E = p^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{2}{m_1} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$4.26. E = 12 \text{ МэВ}.$$

$$4.27. \frac{h}{h_0} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

$$4.28. v_{\min} = x_0 \sqrt{k(1/m + 1/M)}.$$

$$4.29. h_1 = \frac{m_2 U}{m_1 g (m_1 + m_2)}; h_2 = \frac{m_1 U}{m_2 g (m_1 + m_2)}.$$

$$4.30. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu, \mu \leq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}; \beta = 0, \mu \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

$$4.31. Q = mgH + Mmv^2/2 (M+m).$$

$$4.32. v = \sqrt{\frac{2FL(M+m)}{Mm}}; Q = FL.$$

$$4.33. v_{\min} = \sqrt{\frac{\mu g l}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)}.$$

$$4.34*. x_{\max} = \frac{Mg}{k} + \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2kH}{(M+m)g}} \right).$$

$$4.35. v = \sqrt{\frac{m(kx_0^2 - 2\mu mgl)}{M(M+m)}}.$$

$$4.36. x_{\max} = v \sqrt{m/2k}.$$

## § 2.5. Сила тяготения. Законы Кеплера

$$5.1. E=0, \varphi = -\gamma \frac{M}{R}, r < R; E = \gamma \frac{M}{r^2}, \varphi = -\gamma \frac{M}{r}, r > R, \text{ где}$$

$r$  — расстояние до центра сферы,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

$$5.2*. \text{ См. рис. } \varphi_0 = -2\gamma M \frac{R_1 + R_2}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}.$$

$$5.3. E = \gamma \frac{M}{R^3} r, \varphi = -\gamma \frac{M}{2R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right), r < R; E = \gamma \frac{M}{r^2}, \varphi =$$

$-\gamma \frac{M}{r}, r > R$ , где  $r$  — расстояние до центра шара.

$$5.4. F = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н}; U = -6,67 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

$$5.6. F_0/F_{100} = 1,03; F_0/F_{1000} = 1,3.$$

$$5.7. r \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

$$5.8. F = mg \left[ 1 - \frac{(\omega R \pm v)^2}{gR} \right],$$

где  $\omega$  — угловая скорость Земли.

$$5.9. v_1 \approx 7,9 \text{ км/с}; v_2 \approx$$

$\approx 11,2 \text{ км/с.}$

$$5.10. F = 3\gamma Mm/R^2, \text{ где } \gamma \text{ —}$$

гравитационная постоянная.

$$5.11. h \approx 4 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

$$5.12*. v_1 \approx 11,1 \text{ км/с};$$

$$v_2 \approx 2,3 \text{ км/с.}$$

$$5.13. S \approx 2,2 \text{ м.}$$

$$5.14*. v \approx 5 \text{ км/с.}$$

$$5.15*. H \approx 6400 \text{ км.}$$

$$5.16*. v \approx 300 \text{ км/с.}$$

$$5.17*. v \approx 4,3 \text{ км/с.}$$

$$5.18. \text{ В } 9,3 \text{ раза.}$$

$$5.19. T_3/T_L \approx (M_L R_3 / M_3 R_L)^{1/2} \approx 0,21.$$

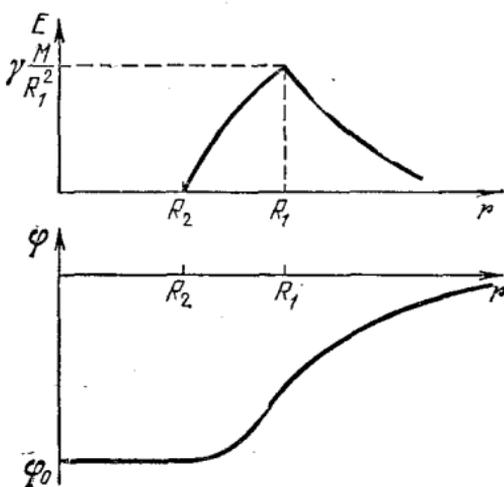
$$5.20. M \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

$$5.21. E = -\gamma \frac{m_1 m_2}{2a}.$$

$$5.22. T_1 = 0,7 \text{ года.}$$

$$5.23*. \alpha = \pi/2.$$

$$5.24. r = 3 \cdot 10^8 \text{ км.}$$



К ответу 5.2.

$$5.25. F = \frac{\gamma M_3 m (R_2^3 - R_1^3)}{R_1^3 R_2^3}.$$

$$5.26*. F_{\text{л}}/F_C \approx 2,4.$$

$$5.27*. \text{ а) } h \approx 490 \text{ км; б) } h \approx 497 \text{ км.}$$

$$5.28. h \approx 55 \text{ км.}$$

$$5.29. v \approx 7,9 \text{ км/с.}$$

$$5.30. v = \sqrt{3\gamma M/R}.$$

$$5.31. p = m \sqrt{2gR} \sin(\alpha/2).$$

$$5.32. M = m \frac{p^2 + p_0^2 - 2pp_0 \cos \alpha}{p_0^2 - p^2}.$$

$$5.33*. r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + 4\gamma^2 m^2/v^4} - 2\gamma m/v^2.$$

$$5.34*. M = m\pi R^2 n v_0 (1 + 2gR/v_0^2) t.$$

5.35. По эллиптической траектории.

$$5.36. v_2 = v_1 h/l = 54,6 \text{ км/с. В 1986 году.}$$

$$5.37*. t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_c}{R} \right) \right]^{3/2}.$$

$$5.38*. t \approx 65 \text{ сут.}$$

$$5.39*. \text{ Первый снаряд. } R_1/R_2 = 2gR/v^2.$$

$$5.40*. \Delta v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R+h}} \left( \sqrt{\frac{2(R+H)}{2R+H+h}} - 1 \right).$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} \left( R + \frac{H+h}{2} \right)^{3/2}.$$

$$5.41*. R_{\max} \approx 1,4R.$$

$$5.42*. \Delta v \approx 75 \text{ м/с.}$$

$$5.43*. v \approx 40 \text{ км/с; } \alpha \approx 40^\circ.$$

## § 2.6. Вращение твердого тела

$$6.1. K = mR^2\omega^2/2. \text{ Больше.}$$

$$6.2. \text{ а) } M = \frac{mr^2\omega}{\tau}; \text{ б) } M = \frac{mr^2\omega^2}{4\pi N}, \quad Q = \frac{mr^2\omega^2}{2}.$$

$$6.3. t = \omega R/\mu g. \quad N = \omega^2 R/4\mu g.$$

$$6.4*. t = 3\omega R/4\mu g.$$

6.5. Вращающаяся шайба пройдет больший путь.

6.6. Попеременно тащить за концы щепочки перпендикулярно ей.

$$6.7. \cos \alpha = \frac{g(M-m)}{\omega^2 R(M+m)} \text{ при } \frac{g(M-m)}{\omega^2 R(M+m)} < 1; \text{ иначе } \alpha = \pi/2.$$

$$6.8. a = F/(M+m); \quad \varepsilon = F/mR.$$

$$6.9. \text{ а) } a = 1/2 g \sin \alpha; \quad F = 1/2 mg \sin \alpha.$$

$$\text{ б) } a = 2/3 g \sin \alpha; \quad F = 1/3 mg \sin \alpha.$$

$$6.10*. F = 1/7 mg \sin \alpha.$$

$$6.11. a = g2M/(2M + m).$$

$$6.12. a_1 = g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}, a_2 = -g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) R_1}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2};$$

$$T_1 = m_1 g \frac{I + m_2 R_2 (R_1 + R_2)}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}, T_2 = m_2 g \frac{I + m_1 R_1 (R_1 + R_2)}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}.$$

$$6.13. a = g \frac{mr^2}{I + mr^2}; T = mg \frac{I}{2(I + mr^2)}.$$

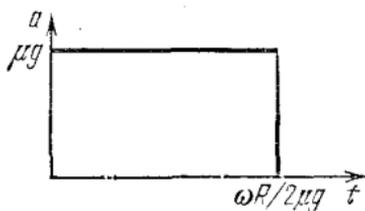
$$6.14*. a = g/2.$$

$$6.15. a = \frac{(M + m) g \sin \alpha}{2M + m}.$$

$$6.16*. \cos \alpha > \frac{r}{R}. F \leq \frac{\mu mg (I + mR^2)}{I \cos \alpha + \mu (I + mR^2) \sin \alpha + mRr}.$$

$$6.17*. Q/E = 1/2; v = \omega R/2; S = \frac{a}{\mu g}$$

=  $\omega^2 R^2 / 8\mu g$ . См. рис.



К ответу 6.17\*.

$$6.18*. \frac{Q}{E} = \frac{1}{3}; S = \frac{5}{18} \frac{v^2}{\mu g}; u = \frac{2}{3} v.$$

$$6.20*. h = \frac{\omega^2 R^2 (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{4g (3\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

$$6.21. Q/E = 8/9.$$

$$6.22*. x = \frac{R}{8} \left( 3\sqrt{3} + \sqrt{16 \frac{H}{R} - 5} \right). \text{ На меньшем.}$$

$$6.23*. N = mgl^2 / (l^2 + 3a^2).$$

$$6.24*. N = 4Mmg / (M + m).$$

$$6.25. n \approx 1 \text{ об.}$$

$$6.26*. H_1 = \frac{2v^2 h (R - h) (2R - h)}{gR^4}; H_2 = \frac{9}{16} H_1.$$

$$6.27. \omega = v/R.$$

$$6.28. \omega'_1 = (3\omega_1 - \omega_2)/4; \omega'_2 = (3\omega_2 - \omega_1)/4.$$

$$6.29. u \approx mv/M; \omega \approx 2m\omega h/MR^2.$$

$$6.30. \omega = 2m\omega r / (MR^2 + 2mr^2).$$

$$6.31. \Delta\omega = \omega \frac{mR^2}{I}; \Delta E = \omega^2 \frac{mR^2}{2} \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right).$$

$$6.32*. v = \sqrt{3gl}.$$

$$6.33. v = \sqrt{\frac{(2m + M) gl \sin \alpha}{2(m + M)}}.$$

$$6.34. v = \sqrt{2gLh^2 / (h^2 + 4\pi^2 R^2)}.$$

$$6.35. Q = 1/10 Mv^2; u = 3/5 v.$$

$$6.36. \cos \alpha = 1 - \frac{3m^2 v^2}{gl (M + m) (4M + 3m)}.$$

$$6.37*. \text{ На расстоянии } \sqrt[2]{3}l \text{ от руки.}$$

$$6.38. v = 2\sqrt{gl}.$$

6.39. Центры гантелей будут двигаться в противоположных направлениях со скоростью  $(v_1 - v_2)/2$  каждая. Гантели будут вращаться в разные стороны с угловой скоростью  $(v_1 + v_2)/l$ .

$$6.40*. h = H \left( \frac{3M}{6M + m} \right)^2.$$

$$6.41*. N = \rho l R^4 \omega^2 v.$$

$$6.42*. F = 2mg \frac{2 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(2 - \sin^2 \alpha)^2}.$$

## § 2.7. Статика

7.1. а)  $T = 98$  Н; б)  $F = 138$  Н.

7.2.  $F = 0,98$  Н.

7.3.  $h \approx 660$  м.

7.4\*.  $S_x = S_0 \exp \{-\rho g x / \sigma_0\}$ , где  $\rho$  — плотность,  $\sigma_0$  — прочность материала,  $S_x$  — сечение здания на высоте  $x$ ,  $S_0$  — у основания.

7.5. Соседние нити образуют угол  $120^\circ$ .

7.6.  $\alpha > \pi/3$ .

7.7.  $T = mg(l + r)/R$ .

7.8.  $m_2 = m_1 \frac{\sin \alpha}{\sin(l/R - \alpha)}$ .

7.9.  $T = 2,6$  Н;  $\alpha = \arctg 3\sqrt{3}$ .

7.10.  $\tg \beta = 2 \tg \alpha$ .

7.11.  $x = 5F/k$ .

7.12.  $l_0 = 2l_2 - l_1$ .

7.13\*.  $\tg \alpha = (\mu_1 - \mu_2)/(1 + \mu_1 \mu_2)$ .

7.14.  $\mu \geq \tg(\alpha/2)$ .

7.15.  $\mu = 1/\sqrt{3}$ .

7.16\*.  $F_n = \frac{2n-1}{\sqrt{3}} mg$ .

7.17.  $F = \sqrt{T^2 + (mg)^2/4}$ .

7.18\*.  $I_n = F (I/F)^n$ .

7.19\*.  $T = T_0 e^{-\mu \theta}$ .

7.20. а)  $F_1 = F_2 = 98$  Н; б)  $F_1 = 24,5$  Н,  $F_2 = 171,5$  Н.

7.21.  $m \leq 7,5 \cdot 10^{-3}$  кг.

7.22.  $F_1 = F_3 = Mg/4$ ;  $F_2 = Mg/2$ .

7.23. Нельзя.

7.24.  $m = 3,2$  кг.

7.25.  $\alpha = \arctg(1/3)$ .

7.26.  $\mu \geq 1/3$ .

7.27.  $F = \frac{\mu mg \cos \alpha}{2(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$ .

$$7.28. F = \frac{1}{4} Mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$7.30. F_A = Mg \operatorname{tg} \alpha; F_B = Mg \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

$$7.31. F_A = mg \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}; F_B = mg \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

$$7.32. \alpha = \operatorname{arctg} 2\mu.$$

$$7.33. \operatorname{tg} \alpha \leq 1/\mu.$$

$$7.34*. F = \frac{mg}{2}, \alpha = 0 \text{ при } \mu \geq \frac{1}{2}; F = \frac{mg}{2\mu} \sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - 2\mu}{\mu} \text{ при } \mu \leq 1/2.$$

$$7.35. \operatorname{tg} \alpha \geq (1 - \mu_1 \mu_2) / 2\mu_1.$$

$$7.36. m = Mr / (R - r).$$

$$7.37*. 1/3 \sqrt{3} \leq \operatorname{tg} \alpha \leq 1/\sqrt{3}.$$

$$7.38*. F = \frac{mg(\mu_1 + \mu_2)}{2 + (h/l)(\mu_2 - \mu_1)}.$$

$$7.39. \mu \leq R \cos \alpha / (R \sin \alpha + r).$$

7.40. Разумно. Если удалить канат  $D$ , натяжение каната  $C$  уменьшится в  $7/6$  раза.

$$7.41. N_1 = mg/5; N_2 = 2mg/5.$$

$$7.42*. m = Ma/R.$$

7.43. При  $\alpha > \operatorname{arcsin}(1/6)$  — качение; при  $\alpha > \operatorname{arctg} \mu$  — скольжение.

7.44. Передвинется.

## Глава 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### § 3.1. Малые отклонения от равновесия

$$1.1. F = -2Tx/l.$$

$$1.2. F = -2k \cos^2 \alpha \cdot x.$$

$$1.3*. F(x) = -kx^3/l^2.$$

$$1.4. F = -mgx/R.$$

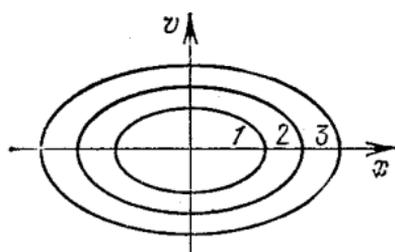
$$1.5. б) F = -mg \sin \alpha.$$

$$1.6. U = \frac{mg}{R-r} \frac{x^2}{2}.$$

$$1.7. U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qQ}{l+x} + \frac{qQ}{l-x} - \frac{2qQ}{l} \right) \approx \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 l^3} x^2.$$

1.8.  $F = -kx$ ; график суммарной силы имеет постоянный наклон при любых  $F$ .

$$1.9*. а) F = -\frac{2mg}{R} x; б) R' = \frac{R}{\sqrt{3}}; F' = -\frac{2mg}{R'} x.$$



$$E_1 < E_2 < E_3$$

К ответу 1.15.

1.16\*.  $\sqrt{q^2 + u^2} = \sqrt{2E}$ , где  $E$  — полная энергия. Фазовая точка движется по окружности в направлении движения часовой стрелки.

1.17.  $x = \sqrt{2E/k} \cos \varphi$ ;  $v = -\sqrt{2E/m} \sin \varphi$ .  $x = A \cos \varphi$ ;  $v = -\sqrt{k/m} A \sin \varphi$ .

1.10.  $F_x = -m\omega^2 x$ ;  $F_y = -m\omega^2 y$ .

1.11.  $k = m (v_0/x_0)^2$ .

1.13. В  $x_0/\sqrt{x_0^2 - x^2}$  раз.

1.14\*.  $v' = nv$ ; скорости прохождения увеличиваются в такое же число раз, что и длины соответствующих отрезков.

1.15. Замкнутость фазовых кривых означает периодичность движения.

### § 3.2. Период и частота свободных колебаний

2.1. Период уменьшится вдвое.

2.2.  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ .

2.3.  $l = 24,4$  см.

2.4.  $T = 2\pi \sqrt{l/(g \sin \alpha)}$ .

2.5.  $T = \pi \sqrt{l/g} (1 + \sqrt{2}/2)$ .

2.6. а)  $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$ ; б)  $T = 2\pi \sqrt{m(k_1 + k_2)/k_1 k_2}$ ; в)  $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$ . От расстояния между стенками период не зависит.

2.7.  $T = \pi (\sqrt{m/k_1} + \sqrt{m/k_2})$ . Отношение наибольших отклонений влево и вправо равно  $\sqrt{k_1/k_2}$ .

2.8. а)  $F = mg[(T_0/T)^2 - 1]$ ; б)  $F = mg\sqrt{(T_0/T)^4 - 1}$ ,  $\cos \varphi = (T/T_0)^2$ ;

здесь  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали нового положения равновесия (см. рис.).

2.9\*.  $r \approx 30$  км; для оценки месторождение считалось шаром.

2.10.  $T = m\omega^2 l/2$ .

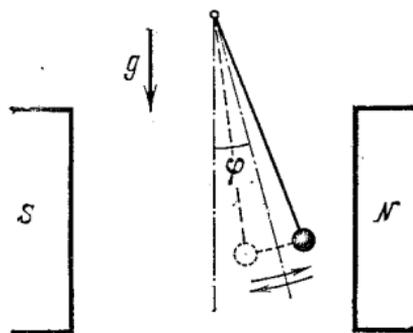
2.11.  $\omega_1 = \sqrt{qQ/\pi \epsilon_0 m l^3}$ ;

$\omega_2 = \sqrt{2g/R}$ .

2.12. а)  $t \approx 42$  мин;

б)  $t \approx 42$  мин.

2.13.  $\omega = \sqrt{2\mu g/l}$ .



К ответу 2.8б.

2.14\*.  $T = 2\pi \left( \frac{l^2}{g^2 + a^2 - 2ag \sin \alpha} \right)^{1/4}$ .

2.15\*.  $T_{\parallel} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{l}{R+l}}$  для колебаний в плоскости, проходящей через ось;  $T_{\perp} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{l}{R}}$  для колебаний в плоскости, перпендикулярной оси.

2.16.  $\omega = \sqrt{k/m - \Omega^2}$ .

2.17. Смещение груза  $M$   $y \approx x^2/2l$ , где  $x$  — смещение муфты; при  $x \ll l$   $y \ll x$ . Частота колебаний муфты  $\sqrt{Mg/ml}$ , а груза  $2\sqrt{Mg/ml}$ , ибо  $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ .

2.18\*.  $t = \pi \sqrt{m/(2\pi R \Delta P)}$ .

2.19. Фокусируются на расстояниях  $\pi(n+1/2)v_0\sqrt{m/k}$  от  $O$ , где  $n$  — целое число.

2.20. Ближайшее к  $\frac{l}{\pi v_0} \sqrt{\frac{g}{R}}$  меньшее целое число раз.

2.21.  $\omega^2 = g(Ml - mx)/(Ml^2 + mx^2)$ .

2.22.  $\omega^2 = g/l + k/2m$ ; квадрат частоты возрастает на  $k/2m$ .

2.23.  $M = m(g/\omega^2 R - 1)$ .

2.24.  $\omega_{\parallel}^2 = \frac{g}{R} \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}}$ ;  $\omega_{\perp}^2 = \frac{g}{R^2 - l^2}$ .

2.25.  $\omega = \sqrt{k/2m}$ .

2.26\*.  $\omega^2 = 5g/7(R-r)$ .

2.27.  $\omega^2 = k/\mu$ , где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

2.28.  $\omega_{HD} / \omega_{H_2} = \sqrt{3}/2$ .

2.29\*.  $\omega_2 / \omega_1 = \sqrt{11/3}$ .

2.30.  $T = 2\pi \sqrt{lM/(M+m)g}$ .

2.31. а)  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}$ ; б)  $t = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}$ .

2.32.  $I = I_0 [(T/T_0)^2 - 1]$ .

2.33.  $T = 2\pi \sqrt{l/2g}$ .

2.34\*.  $T = 2\pi \sqrt{H/g}$ .

2.35.  $\omega = \sqrt{g/H}$ .

2.36.  $m \approx 900$  г.

### § 3.3. Гармоническое движение

3.1\*. Сдвиг фазы равен  $\pi/2$  (четверть периода); производная гармонической величины сдвинута тоже на  $\pi/2$ .

3.2.  $v = -A\omega \sin \omega t$ ;  $a = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$ ;  $k = m\omega^2$ .

3.3. а)  $x = 5 \sin(3,13t)$  мм, б)  $x = 5 \cos(3,13t)$  мм, время в секундах.

3.4. 0,06 с.

$$3.5. t = \pi/4\omega.$$

$$3.6. T = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$3.7. b = a \cos [\pi (T_0 - T)/T_0].$$

3.8\*.  $2R/\pi l$  при  $l \gg R$ ;  $1/3$  при  $l = 2R$ . Да, увеличится.

$$3.9. t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \text{ при } v \leq \sqrt{\mu g l}; t = \frac{v'}{\mu g} + \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arccos \frac{v'}{v} \text{ при } v > \sqrt{\mu g l}, \text{ где } v' = \sqrt{v^2 - \mu g l}.$$

$$3.10. \dot{u} = \frac{d}{\pi(2n+1)} \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

$$3.11. t = T/4 + \tau/2.$$

3.12. а)  $x = \frac{mg}{k} (\cos \omega t - 1)$ ; б)  $x = \left(\frac{mg}{k} + l\right) (\cos \omega t - 1)$ . Ось  $x$  направлена вертикально вверх, начало отсчета — в начальном положении.

3.13. Начальная скорость находится из закона сохранения импульса:

$$\dot{x} = \frac{mv}{M+m} \cos \sqrt{\frac{k}{M+m}} t; x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} \sin \sqrt{\frac{k}{M+m}} t.$$

Ось  $x$  направлена вдоль  $v$ .

3.14. С момента первого удара в течение полупериода происходит сжатие и возвращение пружины в недеформированное состояние. Затем происходит второй удар в момент, когда пружина не деформирована, после чего шарики начинают двигаться равномерно со скоростью  $-v$ . Период  $T = 2\pi \sqrt{m/2k}$ .

$$3.15. F_{\max} = 2F; \tau = T/2.$$

$$3.17. x_0 = \sqrt{A_0^2 + \frac{F^2}{k^2} - \frac{2A_0 F}{k} \cos \omega t_0}. \text{ При } t_0 = \pi(2n+1)/\omega,$$

где  $n$  — целое число, амплитуда наибольшая; при  $t_0 = 2\pi n/\omega$  — наименьшая.

$$3.18*. x_0 = u \sqrt{m/k}.$$

3.19\*. При  $u \geq \mu g \sqrt{m/k}$  сразу начнутся гармонические колебания с амплитудой  $A = \mu mg/k$ ; при меньших  $u$  установятся колебания с амплитудой  $A = u \sqrt{m/k}$ .

$$3.20*. \mu = kl/4Mgn.$$

$$3.21. BC = g(M+m)/\omega^2 M.$$

3.22.  $F = -m\omega^2 x = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ ; наибольшее значение модуля силы  $m\omega^2 A$  достигается в момент времени  $t = (\pi n - \varphi)/\omega$ , где  $n$  — целое число.

3.23. При  $\omega^2 A > g$  груз подскакивает, отрыв происходит выше среднего положения мембраны.

3.24.  $A = F/m\omega^2$ .

3.25. Пусть начальная скорость нулевая и плита начинает подниматься; тогда высота подъема груза есть  $h = A + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{A^2\omega^2}{2g}$ , где  $A\omega^2 > g$ .

3.26\*.  $C \cdot A = \frac{g}{\omega^2} \sqrt{\pi^2 n^2 + 1}$ , где  $n$  — целое число.

3.27\*. Амплитуда ускорения торца  $\omega^2 A = 10^6$  м/с<sup>2</sup> много больше ускорения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>, которое может обеспечить трение. Поэтому груз практически остается на месте, почти не влияя на частоту. При амплитуде  $A \lesssim 10^{-11}$  см груз движется вместе с торцом и влияет на частоту заметным образом.

3.29\*.  $v = \pi g / 2\omega \approx 1,57 \cdot 10^{-6}$  м/с  $\ll \omega A = 10^{-1}$  м/с.

3.30\*.  $u = \frac{\pi v_0 \operatorname{tg} \alpha}{2\mu}$ .

### § 3.4. Наложение колебаний

4.1. Наложение гармонических колебаний по горизонтали и вертикали с частотами  $\omega_1 = \sqrt{2k_1/m}$  и  $\omega_2 = \sqrt{2k_2/m}$ . При  $k_1 \neq k_2$  прямолинейные движения возможны только по вертикали и горизонтали.

4.2. При отклонении на  $r$  от положения равновесия нужно в перпендикулярном направлении сообщить скорость  $v = \omega r$ , где  $\omega = \sqrt{k/m}$ . За период  $T = 2\pi/\omega$  тело вернется на прежнее место и по вертикали, и по горизонтали.

4.3.  $2\varphi = \pi/3$ .

4.4\*. При  $2\varphi = \pi n$ , где  $n$  — целое число, виден отрезок; при  $2\varphi = \pm \pi/2 + 2\pi n$  — окружность. Полуоси эллипса  $A \cos \varphi$  и  $A \sin \varphi$ .

4.5. Эллипс с осями по вертикали и горизонтали.

4.6. Отрезок по диагонали превратится в вытянутый эллипс, полуоси которого будут сближаться; превратившись в окружность, эллипс начнет сжиматься ко второй диагонали и т. д.; через время  $2\pi/\Omega$  весь цикл повторится.

4.7.  $T_x : T_y = 1 : 2$ , за исключением случая г), где  $T_x : T_y = 2 : 1$ .

4.8. Если  $T_x : T_y = p : q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа, то за время  $pT_y = qT_x$  точка вернется к тем же значениям  $x$  и  $y$ . При  $T_y = T_x$  получатся эллипсы.

4.9.  $\omega_y : \omega_x = p : q$ .

4.10\*.  $\mu = 2T/(M + m_1 + m_2)$ , за исключением случая  $\sqrt{m_1/m_2} = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые нечетные числа.

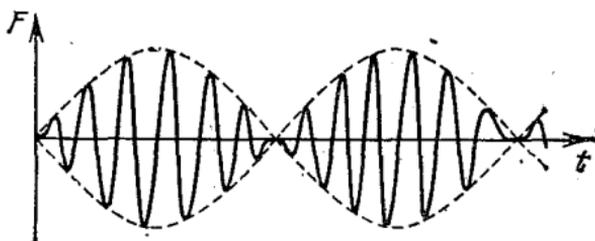
4.11\*. Натяжение  $F = k [A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) - A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)]$ .

Наибольшая энергия вдвое больше средней; средняя энергия

$$E_{\text{ср}} = \frac{k}{4} [A_2^2 + A_1^2 - 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

При  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$  средняя энергия наибольшая; при  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  — наименьшая.

4.12\*. Натяжение  $F = 2kA \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$ . Средняя энергия  $E_{\text{ср}} = \frac{k}{4} (A_1^2 + A_2^2)$ . Биения изображены на рисунке.



К ответу 4.12\*.

$$4.13. N = \frac{F_0 A \omega}{2} \sin \varphi.$$

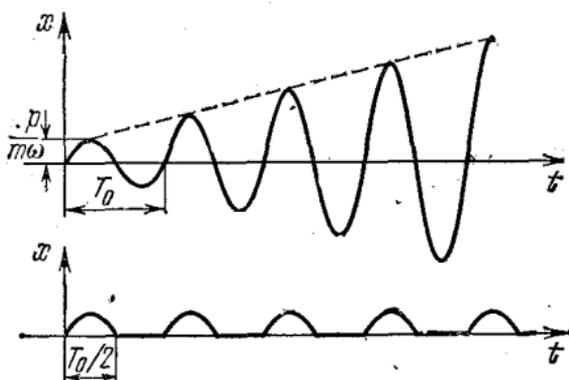
$$4.14. \text{а) } \omega = \sqrt{k/m}; \text{ б) } \omega = \sqrt{(k + 2K)/m}.$$

$$4.15*. k = m(\omega^2 - \omega_0^2)/2.$$

$$4.16. A_{1,2} = \frac{A \pm B}{2}; \omega_{1,2} = \frac{2\pi}{T} \pm \frac{\pi}{T}.$$

### § 3.5. Вынужденные и затухающие колебания

5.2. См. рис.;  $\omega = 2\pi/T_0$ .

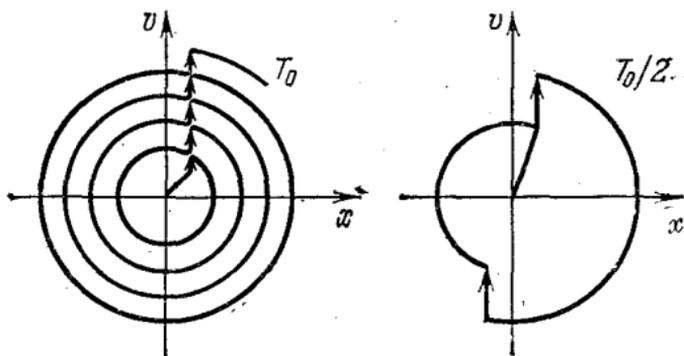


К ответу 5.2.

5.3\*. См. рис. Для  $T_0$  амплитуда  $A_n = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{np}{m\omega}\right)^2 + x_0^2}$ ;

для  $T_0/2$  амплитуда  $A_n = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{p}{m\omega}\right)^2 + x_0^2}$  для нечетных  $n$ ,

$A_n = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}$  для четных  $n$ ;  $\omega = 2\pi/T_0$ .

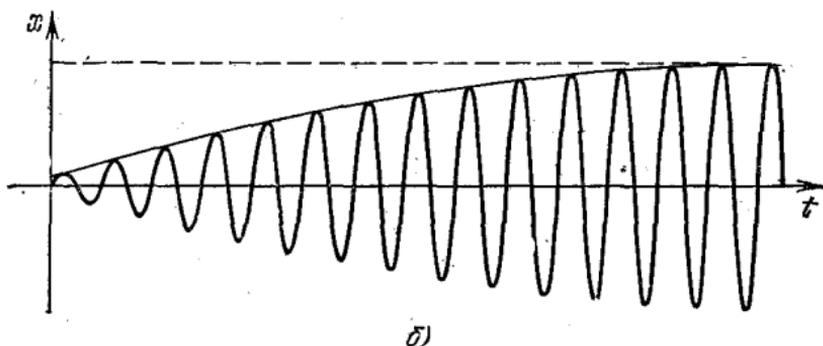
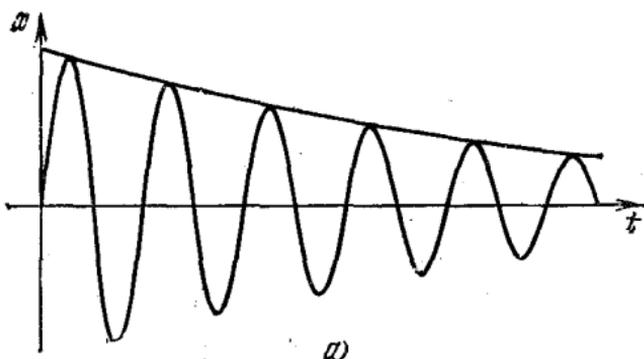


К ответу 5.3\*.

5.4. Около 63 см.

5.5. Реже идут выбоины со стороны въезда.

5.6. И несильные удары в такт собственным колебаниям приводят к их сильной раскочке, Изменение курса и скорости меняет частоту толчков.



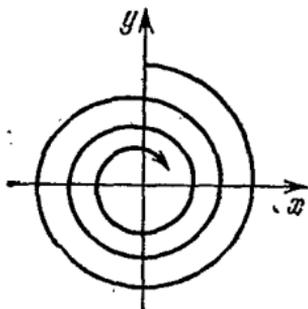
К ответу 5.10.

5.7. С ростом амплитуды увеличиваются потери за период. Когда они сравниваются с приростом энергии из-за удара, дальнейшая раскочка прекратится.

5.8.  $N = bv^2$ .

5.9\*.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \right) = -bv^2$ ; отсюда  $m \frac{dv}{dt} = -kx - bv$ .

5.10. См. рис. а) После одиночного толчка происходит затухание колебаний. б) При периодических толчках первоначально происходит раскачка колебаний, а затем, когда прирост энергии  $\sim \rho v$  сравнивается с потерями за период  $\sim bv^2 T$ , колебания устанавливаются.



К ответу 5.16.

5.13. При  $\gamma \approx \omega_0$ .

5.14. Меньше в  $n^2$ ,  $n^3$  раз начальной скорости.

5.15. За  $\tau_2$  энергия уменьшится вчетверо. За время  $\tau_2/2$  энергия уменьшится вдвое.

5.16. См. рис.

5.17\*. Если толчок произведен в момент времени  $t_1$ , то

$$x = \frac{v_1}{\omega} \exp \{-\gamma(t-t_1)\} \sin \omega(t-t_1).$$

Выбором  $v_1$  и  $t_1$  можно удовлетворить любым начальным условиям, а выражение для  $x$  приводится к виду, данному в тексте задачи.

5.18.  $\gamma = 10^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 3,1416 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3,1432 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Ошибка при замене  $\omega$  на  $\omega_0$  квадратично зависит от малой величины  $\gamma/\omega_0$ .

5.19. а)  $\gamma \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ; б)  $\gamma' = \gamma/4$ .

5.20\*. а)  $Q = \omega_0/2\gamma$ ;  $n = Q/2\pi$ . б) Примерно в 50 раз при  $Q = 10^9$  и только в 1,5 раза при  $Q = 10^8$ .

5.21\*.  $v = \frac{\rho}{m} \frac{1}{1 - \exp(-2\pi\gamma/\omega)}$ . При  $2\pi\gamma/\omega \gg 1$   $v \approx \rho/m$ ; при  $2\pi\gamma/\omega \ll 1$   $v \approx \rho/2\pi\gamma m$ .

5.23.  $A = F_0/m\omega^2$ .

5.25. а) Колебания системы являются свободными колебаниями тела, прикрепленного к пружинам жесткостей  $k_1$  и  $k_2$ . Частота таких колебаний  $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} > \omega_0$ . При амплитуде колебаний  $A$  амплитуда силы со стороны второй пружины равна  $k_2 A$ , так что  $A = F_0/k_2$ . Из условия известно  $\omega$ , а  $k_1 = m\omega_0^2$ . Поэтому  $k_2 = m(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Тогда

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Движение определяется лишь начальными условиями и действующей на тело силой, независимо от характера ее источника. Поэтому одновременно решена и задача о вынужденных колебаниях с  $\omega > \omega_0$ .

б)  $\Delta t = (\omega_0^2/\omega^2 - 1) m$ ,  $A = F_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Совпадает.

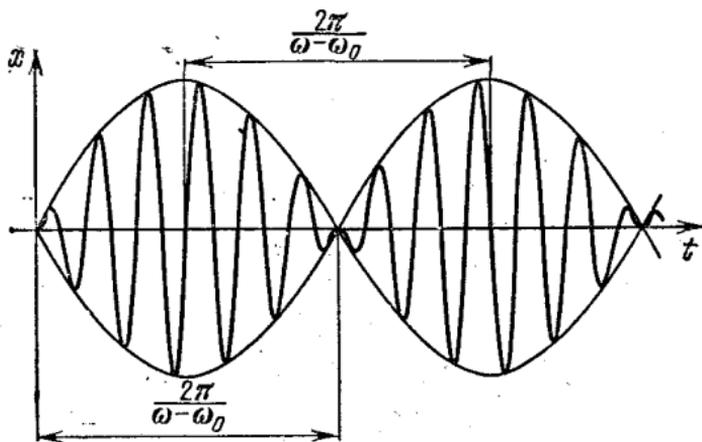
5.26\*.  $A = F_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$ .  $B$  и  $\varphi$  подбираются так, что в нулевой момент времени выполняются начальные условия  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .

5.27\*.  $x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ ,  $v_0 = 0$ ; тогда  $B = 0$ .

5.28\*. Координату частицы разбиваем на два слагаемых, первое из которых соответствует координате вынужденных колебаний. Точно так же разбиваем на два слагаемых внутреннюю силу и ускорение. Ускорение, умноженное на массу частицы, после вычитания соответствующей внутренней силы дает для первого слагаемого вынуждающую силу, для второго — нуль. Значит, второе слагаемое — координата свободных колебаний.

5.29. Вынужденные колебания с частотой, меньшей собственной частоты, можно представить как свободные колебания на той же пружине с добавочной массой, прикрепленной к телу. Сила со стороны этой массы и является вынуждающей. Она направлена против упругой силы, а значит, в направлении смещения. Колебания с частотой, большей собственной частоты, можно представить как свободные колебания того же тела с прикрепленной к нему добавочной пружиной. Сила со стороны этой пружины и является вынуждающей. Она направлена против смещения.

5.31\*.  $x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t$ . См. рис.



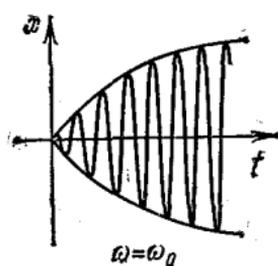
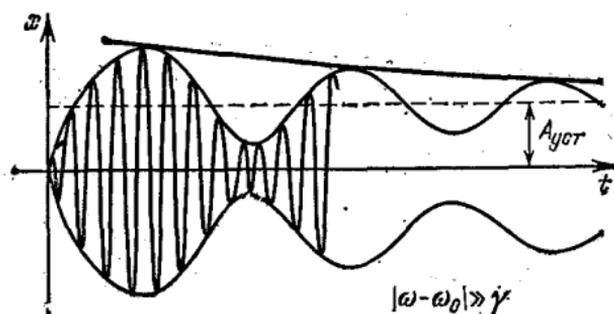
К ответу 5.31\*.

5.32\*.  $x(t) \approx \frac{F_0 t}{m(\omega + \omega_0)} \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t$ .

5.33\*.  $x(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$ .

5.34\*. При  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$  первоначально возникшие биения постепенно переходят в вынужденные колебания из-за уменьшения

$\propto e^{-\gamma t}$  слагаемого с частотой  $\omega_0$ . При  $\omega = \omega_0$  первоначальная раскачка колебаний с амплитудой почти  $\propto t$  плавно уменьшается и устанавливаются вынужденные колебания. Характерное время установления



К ответу 5.34\*.

равно времени затухания свободных колебаний  $\tau = 1/\gamma$ , когда их амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

5.35. а)  $F = -2A\gamma m\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$ ; б)  $A = -F_0/2\gamma m\omega_0$ ; в  $\omega_0/2\gamma$  раз.

5.36.  $\gamma = F_0/2x_0\omega m$ .

5.37.  $\omega_0 = 550 \text{ с}^{-1}$ ,  $\gamma = 50 \text{ с}^{-1}$ ,  $Q = 5,5$ .

5.38. Около  $2 \cdot 10^5 \text{ с}$ .

5.39.  $v = \omega_0 \lambda / 2\pi$ .

5.40\*.  $v = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t)$ ; средняя скорость  $v_{\text{ср}} = F_0/m\omega$ ; наи-

большая скорость  $2F_0/m\omega$  достигается на расстояниях  $\frac{F_0}{m\omega^2} \pi (2n + 1)$  от источника, где  $n$  — целое число.

Для частиц, испущенных в момент времени  $\pi/\omega$ , скорость  $v = \frac{F_0}{m\omega} (\cos \omega t - 1)$ ; средняя скорость  $v_{\text{ср}} = F_0/m\omega$ ; наибольшая скорость  $2F_0/m\omega$  достигается по другую сторону от источника на тех же расстояниях.

Для частиц, испущенных в момент  $\pi/2\omega$ , скорость  $v = \frac{F_0}{m\omega} \times \sin \omega t$ ; средняя скорость нулевая; наибольшая скорость  $F_0/m\omega$  достигается на расстоянии  $F_0/m\omega^2$  от источника.

5.41\*. Циклоида; средняя скорость  $F_0/m\omega$  направлена по  $x$ . Если при  $t=0$   $v_x = -F_0/m\omega$ , а  $v_y = 0$ , то частица будет двигаться по окружности радиуса  $F_0/m\omega^2$ .

### § 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волн

6.1.  $F/k$ ;  $(N-1)F/k$ .

6.2. Увеличится на  $10^{-14} \text{ м}$ .

6.3.  $k = ES/L$ ;  $F = ES (\Delta L/L)$ .

6.4.  $k = Ea$ .

6.5. 3 мм.

6.6. От  $10^8$  до  $-0,5 \cdot 10^8$  Па.

6.7.  $5 \cdot 10^4$  Н.

6.8. На  $1,2 \cdot 10^{-4}$  м.

6.9.  $\omega = E\varepsilon^2/2 = \sigma^2/2E$ .

6.10\*.  $A = \frac{\pi^2}{6} \frac{Ea^4}{l}$ .

6.11\*.  $\Delta x_{\perp} / \Delta x_{\parallel} = k_1 / (2k_0 + k_1)$ .

6.12. Увеличивается.  $\mu \approx 0,5$ .

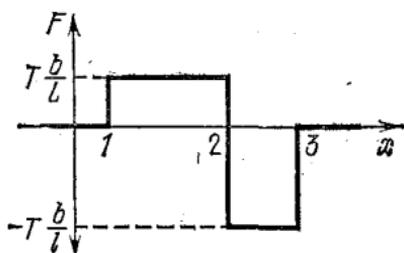
6.13\*.  $\kappa = 3(1 - 2\mu)/E$ .

6.14. Возрастет примерно на 30 м. Плотность больше на 50 кг/м<sup>3</sup>.

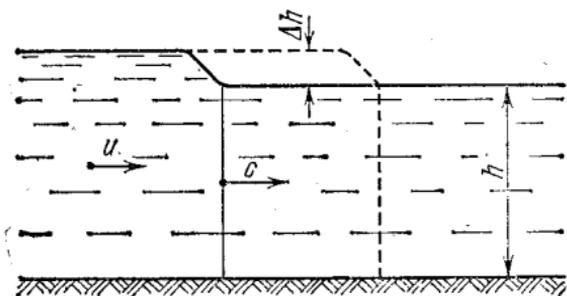
Энергия в единице объема  $2,5 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>.

6.15. Горизонтальная составляющая натяжения равна  $T$ ; по наклону участка нити находятся вертикальные составляющие; по ним — требуемые силы.

6.16. См. рис.;  $F = T\varepsilon$ . Силы приложены к точкам излома.  $F_1 = -Tb/L$ ;  $F_2 = T(b/L + b/l)$ ;  $F_3 = -Tb/l$ .



К ответу 6.16.



К ответу 6.25\*.

6.17.  $u = -c\varepsilon$ .

6.18. а)  $dp/dt = -\mu c^2\varepsilon$ . б)  $F = T\varepsilon$ ;  $c = \sqrt{T/\mu}$ .

6.19. а)  $\varepsilon = -b/L$ ,  $\omega = Eb^2/2L^2$ ;  $u = -c\varepsilon = cb/L$ .

б)  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

6.20. а)  $dp/dt = \rho c u S = -\rho c^2\varepsilon S$ .

б)  $\sigma = -E\varepsilon$ ,  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

6.21. 5 км/с. Мысленно выделим стержень в листе. Его поперечным смещениям «мешают» соседние участки. Жесткость такого стержня больше, чем у стержня со свободной боковой поверхностью.

6.22. 500, 1400 и 340 м/с.

6.23.  $c^2 = \rho(P - P_0)/\rho_0(\rho - \rho_0)$ .

6.24\*. При сжатии, плавно убывающем к фронту, скорость звука больше у более удаленных участков, возмущения догоняют друг

друга. В случае разрежения у дальних участков скорость звука меньше, они отстают, возмущение расплывается.

6.25\*. Скорость частиц и подъем уровня воды в бегущей волне связаны соотношением  $u/c = \Delta h/h$ . Приравняем скорость изменения импульса разнице сил давления:  $\rho h c u = \rho g h \Delta h$ . Отсюда  $c = \sqrt{gh}$ .

6.26\*.  $c = \frac{\omega l}{2 \arcsin(\omega/2\omega_0)}$ . При  $\omega \ll \omega_0$   $c = \omega_0 l$ ;  $2\omega_0 \approx 10^{14}$  Гц.

### § 3.7. Распространение волн

7.1.  $p = \rho c b S$ .

7.2. а)  $q_p = \Delta \rho c^2$ . б)  $v = \frac{\Delta \rho c l}{\rho L}$ ;  $x = \frac{\Delta \rho}{\rho} l$ .

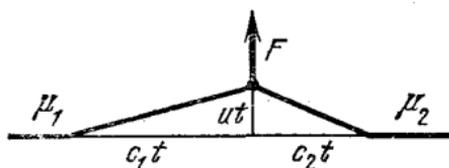
7.3.  $P(t - r/c)$ , где  $r$  — расстояние до датчика.

7.4. Плотность потока импульса  $q_p = \rho c u (x_0 - ct)$ .

7.5. 1400 Н.

7.6.  $u = F/S \sqrt{E\rho}$ ,  $\varepsilon = -F/SE$ ;  $\rho' = \rho(1 + F/SE)$ . Импульс  $p = 0,5F\tau$  и  $p' = F\tau$ ; энергия  $W = 0,5F^2\tau/S \sqrt{E\rho}$  и  $W' = F^2\tau/S \sqrt{E\rho}$ .

7.7. См. рис.;  $u = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{F}{T}$ ,  $c_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ ,  $c_2 = \sqrt{T/\mu_2}$ .



К ответу 7.7.

7.8. Вертикальные силы  $F_{1,2} = (\mu v^2 - T) b/L$  и  $F_2 = 2(T - \mu v^2) b/L$ . При  $v \rightarrow \sqrt{T/\mu}$  силы стремятся к нулю — струна «не противится» изгибу. Если силы фиксированы, то при  $v \rightarrow \sqrt{T/\mu}$  неограниченно растут деформации.

7.9. Скорости волн «изгиба» и возмущения совпадут, что приводит к резкому увеличению амплитуды волн. Это в свою очередь может привести к разрыву шины.

7.10. Скорости лодки и волны, которую возбуждает лодка в реке, совпали.

7.13. Плоский фронт. Направление распространения образует угол  $\alpha$  с нормалью к границе ( $\sin \alpha = c/v$ ).

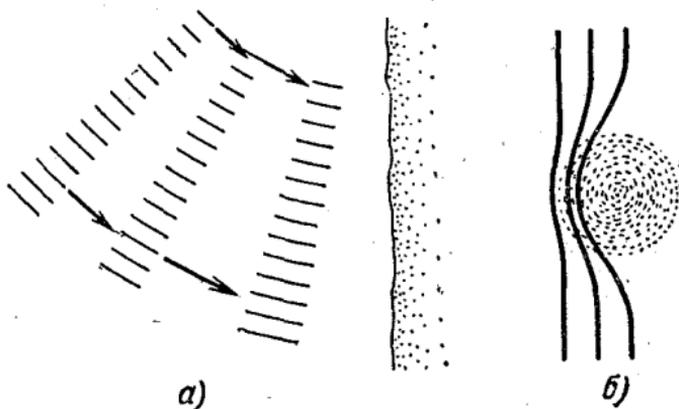
7.14.  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\sin \alpha_2 = (c_2/c_1) \sin \alpha$ . Падающая волна идет в первой среде. Длины волн относятся как скорости звука.

7.15. Шум двигателей распространяется медленнее фронта ударной волны, создаваемой сверхзвуковым самолетом.

7.16.  $\sin \alpha_0 = c_1/c_2$ .

7.17. Изменится направление только преломленной волны:  $\sin \alpha_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_1}{c_1 + v \sin \alpha_1}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости звука в воздухе и воде,  $v$  — скорость воздуха,  $\alpha_1$  — угол падения.

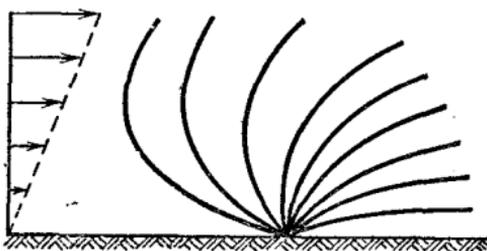
7.18. а) Более удаленные от берега участки фронта движутся с большей скоростью. Поэтому угол между фронтом волны и берегом уменьшается. б) См. рис.



К ответу 7.18.

7.19\*. На границе раздела глубин возможно полное внутреннее отражение.

7.20\*. См. рис. В направлении ветра звук идет почти вдоль поверхности земли, а в противоположном направлении уходит от нее.



К ответу 7.20\*.

$$7.21. v = v_0 / (1 - v/c).$$

$$7.22. v_1 = v_0 (1 \pm v/c); v_2 = v_0 [1 - (v/c) \cos \alpha].$$

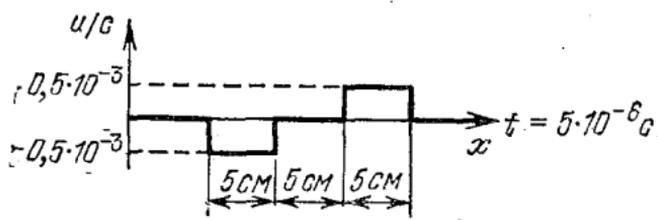
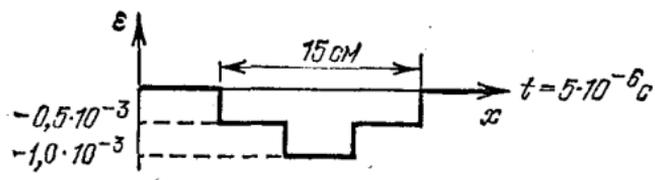
### § 3.8. Наложение и отражение волн

8.1. а) Кинетическая энергия нуль, потенциальная  $2W$ . б) Кинетическая энергия  $2W$ , потенциальная нуль.

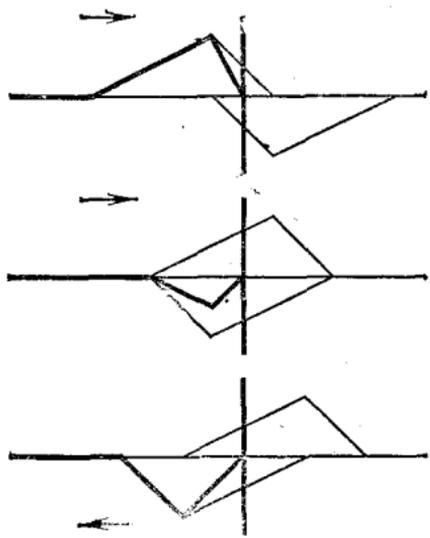
8.2. Разбегающиеся волны деформации с  $\varepsilon = -0,5 \cdot 10^{-3}$ . См. рис.

8.3. См. рис.

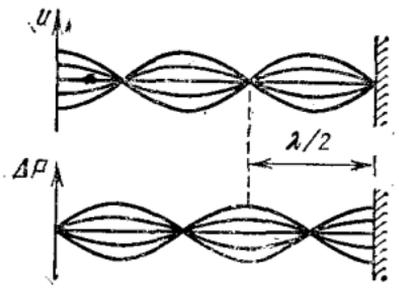
8.4. См. рис.  $P = 2\rho c \omega A \cos \omega t$ . Длина волны  $\lambda = 2\pi c / \omega$ . Вблизи стенки — узел скорости и пучность давления. Первый узел давления отстоит на  $\lambda/4$  от стенки.



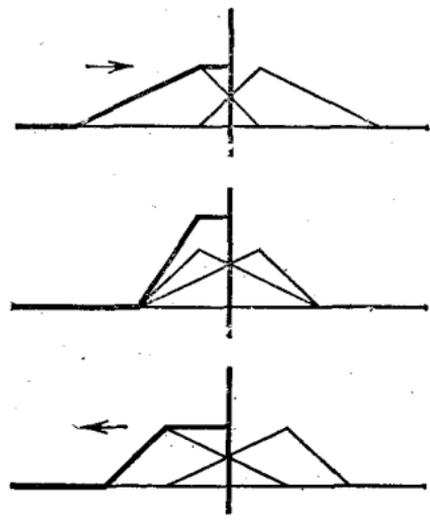
К ответу 8.2.



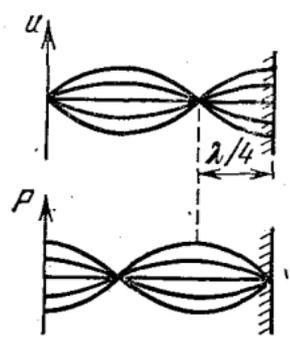
К ответу 8.3.



К ответу 8.4.



К ответу 8.5.



К ответу 8.6.

8.5. См. рис. В «неперевернутой» волне смещений знак деформации противоположен знаку деформации падающей волны.

8.6.  $A = v_0/2\omega$ . На конце стержня — пучность скорости и узел давления. Первый узел скорости отстоит на  $\lambda/4$  от конца стержня (см. рис.).

8.7. При отражении волны от внутренней поверхности стекла возникает область высокого напряжения (растяжения) на некотором расстоянии от этой поверхности.

$$8.8^*. u = 2P/\rho c = 250 \text{ м/с}; l = ct/2 = 1 \text{ см.}$$

$$8.9^*. l = \frac{1}{2} \left( L - \frac{c}{\omega} \arcsin \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sigma}{\sigma_0} \right). \text{ При } \sigma_0 \gg \sigma$$

$l = L/2$ ; при  $\sigma_0 \approx \sigma$   $l = L/4$ .

8.10.  $P = \rho c u = 3,9 \cdot 10^4$  атм. Сила, приложенная к торцу стержня со стороны стенки, порождает волну сжатия. Доходя до свободного торца, она отражается. Отраженная волна является волной растяжения. При наложении отраженной волны и волны, порождаемой силой со стороны стенки, деформация снимается, а скорость участков стержня меняет знак. Когда фронт отраженной волны доходит до стенки, весь стержень оказывается недеформированным и контакт исчезает. Время контакта  $\tau = 2l/c = 4 \cdot 10^{-4}$  с.

8.11\*. Введем скорость движения плоскости соприкосновения стержней. В системах отсчета, где первоначально покоились стержни, рассмотрим волны, порожденные движением соприкасающихся торцов, и волны, отраженные от свободных торцов. Деформации снимаются одновременно, при этом контакт исчезает. Когда отношение длин стержней не равно отношению скоростей звука, один из стержней останется деформированным к моменту исчезновения контакта. Удар в этом случае не абсолютно упругий, ибо внутренняя энергия после него возросла.

$$8.12^*. u_{\text{отр}} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} u_1; u_2 = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} u_1. \text{ Нет, так как}$$

$u_1 + u_{\text{отр}} = u_2$ . При  $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$  знак скорости в отраженной волне меняется.

$$8.13. D = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \approx \frac{4\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \approx 1,1 \cdot 10^{-3}.$$

8.14. Наличие прокладки увеличивает проходящую мощность с 0,25 до 0,41 падающей. Появятся еще «эхо-сигналы» с интервалом времени  $2l/c$ , мощность которых убывает в геометрической прогрессии. При протяженном падающем сигнале, например синусоидальном, «эхо-сигналы» налагаются, тогда подбором толщины  $l$  прокладки можно добиться почти полного прохождения или отражения.

8.15\*.  $F = 2L^2 \rho c \omega$ . При  $\omega \ll c/L$  происходит почти полное выравнивание давления из-за течения воздуха, поэтому излучение слабое.

8.16.  $W = 4\pi^2 R^2 \omega A^2 \rho c$ . Амплитуда давления в волне обратно пропорциональна расстоянию до центра пузыря. При радиальном же течении несжимаемой жидкости избыточное давление обратно пропорционально четвертой степени этого расстояния!

8.17\*. а)  $u = \frac{f_0}{2S\rho c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , где  $r$  — расстояние до источника. Деформация  $\varepsilon = \mp u/c$ , знаки  $\mp$  для излучения направо и налево соответственно. б) Между источниками — стоячая волна

$$u = \frac{f_0}{S\rho c} \cos \omega \left( t - \frac{l}{2c} \right) \cos \frac{\omega r}{c};$$

вне — бегущие волны

$$u = \frac{f_0}{S\rho c} \cos \frac{\omega l}{2c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right),$$

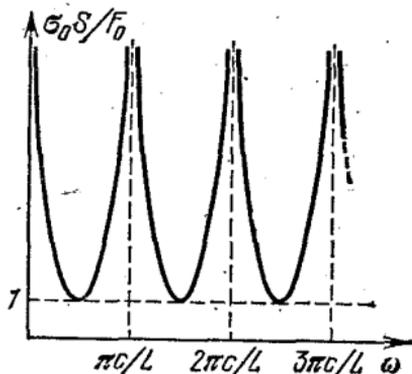
где  $r$  — расстояние до средней точки между источниками. При  $l$ , равном целому числу длин волн, — максимальная мощность, при нечетном

числе полуволн — мощность нулевая. Мощность определяется не только силой, но и скоростью точки приложения силы, а эта скорость зависит и от других источников.

8.18\*. При  $l = (1/4 + n)\lambda$ ; при  $l = (3/4 + n)\lambda$ ,  $\lambda = 2\pi c/\omega$ .

8.19.  $L = 2\lambda$ ;  $c = L\omega/4\pi$ .

8.20\*. а) Узлы напряжений находятся на расстояниях, кратных  $\lambda/2$ , от свободного конца.  $F_0 = \sigma_0 S |\sin(\omega L/c)|$ . б) См. рис.;  $\omega = 2\pi n c/2L$ , где  $n$  — целое число.



К ответу 8.20\*.

8.21.  $\nu_n = n \cdot 2500$  Гц. Понижаются вдвое.

8.22\*.  $A = A_0 |\sin(\omega L/c)|$ .  $\tau \approx 2\pi/\omega |\sin(\omega L/c)|$ .

8.23.  $\nu = c/2L = 8,25$  Гц.

8.24. С изменением высоты столба воздуха возникают резонансные колебания.

8.25. 50, 250, 450 м и т. д.

8.26. Для богатства набора собственных частот. Тон понижается с увеличением размеров.

8.27. В звучание голоса вносят вклад собственные колебания воздуха. Соответствующие длины волн неизменны, а частоты возрастут при росте скорости звука. Общий тон голоса повысится. Частота же колебаний камертона не изменится, той же частоты будет и звук.

8.28.  $T = 4l^2 \nu^2 \mu = 144$  Н.

8.29. Около пучностей смещений на расстоянии  $L/6$  или  $L/2$  от концов струны.

8.30. Из-за трения при проскальзывании возникнут большие потери. Они наименьшие для середины, где узел скоростей, наибольшие — для концов, где пучность скоростей.

8.31\*. Основные потери связаны с уходом волны через границу сапфир — воздух. Коэффициент прохождения  $D = 4\rho_{\text{в}}c_{\text{в}}/\rho_{\text{с}}c_{\text{с}} \approx 0,7 \cdot 10^{-4}$  и дает отношение потерь энергии за период к энергии колебаний. Потери увеличатся примерно в  $10^4$  раз.

## Глава 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

### § 4.1. Давление в жидкости

1.2.  $F = 2000\sqrt{2}$  Н. Нуль.

$$1.3. P = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{F}{a^2}.$$

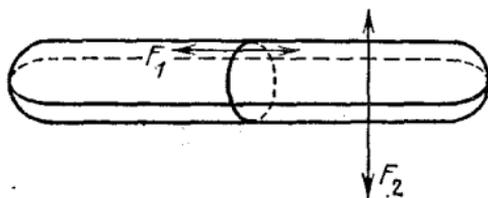
1.4. Да.

$$1.5. F = 2\pi r^2 P.$$

$$1.6. F = \pi (R^2 - r^2) P.$$

$$1.7*. \sigma = \frac{R}{2\Delta} P.$$

1.8. Сила  $F_1$ , действующая на единицу длины периметра поперечного сечения сосиски, меньше силы  $F_2$ , действующей на единицу длины периметра продольного сечения сосиски.



К ответу 1.8.

1.9. На расстоянии  $l = \frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} a$  от центра палки.

1.10.  $h = 727$  см.

1.11.  $F_{\text{н}} = 392$  Н.  $F_{\text{в}} = 314$  Н.  $F_6 = 353$  Н.  $F = 78$  Н.

1.12\*.  $F = \frac{1}{12} \rho g a^2 (3\sqrt{3}h - \sqrt{2}a)$ .

1.13. Составляющие силы, параллельная и перпендикулярная дну:

$$F_{\parallel} = a^3(\rho - \rho_0) g \sin \alpha, \quad F_{\perp} = a^3 \rho_0 g \left( \frac{\rho}{\rho_0} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{h}{a} \right).$$

$$1.14. x = l - \frac{R^2}{r^2} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) h.$$

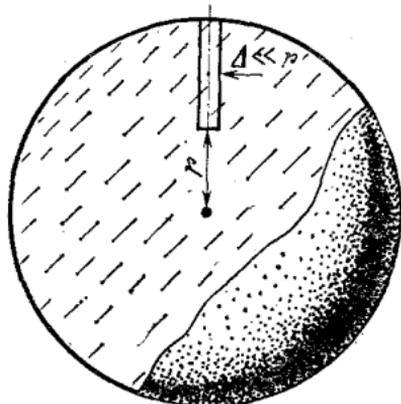
$$1.15. h = 85 \text{ см.}$$

$$1.16. h = 10,1 \text{ м.}$$

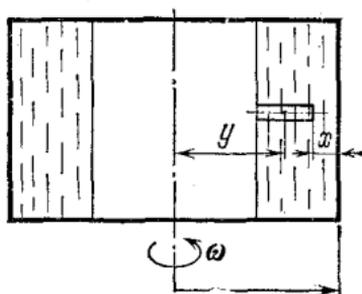
$$1.17*. m = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho.$$

$$1.19*. A = \pi r^2 \left(h + \frac{1}{2} l \frac{r^2}{R^2}\right) \rho g l.$$

1.20\*. Давление  $P_r$  можно найти из условия равновесия выделенного на рисунке тонкого цилиндрического объема: сила притяжения



К ответу 1.20\*.



К ответу 1.23\*.

этого объема жидкости. к центру планеты равна силе давления, действующей на нижнее сечение объема.  $P_r = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 (R^2 - r^2)$ ;  $P_0 = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 R^2$ .

1.21. В направлении вектора ускорения.

$$1.22. \beta = \alpha - \text{arctg } \mu.$$

1.23\*. Давление  $P(x)$  можно найти из условия, что сила давления на внутреннее сечение выделенного на рисунке тонкого цилиндрического объема равна  $m\omega^2 y$ , где  $y$  — расстояние от центра цилиндра до оси вращения,  $m$  — масса выделенного объема.  $P(x) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [(R-x)^2 - \frac{1}{4} R^2]$ .

$$1.24. y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2.$$

## § 4.2. Плавание. Закон Архимеда

$$2.1. P = mg/S.$$

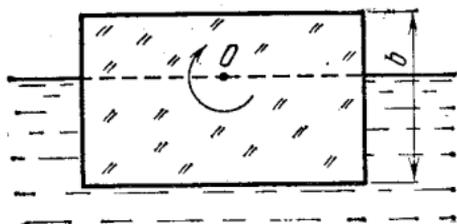
$$2.2. x = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho} h.$$

$$2.3. x = (m - h\rho_1 S)/S (\rho_2 - \rho_1).$$

2.4\*. Если при повороте параллелепипеда вокруг оси, проходящей через точку  $O$ , центр тяжести системы жидкость — параллелепи-

пед повышается, положение параллелепипеда устойчиво. Это условие

выполняется при  $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)}$ .



К ответу 2,4\*.

2.5.  $A = 32,5$  Дж.

2.6.  $V = 147$  см<sup>3</sup>.

2.7.  $\rho = 1,5$  г/см<sup>3</sup>.

2.8.  $n = \rho_1/\rho_2$ .

2.9\*.  $x = 4m/\pi\rho (d_1^2 + d_2^2)$ .

2.10.  $F = 9,8 \cdot 10^{-3}$  Н.

2.11.  $F = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho g \left(1 + 2 \frac{r}{l}\right)$ .

2.12.  $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$  Н.

2.13.  $\rho = 2,3$  г/см<sup>3</sup>.

2.14.  $F = mg/\sqrt{3}$ .

2.15\*. а)  $F = 2\rho g R H L$ , если  $H < L/2$ ;  $F = \rho g R (H + L/2)$ , если  $H > L/2$ .

б)  $F = \pi \rho g R^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{H}{R} + \frac{1}{6} \frac{H^3}{R^3}\right)$ , если  $H < R$ ;  $F = \pi \rho g R^2 H$ , если  $H > R$ .

2.17.  $m = 520$  г.

2.18\*.  $m = \frac{4}{3} \pi (R^2 - r^2)^{3/2} \rho$ .

2.19\*.  $m_1 = \frac{1}{24} \rho a^3 (6 + 5 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha)$ ;  $m_2 = \frac{1}{24} \rho a^3 (6 - 5 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha)$ .

2.20\*.  $T = \frac{\sqrt{3}}{18} mg$ .

2.21.  $Q = \pi r^2 \rho g h H \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h}{H} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right]$ .

2.22.  $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 H \rho g = 410$  Дж, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

2.23.  $A = 283$  кДж.

2.24\*. а) Сможет.  $\rho = \left(1 - \frac{l}{2R - 2H - \Delta + l}\right) \left(1 - \frac{\Delta}{l}\right)$  кг/см<sup>3</sup>.

2.25.  $F = \frac{4}{3} \pi r^3 (R - r) (\rho - \rho_0) \omega^2$ .

2.26.  $\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R - (l - r) \sin \alpha}}$ .

### § 4.3. Движение идеальной жидкости

3.1. 28,0; 27,3; 26,5 м/с. На двенадцатый этаж.

3.2.  $\Delta T = 2gh\rho S$ .

3.3.  $N = \rho Q (gh + Q^2/2S^2)$ .

3.4. а) Из-за разного давления в областях 1 и 2 на жидкость в области между 1 и 2 действует сила давления в направлении движения жидкости. Эта сила больше  $F$ .

б)  $F = \frac{1}{2} \rho v^2 S_1 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$ .

3.5. В сосуде  $P = P_0 + \rho gx$ ; в трубке  $P = P_0 + \rho g(x - H)$ .

3.6.  $F = \sqrt{2} (P + \rho v^2) S$ .

3.7.  $v = \sqrt{2FS/\rho (S^2 - s^2)}$ .

3.8.  $x = 5l$ .

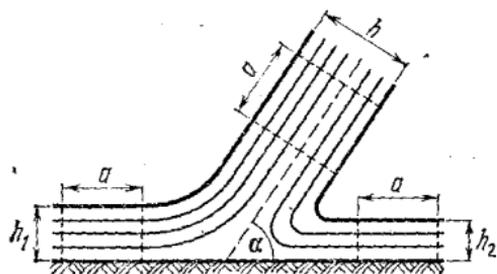
3.9.  $h = \frac{1}{2g} \left[ v^2 - \left( \frac{mg}{\rho v S N} \right)^2 \right]$ .

3.10\*. Размеры продольного сечения струи увеличатся в 2 раза. Скорости подобных участков в струе увеличатся в  $\sqrt{2}$  раз. Поэтому сброс увеличится в  $2\sqrt{2}$  раза.

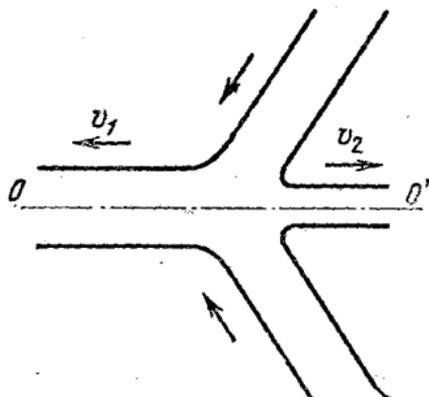
3.11\*. Струи будут подобны. Размеры струи при понижении уровня воды уменьшатся в  $H/h$  раз, скорости подобных участков в струе уменьшатся в  $\sqrt{H/h}$  раз. Поэтому водосброс уменьшится

в  $\left(\frac{H}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{H}{h}} = \left(\frac{H}{h}\right)^{5/2}$  раз.

3.12. На плоскости сохраняется энергия выделенных на рисунке участков струи и их суммарный импульс вдоль плоскости. Из закона



К ответу 3.12.



К ответу 3.13\*.

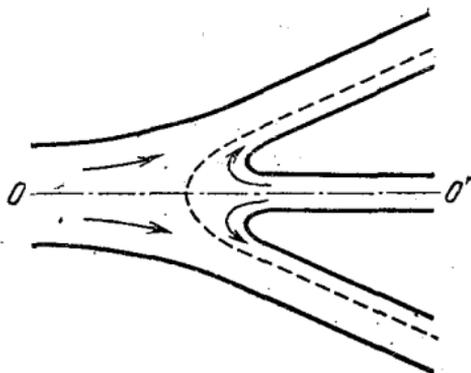
сохранения энергии следует, что скорости этих участков на плоскости тоже будут равны  $v$ , а из закона сохранения импульса следует, что

$$h_1 = h(1 + \cos \alpha)/2, \quad h_2 = h(1 - \cos \alpha)/2.$$

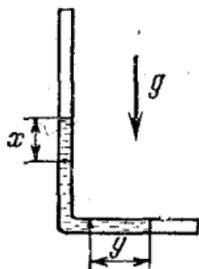
3.13\*. Нужно перейти в систему отсчета, в которой пластины движутся вдоль своих плоскостей. В этой системе материал пластин будет двигаться как две встречные струи, изображенные на рисунке. Их движение над и под плоскостью  $OO'$  повторяет движение струи, рассмотренной в задаче 3.12:

$$v_1 = v \operatorname{tg}(\alpha/2), \quad v_2 = v \operatorname{ctg}(\alpha/2).$$

3.14\*. Решение аналогично решению задачи 3.12 (см. рис.). Конус с  $\cos \alpha = (R^2 - r^2)/(R^2 + r^2)$ .



К ответу 3.14\*.



К ответу 3.16\*.

3.15. Задача сводится к задаче 3.14, если перейти в систему отсчета, в которой встречные скорости брони и струи металла будут равны по модулю.  $v_c = 1$  км/с.

3.16\*.  $h = l \cos \sqrt{g/lt}$ .  $P = x\rho g/2$  в вертикальной части трубки,  $P = y\rho g/2$  в горизонтальной части трубки (см. рис.).

3.17\*.  $a = g (s/S)^2$ .

3.18.  $E = PV$ .

3.19\*.  $v = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P}{\rho} \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right)}$ ,  $\rho$  — плотность воды.

3.20. а) При скорости, большей 14 м/с. б\*) При интенсивности, большей 700 Вт/м<sup>2</sup>.

#### § 4.4. Течение вязкой жидкости

4.1.  $v = v_0 x/h$ ,  $0 < x < h$ ;  $F = \eta v_0/h$ .

4.2.  $v = \frac{\Delta P}{2h} x (h-x)$ ,  $0 < x < h$ ;  $Q = h^3 \frac{\Delta P}{12\eta}$ .

4.3\*.  $v = \Delta P (R^2 - x^2)/4\eta l$ .

4.4.  $Q = \frac{h^3 \rho g \sin \alpha}{8\eta}$ .

4.5.  $F = P_2 S_2 - P_1 S_1 - \rho v_1^2 S_1 (1 - S_1/S_2)$ .

## § 4.5. Поверхностное натяжение жидкости

5.3.  $r \approx 0,5$  см.

5.4.  $F = 2(\sigma_1 - \sigma_2)l$ ,

5.5.  $\sigma = \frac{1}{2} ES \left( \frac{2\pi}{l} - \frac{1}{R} \right)$ .

5.6. б) При  $\sigma_{ж} \leq \sigma_T - \sigma_{жТ}$ . в\*)  $\cos \theta = (\sigma_T - \sigma_{жТ})/\sigma_{ж}$ .

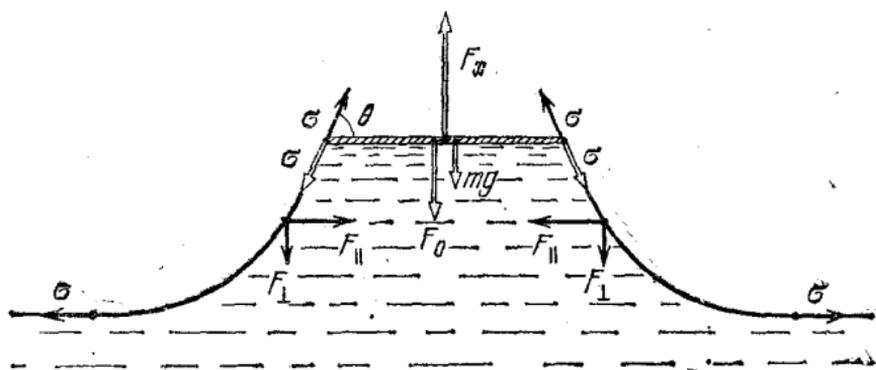
5.7.  $a = 2,1$  мм.

5.8.  $n = 5/4$ .

5.9.  $m = 0,546$  г/см<sup>2</sup>.

5.10. Меньше 0,2 см/с<sup>2</sup>.

5.11\*. На рисунке изображены силы, действующие на участке единичной длины (двойными стрелками обозначены силы, действующие



К ответу 5.11\*.

на пластину; жирными — силы, действующие на боковую поверхность жидкости):  $F_x$  — искомая сила;  $mg$  — сила тяжести пластины;  $F_0 = \rho g x l$  и  $F_{||} = \rho g x^2$  — силы, вызываемые отрицательным давлением жидкости;  $\sigma$  — силы поверхностного натяжения. Из условия равновесия боковой поверхности жидкости следует

$$F_{||} = \rho g x^2 / 2 = \sigma - \sigma \cos \theta, \quad \cos \theta = 1 - \rho g x^2 / 2\sigma.$$

Из условия равновесия пластины имеем

$$F_x = F_0 + mg + 2\sigma \sin \theta = \rho g x l + mg + 2\sigma \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = mg + \rho g x (l + 2\sigma \sqrt{\sigma / \rho g - x^2 / 4}).$$

5.12. а)  $x = \sqrt{2\sigma(1 - \sin \theta) / \rho g}$ . б)  $h = 3,9$  мм.

5.13. а)  $x = 2 \sin(\theta/2) \sqrt{\sigma / \rho g}$ . б)  $\Delta = 5,4$  мм.

5.14\*. а)  $x = \sqrt{\frac{2\rho_{ж}(\sigma_m + \sigma_{мж} - \sigma_{ж})}{\rho_m(\rho_{ж} - \rho_m)g}}$ . б) Около 3 км<sup>2</sup>.

5.15\*. Вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения равна периметру палочки, умноженному на  $\sigma \cos \theta$ . Поэтому

объем жидкости, поднятой поверхностным натяжением, не зависит от формы сечения палочки, а зависит от ее периметра.

$$5.17. P_{\max} = 2\sigma/R + \rho g(h+R), \quad P_{\min} = 2\sigma/R + \rho g(h-R).$$

$$5.18. R = \sigma/\rho g x.$$

$$5.19. P_1 = P + 2\sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R-h} \right), \quad P_2 = P + \frac{2\sigma}{R}.$$

$$5.20. \text{Около } 3 \text{ л.}$$

$$5.22*. h = r \sqrt{\frac{\sigma + \sigma_1 + \sigma_2}{\sigma - \sigma_1 - \sigma_2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}}.$$

$$5.23. R_{\Pi} = rR/(R-r). \quad \alpha = 120^\circ.$$

$$5.24*. m = \pi r^2 (\rho h + 2\sigma/Rg).$$

$$5.25*. \text{ а) } h = 0,1 \text{ мм. б) } \nu = 50 \text{ Гц.}$$

$$5.26*. \text{ а) } A = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж. б) } A = 0,01 \text{ Дж.}$$

## § 4.6. Капиллярные явления

$$6.1. \text{ б) Изнутри.}$$

6.2.  $h = 2\sigma/\rho g R$ .  $A = 4\pi\sigma^2/\rho g$ ,  $U = 2\pi\sigma^2/\rho g$ . Часть энергии переходит в тепло.

$$6.3. \Delta = 0,38 \text{ \%}.$$

$$6.4. r_1 = 1,50 \text{ мм; } r_2 = 1,47 \text{ мм; } r_3 = \infty.$$

$$6.5. \Delta x = \frac{2\sigma}{\rho g r^2}, \quad 0 < t < \frac{h}{v} - \frac{2\sigma}{\rho g r v}; \quad \Delta x = \frac{2\sigma}{\rho g r} - vt, \quad t > \frac{h}{v} - \frac{2\sigma}{\rho g r v}.$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{\rho g r v} + \frac{h}{v}.$$

$$6.6. R_x = R \frac{h}{l \cos \theta}.$$

$$6.7*. \omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho}}.$$

$$6.8. x = 2h, \text{ если } l > h; \quad x = l + h, \text{ если } l < h.$$

$$6.9*. 17^\circ \text{C} < t < 45^\circ \text{C}.$$

6.10. Смачивающая жидкость будет двигаться в сторону узкой части капилляра, несмачивающая — в сторону широкой части.

$$6.11. x = \frac{1}{2} H \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16\sigma}{\rho g \alpha H^2}} \right), \quad \alpha > 16\sigma/\rho g H^2;$$

$$x = H, \quad \alpha < 16\sigma/\rho g H^2.$$

$$6.12. x = \frac{\sigma}{\rho g \Delta} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

$$6.13. F = a\sigma (1 - \cos \theta).$$

$$6.14*. F = 2a\sigma^2/\rho g \Delta^2.$$

$$6.15*. T = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{r\rho}}.$$

§ 5.1. Тепловое движение частиц

1.1.  $m \geq 0,01$  мг.

1.2.  $K \approx 5,8 \cdot 10^{-21}$  Дж,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  м/с.

1.3. В 2 раза.

1.4.  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \approx 6,4 \cdot 10^{-8}$  м.

1.5\*.  $d \approx 7$  см. При  $T = 100$  К  $d \approx 4$  см.

1.6. Быстрее выравнивается число частиц в единице объема более подвижных легких молекул.

1.7.  $P_{\Gamma}/P_{\text{В}} = 1/\sqrt{2}$ .

1.8\*.  $N_1/N_2 = (\mu_2/\mu_1)^{(n-1)/2}$ .

1.9\*.  $\tau' = n\tau$ .

1.10. В  $L^2/R^2$  раз.

1.11\*.  $N_1 = N \sqrt{T_1}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$ ,  $N_2 = N \sqrt{T_2}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$ .

$P_1 = N_1 k T_1/V$ ,  $P_2 = N_2 k T_2/V$ . В сторону первого объема.

§ 5.2. Функция распределения

2.1. а)  $N = 1,3 \cdot 10^{15}$  л<sup>-1</sup>. б)  $N_1 = 1,3 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup>;  $N_2 = 1,3 \cdot 10^{14}$  м<sup>-3</sup>.

в)  $N_1 = 6,2 \cdot 10^4$  см<sup>-3</sup>;  $N_2 = 1,2 \cdot 10^4$  см<sup>-3</sup>.

2.2. а)  $N \approx 10^{16}$  см<sup>-3</sup>; б)  $N \approx 2 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup>.

2.3.  $n = 0,13$ .

2.4.  $n = 6 \cdot 10^{-4}$ .

2.5. а)  $f' = \frac{1}{l} f\left(\frac{v}{l}\right)$ . б)  $f' = \frac{1}{l^2} f\left(\frac{v}{l^2}\right)$ .

2.6. Температура будет уменьшаться.

2.7\*.  $L = l \frac{\tau}{t} \left(1 + \frac{2\tau_1}{t + 2\tau}\right)$ .

2.8.  $v = 300$  м/с.

2.9.  $v = h\omega/2\pi$ .

2.10\*. а)  $v_{\min} = v + \frac{F\tau}{m}$ ,  $v_{\max} = v + \frac{F\tau}{m} + \Delta v$ ,  $n' = n$ . б)  $v_{\min} =$

$= v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$ ,  $v_{\max} = v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2} + \Delta v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$ ,  $n =$

$= n/\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$ .

2.11\*. Не изменится. Уменьшается в  $\exp(2Fl/m)$  раз.

2.12.  $m = 10^{-24}$  кг,  $r = 10^{-9}$  м.

2.13.  $h_1 \approx 111$  км,  $h_2 \approx 123$  км.

2.14\*. а)  $n = n_0 \exp(-q/kT)$ . б)  $n = 10^{15}$  см<sup>-3</sup>.  $T = 660$  К.

### § 5.3. Столкновение молекул. Процессы переноса

3.1.  $d = 0,25$  нм.

3.2.  $l = 54$  нм.

3.3.  $v_1 \approx 6 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$ .  $v_2 \approx 3 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$ ,

3.4. а)  $l \sim T$ ,  $v \sim 1/\sqrt{T}$ . б)  $l \sim 1/P$ ,  $v \sim P$ .

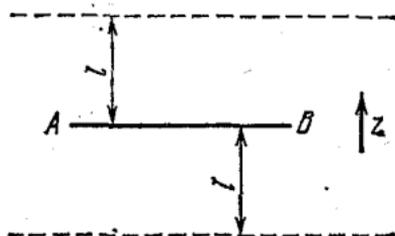
в)  $l \sim 1/P^\gamma$ ,  $v \sim P^{(\gamma+1)/2\gamma}$ .

3.5.  $l_1 \sim \pi^{-1} [4R_1^2 n_1 + (R_1 + R_2)^2 n_2]^{-1}$ ;

$l_2 \sim \pi^{-1} [4R_2^2 n_2 + (R_1 + R_2)^2 n_1]^{-1}$ .

3.6\*.  $t \approx 30$  пс.

3.7. а) На высоте  $h$  через горизонтальную единичную площадку  $AB$  сверху идет поток радиоактивных атомов, удаленных от



К ответу 3.7а,

нее на расстояние порядка  $l$ . Плотность этого потока оценивается формулой  $W_1 \approx \bar{v}_z n_{h+l}/2$ , где  $\bar{v}_z$  — скорость, близкая к  $(\bar{v}_z^2)^{1/2} = \sqrt{kT/m}$ , а  $n_{h+l} = \alpha(h+l)$  — число атомов в единице объема на высоте  $h+l$ . Плотность же потока атомов, идущего снизу,  $W_2 \approx \bar{v}_z n_{h-l}/2 \approx \sqrt{kT/m} \alpha(h-l)/2$ . Результирующая плотность потока на Землю  $W = W_1 - W_2 \approx \alpha l \sqrt{kT/m}$ .

б)  $D \approx 12$  мкм/с.

3.8.  $D = nD_1 D_2 / (n_1 D_2 + n_2 D_1)$ .

3.9\*. а)  $t \approx L/D$ . б)  $m = DS\rho/L$ .

3.10. а) Решение задачи аналогично решению задачи 3.7а:  $W \approx n\alpha k \sqrt{kT_0/m}$ ; не изменится. б) В 6,2 раза.

$$3.11^*. \kappa = \frac{\kappa_1}{1 + \frac{1}{4\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \right)^{1/2} \right]^2} + \frac{\kappa_2}{1 + \frac{\alpha}{4} \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \right)^{1/2} \right]^2}$$

3.12.  $t' = nt$ .

3.13. Температуропроводность металла значительно выше.

## § 5.4. Разреженные газы. Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела

4.1.  $\nu \approx 10^{24} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $\Delta p/\Delta t \approx 10 \text{ Н}$ .

4.2. Уменьшится в  $1 - k/2$  раз.

4.3.  $F \approx \pi R^2 n m v^2$ .

4.5.  $F \approx 4\pi a^2 P \mu \sqrt{\mu/3RT}$ .

4.6.  $F \approx P\sigma/2$ .

4.7.  $F \approx P S u \sqrt{\mu/3RT}$ .

4.8. Пока длина свободного пробега молекул газа больше расстояния между дисками, момент силы вязкости зависит от давления.

4.9.  $\omega' = \omega (r/R)^2$ .

4.10. При освещении пластин температура зачерненной поверхности выше, чем зеркальной. Поэтому в разреженном газе давление на нее несколько выше.

4.11\*.  $F \approx 10^{-2} \text{ Н}$ .

4.12.  $v \approx 1 \text{ м/с}$ .

4.13\*.  $P \approx FT_1/S (T_2 - T_1)$ .

4.14\*.  $P_0 = P \sqrt{T_0/T}$ .

4.15\*.  $P' = P (1 + \sqrt{2}) \cdot 2^{-5/4}$ ,  $T' = T \sqrt{2}$ .

4.16\*.  $Q \approx \frac{kn \Delta T}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ .

4.17. Цену деления шкалы температур нужно уменьшить в  $\sqrt{14}$  раз.

4.18.  $m \approx 0,1 \text{ кг}$ .

4.19. Если газ разрежен, то теплопроводность уменьшится. Если газ плотный, то не изменится.

4.20\*.  $r \approx (Q_1/Q_2 \pi l \delta)^{1/2}$ .

## § 5.5. Уравнение состояния идеального газа

5.1. В 3 раза.

5.2.  $M = m (k - 1) n / (n - 1)$ .

5.3.  $V = 850 \text{ л}$ .

5.4. Керосин, в отличие от воздуха, обладает низкой сжимаемостью.

5.5.  $P = 1,166 \text{ МПа}$ .

5.6.  $\Delta t = 140 \text{ }^\circ\text{С}$ .

5.7. В рабочем режиме, когда газ в баллоне нагрет, его давление не должно превышать атмосферного.

5.8\*.  $T = 9/8 T_0$ .

5.9.  $n = (P - P_0) V_0 / P_0 V$ .

$$5.10. n = \frac{\ln(P_0/P)}{\ln(1+V/V_0)}$$

5.11. Не зависит.

$$5.12^*. \Delta P = 137 \text{ Па}$$

$$5.13. T = T_0 \frac{2V_0 + S(l+2x)}{2V_0 + S(l-2x)}$$

$$5.14. P = 1146 \text{ рПа}$$

$$5.15. V_B/V_H \approx 1,9$$

$$5.16. x = (H_0 - H) \left( 1 - \frac{\rho g h_0}{P_0 + \rho g H} \right)$$

$$5.17. \text{ а) } H = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{2\rho g h}{2P_0 + \rho g H} \right). \text{ б) } H = \frac{h}{2} + \frac{P_0}{\rho g}$$

$$5.18^*. P = P_0 + \rho g H$$

$$5.19^*. P_1 = 0,166 \text{ МПа}. P_2 = 0,18 \text{ МПа}$$

$$5.20. \text{N}_2\text{O}_3$$

$$5.21. 28 \%$$

$$5.22. T = T_0 \frac{\mu(P_0 r + 4\sigma)}{\mu P_0 r - 3\delta_0 R T_0}, \text{ где } R \text{ — газовая постоянная, } \mu \text{ — молекулярная масса воздуха.}$$

$$5.23. \sigma = \frac{P}{4} \frac{r_1^3 + r_2^3 - r^3}{r^2 - r_1^2 - r_2^2}$$

$$5.24. T = 2\pi \sqrt{ml/2P_0S}$$

## § 5.6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

$$6.2. U_1 = 0,25 \text{ Дж}. U_2 = 0,2 \text{ МДж}$$

6.3. Не изменится.

$$6.4. P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}, T = T_1 T_2 \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}$$

6.5. В 2 раза.

$$6.6. u_M \approx \sqrt{\frac{3P_0 V_0 m}{M(M+m)}}, u_m \approx \sqrt{\frac{3P_0 V_0 M}{m(M+m)}}$$

$$6.7. T_{\max} = T_0 + 2mv^2/3R, \text{ где } R \text{ — газовая постоянная}$$

$$6.8. v \approx 10 \text{ м/с}$$

6.9. При расширении без подведения тепла газ совершает раб

боту и охлаждается.

6.10. При изобарическом расширении.

$$6.12. \text{ а) } A = PV; \text{ б) } A = 3/2 PV$$

$$6.13. A = 460 \text{ Дж}$$

$$6.14. A = 2,6 \text{ кДж}$$

$$6.15. A = 240 \text{ Дж}$$

$$6.16. Q \approx 7,94 \text{ кДж}. A \approx 2,27 \text{ кДж}$$

$$6.17. A = R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$$

$$6.18. T = T_0 \left(1 + \frac{Mu^2}{3P_0V_0}\right), \quad V = V_0 \left(\frac{3P_0V_0}{3P_0V_0 + Mu^2}\right)^{3/2}.$$

$$6.19*. u_{\max} = \sqrt{2gH \left[1 - \frac{PS}{Mg} + \frac{PS}{Mg} \ln \frac{PS}{Mg}\right]};$$

$$u_{\max} = \sqrt{2gH \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{PS}{Mg}\right)^{3/5} + \frac{3}{2} \frac{PS}{Mg}\right]}.$$

6.20\*.  $V_1 = \sqrt{V_0 V_2}$ ,  $A_{\min} = 5P_0V_0 [(V_0/V_2)^{1/5} - 1]$ . Каждый компрессор совершает работу  $A_{\min}/2$ .

$$6.21. Q = 0,36 \text{ МДж. } \Delta U = 0,26 \text{ МДж. } c = 1,2 \text{ кДж/К.}$$

6.22. Кислород.

$$6.23*. T = T_0 + Q/c \text{ при } Q \leq Q_1 = cT_0F/P_0S;$$

$$T = \frac{Q + cT_0 + RT_0(1 + F/2P_0S)}{c(1 + F/P_0S) + R(1 + F/2P_0S)} (1 + F/P_0S) \text{ при } Q \geq Q_1.$$

$$6.24. Q = 10\rho gSh^2.$$

6.25\*.  $PV^n = \text{const}$ , где  $n = (c - c_p)/(c - c_v)$  — показатель поли-тропы. 1)  $V = \text{const}$ ; 2)  $P = \text{const}$ ; 3)  $PV^\gamma = \text{const}$ ; 4)  $PV = \text{const}$ .

$$6.26. \text{Охлаждается; } c = c_p - R.$$

$$6.27. c = 2P_0V_0/T_0.$$

$$6.28*. c = \frac{4\pi r^3}{3T} \left(P_0 + \frac{4\sigma}{r}\right) \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{3P_0r + 12\sigma}{3P_0r + 8\sigma}\right).$$

$$6.29*. x = \frac{3}{5} H \left(1 - \frac{PS}{Mg}\right).$$

## § 5.7. Истечение газа

$$7.1. v = \sqrt{2\gamma RT/\mu (\gamma - 1)}.$$

$$7.2*. v = \sqrt{7(k+1)RT/(k\mu_1 + \mu_2)}.$$

$$7.3*. \text{а) } T \approx 3150 \text{ К. б) } v \approx 3 \text{ км/с.}$$

$$7.4. \text{а) } v \approx 5,2 \text{ км/с; б) } v \approx 5,7 \text{ км/с; в) } v \approx 7 \text{ км/с.}$$

$$7.5. m_1 \approx 3,8 \text{ т/с.}$$

$$7.6*. v = \left\{ \frac{2\gamma RT_1}{\mu (\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma}\right] \right\}^{1/2}.$$

$$7.7*. T \approx 120 \text{ К. } v \approx 1370 \text{ м/с.}$$

$$7.8*. T \approx 193 \text{ К. } P \approx 0,33 \text{ МПа.}$$

$$7.9*. v' = v \frac{1}{1 + \gamma} \left[ \gamma \left(1 + \frac{P}{\rho v^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{P}{\rho v^2}\right)^2 - \frac{2(\gamma^2 - 1)q}{\rho S v^3}} \right],$$

$$F = \rho S v (v' - v), \text{ где } \rho = P\mu/RT.$$

## § 5.8. Вероятность термодинамического состояния

$$8.1. \text{а) } t = \tau/4. \text{ б) } t = \tau/8. \text{ в) } t = \tau/2^N.$$

$$8.2. \text{а) } p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{2}. \text{ б) } p = \frac{1}{2}. \text{ в) } p_3 = \frac{3}{8}, p_0 = \frac{1}{8}.$$

8.3. а)  $p = (1 - V_1/V)^N$ . б)  $V_1 = V(1 - 10^{-2/N})$ .

8.4\*.  $p \sim 10^{-10^{15}}$ ;  $V \sim 10^{-17} - 10^{-18}$  см<sup>3</sup>.

8.5.  $p = (V_1/V)^N$ .

8.6. 200 кДж.

8.8\*.  $p'/p = (1 - V_1^2/V^2)^N$ .

8.9\*. В  $10^{4,8 \cdot 10^{22}}$  раз.

8.10. Не реален.

8.11. Не реален. Реален.

## § 5.9. Второе начало термодинамики

9.2.  $\Delta S = 1,2$  кДж/К.

9.3.  $\Delta S = 7$  кДж/К.

9.4. а), б)  $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln 2$ .

9.5. а), б), в)  $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \left\{ \frac{V_2}{V_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} \right\}$ .

9.6\*.  $\Delta S \approx 20$  Дж/К.

9.7\*.  $\Delta S \approx 60$  Дж/К.

9.8.  $\Delta S = \frac{PV}{T} \ln 2$ .

9.9\*. а)  $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{5}{2} R \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$ , где  $Q_1$  и  $Q_2$  — количества тепла, переданные нагревателю и холодильнику за один цикл,

б)  $\Delta S = \frac{R}{2} \left[ 3 \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} + 3 \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} + 2 \frac{V_2}{V_1} + 2 \frac{V_1}{V_2} - 10 \right]$ .

9.10\*. а)  $\eta = 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3}$ ; б)  $\eta = \frac{2(T_2 - T_1) \ln(P_2/P_1)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln(P_2/P_1)}$ .

9.11. Не существует.

9.12. Можно.

9.13.  $\eta \approx 19,8\%$ ,  $\eta_0 = 30\%$ .

9.14. Для любого теплового циклического процесса

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_X}{T_X} \geq 0, \quad Q_H - Q_X = A, \quad \eta = \frac{A}{Q_H},$$

где  $T_H$  и  $T_X$  — температуры нагревателя и холодильника,  $Q_H$  и  $Q_X$  — количества тепла, переданные нагревателю и холодильнику за один цикл,  $A$  — работа за один цикл. Из приведенных соотношений следует, что к. п. д.  $\eta \leq (T_H - T_X)/T_H$ , причем знак равенства имеет место в случае  $Q_H/T_H - Q_X/T_X = 0$ , т. е. когда энтропия не меняется.

9.15. При детонации возрастает энтропия системы.

9.16.  $A \approx 33$  кДж.

9.17.  $A \approx 3 \cdot 10^{16}$  Дж.  $t \approx 60$  сут.

$$9.18*. A = C [T_1 - T_0 - T_0 \ln (T_1/T_0)] \approx 62 \text{ кДж.}$$

$$9.19*. A = C_1 T_1 + C_2 T_2 - (C_1 + C_2) T_1^{C_1/(C_1 + C_2)} T_2^{C_2/(C_1 + C_2)} \approx 32 \text{ кДж.}$$

9.20. Повысится.

$$9.21. Q = A (1 - \eta)/\eta.$$

$$9.22. m = 5 \text{ кг.}$$

$$9.23. N = 138 \text{ Вт.}$$

$$9.24*. A = 46 \text{ кДж.}$$

9.25. Нет. Процесс длится до тех пор, пока не произойдет насыщение окружающей среды водяным паром.

## § 5.10. Фазовые переходы

$$10.1. t = 1 \text{ ч.}$$

$$10.2. 13 \% \text{ воды.}$$

$$10.3. \text{Смесь } 109,5 \text{ г воды и } 30,5 \text{ г льда при } 0^\circ \text{C.}$$

$$10.4. m = 98 \text{ г.}$$

$$10.5*. x \approx 0,11 \text{ м.}$$

10.6. Пока в кастрюле есть вода, температура дна чайника — порядка  $100^\circ \text{C}$ .

10.7. Можно.

10.8. Между поверхностью раскаленной плитки и каплей образуется прослойка пара, затрудняющая подвод тепла.

10.9. Около горячего дна чайника образуется и отрывается большое количество мелких пузырьков пара.

10.10. Без крышки вода с поверхности испаряется, для чего требуется дополнительное количество тепла.

$$10.11. v \approx 8 \text{ м/с.}$$

10.12\*. Четыреххлористый углерод выкипает в 25 раз быстрее.

10.13. Чтобы предотвратить конденсацию пара.

10.14. Нельзя.

10.15. При критической температуре жидкость и пар неразличимы.

10.16. Давление насыщенного пара над поверхностью льда отлично от нуля.

10.18. Быстрее.

$$10.19. m = 11,7 \text{ г.}$$

$$10.20. P = 0,2 \text{ МПа. } A = 35 \text{ кДж.}$$

$$10.21. P = 0,37 P_0.$$

$$10.22. \Delta V = m\lambda RT/P_0 (\mu q + RT), \quad A = m\lambda RT/(\mu q + RT), \quad \text{где}$$

$\mu$  — молекулярная масса воды.

$$10.23*. h \approx 580 \text{ м.}$$

$$10.24. 5 \% \text{ воды.}$$

$$10.25. 6 \% \text{ льда.}$$

## § 5.11. Тепловое излучение

11.1. а)  $\Phi = 0,2$  кВт. б)  $\varphi = 89$  МВт/м<sup>2</sup>.

11.2.  $T_1 \approx 600$  °С,  $T_2 \approx 2000$  °С.

11.3\*.  $\omega = 7,56 \cdot 10^{-16} T^4$  Дж/м<sup>3</sup>.

11.5. а) Кварц, в отличие от стали, почти не поглощает видимый свет. Поэтому при нагревании он в видимой области излучает значительно слабее.

б) В отличие от черного угля, почти полностью поглощающего видимый свет, белый мел этот свет отражает. Поэтому при нагревании мел излучает значительно меньше света и выглядит на фоне сильно излучающего угля темным.

11.6\*. а)  $T_x = T/\sqrt[4]{2}$ . б)  $T_x = \sqrt[4]{(T_1^4 + T_2^4)/2}$ .

11.7.  $T_x = T\sqrt{\varepsilon(R/2L)^2}$ .

11.8. а)  $T = 200, 70, -35$  °С. б)  $\Phi \approx 4 \cdot 10^{26}$  Вт. в)  $T = 140$  °С.

11.9.  $T = 2,4$  К.

11.10.  $T = 20$  °С.

11.11\*.  $\Phi = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma S (T_1^4 - T_2^4)$ .

11.12. а)  $T_x = T/\sqrt[4]{2}$ . б)  $n = 32$ . в)  $T = T_0 \sqrt[4]{16,5}$ .

11.13\*.  $T_x = T/\sqrt[4]{6,5 + 4R/r}$ .

11.14\*.  $T = \sqrt[4]{T_1^4 - T_2^4 + \left[ T_1 + \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} (T_1^4 - T_2^4) \frac{h}{\kappa} \right]^4}$ .

11.16. а)  $a = \frac{S\Phi}{2\pi R^2 Mc}$ . б\*)  $v = \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{\frac{S\Phi}{\pi Mc}}$ .

11.17. а) На кометный хвост действует давление солнечных лучей. б)  $r \approx 1$  мкм.

## Глава 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 6.1. Закон Кулона

1.1. а)  $F = 1,8 \cdot 10^4$  Н. б)  $F = 2,3 \cdot 10^{-8}$  Н.

1.2.  $F = 2,57 \cdot 10^{10}$  Н.

1.3.  $Q = 1,06 \cdot 10^{-3}$  Кл =  $3,17 \cdot 10^4$  СГС.

1.4.  $T = mg + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$ .

1.5.  $T_{12} = \frac{q_1 (4q_2 + q_3)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$ ,  $T_{23} = \frac{q_3 (4q_2 + q_1)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$ .

1.6. а) На расстоянии  $x = \frac{q_1 - \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2} l$  от заряда  $q_1$ . Да. Нет.

Нет.

б)  $x = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 mg}}$ , устойчивое положение равновесия;

$x = -\frac{Q}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 mg}}$ , неустойчивое положение равновесия.

1.7.  $T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left( Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \right)$ .

1.8.  $\beta = 2 \operatorname{arctg} (q/Q)^{2/3}$ .

1.9.  $q = 8mgR^2/Q$ .

1.10. а)  $r = 1,4 \cdot 10^{-8}$  см. б)  $\omega = \frac{e}{2a} \sqrt{\frac{1}{\pi a m \epsilon_0} \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)}$ .

1.11.  $x = \sqrt[5]{2q^2 l^2 / k \pi \epsilon_0}$ .

1.12\*.  $T = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2} \left( \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ .

1.13.  $q = l \sqrt{8Mg\pi\epsilon_0}$ .

## § 6.2. Напряженность электрического поля

2.1. На расстоянии 1 м  $E_1 = 9 \cdot 10^9$  В/м =  $3 \cdot 10^6$  СГС; на расстоянии 20 м  $E_2 = 2,25 \cdot 10^8$  В/м =  $7,5 \cdot 10^3$  СГС. На заряд 0,001 Кл  $F_1 = 9 \cdot 10^7$  Н,  $F_2 = 2,25 \cdot 10^5$  Н. На заряд 1000 СГС  $F_1 = 3 \cdot 10^9$  дин,  $F_2 = 7,5 \cdot 10^6$  дин.

2.2. а)  $E = 1$  В/м =  $3,3 \cdot 10^{-5}$  СГС. б)  $E = 3 \cdot 10^5$  В/м = 1 СГС.

2.3.  $E_1 = 0$ .

$$E_2 = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}$$

2.4\*. а) В точке  $O$  напряженность электрического поля от заряда малой площадки  $dS$  равна  $\sigma dS / 4\pi\epsilon_0 R^2$ , а проекция этой напряженности на ось  $OO'$  равна  $\sigma dS' / 4\pi\epsilon_0 R^2$ . Следовательно, полная напряженность электрического поля в точке  $O$  равна  $\sigma r^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ .

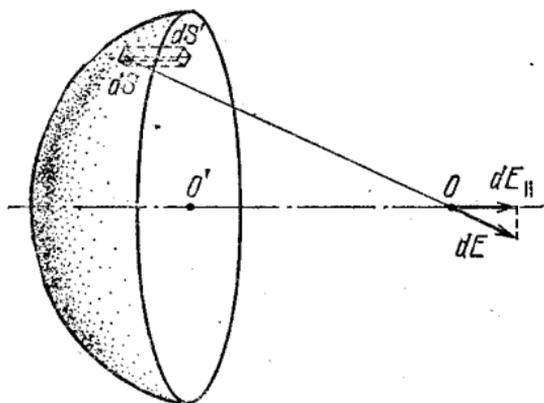
б)  $E = \sigma / 4\epsilon_0$ .

в)  $E = \sqrt{3} \sigma / 16\epsilon_0$ .

К ответу 2.4\*а,

2.5. а)  $E = \sigma / 6\epsilon_0$ . б)  $E = (\sigma_1 - \sigma_2) / 4\epsilon_0$ . в)  $E = \sigma / 2\epsilon_0$ . г)  $E = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} / 3\epsilon_0$ .

2.6. а)  $q = \sqrt{10} Q$ . б)  $q = 9Q$ .



2.7\*.  $A_x = 6A$ .

2.8. а)  $\Phi = Ea^2/2$ . б)  $\Phi = Eh^2$ ,  $\Phi = -Eh^2$ .

2.10. а)  $E_{in} = 0$ ,  $E_{ex} = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . б)  $E = \rho/2\pi\epsilon_0 r$ . в)  $E = \sigma/2\epsilon_0$ .  
 г) См. рис.  $E_{in} = \rho r/3\epsilon_0$ ,  $r < R$ ;  $E_{ex} = \rho R^3/3\epsilon_0 r^2$ ,  $r > R$ , д)  $E_{in} = \rho r/2\epsilon_0$ ,  
 $r < R$ ;  $E_{ex} = \rho R^2/2\epsilon_0 r$ ,  $r > R$ . е)  $E_{in} = \rho x/\epsilon_0$ ,  $x < h/2$  ( $x$  — расстояние  
 от центра пластины);  $E_{ex} =$   
 $= \rho h/2\epsilon_0$ ,  $x > h/2$ .

2.11. а)  $E = \rho_0 r_0^2/\epsilon_0 r$ ;

б)  $E = \rho_0 r_0/\epsilon_0$ .

2.12. а)  $\rho = 2E_0\epsilon_0/r$ ; б)  $\rho =$   
 $= E_0\epsilon_0/r$ .

2.13\*. а) Сила, действующая на грань, равна произведению потока напряженности электрического поля через эту грань на  $\sigma$ . Но поток напряженности электрического поля равен  $q/4\epsilon_0$ . Значит, сила  $F = \sigma q/4\epsilon_0$ .

б) Сила, действующая на выделенную грань куба,  $F =$   
 $= \sigma \int E_n dS$ , где  $\int E_n dS$  — поток напряженности электрического поля, создаваемый оставшимися пятью гранями, через выделенную. В качестве замкнутой поверхности построим куб, немного больший данного.

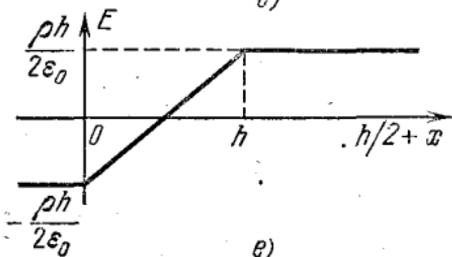
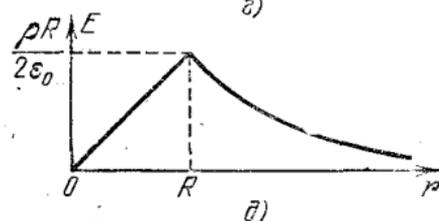
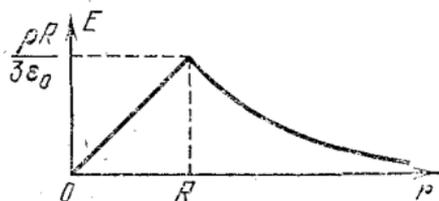
Тогда все шесть заряженных граней дают поток напряженности электрического поля через все шесть сторон построенного куба  $N = q/\epsilon_0 = 6\sigma l^2/\epsilon_0$ , а через одну грань  $N' = \sigma l^2/\epsilon_0$ . Но

$$N' = \int_{\text{от пяти граней}} E_n dS + \int_{\text{от выделенной грани}} \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0}.$$

Следовательно,  $\int E_n dS = \frac{\sigma l^2}{\epsilon_0} - \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0}$ . Значит, сила  $F =$   
 $= \sigma^2 l^2/2\epsilon_0$ . Аналогично рассуждая, для тетраэдра получим  $F =$   
 $= \sqrt{3} \sigma^2 l^2/8\epsilon_0$ .

2.14. а)  $E_{in} = \sigma/\epsilon_0$ ,  $0$ ,  $3\sigma/2\epsilon_0$ ;  $E_{ex} = 0$ ,  $\sigma/\epsilon_0$ ,  $\sigma/2\epsilon_0$ .

б)  $E_{in1} = \sigma/2\epsilon_0$ ,  $\sigma/2\epsilon_0$ ,  $\sigma/\epsilon_0$ ,  $\sigma/\epsilon_0$ ;  $E_{in2} = \sigma/2\epsilon_0$ ,  $\sigma/2\epsilon_0$ ,  $\sigma/\epsilon_0$ ,  $3\sigma/\epsilon_0$   
 $E_{ex} = 3\sigma/2\epsilon_0$ ,  $\sigma/2\epsilon_0$ ,  $0$ ,  $0$ .



К ответу 2.10.

$$2.15. \text{ а) } E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad \text{б) } E_{\text{in}} = 0, \quad E_{\text{ex}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

$$2.16. E_{\text{max}} = \rho h / \epsilon_0, \quad E_{\text{max}} = \rho h / \epsilon_0, \quad E_{\text{max}} = 3\rho h / 2\epsilon_0.$$

$$2.17. E_A = \rho h / 6\epsilon_0, \quad E_B = \rho h / 3\epsilon_0, \quad E = \rho r / 3\epsilon_0.$$

$$2.18. E = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \quad \text{для} \quad a - r < x < a + r; \quad E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ x + \frac{r^2}{(a-x)^2} \right]$$

для  $0 < x < a - r$ , где  $x$  отсчитывается от центра шара радиуса  $R$ .

$$2.19*. \text{ а) } E = \rho a / 3\epsilon_0. \quad \text{б) } \sigma = 3\epsilon_0 E \cos \alpha; \quad \sigma_{\text{max}} = 3\epsilon_0 E.$$

$$2.20*. \sigma = 2E\epsilon_0 \cos \alpha.$$

$$2.21*. E = \rho l / 4\pi\epsilon_0 x (l + x).$$

$$2.23. T = \sqrt{M^2 g^2 + \sigma^2 Q^2 / 4\epsilon_0^2}, \quad \alpha = \text{arctg} (\sigma Q / 2\epsilon_0 M g).$$

$$2.24. \sigma \approx \sqrt{\rho g \alpha \epsilon_0}.$$

### § 6.3. Электрическое давление. Энергия электрического поля

$$3.1. \text{ а) } F = \sigma^2 S / 2\epsilon_0, \quad P = \sigma^2 / 2\epsilon_0. \quad \text{б) } \sigma = \epsilon_0 E, \quad P = \epsilon_0 E^2 / 2.$$

$$\text{в) } P = 4,425 \text{ Па}, \quad \alpha = 8,85 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.2. \text{ Уменьшится в } 1 + Q^2 / 2P_0\epsilon_0 S^2 \text{ раз.}$$

3.3. По теореме Гаусса определим поверхностную плотность заряда на границе раздела полей:  $\sigma = \epsilon_0 E$ . Используя принцип суперпозиции:

$$E_{\text{ex}} - \sigma / 2\epsilon_0 = E, \quad E_{\text{ex}} + \sigma / 2\epsilon_0 = 2E,$$

найдем напряженность внешнего поля:

$$E_{\text{ex}} = 3/2 E. \text{ Сила, которая действует на заряд,}$$

приходящийся на единицу площади поверхности раздела полей, (давление) со

стороны внешнего поля  $P = E_{\text{ex}} \sigma = 3/2 \epsilon_0 E^2$ . Для полей  $E$  и  $-2E$ ,

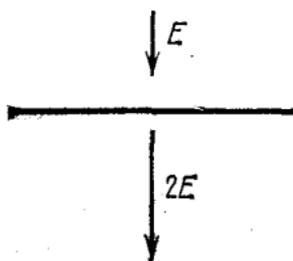
аналогично рассуждая, получим  $\sigma = -3\epsilon_0 E$  и  $E_{\text{ex}} = -1/2 E$ . Таким образом, во втором случае поверхностная плотность заряда в 3 раза больше, но напряженность внешнего поля в 3 раза меньше. Поэтому электрическое давление будет тем же:  $P = E_{\text{ex}} \sigma = 3/2 \epsilon_0 E^2$ .

3.4. а)  $P = \rho^2 h^2 / 2\epsilon_0$ . б) Электрическая сила, действующая на выделенный участок пластины, равна произведению заряда этой части  $q = S\epsilon_0 (E_1 - E_2)$  на напряженность внешнего поля  $E_{\text{ex}} = 1/2 (E_1 + E_2)$ :  $F = qE_{\text{ex}} = 1/2 S\epsilon_0 (E_1^2 - E_2^2)$ .

3.5.  $P = Q^2 / 32\pi^2 \epsilon_0 R^4$  (см. решение задачи 3.3).

3.6\*.  $F = Q^2 (R^2 - h^2) / 32\pi\epsilon_0 R^4$ ,  $q = Q/2$ .

3.8.  $A = 2E\sigma h S$ .



К ответу 3.3,

3.9.  $A = \sigma^2 Sh / 2\epsilon_0$ .

3.10.  $A = \epsilon_0 h S (E^2 - E_1 E)$ .

3.11.  $W = Q^2 / 8\pi\epsilon_0 R$ .

3.12.  $r = 1,4 \cdot 10^{-15}$  м.

3.13. В 1400 раз.

3.14\*.  $W = 3Q^2 / 20\pi\epsilon_0 R$ .

3.15.  $A = Q^2 / 8\pi\epsilon_0 R$ .

3.16.  $A = \frac{\sigma^2 R^2 \pi}{\epsilon_0} \ln 3$ .

3.17. В  $n$  раз.

3.18.  $A_x = \sqrt{2} A$ .

3.19.  $\Delta W = Q^2 / 4\pi\epsilon_0 a$ .

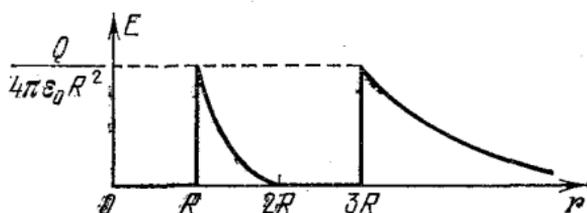
3.20.  $\rho = 2\epsilon_0 E / r$ .  $W = {}^{2/3}\pi\epsilon_0 E^2 (R_2^3 - R_1^3)$ .

### § 6.4. Проводники в постоянном электрическом поле

4.1. б) Длинная. в) Может. г) Можно.

4.3. а)  $-Q$ . б)  $\sigma = Q / 4\pi R^2$ ;  $E = Q / 2\pi\epsilon_0 L^2$ , нет, нет.

4.4. См. рис.  $E = 0$  при  $0 < r < R$ ;  $E = Q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  при  $R < r < 2R$ ;  $E = 0$  при  $2R < r < 3R$ ;  $E = 9Q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  при  $3R < r < \infty$ .



К ответу 4.4.

4.5\*. Поверхность полости будет иметь заряд  $-q$ , а заряд поверхности проводника  $+q$ . Этот заряд (за исключением области вблизи концов проводника) равномерно распределяется по поверхности проводника. Поэтому  $E = 0$  при  $0 < x < r$ ,  $E \approx q / 2\pi x L$  при  $r < x < R$ ,  $E \approx 0$  при  $x > R$ ;  $x$  — расстояние от оси.

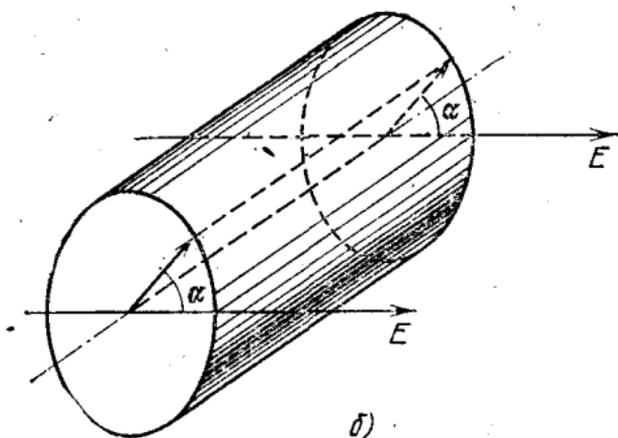
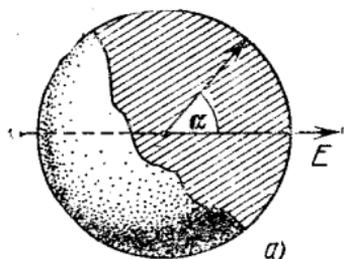
4.6. а)  $\sigma = \epsilon_0 E$ ,  $P = \epsilon_0 E^2 / 2$ . б)  $A = \epsilon_0 E^2 h S / 2$ .

4.7.  $A = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} (1 - N^{-2/3})$ .

4.8. а) См. рис.  $\sigma = 3\epsilon_0 E \cos \alpha$ ;  $P_{\max} = 9\epsilon_0 E^2 / 2$ . б)  $\sigma = 2\epsilon_0 E \cos \alpha$ ;  $P_{\max} = 2\epsilon_0 E^2$ .

4.9\*. Поверхностная плотность заряда на соответствующих участках поверхности проводника останется прежней.

4.10\*. а)  $\rho = 4\pi\epsilon_0 ER^3$ ;  $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$ ;  $\alpha = \epsilon_0 h S$ . б) Уменьшится в  $n^3$  раз.



К ответу 4.8.

4.11.  $F = Q^2/16\pi\epsilon_0 h^2$ .  $P = Q^2/8\pi^2\epsilon_0 h^4$ .

4.12.  $F = 3Q^2/32\pi\epsilon_0 h^2$ .

4.13.  $q = \sigma S$ ,  $W = \sigma^2 h S / 2\epsilon_0$ .

4.14. а) Нет. б)  $F = \frac{q^2 (2\sqrt{2} - 1)}{32\pi\epsilon_0 a^2}$ . в)  $P = \frac{q^2 (1 - 5\sqrt{5})^2}{1000\pi^2\epsilon_0 a^4}$ ;  $P_1 = \frac{q^2}{8\pi^2\epsilon_0 a^4} \left( \frac{1}{5\sqrt{5}} - 1 \right)$ .

4.15\*. Напряженность поля от зарядов, распределенных по сферической оболочке, в центре сферы равна нулю и может быть представлена в виде

$$E(0) = E_{\text{пробки}} + E_{\text{сферы без пробки}} = 0.$$

При  $\Delta \ll r \ll R$  поле от пробки является полем диполя, напряженность которого в точке  $O$  равна  $E_{\text{пробки}}(0) = q'\Delta/2\pi\epsilon_0 R^3$ . После удаления пробки перераспределение зарядов на оставшейся части сферической оболочки при  $\Delta \ll r$  будет незначительным, и для оценки можно считать, что

$$E(0) = E_{\text{сферы без пробки}} \approx -E_{\text{пробки}} = -q'\Delta/2\pi\epsilon_0 R^3.$$

По теореме Гаусса  $q' = -qr^2/4R^2$ . С учетом этого имеем  $F = q^2 r^2 \Delta / 8\pi\epsilon_0 R^5$ .

4.16\*. Поле вне шара должно быть нормально к его поверхности, и поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность

должен быть равен нулю, если внутри нее нет заряда  $q$ . Этим условиям поле зарядов  $q$  и  $\pm Rq/L$  удовлетворяет.

4.17. Увеличится на  $F = Qq/4\pi\epsilon_0 L^2$ .

4.18.  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ,  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ,  $-\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ,  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ .

### § 6.5. Потенциал электрического поля

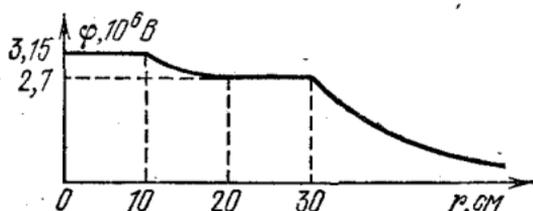
5.1. а)  $10^7$  м/с; б)  $1,25 \cdot 10^6$  м/с.

5.2.  $v_B = 8,4 \cdot 10^6$  м/с;  $v_C = 6 \cdot 10^6$  м/с.

5.3. а)  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r$ . б)  $\varphi = \sqrt{2} q/\pi\epsilon_0 a$ . в)  $2,7 \cdot 10^3$  В, г)  $1,35 \cdot 10^4$  В = 45 СГС.

5.4.  $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ ; нет; да.

5.5. См. рис.



К ответу 5,5.

5.6.  $q_r = -8\pi\epsilon_0 r\varphi$ ,  $q_{2r} = 16\pi\epsilon_0 r\varphi$ .

5.7.  $\varphi_1 = q/4\pi\epsilon_0 r$ ,  $\varphi_2 = q/8\pi\epsilon_0 r$ ,  $\varphi_3 = 0$ .

5.8. а)  $\varphi_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_2} \varphi$ ;  $\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2} \varphi$ . б) Уменьшится на  $\frac{R_1(R_3 - R_2)}{R_2 R_3} \varphi$ .

5.9.  $Q = 4\pi\epsilon_0 R K / e$ .

5.10\*. а)  $Q = -\frac{Rq}{L}$ . б)  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{L} + \frac{Q_2}{R} \right)$ .

в)  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{R} + \frac{(q - Q)}{2L} \right]$ .

5.11\*.  $\varphi = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln 2$ .

5.12.  $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$  при  $0 < r < R$ ;  $\varphi = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$  при  $r > R$ .

5.13.  $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r^2 \ln \frac{R}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$  при  $0 < x < r$ ;

$\varphi = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{x}$  при  $r < x < R$ .

5.14.  $Q = \frac{2\pi\rho r}{3} (3R^2 - r^2)$ .  $\varphi = \frac{\rho (r^2 - x^2)}{6\epsilon_0}$  при  $0 < x < r$ ;  $\varphi = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \times$

$\times \left( 3R^2 - x^2 - \frac{3R^2 r}{x} + \frac{r^3}{x} \right)$  при  $r < x < R$ .

5.15. а) 850 В;  $\sqrt{3} \cdot 10^7$  м/с. б)  $0,88 \cdot 10^7$  м/с;  $3 \cdot 10^4$  В.

5.16. а) 37,7 СГС = 11,3 кВ. б) 19 СГС = 5,7 кВ.

$$в) \frac{\sigma(h_1 - h_2)}{2\epsilon_0}; \frac{\sigma(h_2 - h_1)}{2\epsilon_0}; \frac{\sigma(h_2 - h_1)}{\epsilon_0}; \frac{\sigma(3h_2 - h_1)}{\epsilon_0}.$$

5.17. 14,4 В.

5.18. а)  $\rho R^2/6\epsilon_0$ ;  $\rho R^2/4\epsilon_0$ ;  $\rho h^2/8\epsilon_0$ .

б\*)  $\rho(2r^3 - a^3 - 3r^2a)/6\epsilon_0a$ .

5.19. а) Напряженность поля вблизи верхней пластины  $\sigma b/\epsilon_0(a+b)$ , вблизи нижней  $\sigma a/\epsilon_0(a+b)$ ; соответственно поверхностные плотности  $-\sigma b/(a+b)$ ,  $-\sigma a/(a+b)$ .

б\*)  $q_a = -qb/(a+b)$ ;  $q_b = -qa/(a+b)$ .

в)  $\varphi/a$ ;  $\varphi/b$ .

5.20.  $h = 3q^2R^2/16\pi^2\epsilon_0\rho gr^6$ .

5.22. 3А.  $\frac{n(n-1)}{2}A$ .

5.23.  $A = Q^2ab/2S\epsilon_0(a+b)$ .

5.24.  $Q_x = qQ/(Q-q)$ .

5.25.  $\Delta\varphi = A/Q$ .

5.26. Увеличится в 3 раза.

5.27.  $C = 4\pi\epsilon_0R$ .

## § 6.6. Конденсаторы

6.1. б) Увеличится в 2 раза. в) Уменьшится в 2 раза; уменьшится в  $n$  раз. г)  $C = \epsilon_0S/d$ . д) 5,3 см = 5,9 пФ.

6.2. а) Увеличится в 1,5 раза. б) Увеличится в  $1 + S'/2S$  раз. в) Не изменится.

6.3. а) Увеличится в 1,5 раза. б) Увеличится в 2 раза.

6.4. а)  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$ . б)  $C = 4\pi\epsilon_0 \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{d}{R_0(R_0 - d)} \right]^{-1}$ .

6.5\*.  $C = 2\pi\epsilon_0 l / \ln(R_2/R_1)$ .

6.6. а)  $C_{ц} = 2\pi\epsilon_0 l R / \Delta R$ ,  $C_{сф} = 4\pi\epsilon_0 R^2 / \Delta R$ , где  $l$  — длина цилиндрического конденсатора. б)  $C = \epsilon_0 la/d$ .

6.7.  $q = \pm \epsilon_0 SE$ .

6.8. а)  $1/2C$ ,  $2C$ . б)  $1/3C$ . в)  $7/5C$ . г)  $1/2(\sqrt{5}-1)C$ . д)  $6/5C$ .

6.9.  $\Delta q = C_1 C_2 Qx / (C_1 + C_2) \epsilon_0 S$ .

6.10. а)  $W = 4,4$  мДж. б)  $W_{сф} = 2\pi\epsilon_0 r_1 r_2 V^2 / (r_2 - r_1)$ . в)  $W_{ц} = \pi\epsilon_0 l V / \ln(r_2/r_1)$ .

6.11. Увеличится в  $k$  раз. Увеличится в  $n^2$  раз.

6.12. а)  $A = Q^2 d / 2\epsilon_0 S$ . б)  $A = Q^2 dx / 2\epsilon_0 a^2 (a-x)$ .

в)  $A_a = Q^2 d / 4\epsilon_0 S$ ;  $A_b = Q^2 dx / 2a^3 \epsilon_0$ .

6.13.  $F = 4,4 \cdot 10^{-2}$  Н. Нет.

6.14. а)  $F = 2Q^2 dc (d-c) / \epsilon_0 a^3 (2d-c)^2$ ; б)  $F = \epsilon_0 acV / 2d (d-c)$ .

6.15\*.  $\sigma = \sqrt{8\epsilon_0 Mg/l (a-b)}$ .

6.16.  $P = \epsilon_0 R^2 V^2 / 2r^2 (R-r)^2$ .

## § 6.7. Электрическое поле при наличии диэлектрика

7.2\*. а)  $\rho = 4\pi r^3 \epsilon_0 E$ . б)  $\epsilon = 1 + 4\pi r^3 n$ . в)  $\rho = 7 \cdot 10^{-37}$  Кл·м. г)  $\epsilon = 1,0091$ .

7.3\*. а)  $|\rho_0 E| \ll kT$ :  $E = \frac{3kTQ}{S(\epsilon_0 3kT + n\rho_0^2)}$ ,  $V = \frac{3kTQh}{S(\epsilon_0 3kT + n\rho_0^2)}$ .

$|\rho_0 E| \gg kT$ :

при  $n\rho_0 < \frac{Q}{S}$   $E = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{Q}{S} - n\rho_0 \right)$ ,  $V = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{Q}{S} - n\rho_0 \right) h$ ;

при  $n\rho_0 \geq \frac{Q}{S}$   $E = 0$ ,  $V = 0$ .

б)  $|\rho_0 E| \ll kT$ :  $P = \frac{n\rho_0^2 V}{3kTh}$ ,  $E = \frac{V}{h}$ ,  $Q = \frac{n\rho_0^2 VS}{3kTh}$ .

$|\rho_0 E| \gg kT$ :

при  $n\rho_0 < \frac{\epsilon_0 V}{h}$   $P = n\rho_0$ ,  $E = \frac{V}{h}$ ,  $Q = n\rho_0 S$ ;

при  $n\rho_0 > \frac{\epsilon_0 V}{h}$   $P = \frac{\epsilon_0 V}{h}$ ,  $E = \frac{V}{h}$ ,  $Q = \frac{\epsilon_0 VS}{h}$ .

7.4. а) Дипольные моменты в диэлектрике с запаздыванием ориентируются электрическим полем. б)  $\epsilon = 2$ .

7.5.  $V = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} V_0$ .

7.6. а) Увеличится в  $\epsilon$  раз. б) Уменьшится в  $\epsilon$  раз.

7.7.  $q = (\epsilon - 1) VC$ .

7.8. а)  $\Delta V = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} V$ ;  $\Delta V = \frac{\epsilon - 1}{n\epsilon - \epsilon + 1} V$ ; б)  $\Delta V = \frac{k(\epsilon - 1)}{n} V$ .

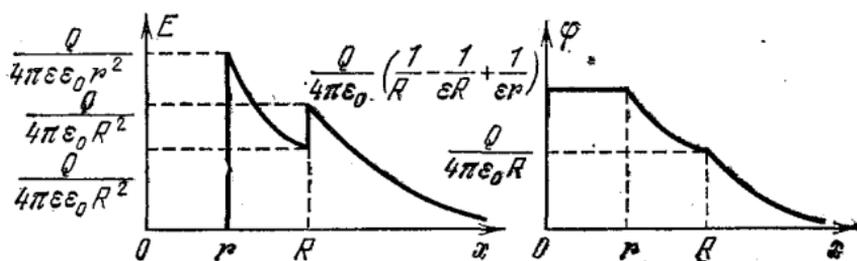
7.9. а)  $C = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)S}{2h}$ . б)  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{h_1 \epsilon_2 + h_2 \epsilon_1}$ .

7.10.  $C = \frac{\epsilon_0 h_2 (\epsilon_1 - 1) (S_2 - S_1) + \epsilon_0 \epsilon h_1 S_1}{h_1 (h_1 - h_2) \epsilon + h_1 h_2}$ .

7.11.  $E_{in} = E \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon^2}}$ .

7.12.  $\rho = -qd/\epsilon_1 S (d+x)^2$ .

7.13.  $\sigma_{in} = -(\epsilon - 1)Q/4\pi\epsilon r^2$ ;  $\sigma_{ex} = (\epsilon - 1)Q/4\pi\epsilon R^2$ . См. рис.



К ответу 7.13.

$$7.15. F = (\epsilon^2 - 1) Q^2 / 2\epsilon_0 \epsilon^2 S, P = (\epsilon^2 - 1) Q^2 / 2\epsilon_0 \epsilon^2 S^2.$$

$$7.16. F = 2hQ^2 (\epsilon - 1) / \epsilon_0 b a^2 (\epsilon + 1)^2.$$

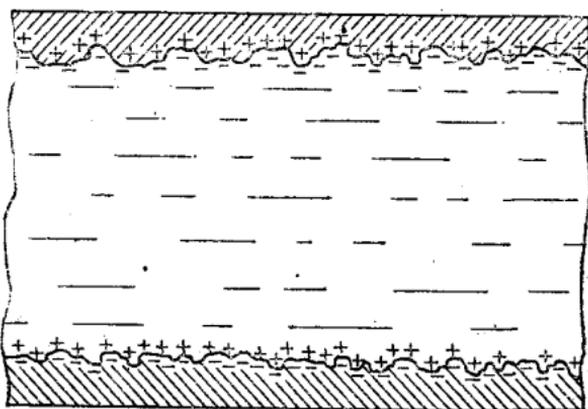
$$7.17. F = \epsilon_0 E^2 \cos^2 \alpha (\epsilon^2 + 1) / 2\epsilon^2; A = (\epsilon - 1) ShE^2 \sin^2 \alpha / 2\epsilon.$$

$$7.18*. \text{ а) } K \text{ нити. б) } F = \frac{\epsilon_1 (\epsilon - 1)}{\epsilon (\epsilon_1 - 1)} F_1. \text{ в) } F \sim V^2; F \sim 1/r^3.$$

г)  $B (R/r)^3$  раз.

$$7.19*. \text{ а) } F = (\epsilon - 1) S \delta Q^2 / 8\pi \epsilon \epsilon_0 R^5. \text{ б) Нет.}$$

7.20\*. Из-за микронеровностей поверхностные заряды на пластине не «перемешиваются» с поверхностными зарядами, наведенными



К ответу 7.20\*.

в жидкости. Поэтому средняя сила, действующая на наведенные заряды со стороны ближайшей пластины, равна нулю. На наведенные заряды действует лишь электрическое поле зарядов, лежащих вблизи удаленной пластины. Напряженность электрического поля этих зарядов  $E/2$ . Поэтому «растягивающая» жидкость сила  $F = ES\sigma_{ж}/2$  ( $S$  — площадь пластины,  $\sigma_{ж}$  — наведенный заряд на единице площади пластины), а отрицательное давление в жидкости  $P = E\sigma_{ж}/2 = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2/2$ .

$$7.21. x = \epsilon_0 (\epsilon - 1) / 2h^2 \rho g.$$

$$7.22. P = \epsilon_0 (\epsilon^2 - 1) R^2 V^2 / 2r^2 (R - r)^2.$$

## Глава 7. ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### § 7.1. Движение в постоянном электрическом поле

1.1. Когда начальная скорость частицы направлена вдоль прямой силовой линии.

$$1.2. t = 0,56 \text{ мкс}; x = 2,8 \text{ м.}$$

$$1.3^*. x \approx 10,3 \text{ м.}$$

$$1.4. u = v \sqrt{1 + \frac{2qEd}{mv^2}}; \quad \text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \sqrt{1 + \frac{2qEd}{mv^2 \sin^2 \alpha}}.$$

1.5. В 2 раза.

$$1.6. K = qEl/2 \cos^2 \alpha (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta).$$

$$1.7. N = neUbl^2/2m_e v d.$$

$$1.8. q = 10^{-17} \text{ Кл.}$$

$$1.9. \beta = \arctg (\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} / \cos \alpha).$$

$$1.10^*. \text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \sqrt{1 + e (\varphi_2 - \varphi_1) / m_e v^2 \sin^2 \alpha}.$$

$$1.11. U \approx 19 \text{ кВ.}$$

$$1.12^*. V = U/2 \ln (R_2/R_1).$$

1.13. Скорость не изменится, а время пролета позитрона будет больше. Позитрон может вообще не долететь до точки B, если его начальная кинетическая энергия  $K_0 < e\varphi_0$ .

$$1.14^*. t' = t/\sqrt{3}.$$

$$1.15^*. v' = v \sqrt{mQ/Mq}.$$

1.16.  $K = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{l-R} - \frac{4}{l} \right)$ . Условием минимальности будет приход электрона в среднюю точку отрезка, соединяющего центры сфер, с нулевой скоростью.

$$1.17^*. t = \frac{2R}{v} \left[ 1 - \frac{qQ(m+M)}{2\pi\epsilon_0 R m M v^2} \right]^{-1/2}.$$

$$1.18. v = \sqrt{qEl/m}.$$

$$1.19. T = 2\pi \sqrt{ml/2qE}.$$

$$1.20. \text{ а) } T = 2\pi \sqrt{ml/(mg + QE)} \text{ при } mg + QE > 0;$$

$$\text{ б) } T = 2\pi \sqrt{ml/\sqrt{(mg)^2 + (QE)^2}}.$$

$$1.21. \omega = \sqrt{Qq/2\pi\epsilon_0 M l^3}.$$

$$1.22. \omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{qQ(a+l)}{4\pi\epsilon_0 m a^3 l}} \text{ при } \frac{qQ(a+l)}{4\pi\epsilon_0 a^3} < mg.$$

$$1.23^*. T = 2\pi \left( \frac{g}{R} + \frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 m R^3} \right)^{-1/2} \text{ при } \frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 R^3} > -mg.$$

$$1.24^*. \Delta t = \pi\epsilon_0 R (m_e v^2)^2 / 2e^2 C.$$

$$1.25. x_1 = 17,5h; \quad x_2 = 175h.$$

$$1.26^*. \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \delta \approx \frac{4K}{eE} (\Delta\alpha)^2.$$

$$1.27^*. x = v \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m_e \epsilon_0}{e\rho}}.$$

1.28\*. Импульс, который приобретают электроны по направлению к оси, пропорционален расстоянию электронов от оси. Поэтому,

независимо от этих расстояний, все электроны пересекают ось в одной точке.

$$1.29. x = fl/(l - f).$$

## § 7.2. Движение в переменном электрическом поле

$$2.1. t = 2m_e l / e E \tau.$$

$$2.2. a) \sqrt{\frac{2eU}{m_e} - \frac{e \Delta U \tau}{m_e l}} \leq v \leq \sqrt{\frac{2eU}{m_e} + \frac{e \Delta U \tau}{m_e l}}.$$

$$б) v_1 = \sqrt{\frac{2e(U + \Delta U)}{m_e}}; v_2 = \sqrt{\frac{2e(U - \Delta U)}{m_e}} \text{ при } \Delta U < U.$$

$$2.3. \nu \approx 10^9 \text{ Гц.}$$

$$2.4. \alpha \propto 1/U.$$

$$2.5. a) S = Ll/2Ud. б) S = 0,09 \text{ мм/В.}$$

$$2.6. e/m_e = l^2 f^2 / 2U (n + 1/2)^2, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

2.7. Окружность радиуса 5 см.

2.8. При  $\nu \propto 1/\tau$ , где  $\tau$  — время пролета пластин.

$$2.9. U_0 = \lambda d \nu \tau / 2S.$$

$$2.10*. A = eE_0/m_e \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

2.11\*.  $\varepsilon = 1 + 4\pi e^2 n/m_e (\omega^2 - \omega_0^2)$ , где  $n$  — число молекул в единице объема.

$$2.12. v_{cp} = eE_0 \cos \varphi / m_e \omega.$$

$$2.13*. p = 2qE_0/\omega.$$

$$2.14*. K = 400 \text{ эВ.}$$

2.15\*. Из-за утечки электронов, ускоренных электрическим полем (см. задачу 2.12), потенциал разряда  $U$  будет увеличиваться до тех пор, пока средние скорости ионов и самых быстрых электронов, уходящих из разряда, не сравняются. Установившийся потенциал разряда  $U \approx \frac{2e}{m_e} \left(\frac{U_0}{\omega d}\right)^2$ , а энергия ионов  $K \approx \frac{2}{m_e} \left(\frac{eU_0}{\omega d}\right)^2$ .

$$2.16*. \Delta \alpha = \pm \operatorname{arctg} \left\{ \frac{U_0}{d\omega} \sqrt{\frac{2e}{m_e U}} \left[ 1 - \cos \left( \omega l \sqrt{\frac{m_e}{2eU}} \right) \right] \right\}.$$

$$2.17. a) v = \omega l / 2\pi n. б*) \Delta b = 4\pi e U_0 n / m_e \omega^2 d, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

## § 7.3. Взаимодействие заряженных частиц

$$3.1. v = \frac{e}{\sqrt{4\pi \epsilon_0 m_e r}} \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}.$$

$$3.2. v = \sqrt{e^2 (4 + \sqrt{2}) / 8\pi \epsilon_0 m_e a}.$$

3.3\*.  $v_p/v \approx \sqrt{m_e/m_p (4\sqrt{2} + 1)} \approx 0,01$ . Для оценки можно считать, что легкие позитроны уходят на далекое расстояние прежде, чем протоны сдвинутся с места.

$$3.4. r = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e v^2.$$

$$3.5. r = e^2 / \pi\epsilon_0 m_e (v_1 + v_2)^2.$$

$$3.6. v = \sqrt{q_1 q_2 (m_1 + m_2) / 2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 (R_1 + R_2)}.$$

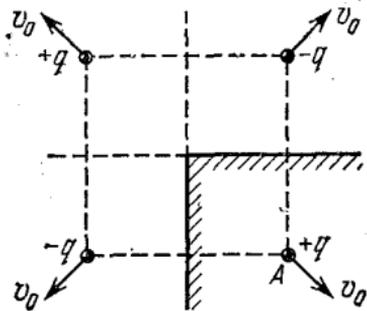
$$3.7. r = a e^2 / (e^2 + 4\pi\epsilon_0 m_e v^2 a \cos^2 \alpha).$$

$$3.8^*. \alpha = \pi/2.$$

$$3.9^*. v = \sqrt{q^2 / 8\pi\epsilon_0 m d}.$$

$$3.10^*. v = v_0 \sqrt{1 - \frac{q^2 (2\sqrt{2} - 1)}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2 a}} \text{ при } \frac{m v_0^2}{2} \geq \frac{q^2 (2\sqrt{2} - 1)}{16\pi\epsilon_0}.$$

вместо двугранного угла поместить в точку А заряд  $+q$ , то в области вне проводника электрическое поле, а следовательно, и силы не изменятся. Это позволяет рассмотреть движение системы из четырех зарядов, изображенной на рисунке.



К ответу 3,10\*.

$$3.11. v = \sqrt{4e^2 r^2 / \pi\epsilon_0 m_e (4r^2 + R^2)^{3/2}}.$$

$$3.12. K_{\min} = Z e^2 / 8\pi\epsilon_0 \sigma r.$$

$$3.13^*. K_{\min} = e^2 (2 - \sqrt{2}) / 4\pi\epsilon_0 \sigma r.$$

$$3.14^*. n = (\sqrt{2} - 1) m / M + \sqrt{2}.$$

$$3.15^*. v_{\min} = 2v.$$

3.16. Невозможен.

$$3.17^*. r_{\min} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_p v_0^2} + \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_p v_0^2}\right)^2}.$$

$$3.18^*. t = 2\sqrt{2} t_0.$$

$$3.19. v \geq \sqrt{qQ(m+M) / 2\pi\epsilon_0 R m M}.$$

$$3.20. v = \frac{m v_0}{m+M} + \sqrt{\left(\frac{M v_0}{m+M}\right)^2 - \frac{QqM}{2\pi\epsilon_0 R m (m+M)}}.$$

$$3.21^*. v = \sqrt{3qQ(m+M) / 4\pi\epsilon_0 m M R}.$$

$$3.22^*. v_1 = \sqrt{q^2 / 6\pi\epsilon_0 m l}; v_2 = v_3 = \sqrt{q^2 / 24\pi\epsilon_0 m l}.$$

$$3.23. v = \sqrt{q^2 m (2R - l) / 2\pi\epsilon_0 R l M (M + 2m)}.$$

$$3.24. W = 3q^2 / 32\pi\epsilon_0 l.$$

$$3.25. v_{\infty} = v \sqrt{1 + q^2 / 4\pi\epsilon_0 R m v^2}.$$

$$3.26. v_1 = \frac{v}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{(Q-q)^2}{8\pi\epsilon_0 R m v^2}} \right);$$

$$v_2 = \frac{v}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{(Q-q)^2}{8\pi\epsilon_0 R m v^2}} \right).$$

При  $Qq / 2\pi\epsilon_0 m v^2 > R$   $v_1 = v$ ,  $v_2 = 0$ .

$$3.27. \text{ а) } W = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} + 4\pi R^2 \sigma (2 - 2^{2/3});$$

$$\text{ б) } W = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho v^2 + \frac{Q^2 + q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{(Q-q)^2}{8\pi\epsilon_0 \sqrt{2} R} + 4\pi R^2 \sigma (2 - 2^{2/3}).$$

3.28. Заряд будет колебаться вдоль оси цилиндрического отверстия. Его скорость максимальна в точке  $O$ .

$$3.29. v = \sqrt{2gh(1 - S\sigma^2/4\epsilon_0 mg)}.$$

$$3.30. v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}.$$

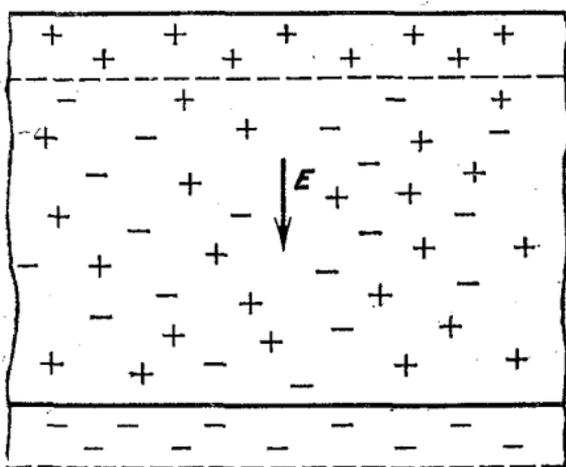
$$3.31. v = v_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2 l}{2\pi\epsilon_0 m v^2} \ln \frac{R_1}{R_2}}.$$

$$3.32. x = \frac{R}{2} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu mg R^2} - 1 \right), v_{\max} = \sqrt{\mu g R} \left( \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \mu mg R^2}} - 1 \right).$$

$$3.33*. T = 2\pi \sqrt{4\pi\epsilon_0 m l^3 / \sqrt{2} q^2}.$$

3.34\*. а) Электроны и ионы разделяются полностью. Электрическое поле ионов напряженности  $E_i = neh/2\epsilon_0$  остановит электроны через время  $t \approx 2\epsilon_0 m_e v / e^2 hn$ ;  $v \approx e^2 hn / 8\epsilon_0 m_e v$ .

б) Часть ионов и электронов образует на границах слоя заряженные области (см. рис.), электрическое поле которых вызывает



К ответу 3.34\* б.

гармоническое движение основной массы электронов с периодом  $T =$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e}}. \text{ Поэтому электроны остановятся через время } t = \frac{T}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e}}; v = \frac{l}{4t}.$$

$$3.35*. m = \frac{4q^2(l-a)}{al \left[ u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \beta) - \frac{l^2}{a^2} (u \sin \alpha - v \sin \beta)^2 \right]}.$$

## Глава 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### § 8.1. Ток. Плотность тока. Ток в вакууме

1.1. а)  $I = 0,02$  А. б)  $I = 0,0012$  А.

1.2.  $v = Il/q$ .

1.3.  $I = 1,3 \cdot 10^{-4}$  А.

1.5.  $v_m = 3 \cdot 10^{-3}$  м/с;  $v_n = 3 \cdot 10^5$  м/с.

1.6.  $j = ev$ ; направлена по нормали к фольге.

1.7.  $j = -en_e u$ .

1.8.  $i_1 = \frac{2I}{4\pi r^2} \frac{l}{r}$ ;  $i_2 = \frac{2I}{4\pi r^2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}$ , где  $l$  — расстояние от середины отрезка  $AB$  до точки, в которой определяется  $j$ ;  $r$  — расстояние от  $A$  или  $B$  до этой точки. В первом случае плотность тока  $j$  нормальна к плоскости симметрии, во втором — лежит в ней. Полные токи через плоскости равны, соответственно,  $I$  и  $0$ .

1.9.  $I = 10$  А.  
 1.10.  $t = 0,8 \cdot 10^{-5}$  с.  
 1.11.  $E = 1,5 \cdot 10^5$  В/м.  $l \approx 0,1$  м,  
 1.12.  $\rho = j/v$ .

1.13\*. а)  $\rho_1 = \frac{\rho_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2eEx/m_e}}$ , где  $x$  — расстояние до передней

сетки.

б)  $\rho_2 = 2\rho_1$  при  $x < x_0 = m_e v_0^2 / 2eE$ ;  $\rho_2 = 0$  при  $x > x_0$ . По зависимости  $\rho_2$  от  $x$  находится наибольшая напряженность поля заряда между сетками:

$$E_1 = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^{x_0} \rho_2 dx = \frac{\rho_0 m_e v_0^2}{\epsilon_0 e E}.$$

Взаимодействием можно пренебречь, если  $E_1 \ll E$ . Когда  $E_1$  сравнимо с  $E$ , т. е.  $\rho_0 m_e v_0^2 / \epsilon_0 e E \approx E$ , необходимо его учитывать. Отсюда оценка  $\rho_0 \approx \epsilon \epsilon_0 E^2 / m_e v_0^2$ .

1.15. Чем выше плато кривых, тем выше температура. При малых напряжениях — режим пространственного заряда.

1.16. На границе слоя скорость минимальна.

1.17\*.  $\rho = \frac{I}{S} \sqrt{\frac{m_e d}{2eV}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1,75 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{x}}$  Кл/м<sup>3</sup>. При  $x \rightarrow 0$  плотность заряда  $\rho \rightarrow \infty$ , тем не менее заряд, приходящийся на единицу

площади,  $\sigma = \int_0^d \rho dx$  ограничен:  $\sigma = 3,5 \cdot 10^{-6} \sqrt{d}$ . Ограничено поэтому и наибольшее значение напряженности поля пространственного заряда:

$E_1 = \sigma/2\epsilon_0$ . В данном случае  $E_1 \ll V/d$  и действием пространственного заряда можно пренебречь.

$$1.18^*. n = \frac{4}{3}; j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{V^{3/2}}{d^2}, l = jS.$$

1.19\*. Плотность заряда возрастет в  $n$  раз, а ток — в  $n^{3/2}$  раз.

## § 8.2. Проводимость. Сопротивление. Источники э. д. с.

2.1\*. а)  $\lambda = e^2 n_e \tau / m_e$ . б)  $\tau = 2,4 \cdot 10^{-14}$  с.

2.2\*.  $\lambda = 0,3 \cdot 10^{-8}$  См/м;  $\Delta N/N = 1,5 \cdot 10^{-15}$ .

2.3.  $f = -ne^2 v / \lambda$ ; сила  $f$  отнесена к одной частице.

2.4.  $I = 1,7$  мА.

2.5. Перестройка поля происходит со скоростью света.

2.6\*. Отношения  $\kappa/\lambda$  почти одинаковы для этих металлов. Теоретическая оценка  $\kappa/\lambda = \pi^2 k^2 T / 3e^2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $e$  — заряд носителей тока.

$$2.7. E = \frac{j}{\lambda}; U_1 = \frac{j l}{\lambda} \cos \alpha. U_2 = \frac{\pi j l}{2\lambda}.$$

2.8.  $\sigma = \epsilon_0 j (1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)$ .

2.9.  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_1$ ;  $\sigma = \epsilon_0 j \cos \alpha_1 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$ .

2.10.  $\rho = \epsilon_0 j / \lambda a$ .

2.11\*. По теореме Гаусса для поверхности, полностью охватывающей включение, имеем

$$q = \epsilon_0 \oint E dS = \frac{\epsilon_0}{\lambda} \oint j dS \quad (\lambda = \text{const}).$$

Так как полный ток  $\oint j dS = 0$  ввиду стационарности, то суммарный заряд на границе включения  $q = 0$ . Поле такой системы зарядов на больших расстояниях от нее имеет вид поля диполя.

2.12.  $Q = Q_0 \exp(-t/\rho\epsilon_0)$  Заряд окажется на поверхности проводника. Нет.  $\tau = \epsilon_0 \rho = 1,5 \cdot 10^{-19}$  с.

2.14.  $I = \lambda S U / l$ ;  $R = l / \lambda S$ .

2.15.  $R_I = \frac{l}{\pi r^2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$ ,  $R_{II} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{l_1}{r_1^2 \lambda_1} + \frac{l_2}{r_2^2 \lambda_2} \right)$ ;  $I_I = U / R_I$ ,  $I_{II} = U / R_{II}$  при  $|r_2 - r_1| \ll l_1, l_2$ .

2.16.  $R = 5,66$  Ом.

2.17.  $I = 4\pi a \lambda V$ ;  $R = 1/4\pi a \lambda$ .

2.18. а)  $R = 0,13$  Ом. б) Исследование плазмы, степени ионизации атмосферы, крови и т. д.

2.19.  $R = \frac{1}{4\pi \lambda} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ ;  $I = \frac{q \lambda}{\epsilon_0}$ .

2.20\*.  $C = \epsilon\epsilon_0/\lambda R$ , нет.

2.21\*. Когда электроды касаются центров сторон пластинки.

2.22,  $K = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{I}{en_e S} \right)^2 = 2 \cdot 10^{-19}$  эВ.

2.23. а)  $\varphi = qvR/l$ ; б)  $\varphi = Fl/q$ .

2.24.  $U = W/e$ . При  $R \geq W/e^2v$ ,  $I_{\max} = ev$ . При  $R < W/c^2v$  ток не меняется с изменением нагрузки.

2.25\*.  $I = I_0 (1 - \sqrt{U/U_0})$ .

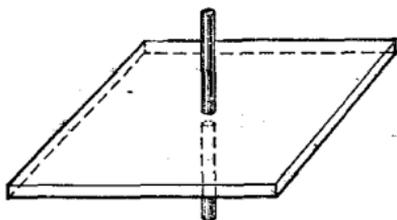
2.26. См. рис.  $W = E_c l$ .

2.27.  $\mathcal{E} = 1,13$  В.

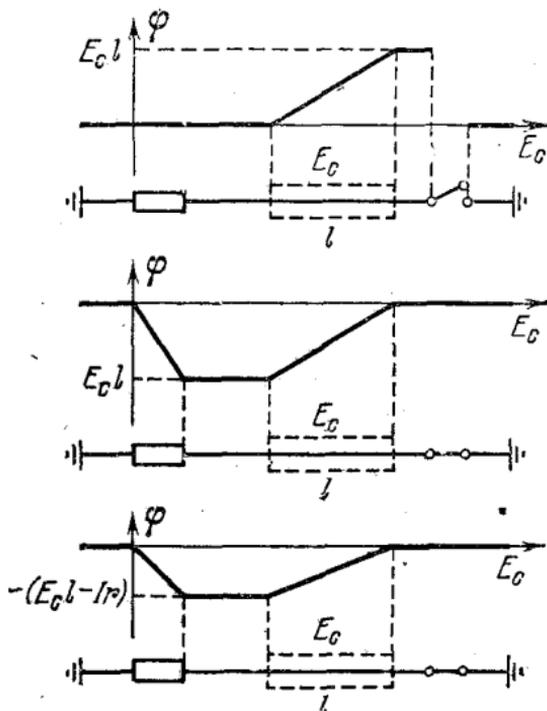
2.28.  $\mathcal{E} = 1,07$  В. Есть приток тепла от окружающей среды.

2.29.  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-2}$  моль.

2.30\*. Конденсатор не разрядится полностью



К ответу 2,21\*.



К ответу 2,26.

из-за химической э. д. с., возрастающей при последовательном соединении.

2.32\*.  $k = U/2\mathcal{E}$ .

### § 8.3. Электрические цепи

3.1.  $r = 1, 5$  и  $50$  кОм.

3.2.  $r = 20$  Ом.

3.3.  $U = 1$  кВ.

3.4. В схемах а), б), д) показания приборов уменьшатся, в схеме г) возрастут, в схеме е) не изменятся. В схеме в) у верхнего амперметра показания возрастут, у нижнего не изменятся.

3.5. а)  $\Delta U/U = R/(R+r)$ ; б)  $\Delta I/I = r/(R+r)$ .

3.6.  $I_1/I_2 \approx 0,2$ .

3.7\*. Сопротивление плеча, подсоединенного к прибору,  $R_1 \approx 12,2 \text{ Ом}$ ; сопротивление второго плеча  $R_2 \approx 54,2 \text{ Ом}$ .

8.8.  $U = 48 \text{ В}$ ;  $I = 15 \text{ А}$ .

3.9.  $r_x = rR_2/R_1$ ; сохранится.

3.10\*. Приведем часть схемы, включающую искомое сопротивление. К узлам  $A$  и  $O$  подключим батарею, а к узлам  $C$  и  $O$  — вольтметр. Узлы  $A$ ,  $B$  и  $C$  соединим проводами (вместо любого из них можно включить амперметр, не меняя токов). Ток через сопротивление  $R$  равен  $I_{CA} + I_{CB}$ . Тогда  $R = V / (I_{CA} + I_{CB})$ , где  $V$  — показание вольтметра.

3.11.  $R = 7 \text{ Ом}$ .

3.12\*. а)  $r = \sqrt{3} R$ . б)  $r = (\sqrt{3} - 1) R$ . в)  $I_n = I (2 - \sqrt{3})^{n-1}$  в горизонтальных,  $I'_n = I (2 - \sqrt{3})^{n-1} (\sqrt{3} - 1)$  в вертикальных сопротивлениях,  $n$  — номер сопротивления, если считать их от клемм,  $R_n = (\sqrt{3} + 1) R$ .

3.13\*.  $R_1 = 9r$ ;  $R_2 = 10/9r$ .

3.14. а)  $U = \mathcal{E} - I(r + R)$ ; б)  $U = -\mathcal{E} - I(r + R)$ ;

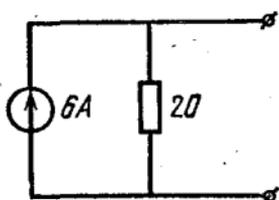
в)  $U = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$ ; г)  $U = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$ .

3.15.  $I = \mathcal{E} \frac{R_1 + R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}$ ;  $I_1 = \mathcal{E} \frac{R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}$ . При отсое-

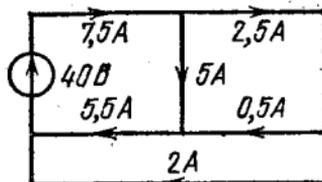
динении  $R_2$  ток  $I_1$  увеличится в  $\frac{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}{R_2(R_1 + r)}$  раз. При  $r \ll R_1, R_2$  ток  $I_1$  почти не изменится.

3.16.  $\mathcal{E} = 34,3 \text{ В}$ ;  $r = 1,43 \text{ Ом}$ .

3.17. Батарея с э. д. с.  $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 14 \text{ Ом}$ .



К ответу 3,18.



К ответу 3,22.

3.18. См. рис.

3.19.  $I = 10 \text{ А}$ ,  $r = 20 \text{ Ом}$ ;  $\mathcal{E} = 200 \text{ В}$ ,  $r = 20 \text{ Ом}$ ,

3.20.  $I = 80 \text{ А}$ .

$$3.21. I_2 = I_3 R_3 / R_2; I_1 = I_3 (R_2 + R_3) / R_2;$$

$$U = I_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_2.$$

3.22. См. рис.

$$3.23. \text{ а) } U = 5ir; R = 5/6r; I = 6i. \text{ б) См. рис. } I = 7/2i; R = 12/7r.$$

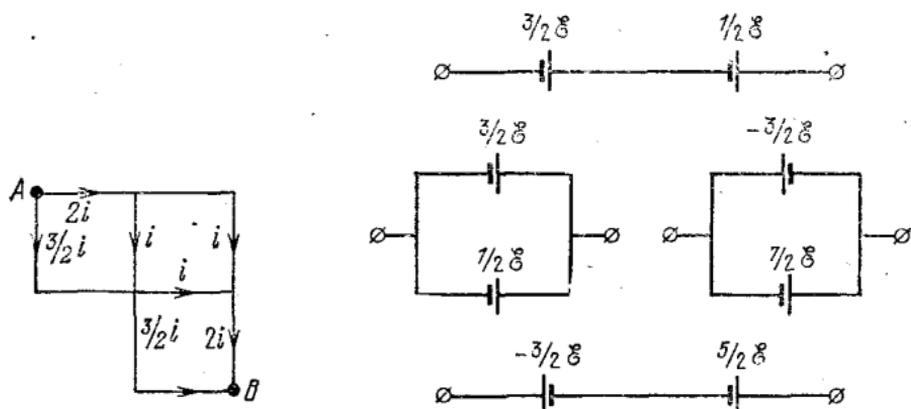
$$\text{в) } R_{AB} = 13/7r; R_{CD} = 5/7r.$$

$$3.24. I = 8 \text{ А.}$$

$$3.25^*. \text{ а) } I = 1/2i; R = 1/2r; R_1 = 1/3r. \text{ б) } R = 2/3r.$$

$$3.26. \mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1) / (r_1 + r_2) = 24 \text{ В}; r = r_1 r_2 / (r_1 + r_2) = 2,4 \text{ Ом.}$$

3.27. См. рис.



К ответу 3.23.

К ответу 3.27.

3.28. Уменьшится в 3 раза.

$$3.29. V = 0; I = 0,75 \text{ А.}$$

$$3.30. V = 0,75 \text{ В.}$$

3.31. Через 12, 54 и 27 мин.

$$3.32. N = I^2 R.$$

$$3.33. N_2 = N (N_1 - N) / N_1.$$

$$3.34. R = 9 (n - 1) r.$$

$$3.35. r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

3.36. 2 и 100 В; 20 и 0,1 Вт. Токи почти не изменятся, мощности же возрастут почти вдвое.

$$3.37. S = 8,5 \text{ мм}^2; \text{ примерно в 10 раз.}$$

$$3.38. N = (\mathcal{E} - Ir) I; R = r.$$

$$3.39. N_1 = 125 \text{ Вт}; N_2 = 80 \text{ Вт}; N_3 = 45 \text{ Вт.}$$

3.40\*. При  $r = R$ .

3.41.  $N_{\text{п}} = (U - \mathcal{E}) \mathcal{E} / r$ ;  $N_{\text{т}} = (U - \mathcal{E})^2 / r$ . Если  $\mathcal{E} > U/2$ , то полезная мощность больше тепловой.

$$3.42. N = 4 \text{ Вт.}$$

$$3.43. N = \lambda C U^2 / \epsilon_0.$$

$$3.44. N = I (m_e v^2 / 2e - IR).$$

$$3.45^*. q = 4\pi^2 \epsilon_0 a^3 n_e R v, v \gg a^2 e^2 n_e R / m_e.$$

$$3.46^*. T = T_0 + R_0 I^2 / (\kappa - I^2 R_0 \alpha), \kappa > I^2 R_0 \alpha.$$

## § 8.4. Конденсаторы и нелинейные элементы в электрических цепях

4.1. а)  $q = 8 \cdot 10^{-4}$  Кл, б)  $V = 60$  В, в)  $\varphi$  верхнего конденсатора 100 В, у нижних по 50 В.

$$4.2. \varphi_A = \varphi_B + 2 \left( l - \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{kx}{\epsilon_0 S}}$$

4.3.  $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)$ . Измерять ее нужно электростатическим вольтметром.  $q_1 = C_1 R_1 \mathcal{E} / (R_1 + R_2)$ ;  $q_2 = C_2 R_2 \mathcal{E} / (R_1 + R_2)$ . В этом случае уменьшается влияние вольтметра на электрическую цепь.

$$4.4*. Q_1 = \frac{CU^2}{4} \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad Q_2 = \frac{CU^2}{4} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$4.5. Q = A - q^2/C,$$

$$4.6. q = C\mathcal{E}; \quad Q = C\mathcal{E}^2/4.$$

$$4.7. Q = C(\mathcal{E} - U_0)^2/2, \quad \mathcal{E} > U_0; \quad Q = 0, \quad \mathcal{E} < U_0.$$

$$4.8. W = C(U - \mathcal{E})\mathcal{E}; \quad Q = C(U - \mathcal{E})^2/2.$$

4.9\*. Сначала от одного элемента, потом от двух последовательных и т. д. Тогда потери составляют  $1/n$  долю.

4.10\*.  $N_T = Iq/C > N_K = Iq/2C$ . Эти величины отличаются из-за работы, совершаемой при изменении емкости конденсатора.

$$4.11. \text{Через } \tau \approx 10^{-3} RC,$$

$$4.12*. q = C \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}; \quad q = C \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + k \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

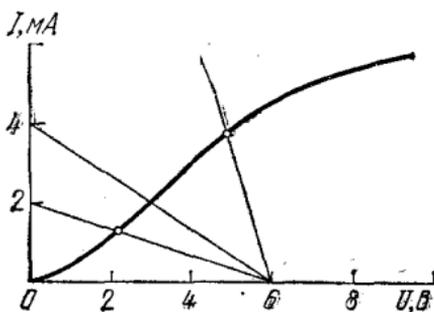
$$4.13*. U = U_0 r \tau / (rT + r\tau + RC),$$

$$4.14*. \frac{dU}{dt} = -\frac{U}{RC}; \quad U = U_0 \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right), \quad I = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right).$$

$$4.15. R < 40 \text{ кОм.}$$

$$4.16*. v = \left( RC \ln \frac{U - U_0}{U - U_1} \right)^{-1}$$

4.17\*. а)  $I = qv/d$ . б) Нет;  $q = It$ ,  $v = d/t$ , где  $I$  — ток и  $t$  — время, в течение которого он идет.



К ответу 4.20\*.

$$4.18. I = \varepsilon_0 (e - 1) \mathcal{E} b v / d.$$

$$4.19. I = \frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R} - \left[ \left( \frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \right]^{1/2}.$$

4.20\*. На вольт-амперной характеристике проводим прямую  $I = (\mathcal{E} - U)/R$ ; их точка пересечения дает ток 2 мА. Проводя соответствующие прямые через концы прямолинейного участка характеристики, находим, что при  $R < 0,3$  кОм и  $R > 3$  кОм диод перестает работать на прямолинейном участке.

## Глава 9. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 9.1. Индукция магнитного поля. Действие магнитного поля на ток

1.1.  $B = 100$  Тл.

1.2.  $B = 20$  Тл.

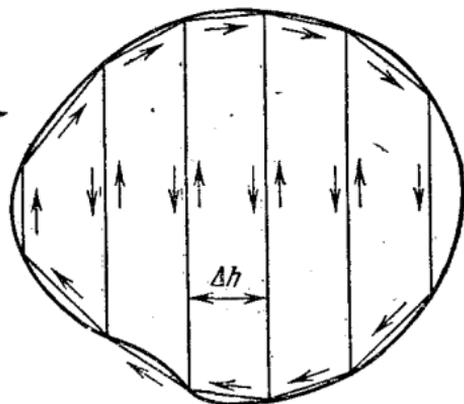
1.3. а)  $F_1 = F \frac{I_1}{I} \sqrt{1 + \frac{L^2}{l^2} - 2 \frac{L}{l} \cos \varphi}$ ; б\*)  $F_2 = F \cdot 2 \frac{R I_2}{l}$ .

1.4\*.  $\Delta h = a \lambda U B / b p b$ .

1.5.  $\alpha = 45^\circ$ .

1.6.  $I = \frac{mg}{2aB} \operatorname{ctg} \alpha$ .

1.7. в\*) Рамку с током разобьем на трапециевидные микроконтуры с током  $I$  так, как изображено на рисунке. Момент сил, действующий на все микроконтуры, при  $\Delta h \rightarrow 0$  совпадает в пределе с моментом сил, действующим на рамку с током:



К ответу 1,7 в\*.

$$N \overrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \left[ \sum_i B \times \Delta M_i \right] = \left[ B \times \sum_i \Delta M_i \right] \overrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} [B \times M].$$

1.8.  $\operatorname{tg} \alpha = l B / 4 p g$ .

1.9. а)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l B}{2 p g}$ . б\*)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi (4 + \pi) l B}{4 (1 + \pi) (2 + \pi) p g}$ .

1.10.  $N = \frac{1}{2} \pi R^2 l B (\sin \alpha + \cos \alpha)$ .

1.11.  $a = \frac{2 \pi R l B}{m} \sin \alpha$ .

1.12\*.  $B = F / R l$ .

§ 9.2. Магнитное поле движущегося заряда.  
Индукция магнитного поля линейного тока

2.2.  $B = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi r^2} \sin \alpha.$

2.3.  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [l \times r].$

2.4. а)  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , где  $r$  — расстояние до нити.

б)  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , где  $r$  — расстояние до провода.

2.5. а)  $I = 1$  А. б)  $\mu = 1,25.$

2.6.  $B = 1,88 \cdot 10^{-5}$  Тл.

2.7.  $B = \mu_0 (I_1 - I_2) / 2\pi l \sin(\alpha/2).$

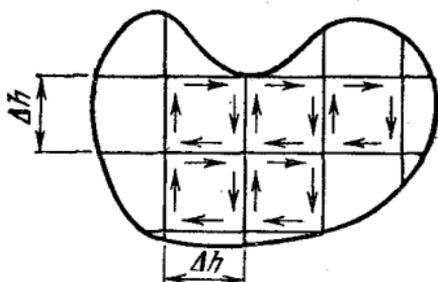
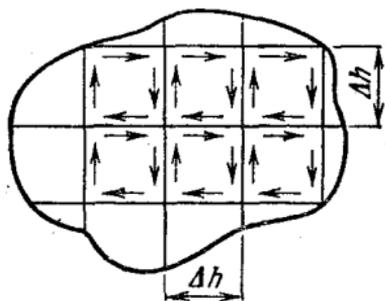
2.8.  $B = \mu_0 I \sqrt{5} / 8\pi l$ , где  $l$  — расстояние до точки пересечения проводов.

2.9. а)  $E_0 = \frac{\mu_0 I (\pi - 1)}{2\pi R}; \quad B_h = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{\pi^2 (R^2 + h^2)} + \frac{R^4}{(R^2 + h^2)^3} - \frac{2R^2}{\pi (R^2 + h^2)^{5/2}} \right]; \quad B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$

2.10\*.  $B = \mu_0 I \sqrt{8} / \pi a.$

2.11\*. а)  $B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}, \quad M = Iab.$

б) Два плоских контура с током  $I$ , имеющих разную форму, но одинаковую площадь, разобьем на квадратные микроконтуры с током  $I$



К ответу 2.11\*б.

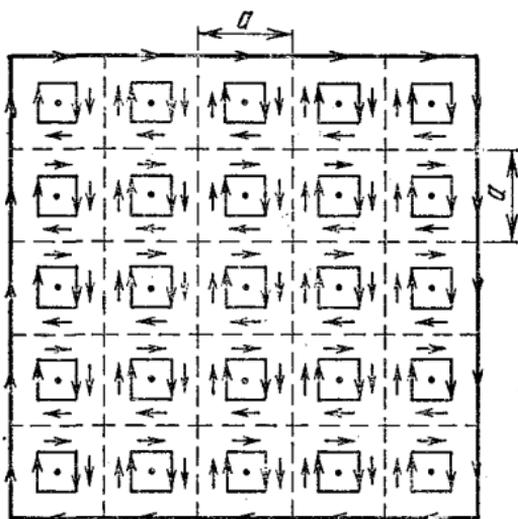
так, как изображено на рисунке. Индукция магнитного поля, создаваемого этими микроконтурами, при  $\Delta h \rightarrow 0$  совпадает с индукцией контуров, внутри которых находятся микроконтуры. На больших расстояниях магнитные поля рассматриваемых контуров будут совпадать, так как это поле зависит только от числа микроконтуров, которое в пределе  $\Delta h \rightarrow 0$  в обоих контурах будет одинаково.

2.12\*. а) На больших расстояниях индукция магнитного поля  $N = n^2$  микроконтуров площади  $s_0$  с током  $I_0$  и индукция магнитного

поля контуров  $a \times a$  с током  $I = I_0 s_0 / a^2 = M_0 / a^2$  будут одинаковы. Но магнитное поле новых контуров совпадает с магнитным полем большого квадрата с током  $I$ . Магнитный момент этого квадрата

$$M = I (na)^2 = \frac{M_0}{a^2} (na)^2 = n^2 M_0 = N M_0.$$

б) Магнитное поле тонкой пластины близко к магнитному полю контурного тока  $I = hM$ , где  $M$  — магнитный момент единицы объема



К ответу 2.12\*а.

вещества пластины. Но  $B$  связано с  $I$  соотношением  $B = \mu_0 I \sqrt{8} / \pi a$  (см. ответ задачи 2.10\*). Поэтому  $M = \pi a / \mu_0 h \sqrt{8}$ .

2.13.  $B = \mu_0 M R^2 h l / 2 (R^2 + l^2)^{3/2}$ .

2.14. а)  $I_1 = I \sqrt{10}$ ; б\*)  $I_2 = 2I \sqrt{10}$ .

### § 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по плоскости или объему

3.1.  $B = 1/2 \mu_0 \sigma v$ .

3.2.  $B = 10^{-10}$  Тл.

3.3. а)  $B = 1/2 \mu_0 i$ . б) Между плоскостями  $B_1 = 1/2 \mu_0 i$ ,  $B_2 = 0$ ,  $B_3 = 1/2 \mu_0 i$ ; вне плоскостей  $B'_1 = 3/2 \mu_0 i$ ,  $B'_2 = \mu_0 i$ ,  $B'_3 = 7/2 \mu_0 i$ . в) Вне плоскостей  $B_1 = 1/2 \mu_0 i$ ,  $B_2 = 0$ ,  $B_3 = 1/2 \mu_0 i$ ; между плоскостями  $B'_1 = 3/2 \mu_0 i$ ,  $B'_2 = \mu_0 i$ ,  $B'_3 = 7/2 \mu_0 i$ .

3.4. а)  $F = \mu_0 I^2 / 2b$ ; б\*)  $\Delta = \mu_0 a I^2 / 12 E b^2$ ; в)  $B_1 \approx 10$  Тл,  $B_2 \approx 35$  Тл.

3.5. а)  $B_{\parallel} = \mu_0 \epsilon_0 E_{\perp} v = \mu_0 \sigma v \Omega / 4\pi = \mu_0 i \Omega / 4\pi$ , где  $E_{\perp} = \sigma \Omega / 4\pi \epsilon_0$  — составляющая напряженности электрического поля носителей тока,  $\sigma$  — их поверхностная плотность,  $v$  — их скорость,

б)  $B = \mu_0 i / 2$ .

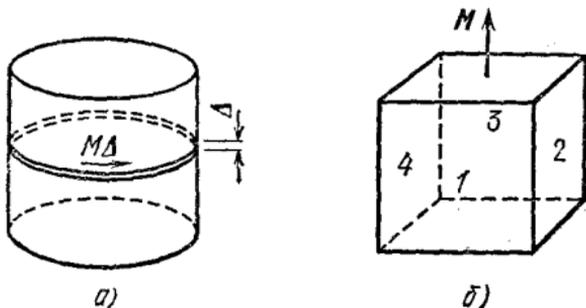
3.6\*. а)  $B = \mu_0 i$ ; не зависит. б)  $T = \mu_0 n R I^2 / 2$ .

3.7\*. а)  $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность цилиндра (см. задачу 3.5а). В сечении  $AA'$  телесный угол  $\Omega = 2\pi$ , поэтому  $B_{\parallel} = \mu_0 i / 2$ .

б)  $B = \frac{1}{2} \mu_0 i \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_1}\right)^2}} \right)$ ,  $B \xrightarrow{x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \mu_0 i \left(\frac{R}{x_1}\right)^2$ .

$B = \frac{1}{2} \mu_0 i \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_2}\right)^2}} \right)$ ,  $B \xrightarrow{x_2 \rightarrow \infty} \mu_0 i$ .

3.8\*. а) Магнитное поле цилиндра складывается из магнитных полей тонких дисков толщины  $\Delta$ , на которые можно разбить этот



К ответу 3.8\*.

цилиндр. Магнитное же поле каждого диска совпадает с магнитным полем тока, текущего с линейной плотностью  $M$  ( $M$  — магнитный момент единицы объема железа) по внешней поверхности диска (см. решение задачи 2.12\*).

б) Направление вектора индукции магнитного поля в центре кубика совпадает с направлением намагничивания  $M$ . Модуль этого вектора будет во столько раз меньше модуля вектора индукции магнитного поля внутри стержня, во сколько раз  $8\pi/3$  (телесный угол, под которым видны боковые грани кубика 1—4) меньше  $4\pi$ ,  $n = 1,5$  раза.

в) Индукция магнитного поля внутри прямоугольного столба будет во столько раз больше  $B_0$ , во сколько раз  $4\pi$  больше телесного угла, под которым видны боковые грани пластины из ее центра.

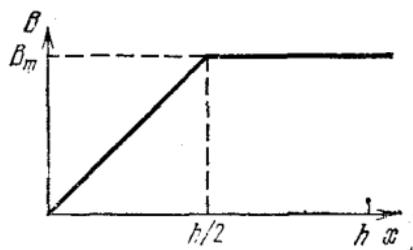
$B = \pi a B_0 / 2 \sqrt{2} h$ .

3.9.  $B_{\parallel} = 6,28 \cdot 10^{-4}$  Тл,  $B_{\perp} = 0,377$  Тл.

3.10.  $\Delta B = B_0 \lambda h / 2R$ .

3.11. а)  $B = \mu_0 I x / 2\pi r^2$ ,  $0 < x < r$ ;  $B = \mu_0 I / 2\pi x$ ,  $x > r$ . б)  $B = \mu_0 x j$ ,  $x < a/2$ ;  $B = \mu_0 a j / 2$ ,  $x > a/2$ . в)  $B_{\max} = \mu_0 N I / 2\pi r$ ,  $B_{\min} = \mu_0 N I / 2\pi R$ .

3.12. а) Над плоскостью  $B = \mu_0 I / 2\pi x$ , силовые линии магнитного поля совпадают с силовыми линиями бесконечного прямого провода; под плоскостью  $B = 0$ . б) Над плоскостью  $B = \mu_0 I / 2\pi x$ ; под плоскостью  $B = \mu_0 (I - I_1) / 2\pi x$ . в) Внутри кабеля  $B = \mu_0 I / 2\pi x$ ; вне кабеля  $B = 0$ .



К ответу 3.14.

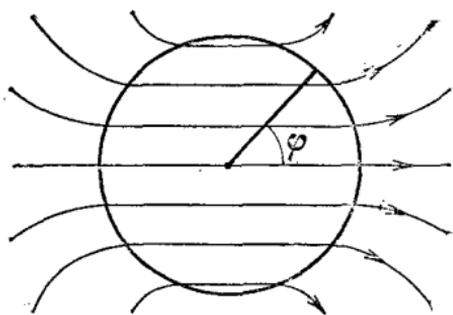
3.13\*.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

3.14. См. рис.  $B_m = \mu_0 h j / 2$ .

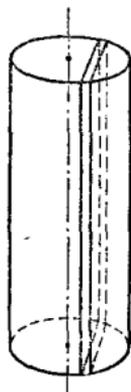
3.15.  $B = \frac{\mu_0}{2} j x$ ,  $0 < x < \frac{h}{2}$ ;  $B = \frac{\mu_0}{2} j h \left(1 - \frac{h}{4x}\right)$ ,  $x > \frac{h}{2}$ , где  $x$  — расстояние до точки  $O$ .

3.16\*.  $B = \mu_0 j d / 2$ .

3.17\*. а)  $B = \frac{\mu_0 j a}{2}$ ; б)  $i = \frac{2B_0 \sin \varphi}{\mu_0}$ ,  $\max i = \frac{2B_0}{\mu_0}$ . См. рис.



К ответу 3.17\*б.



К ответу 3.18\*.

3.18\*. Для определения эквивалентных поверхностных токов (см. решение задачи 3.8\*а) объем цилиндра нужно разбить на тонкие слои, один из которых изображен на рисунке. Плоскости слоев должны быть перпендикулярны направлению намагничивания,

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 M \text{ при } x < r; \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 M \left(\frac{r}{x}\right)^2 \text{ при } x > r.$$

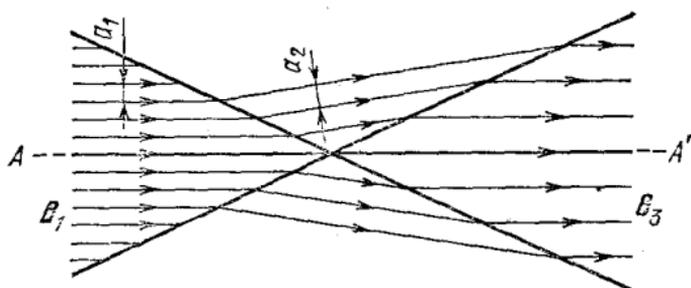
## § 9.4. Магнитный поток

4.1. а)  $\Phi = \sqrt{3} B a^2 / 2$ . б)  $\Phi = B S \sin \alpha$ ,

4.2.  $\Phi = \pi R b^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)$ .

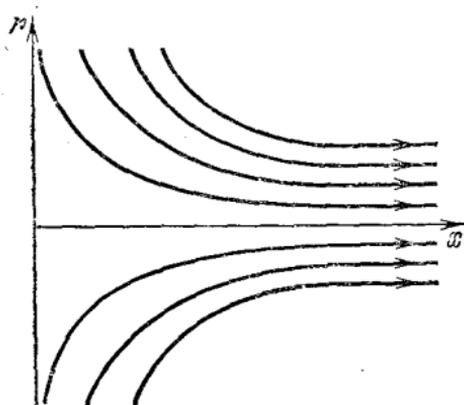
4.6.  $n = \sin \alpha / \sin \beta$ ,  $i = B \cos \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta)$ .

4.7.  $B_2 = B_3 = B_1 \frac{a_1}{a_2} = \frac{2B_1 B_3 \cos(\alpha/2)}{(B_1^2 + B_3^2 + 2B_1 B_3 \cos \alpha)^{1/2}}$ .



К ответу 4.7\*.

4.8. а)  $B_r = \frac{1}{2} B_0 \frac{r}{x_0}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{x}$ ; см. рис.



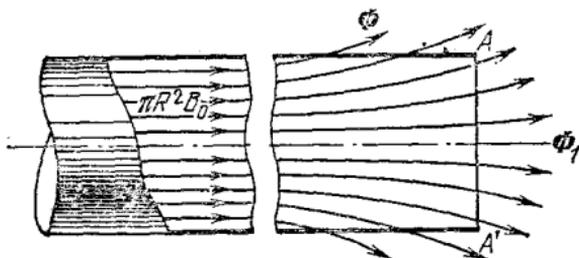
К ответу 4.8а.

б)  $B_r = \frac{1}{2} n B_0 \frac{r}{x_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{n-1}$ ;

$B_r = \frac{1}{2} r B_0 \frac{df}{dx}$ .

4.9. Так как магнитный поток радиальной составляющей поля вне цилиндра сохраняется, индукция магнитного поля будет убывать как  $\alpha R/x$ , где  $x$  — расстояние до оси цилиндра,  $\alpha = B_0 R/2x$  ( $B_0$  — радиальная составляющая индукции магнитного поля вблизи поверхности цилиндра).

4.10\*. а) На достаточно большом расстоянии от конца цилиндра индукция магнитного поля  $B_0 = \mu_0 i$ , а магнитный поток в сечении



К ответу 4.10\*а.

равен  $\pi R^2 B_0$ . Часть этого потока ( $\Phi_1$ ) выходит из цилиндра через сечение  $AA'$ , часть ( $\Phi$ ) — через боковую поверхность:  $\pi R^2 B_0 = \Phi_1 + \Phi$ .

Отсюда  $\Phi = \pi R^2 B_0 - \Phi_1$ . Так как  $B_{\parallel} = B_0/2$ , то  $\Phi_1 = \pi R^2 B_{\parallel} = \pi R^2 B_0/2$  (см. решение задачи 3.7\*а) и  $\Phi = \pi R^2 B_0/2 = \mu_0 \pi i R^2/2$ .

б) Сила, действующая на выделенный участок соленоида 2 в осевом направлении,  $\Delta F_{\parallel} = B_{\perp} \Delta S \cdot nI = nI \cdot \Delta\Phi$ , где  $\Delta\Phi$  — магнитный поток от соленоида 1 через этот участок. Поэтому полная осевая сила  $F_{\parallel} = nI \cdot \Phi$ , где полный магнитный поток от соленоида 1 через поверхность соленоида 2  $\Phi = \mu_0 \pi n I R^2/2$  (см. задачу а)). Значит,  $F_{\parallel} = \mu_0 \pi (n I R)^2/2$ .

в)  $B = \sqrt{2\mu_0 F/\pi R^2}$ . г)  $F = nI (\Phi_1 - \Phi_2)$ ,

4.11. а)  $L = \mu_0 \pi (rR)^2/l^3$ . б)  $L = \mu_0 n \pi r^2$ .

## Глава 10. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛОЖНЫХ ПОЛЯХ

### § 10.1. Движение в электрическом и магнитном полях

1.1.  $R = 0,2$  м.

1.2.  $R = 0,68$  м.

1.3.  $T_1/T_2 = 1$ ,  $R_1/R_2 = \sqrt{K_1/K_2}$ .

1.4.  $\omega = qB/m$ .

1.5.  $t = 2\pi m/qB$ .

1.6.  $K = 3 (eBR)^2/4m_p$ .

1.7.  $\sin \alpha = eBl/m_e v$  при  $eB/m_e \leq v/l$ ;  $\alpha = \pi$  при  $eB/m_e > v/l$ .

1.8.  $x_1 = 0,29$  м;  $x_2 = 0,41$  м;  $x_3 = 0,5$  м;  $x_4 = 0,58$  м.  $\Delta l \approx 3,7$  см.

1.9.  $\Delta U/U_0 < 0,025$ .

1.10\*. На расстоянии  $x \approx 2mv/qB$  от точки А;  $\Delta z \approx mv (\delta\alpha)^2/4qB$ .

1.11.  $R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$ ,  $h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{qB}$ .

1.12\*.  $x \approx 2\pi m_e v/eB$ ,  $\Delta y \approx \pi m_e v (\delta\alpha)^3/2eB$ .

1.13. а) См. рис.  $B \geq 2\sqrt{2m_e K/eR}$ . б)  $P_2 > P_1$ .

1.14.  $B = \frac{m_e v}{eR} + \frac{e}{16\pi\epsilon_0 v R}$ . Неустойчива.

1.15.  $\omega \approx \omega_0 \pm eB/2m_e$ ; знак определяется направлением поля.

1.16.  $V \approx 2Uh/R - Bh\sqrt{2eU/m_e}$ .

1.17. а)  $y = \frac{m_e E}{eB^2 l L} z^2$ . б)  $y \approx 1,1 \cdot 10^{-4} z^2$ .

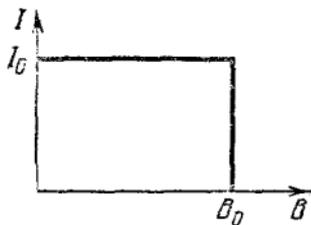
в)  $y = \frac{m_{e0} E}{eB^2 l L} z \sqrt{z^2 + \left(\frac{eBlL}{m_{e0} c}\right)^2}$ .

1.18.  $t = \frac{\pi m_p}{e^2 BU} \left( \frac{e^2 B^2 R^2}{2m_p} - K \right)$ .

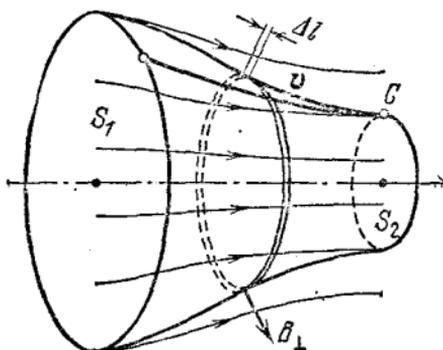
1.19.  $U = \frac{eB^2 d^2}{2\pi^2 m_e} \frac{1}{k^2}$ , где  $k=1, 2, \dots$ . Размер пятна определяется начальными скоростями электронов.

1.20.  $v_{\max} = \frac{mg}{qB} \cos \alpha \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} - 1 \right)$  при  $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ ;  $v=0$  при  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ .

1.21.\* а) Время движения электрона через выделенный на рисунке участок  $t = \Delta l / v_{\perp}$ . Поэтому изменение импульса в направлении, пер-



К ответу 1.13.



К ответу 1.21\*а,

пендикулярном плоскости рисунка,  $\Delta p_{\perp} = eB_{\perp} v_{\perp} \cdot \Delta l / v_{\perp} = eB_{\perp} \Delta l = e \Delta \Phi / 2\pi R$ , где  $\Delta \Phi$  — магнитный поток через выделенный на рисунке участок. Изменение момента импульса

$$\Delta M = R \Delta p_{\perp} = \frac{e}{2\pi} \Delta \Phi, \text{ или } M_1 - M_2 = \frac{e}{2\pi} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

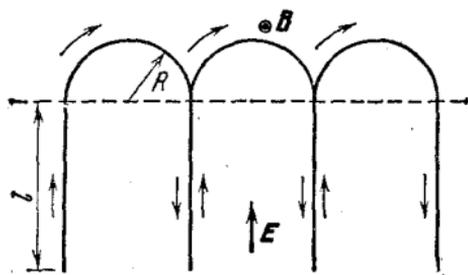
б)  $r = R \sqrt{B_2/B_1}$ .

## § 10.2. Дрейфовое движение частиц

2.1.  $v_{\text{др}} = 2v (B_1 - B_2) / \pi (B_1 + B_2)$ .

2.2\*.  $v_{\text{др}} \approx \alpha m_e v^2 / eB_0$ .

2.3. См. рис.  $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mEl}{q}}$ .  $v_{\text{др}} = \frac{2\sqrt{2ql} E}{2\sqrt{2ql} B + \pi \sqrt{mE}}$ .



К ответу 2.3.

2.4.  $v = E/B$ .

2.5.  $v_{\text{др}} = E/B$ .

2.6.  $v_{\text{др}} = \frac{E}{B} \sin \alpha$ .

2.8.  $v \leq eB\hbar/4m_e$  или  $v = U/\hbar B$ .

2.9.  $U = eB^2 \hbar^2 / 2m_e$ .  $U = 3,5 \cdot 10^5 \text{ В}$ .

2.10. В системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью  $E/B$ , электрон движется по окружности радиуса  $m_e v' / eB$ , где  $v' = \left( v^2 + 2 \frac{E}{B} \cos \alpha + \frac{E^2}{B^2} \right)^{1/2}$ .

2.11.  $v_{др} = F/qB$ .

2.12.  $v_e \approx 8 \cdot 10^{-7}$  м/с,  $v_p \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с.

## Глава 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### § 11.1. Движение проводников в постоянном магнитном поле. Электродвигатели

1.1. Между концами крыльев.

1.2.  $U = 0,03$  В.

1.4.  $B = U/a^2 \omega$ .

1.5.  $U = vBb$ ;  $\sigma = \epsilon_0 vB$ .

1.6.  $v > Ze/4\pi\epsilon_0 Br^2$ .

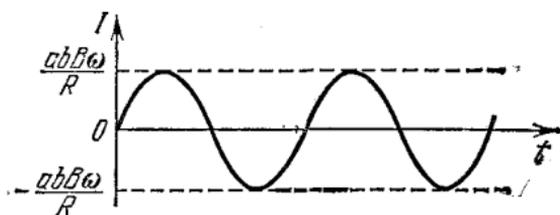
1.7.  $B \approx 2 \cdot 10^3$  Тл.

1.8\*. а)  $v(t) = g \frac{mR}{B^2 l^2} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{B^2 l^2}{mR} t \right\} \right)$ ; в тепло.

б)  $v(t) = gtm / (m + CB^2 l^2)$ ; в энергию электрического поля конденсатора.

1.9.  $Q = B^2 vab / 2\rho$ ,  $a \ll b$ ;  $Q = B^2 v b^2 / 2\rho$ ,  $a \gg b$ .

1.10. а) См. рис. б)  $M = \frac{a^2 b^2 B^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t$ .



К ответу 1,10а.

1.11\*.  $Q = \frac{B^2 l^2 v \operatorname{tg} \alpha}{2\rho}$ .

1.12.  $N = \frac{(vBd)^2 R}{(R + d/\sigma S)^2}$ .

1.13.  $U = IB/\rho h$ .

1.14. а)  $v = \sqrt{2BII/L/m}$ ; б)  $v \approx 1,1 \cdot 10^7$  м/с.

1.15.  $v = \sqrt{IB/\rho b}$ .

$$1.16*. I = \frac{mg}{BR} \cos \omega t.$$

$$1.17*. \text{ а) } \omega(t) = \frac{2\mathcal{E}}{Br^2} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{3B^2 r^2}{4mR} t \right\} \right].$$

$$\text{ б) } \omega_{\text{уст}} = \frac{2\mathcal{E}}{Br^2} \left( 1 - \frac{2FR}{B\mathcal{E}r} \right), \quad I = \frac{2F}{Br}.$$

$$1.18*. I = \omega B^2 r^2 / 2R = 0,4 \text{ А.}$$

$$1.19. \omega_1 = \omega - 4M\rho/a^3 B^2.$$

$$1.20. I_\lambda = 3,65 \text{ А, } I_6 = 1,58 \text{ А.}$$

1.21. При этом в цепи течет максимальный ток, так как отсутствует э. д. с. индукции.

$$1.22. \mathcal{E} = 46,6 \text{ В.}$$

$$1.23. n = n_1 \left( \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1} - \frac{2\pi MR n_1}{\mathcal{E}_1^2} \right).$$

$$1.24. \mathcal{E} = 125 \text{ В; } N = 250 \text{ Вт.}$$

$$1.25*. x = \frac{2U(I_2 - I_1) + R(4I_1^2 - I_2^2)}{2\rho(I_2^2 - I_1^2)}, \quad v = \frac{I_2}{2F} [2U - I_2(2\rho x + R)].$$

$$1.26*. M = 2\mathcal{E}I_0\omega/\omega_0^2.$$

$$1.27. v = mgR/(B_0\pi a^2\alpha)^2.$$

1.28\*. При смещении ядра на расстояние  $x$  от центра на него со стороны отрицательного заряда действует сила  $-kx$ , где  $k = e^2/4\pi\epsilon_0 r^3$ . В равновесии эта сила равна по модулю силе Лоренца  $evB$ . Поэтому  $x_0 = 4\pi\epsilon_0 r^3 vB/e$ . При влете в поле начнутся гармонические колебания с амплитудой  $x_0$ . Затухание колебаний приведет к потере энергии  $kx_0^2/2$ . Потенциальная энергия в равновесии также  $kx_0^2/2$ . Из закона сохранения энергии получаем

$$v = v_0 \left( \frac{m}{m + 8\pi\epsilon_0 r^3 B^2} \right)^{1/2}, \quad x = 4\pi\epsilon_0 B r^3 v_0 / Ze.$$

1.29\*. Под действием магнитного поля заряды проводника разделяются, как в плоском конденсаторе емкости  $C = \epsilon_0 ac/b$ , заряженном до напряжения  $U = vBb$ . Закон сохранения энергии  $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} +$

$$+ \frac{CU^2}{2} \text{ дает } v = v_0 \left( \frac{m}{m + \epsilon_0 B^2 abc} \right)^{1/2}.$$

$$1.30*. a = F/(m + \epsilon_0 B^2 S\delta).$$

## § 11.2. Вихревое электрическое поле

$$2.1. 1 \text{ Вб, } 100 \text{ Вб, } 300 \text{ Вб.}$$

$$2.2. E = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ В/м.}$$

2.3. В положении  $C$  аксиальная симметрия магнитного поля не приводит к возникновению тока в перемычке.

$$2.4. E_1 = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ В/м, } E_2 = 2,56 \cdot 10^{-5} \text{ В/м,}$$

2.5.  $E = \mu_0 \alpha x$ , где  $x$  — расстояние от средней линии.

2.6.  $E = \frac{\mu_0 \pi v N I_0}{r} r \cos(2\pi vt)$ , где  $r$  — расстояние от оси катушки;

$\mathcal{E}_0 = 0,12 \text{ В}$ .

2.7. а)  $q = C\varphi$ . б)  $q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varphi$ .

2.8. а)  $q_1 = C_1 \frac{\varphi}{2}$ ,  $q_2 = C_2 \frac{\varphi}{2}$ ; б\*)  $q_3 = \frac{C_3(C_2 - C_1)}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{\varphi}{2}$ .

2.9. а)  $I = 1,44 \text{ мА}$ ; б)  $I = 2,5 \text{ мА}$ , ток через перемычку равен нулю; в)  $I_1 \approx 2,75 \text{ мА}$ ,  $I_2 \approx 1,78 \text{ мА}$ ,  $I_3 \approx 0,97 \text{ мА}$ ,

2.10\*.  $\mathcal{E} = \frac{\pi R^2}{3} n B_0 \omega \sin \omega t$ .

2.11\*.  $\omega = q B_0 a^2 / 2mR^2$ . Не изменится.

2.12\*.  $B(t) = \alpha t (1 + r^2/a^2)$ .

2.13\*. Уменьшается. С ростом индукции магнитного поля растут сила Лоренца и скорость электрона. Однако последняя недостаточно быстро для того, чтобы электрон остался на окружности того же радиуса.

2.14\*.  $R = 3r_0/4$ . В 100 раз. Если начальный радиус  $r < R$ , электрон будет двигаться по сходящейся к центру спирали, при  $r > R$  — по расходящейся спирали.

2.15\*.  $\omega = 2\sigma B_0 / R (\rho + 2\mu_0 \sigma^2)$ .

2.16\*. а) В  $m_{эм}/m_e = 2,6 \cdot 10^{12}$  раз. б)  $NSR \approx 7 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ , где  $N$  — число витков на единицу длины соленоида,  $R$  — радиус соленоида,  $S$  — сечение провода.

2.17\*.  $a = FC / (mC + \epsilon_0 \mu_0 q^2)$ .

2.18\*.  $m_{эм} \approx 10^{-27} \text{ кг}$ .

## § 11.3. Взаимная индуктивность.

### Индуктивность проводников. Трансформаторы

3.1.  $\Phi = \mu_0 / S n \cos \alpha$ .

3.2.  $L_{12} = \frac{\mu_0 \pi R^2 n}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$ .

3.3.  $L_{12} = \mu_0 \pi r^2 n N$ .

3.4.  $U = \mu_0 \pi r^2 n N \omega I_0 \cos \omega t$ .

3.5.  $L = \mu_0 \pi R^2 n^2 l$ .

3.6.  $L \approx \mu_0 h b / a$ .

3.7\*.  $L = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ .

3.8\*.  $L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \mu_1 + 2\mu_2 \ln \frac{a}{b} \right)$ .

3.9\*.  $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{h}{a}$ .

$$3.10. \text{ а) } L = \mu_0 \pi (n_1^2 R_1^2 l_1 + n_2^2 R_2^2 l_2 + 2n_1 n_2 R_1^2 l_2);$$

$$\text{ б) } L = \mu_0 \pi (n_1^2 R_1^2 l_1 + n_2^2 R_2^2 l_2 - 2n_1 n_2 R_1^2 l_2).$$

3.11. Увеличится в  $k$  раз.

$$3.12. t \approx 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

$$3.13. L = L_1 + L_2 + 2L_{12}. \quad L' = L_1 + L_2 - 2L_{12}.$$

$$3.14^*. L = \sqrt{L_1 L_2}.$$

$$3.15^*. \mathcal{E}_2 = \frac{\mu \mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_0 \omega \cos \omega t. \quad U_1 = \frac{\mu \mu_0 N_1^2 S}{l} I_0 \omega \cos \omega t.$$

$$3.16. U_2 = \text{const.}$$

$$3.20. \nu = 100 \text{ Гц.}$$

3.21. Чтобы уменьшить токи Фуко.

$$3.23. U = 10 \text{ В.}$$

$$3.24^*. U = 60 \text{ В.}$$

$$3.26^*. U = 190 \text{ В.}$$

3.27\*. Уравнение движения электрона в соленоиде:

$$e \left( E - \frac{L}{l} \frac{dl}{dt} \right) = m_e \frac{dv}{dt}, \quad l = 2\pi RN.$$

Но  $en_e v S = I$ . Поэтому первое уравнение можно записать в виде

$$El = U = \left( L + \frac{m_e l}{e^2 n_e S} \right) \frac{dl}{dt}.$$

Таким образом, влияние массы электрона на индуктивность соленоида сводится к увеличению индуктивности на  $\Delta L = 2\pi m_e N R / e^2 n_e S$ . Можно.

## § 11.4. Электрические цепи переменного тока

$$4.1. I(t) = \mathcal{E}t/L, \quad A = \mathcal{E}^2 \tau^2 / 2L, \quad \text{В энергию магнитного поля.}$$

$$4.2^*. I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} (1 - \cos \omega t). \quad \text{Нельзя.}$$

$$4.3. C(t) = C_0 (1 - t^2 / 2LC_0).$$

$$4.4. U_{\max} = U_0 R \sqrt{C/L}.$$

$$4.5. \text{ а) При размыкании; б) } C = 1 / (2\pi \nu n)^2 L \approx 1 \text{ мкФ.}$$

$$4.6. I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}, \quad q_{\max} = 2\mathcal{E}C.$$

$$4.7. I_{1\max} = U \sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1 + L_2)}}, \quad I_{2\max} = U \sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1 + L_2)}}.$$

$$4.8. \text{ а) } I = U_0 \sqrt{C/L} \sin \omega t, \quad \text{где } \omega_0 = 1/\sqrt{LC};$$

$$\text{ б) } I = \frac{\mathcal{E}_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega \sin \omega t); \quad I_{\max} = \mathcal{E}_0 / L (\omega_0 - \omega) \approx \approx 4,8 \text{ кА.}$$

$$4.9^*. I(t) = I_0 \exp \left\{ -\frac{Rt}{2L} \right\} \left( \cos \omega_0 t + \frac{R}{2L\omega_0} \sin \omega_0 t \right), \quad \text{где } \omega_0 = = 1/\sqrt{LC}; \quad \tau = (L/R) \ln 2.$$

$$4.10. I(t) = \frac{\mathcal{E}_0 (\omega^2 LC - 1)}{\omega L (2 - \omega^2 LC)} \cos \omega t.$$

$$4.11. \text{ При } 1/LC = \omega^2.$$

$$4.12. L = 2,3 \text{ Гн.}$$

$$4.13*. U_0 = V_0, \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega CR}{(\omega CR)^2 - 1}.$$

$$4.14. \mathcal{E}_0 \approx 208 \text{ В, } \eta = 1/3.$$

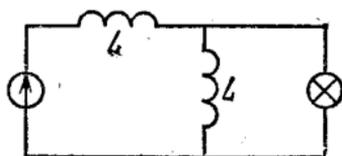
$$4.15. \text{ а) } I_L = 0, I_R = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t, N = 200 \text{ Вт;}$$

$$\text{б) } I_R = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t, I_L = -\mathcal{E}_0 \omega C (\sin \omega t + \cos \omega t), N = 200 \text{ Вт.}$$

$$4.16. L \approx 0,16 \text{ Гн.}$$

$$4.17. V = V_0 \sqrt{\tau/T}.$$

4.18. См. рис.



К ответу 4.18.

$$4.19*. t = \sqrt{\frac{LC_1}{C_1 + C_0}} \arccos \left\{ 1 - \frac{V_1}{V_0} \left( 1 + \frac{C_0}{C_1} \right) \right\}, \text{ если } V_0 > V_1 (1 + C_0/C_1),$$

$$4.20*. I_1 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{L_1}{L + L_1} \right) \frac{1 + \sin \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_1}{L}} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_1}{L}} \right)}.$$

$$4.21. \text{ а) } Q = L^2 I^2 / R t. \text{ б) } Q = (\pi L I)^2 / 4 R t.$$

$$4.22*. \varphi = 2 \arcsin (\omega \sqrt{LC} / 2); v = \omega l / \varphi \text{ при } \omega < 2 / \sqrt{LC}. \text{ При } \omega \ll 1 / \sqrt{LC}.$$

## § 11.5. Сохранение магнитного потока. Сверхпроводники в магнитном поле

$$5.2. B = B_0 (R/r)^2.$$

5.3. Уменьшится в 2 раза.

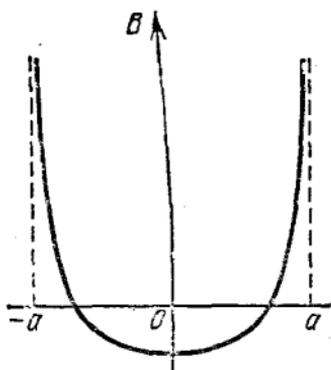
$$5.4. I' \approx 2I; B/B_0 \approx 2.$$

$$5.5. I' = I/3.$$

$$5.6. I(t) = I_0 \left( 1 + \frac{a}{l} \cos \omega t \right).$$

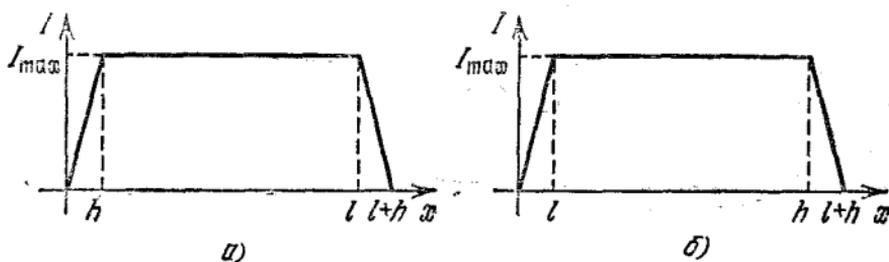
$$5.7. I = \Phi_0 / L.$$

$$5.8. I = I_0 - \frac{\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{L}.$$



К ответу 5.9\*.

5.12\*. Взаимодействие длинного провода со сверхпроводящей поверхностью эквивалентно взаимодействию двух длинных параллельных проводов с противоположно направленными токами, находящихся на расстоянии  $2h$  друг от друга:  $P_{\text{магн}} = \mu_0 I^2 / 2\pi^2 h^2$ ,  $f = \mu_0 I^2 / 4\pi h$ .



К ответу 5.10\*.

5.13\*.  $h = h_0 - mg/k$ ,  $I = I_0 (1 - mg/kh_0)$ .

5.14\*. Меняется только осевая составляющая индукции магнитного поля. В области внешнего поля она равна  $1/2 B_0 \cos \alpha$ , а вне —  $1/2 B_0 \cos \alpha$ .  $A = -\frac{B_0^2 S l}{8\mu_0} \cos^2 \alpha$ .

5.15\*. Когда катушка находится внутри трубы, поле сосредоточено в области длины  $h$ . Обозначим индукцию внутри катушки  $B_{\text{in}}$ , между катушкой и трубой  $B_{\text{ex}}$ . Закон сохранения магнитного потока через сечение трубы и катушку дает

$$B_{\text{in}} \sigma = B_{\text{ex}} (S - \sigma), \quad B_{\text{in}} = B_0 = \mu_0 I N / h,$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{B_{\text{in}}^2}{2\mu_0} \sigma h + \frac{B_{\text{ex}}^2}{2\mu_0} (S - \sigma) h = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \sigma h + \frac{mv^2}{2}$$

получаем  $v = NI \sigma \sqrt{\mu_0 / m (S - \sigma) h}$ .

5.9\*.  $I = B \pi a^2 / L$ ;  $B_0 = B (1 - \mu_0 \pi a / 2L)$ ;  
см. рис.

5.10\*. См. рис.  $x$  — координата переднего торца стержня, отсчитываемая от начала катушки. а)  $I_{\text{max}} \approx I_0 S / (S - \sigma)$ ,  $l \gg h$ ; б)  $I_{\text{max}} \approx I_0 [1 + l \sigma / h (S - \sigma)]$ ,  $l \ll h$ .

5.11\*.  $L = \mu_0 \sigma S N / h (S + \sigma)$ . В продольном направлении соленоид сжимается силой  $F = \mu_0 I^2 \sigma S N^2 / 2h^2 (\sigma + S)$ , давление в радиальном направлении  $P_{\text{магн}} = \frac{\mu_0 I^2 N^2}{2h^2} \frac{\sigma - S}{\sigma + S}$ .

5.16\*. При входе сверхпроводящего стержня в поле в нем возникает ток, создающий магнитное поле, индукция которого равна по модулю индукции внешнего поля и противоположно направлена. Работа по созданию тока  $I = B^2Sl/2\mu_0$  равна изменению кинетической энергии стержня. Отсюда  $v = \sqrt{B^2Sl/\mu_0 m}$ .

$$5.17*. v = v_0 (1 + \sqrt{1 + Lx_0 I_0^2 / mv_0^2}).$$

$$5.18*. \omega = \sqrt{4\mu_0 a h i^2 / m (l - d)}.$$

$$5.19*. T = T_0 (1 + B_0^2 a^2 T_0^2 / 4LJ)^{-1/2}.$$

5.20\*. Проводник будет совершать колебания с частотой  $\omega = Bl/\sqrt{mL}$ .

$$5.21*. B \approx 500 \text{ Тл. } P \approx 10^{11} \text{ Па.}$$

5.22\*. Уравнение движения электрона в трубке:

$$m_e \frac{dv}{dt} = eE = e \frac{R}{2} \frac{d(B - B_1)}{dt},$$

где  $B$  и  $B_1$  — индукции внешнего магнитного поля и поля, создаваемого движущимися электронами. Поэтому  $m_e v = eR(B - B_1)/2$ . С другой стороны,  $en_e v h = j$ ,  $B_1 = \mu_0 j$ , где  $j$  — линейная плотность тока. Из последних уравнений получаем

$$j = e^2 n_e h B / (2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h),$$

а затем

$$B - B_1 = B 2m_e / (2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h).$$

В нашем случае  $B = B_0$ . Следовательно,

$$\Delta B = B_0 2m_e / (2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h).$$

$$5.23*. B = 2m_e \omega / e.$$

## § 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным

$$6.1. C_B = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt} \text{ (в СГС); } C_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dN}{dt} \text{ (в СИ). } C_B \text{ — циркуляция}$$

индукции магнитного поля,  $N$  — поток напряженности электрического поля,  $c$  — скорость света,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные.

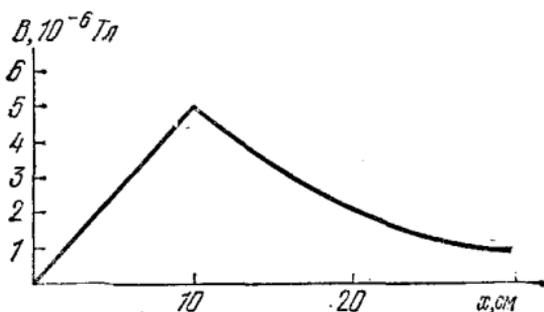
$$6.2. \text{ а) } \frac{dN}{dt} = v l E; C_B = \mu_0 \epsilon_0 v l E. C_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dN}{dt} \text{ (в СИ); } C_B = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt} \text{ (в СГС).}$$

$$6.3. N = 9 \cdot 10^5 \text{ В} \cdot \text{м.}$$

6.4\*. По закону Гаусса поток напряженности электрического поля внутри конденсатора  $N = Q/\epsilon_0$ , где  $Q$  — заряд конденсатора, а скорость изменения потока  $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} I$ , где  $I$  — ток в цепи,

Поэтому циркуляция индукции магнитного поля  $C_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dN}{dt} = \mu_0 I$  совпадает с циркуляцией индукции магнитного поля, которую бы создал ток  $I$ .

6.5.  $B = 2,5 \cdot 10^{-6}$  Тл. См. рис.



К ответу 6.5,

6.6.  $n = 4\pi NR/L$ .

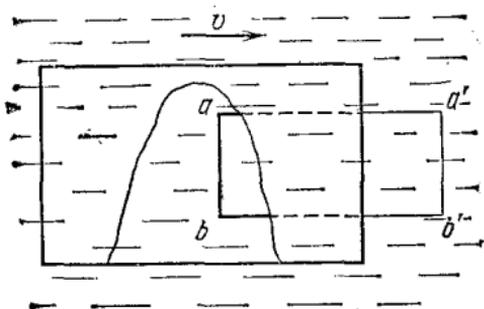
6.7.  $B = \mu_0 \epsilon_0 E v \cos \alpha$ .

6.8.  $\sigma = B/\mu_0 v$ .

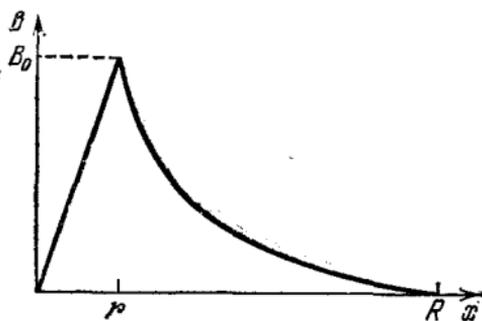
6.9. а)  $B = \mu_0 \epsilon_0 v U/h$  внутри проводника;  $B = -\mu_0 \epsilon_0 v U/h$  между проводником и обкладками конденсатора.

б\*) Уменьшится в  $(\epsilon + 1)/(\epsilon - 1)$  раз.

6.10\*. См. рис. В первом случае из-за тока поляризации, протекающего через контур  $abb'a'$ , циркуляция вектора индукции магнитного поля через этот контур будет в  $\epsilon$  раз больше, чем во втором случае. Поэтому движение среды вместе с контуром уменьшает индукцию магнитного поля в  $\epsilon$  раз.



К ответу 6.10\*.



К ответу 6.12\*.

ного поля через этот контур будет в  $\epsilon$  раз больше, чем во втором случае. Поэтому движение среды вместе с контуром уменьшает индукцию магнитного поля в  $\epsilon$  раз.

6.11\*. а) Индукция, вызываемая переменным электрическим полем,  $B_1 = \pi r^2 \alpha \mu_0 \epsilon_0 / 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \alpha r / 2$ . Индукция, вызываемая током поляризации диэлектрика, в  $\epsilon - 1$  раз больше:  $B_2 = (\epsilon - 1) B_1$ . Поэтому  $B = B_1 + B_2 = \epsilon B_1 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \alpha r / 2$ .

б)  $B_1 = \frac{\mu_0 \epsilon \epsilon_0 \alpha U r}{2h}$ ,  $B_2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \alpha U}{2hR} [r^2 (\epsilon - 1) + R^2]$ .

6.12. См. рис.  $B_0 = \mu_0 I r / 2\pi R^2$ .

§ 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн

1.1. В направлении оси  $z$ .

1.2. а) Изменится на противоположное; б) не изменится.

1.3. а)  $E = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct)$ .

б\*)  $E = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - ct)$ .

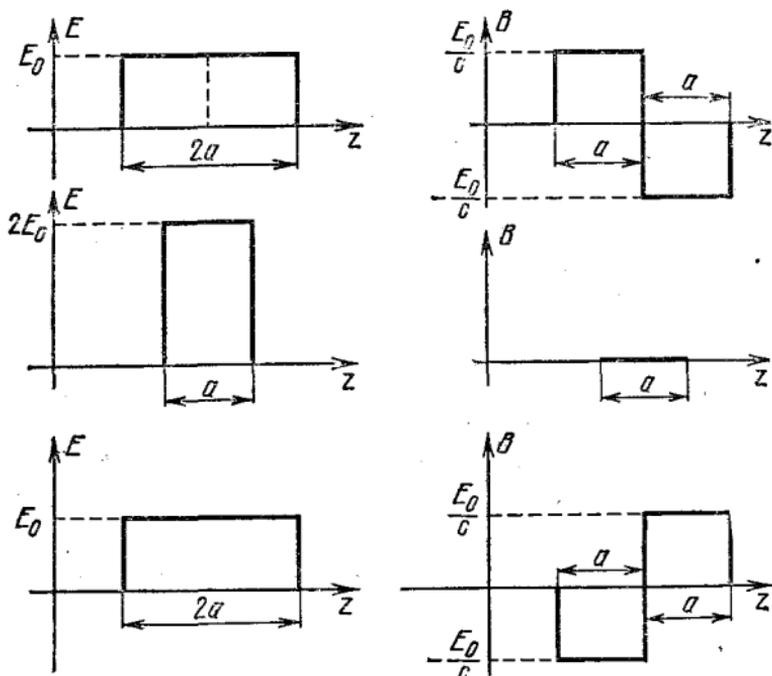
1.4.  $E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ;

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \arctg \frac{E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \sin \varphi_2}{E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2}.$$

1.5.  $E = 2E_0$ ;  $\bar{w} = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \cos^2 \left[ \left( t - \frac{z}{c} \right) \Delta + \varphi \right]$ .

1.6. а)  $B = \frac{1}{c} E$  (в СИ);  $B = E$  (в СГС). б\*)  $B_0 = \frac{1}{c\sqrt{\epsilon}} E_0$ .

1.7. а) См. рис.  $\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}$ .



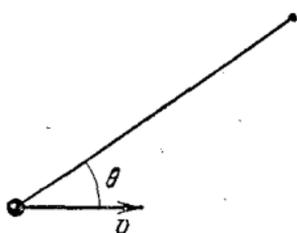
К ответу 1,7а.

б) Две плоские волны, бегущие в противоположных направлениях. Протяженность волн  $d$ , напряженность электрического поля  $E/2$ .

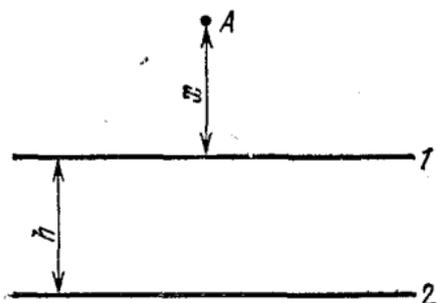
в) На две плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно плоскостям  $AB$  и  $A'B'$  в противоположных направлениях. Индукция электрического поля в волнах  $cB/2$ .

$$1.8. \text{ а) } E_{\text{изл}} = \pm \frac{1}{2} \frac{v}{c} E.$$

б\*) При остановке заряда  $Q$  в энергию излучения перейдет вся энергия магнитного поля. В любой точке индукция магнитного поля движущегося заряда равна в СГС напряженности электрического поля, умноженной на  $\frac{v}{c} \sin \theta$ . Поэтому излученная энергия была бы равна энергии электрического поля  $Q^2/2R$ , умноженной на  $(v/c)^2$ , если бы



К ответу 1.8б\*.



К ответу 1.9\*а.

не было множителя  $\sin \theta$ . Из-за этого множителя энергия магнитного поля уменьшается еще в 1,5 раза. Таким образом,

$$W = \frac{Q^2}{2R} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{Q^2}{3R} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (\text{в СГС}),$$

$$W = \frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (\text{в СИ}).$$

в) Напряженность «лишних» полей увеличится в 2 раза. Излучаемая энергия пропорциональна квадрату напряженности. Поэтому мощность излучения увеличится в 4 раза.

1.9\*. а) См. рис. В момент времени  $t$  в точке  $A$  напряженность электрического поля излучения  $E_{\text{изл}} = E_1 + E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — напряженности излучений, генерируемых верхней и нижней пластинами:

$$E_1 = \frac{1}{2c} E v_{t - \frac{x}{c}} = \frac{1}{2c} E a \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

$$E_2 = -\frac{1}{2c} E v_{t - \frac{x+h}{c}} = -\frac{1}{2c} E a \left( t - \frac{x+h}{c} \right).$$

Значит,  $E_{\text{изл}} = ahE/2c$ .

б) Интерференцией излучения от разных пластин.  $v'_k = \frac{c}{d} k$ ,  $v''_k \approx \frac{c}{d} \left(k + \frac{1}{2}\right)$ ,  $k$  — целое число.

в)  $E_{\text{изл}} = \mu_0 c i_0 / 2 = i_0 / 2 c \epsilon_0$ .

г) В электрическом поле волны  $E_0 \sin \omega t$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) скорость электронов  $v = \frac{eE_0}{m_e \omega} \cos \omega t$ . Амплитуда напряженности электрического поля

в волне, отраженной этими электронами,  $E_{\text{изл}} = \frac{eE_0}{m_e \omega} \frac{n_e e}{2c\epsilon_0}$ . Коэффициент отражения  $k = (E_{\text{изл}}/E_0)^2 = (n_e e^2 \Delta / 4\pi m_e \nu \epsilon_0 c)^2$ .

Можно также найти коэффициент отражения, определив, на сколько ослабится волна после прохождения пленки. В этом случае следует учесть вторичное излучение электронов, вызываемое взаимодействием с волной, уже излученной этими же электронами из-за взаимодействия с падающей волной. Из-за наложения на волну, прошедшую пленку, вторичного излучения, идущего в противофазе, интенсивность волны уменьшается, а из-за наложения на нее первичного излучения, идущего со сдвигом фазы  $\pi/2$ , увеличивается. Первое влияние в два раза больше второго. Поэтому интенсивность волны после прохождения пленки уменьшится на величину, равную интенсивности отраженной волны.

1.10.  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  см.

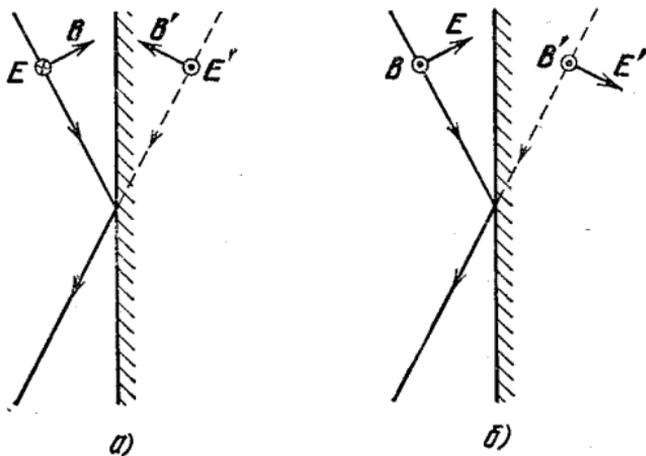
1.11. До точки  $x_1$  в отражении волн участвуют все электроны пленки. В области  $x > x_2$  электромагнитные волны отражаются практически полностью «поверхностными» электронами.

1.12. а)  $\Delta \approx 4\pi m_e \nu \epsilon_0 c / n_e e^2$ . б)  $\Delta \approx 10^{-5}$  см.

1.13. а)  $E = 0$ ,  $B = 2E/c$ . б\*)  $P = \epsilon_0 E^2$ .

1.14.  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  см,  $x = 2 \cdot 10^{-5}$  см.

1.15. См. рис. а)  $E' = -E$ ,  $|B'| = |B|$ ; б)  $|E'| = |E|$ .



К ответу 1.15,

$$1.16. E = \sqrt{P/\epsilon_0 \cos^2 \alpha}.$$

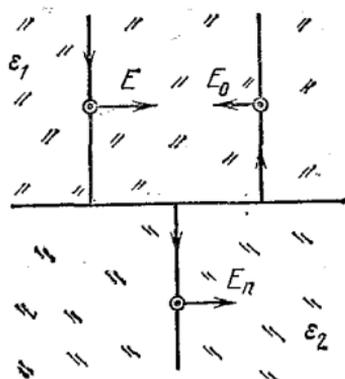
$$1.17*. \text{ а) } d \approx 10^{-4} \text{ см. б) } P_1 \approx 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ атм, } P_2 \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ атм.}$$

1.18\*. Сила, действующая на электрон вдоль металлической поверхности, равна в СГС  $F = e \left( E - \frac{v}{c} B \right) = 0$ . Поэтому  $E/B = v/c$ .

$$1.19*. P = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \frac{c+v}{c-v}.$$

$$1.20. v = \Delta c / (2v_0 + \Delta).$$

1.21. а) Наведенные заряды на плоской границе создают напряженность электрического поля, перпендикулярную плоской границе.

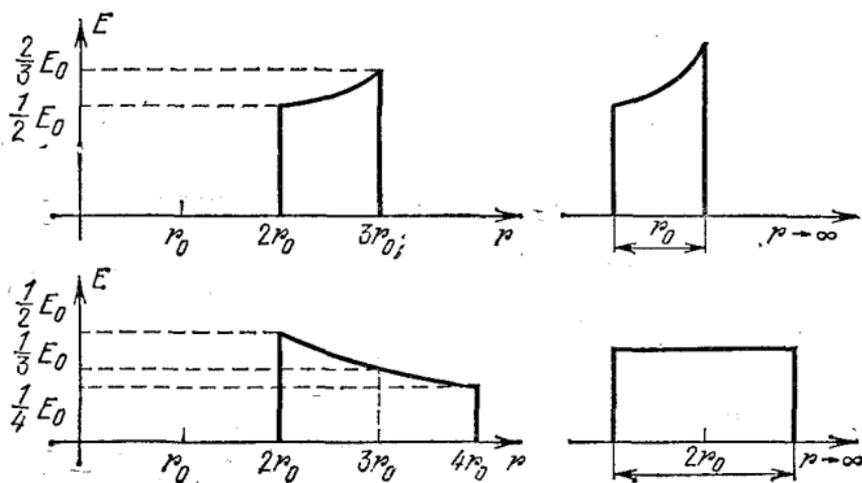


Поэтому в  $\epsilon$  раз уменьшается лишь перпендикулярная составляющая напряженности электрического поля волны.

б) Наведенные поверхностные токи создают индукцию магнитного поля, параллельную поверхности. Поэтому в  $\mu$  раз увеличивается лишь параллельная составляющая индукции магнитного поля волны.

1.22. С разных сторон границы раздела напряженность электрического поля и индукция магнитного поля одинаковы:  $E - E_0 = E_n$ ,  $B + B_0 = B_n$ , а  $B = E/c \sqrt{\epsilon_1}$ ,  $B_0 = E_0/c \sqrt{\epsilon_1}$ ,  $B_n = E_n/c \sqrt{\epsilon_2}$

(см. задачу 1.66\*). Из этих уравнений следует  $E_0 = ( \sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} ) / ( \sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} ) E$ . При  $\sqrt{\epsilon_1} < \sqrt{\epsilon_2}$  знаки  $E_0$  и  $E$  одинаковы, а при  $\sqrt{\epsilon_1} > \sqrt{\epsilon_2}$  противоположны. Это означает, что в первом



К ответу 1,236.

случае фаза отраженной волны не меняется, а во втором случае меняется на  $\pi$ .

1.23. б) См. рис.  $W_1 = \frac{7}{3} E_0^2 r_0^3$ ,  $W_2 = 2E_0^2 r_0^3$ .

## § 12.2. Распространение электромагнитных волн

2.2. Длина волны и скорость волны уменьшаются в  $n$  раз, частота не меняется.

2.4.  $\sin \alpha_k = k\lambda/b$ , где  $k$  — целое число.

2.5. В  $k^2$  раз.

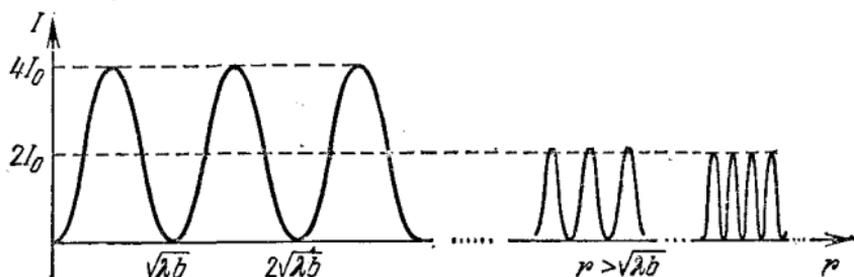
2.6.  $\Delta\alpha = 13,5'$ .

2.7.  $l = 2r^2/\lambda$ .

2.8. Увеличится интенсивность излучения в других точках.

2.9\*. В 4 раза.

2.10. См. рис.



К ответу 2.10,

2.11\*. а) В 100 раз. б) В 324 раза.

2.12\*.  $c_1 = \frac{i}{\lambda}$ ,  $a = \frac{A \Delta S}{r \lambda} i$  (умножение на  $i$  означает сдвиг фазы вторичной волны на  $\pi/2$ ).

2.13. а)  $R \approx 1$  км. б)  $R \approx 1,5$  м.

2.14.  $\sim 1$  м;  $\sim 0,5$  км;  $\sim 150$  км.

2.15. а) Голубая часть спектра рассеивается на матовой поверхности сильнее. б) Из-за дифракционного «огибания» капелек тумана красным светом. в) Из-за флуктуации плотности атмосферного воздуха голубая часть спектра рассеивается сильнее.

## Глава 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

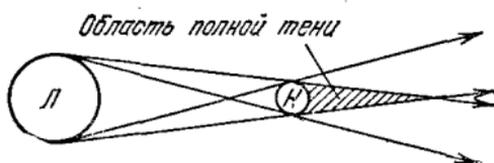
### § 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света

1.1. См. рис.

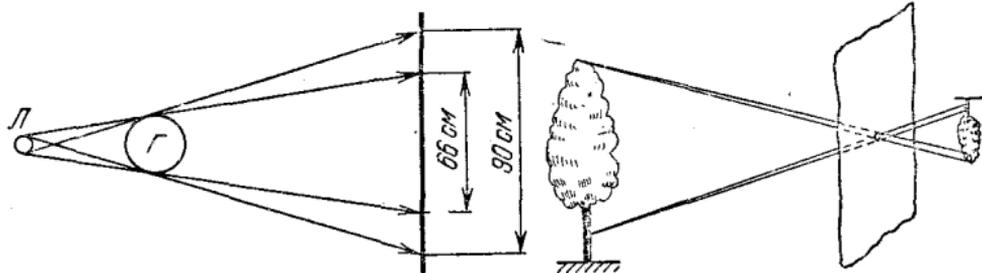
1.2. См. рис.  $d_1 = 60$  см,  $d_2 = 90$  см,

1.3. См. рис.

1.4. На стене получается изображение Солнца. В случае, когда размер отверстия будет больше изображения Солнца на стене,



К ответу 1.1.



К ответу 1.2.

К ответу 1.3.

1.5. Зеркало не «переворачивает» изображение. Но непрозрачный предмет кажется нам перевернутым справа налево, так как обычно отраженную зеркалом сторону мы увидим только в случае, если предмет развернуть на  $180^\circ$ .

1.6. В результате двойного отражения «переворачивается» изображение, получаемое от зеркал.

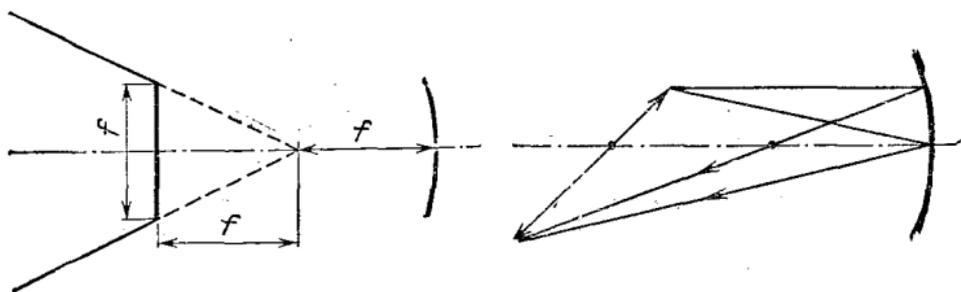
1.7.  $f = R/2$ .

1.8.  $l = 20$  см.

1.9.  $f = 36$  см.

1.10.  $f = 60$  см.

1.11. См. рис.



К ответу 1.11.

К ответу 1.12,

1.12. См. рис.

1.14\*. Параболоид вращения.

1.15. а)  $v = 2\omega R$ ; б\*)  $v = 4\omega R$ .

1.16\*.  $\alpha = 120^\circ$ ,

## § 13.2. Преломление света. Оптические линзы

2.1.  $\alpha = 42^\circ$ .

2.2\*. а)  $h = 2,66$  м. б) При малой глубине погружения кажущаяся скорость в 1,33 раза меньше истинной (1,33 — показатель преломления воды).

2.3. Сместится на  $2h(1 - 1/h)$  по направлению к плоскости зеркала.

2.4. 
$$\Delta = (d + h) \operatorname{tg} \alpha - \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{h \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

2.5.  $n = 1,13$ .

2.6. а)  $\alpha_a = 25^\circ$ ,  $\alpha_b = 45^\circ$ ,  $\alpha_{ав} = 33^\circ$ . б) Из-за полного внутреннего отражения лучей от пузырей.

2.7. а) Нет. б) Нет.

2.8.  $\sin \alpha = n/k^{N-1}$ .

2.9. в\*)  $f = (n - 1) R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

2.10. а)  $f = 0,25$  м. б)  $R = 0,6$  м.

2.11.  $R = 0,35$  м.

2.12.  $\Delta = \alpha (n_1 - n_2) f$ .

2.13\*. Из части боковой поверхности полуцилиндра, ограниченной углом  $\alpha = 2 \arcsin(1/n)$ .

2.14\*.  $n = 4/3$ .

2.15.  $n = 3/2$ .

2.16.  $y = x/n$ .

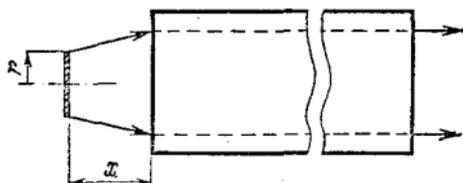
2.17\*.  $r' = r/n$ .

2.18\*.  $n = R/(R - l)$ .

2.19\*.  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{\alpha} - R \right)$ .

2.20.  $r = R/2$ .

2.21. При  $\alpha > \arccos(2/3)$  свет уже при первом отражении частично выйдет из конуса. При  $\alpha < \arccos(2/3)$  сначала будет полное внутреннее отражение от боковой поверхности. Затем через несколько отражений угол падения увеличится и свет будет отражаться от боковой поверхности лишь частично.



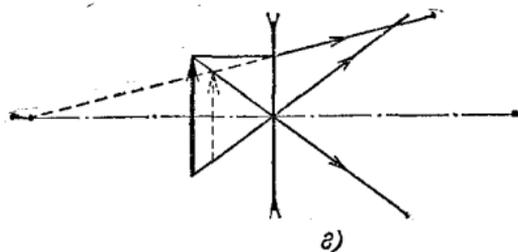
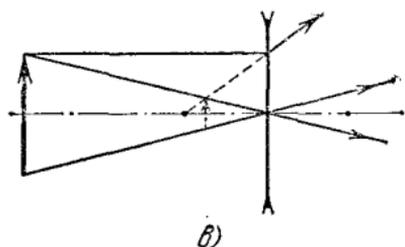
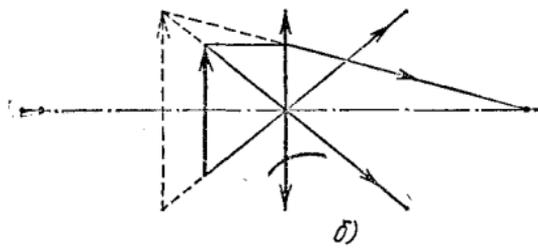
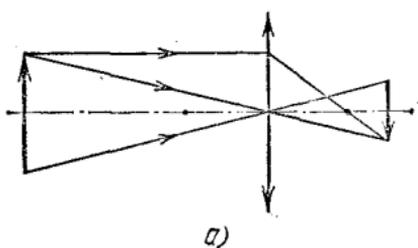
К ответу 2.22

2.22. См. рис.  $R = r + x \sqrt{(n^2 - 1)/(2 - n^2)}$ , если  $n < \sqrt{2}$ . Нет изображения, если  $n > \sqrt{2}$ .

### § 13.3. Оптические системы

3.1. См. рис. а)  $k=1/2$ ; б)  $k=3/2$ ; в)  $k=1/4$ ; г)  $k=3/4$ .

3.2.  $f=20$  см.



К ответу 3.1.

3.3. а)  $f_1 = -5$  дптр,  $f_2 = +1$  дптр. б) Очень близорукий.

3.4.  $l = 2f$ .

3.5.  $f = 1/7$  м.

3.6.  $t = 5$  мс.

3.7.  $h = (D - d)/3$ .

3.8.  $l = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + D/2} f$ .

3.9.  $k = \frac{f^2}{(a-f)^2 - l^2/4}$ ;  $k \approx \left(\frac{f}{a-f}\right)^2$  при  $l \rightarrow 0$ .

3.10\*.  $\text{tg } \alpha' = (1 - a/f) \text{tg } \alpha$ .

3.11. а)  $l = f \frac{a-2f}{a-f}$ ; б)  $f' = \frac{1}{2} f$ .

3.12.  $f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$ ;  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ ;  $f'' = \frac{f_1 f_2}{f_1 - f_2}$ .

3.13.  $f_1 = f \frac{n_0 - 1}{2n_0 - n}$ ;  $f_2 = f \frac{n_0 - 1}{n_0 - n}$ .

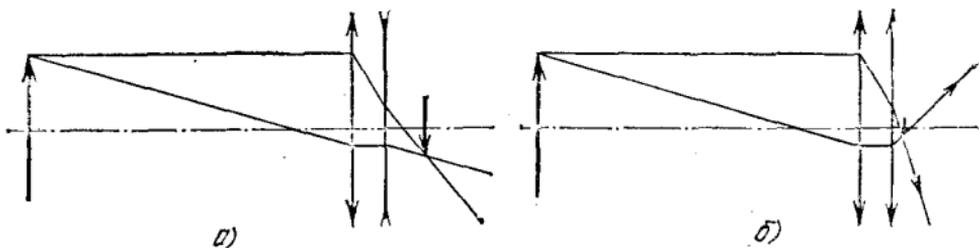
3.14. См. рис.

3.15.  $f = \frac{l^2 - 2f_1 f_2}{2(l - f_1 - f_2)}$ .

3.16. На расстояниях, больших 20 см от ближайшей линзы.

3.17.  $f > 0,3$  м.

3.18.  $l = \sqrt{49f^2 + a^2}/2$ .



К ответу 3.14.

3.19. а)  $l = f \sqrt{(3 + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha)^2}$ ;

б)  $l = f + a + f / \cos \alpha$ .

### § 13.4. Фотометрия

4.1.  $h = 1$  м,  $N = 20$  Вт.

4.2. Увеличится в 9 раз.

4.3.  $I_1 = 130$  лк,  $I_2 = 71$  лк,  $I_3 = 25$  лк.

4.4.  $I = 41$  лк.

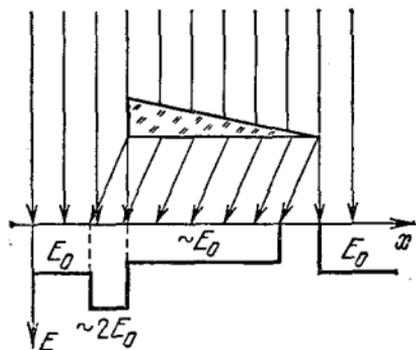
4.5\*. Показания фотодетектора в первом случае уменьшились из-за отражения света от пластинки. Во втором случае более сильным эффектом является смещение изображения лампы к фотодетектору, которое и приводит к увеличению светового потока в фотодетектор.

4.6\*.  $n = (2 \sqrt[3]{2R^2r/d})^2$ , если  $d > 2 \sqrt[3]{2R^2r}$ ;  $n = 1$ , если  $d < 2 \sqrt[3]{2R^2r}$ .

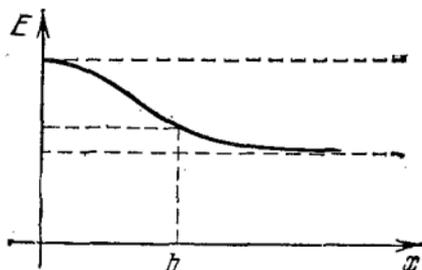
4.7. Около 1 м.

4.8\*. Нет.  $I \approx I_0 S / \pi R^2$ .

4.9. См. рис.



К ответу 4.9.



К ответу 4.14.

4.10. Уменьшается яркость и увеличивается четкость изображения.

4.11\*. Увеличить на 1/10 диаметра.

4.12. Яркость изображения уменьшится: верхней части стрелки — несколько больше чем в 2 раза, нижней — несколько меньше чем в 2 раза,

4.13. Не изменится.

4.14. См. рис.

4.15. В 80 000 раз.

4.16.  $n = hR^2/4 (l^2 + h^2)^{3/2}$ .

4.17.  $I' = \frac{1-k}{1+k} I$ .

4.18\*. В 25 раз.

4.19.  $L = L_0 D/D_0$ .

4.20. Увеличится в 2 раза.

4.21. Резко увеличивается световой поток энергии от звезды к глазу.

4.22\*.  $n \approx (10 \text{ лр}^2 L)^{-1}$ .

4.23\*.  $m = 0,2 \text{ г}$ .

4.24. В 8 раз.

### § 13.5. Квантовая природа света

5.1. С точностью  $\pm 8^\circ$ .

5.2.  $l = 4 \text{ м}$ .

5.3.  $I = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Вт/м}^2$ ,  $I = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$ ,  $I = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$ .

5.4.  $W = h\nu - eU_0$ .

5.5. Если скорости электрона и позитрона равны по модулю и противоположно направлены,  $\nu = 1,24 \cdot 10^{20} \text{ Гц}$ .

5.6. а)  $v = c \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ ; б)  $v = c \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}$ .

5.7. а)  $m = (1 - \cos \theta) \frac{h\nu^2}{c^2 \Delta v}$ ; б)  $\Delta v = (1 - \cos \theta) \frac{h\nu}{m_e c^2}$ .

5.8\*. а) При излучении фотона в направлении движения атома

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v - \Delta v)^2}{2} + h\nu + \varepsilon, \quad mv = m(v - \Delta v) + \frac{h\nu}{c}. \quad (1)$$

При излучении фотона в направлении, противоположном движению атома,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v + \Delta'v)^2}{2} + h\nu' + \varepsilon, \quad mv = m(v + \Delta'v) - \frac{h\nu'}{c}. \quad (2)$$

В (1) и (2)  $m$  — масса атома,  $\Delta v$  и  $\Delta'v$  — изменения скорости,  $\varepsilon$  — изменение внутренней энергии атома,  $\nu'$  — искомая частота фотона.

При  $\Delta v, \Delta'v \ll v$  из (1) и (2) следует  $\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c}$ .

б)  $\nu' = \nu(1 - v/c)$ .

5.9. Притяжением фотона к звезде.

5.10.  $\Delta v = \gamma v M/Rc^2$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.  $\Delta v_C \approx 10^3 \text{ Гц}$ .

Тепловое движение атомов на поверхности Солнца влияет на частоту излучаемых фотонов больше, чем гравитационное поле.

5.11.  $R < \gamma M/c^2$ ;  $R_C \approx 1,5 \text{ км}$ .

5.12\*.  $f = (Rc)^2/6\gamma M$ ;  $f \approx 5 \cdot 10^9 \text{ св. лет}$ ;  $x \approx 10^{10} \text{ св. лет}$ .

1. Единицы и размерности физических величин в СИ и их связь с единицами СГС

Величина		Единица			
Наименование	Обозначение *)	Размерность **)	Наименование	Обозначение	Содержит ед. СГС
<b>Основные единицы</b>					
Длина	$l$	м	метр	м	$10^2$ см
Масса	$m$	кг	килограмм	кг	$10^3$ г
Время	$t$	с	секунда	с	1
Сила электрического тока	$I$	А	ампер	А	$3 \cdot 10^9$ СГС
Термодинамическая температура	$T$	К	кельвин	К	1
Количество вещества	$\nu$	моль	моль	моль	1
Сила света	$J$	кд (лм/ср)	кандела	кд	1
<b>Дополнительные единицы</b>					
Плоский угол	$\alpha$	—	радиан	рад	1
Телесный угол	$\omega$	—	стерадиан	ср	1
<b>Производные единицы</b>					
<b>Пр о с т р а н с т в о и в р е м я</b>					
Площадь	$S = lb$	$m^2$	квадратный метр	$m^2$	$10^4$ см <sup>2</sup>
Объем	$V = lbh$	$m^3$	кубический метр	$m^3$	$10^6$ см <sup>3</sup>
Скорость	$v = s/t$	$m \cdot c^{-1}$	метр в секунду	м/с	$10^2$ см/с
Ускорение	$a = v/t$	$m \cdot c^{-2}$	метр на секунду в квадрате	м/с <sup>2</sup>	$10^2$ см/с <sup>2</sup>
Угловая скорость	$\omega = \alpha/t$	$c^{-1}$	радиан в секунду	рад/с	1
Угловое ускорение	$\varepsilon = \omega/t$	$c^{-2}$	радиан на секунду в квадрате	рад/с <sup>2</sup>	1
Частота вращения	$n = 1/T$	$c^{-1}$	секунда в минус первой степени	$c^{-1}$	1
Частота (периодического процесса)	$\nu = 1/T$	$c^{-1}$	герц	Гц	1

Величина		Единица			
Наименование	Обозначение *)	Размерность **)	Наименование	Обозначение	Содержит ед. СГС
<b>Механические величины</b>					
Плотность	$\rho = m/V$	$M^{-3} \cdot K$	килограмм на кубический метр	кг/м <sup>3</sup>	$10^{-8} \text{ г/см}^3$
Сила	$F = ma$	$M \cdot K \cdot C^{-2}$	ньютон	Н	$10^5 \text{ дин}$
Давление; напряжение (механическое)	$p = F/S;$ $\sigma = F/S$	$M^{-1} \cdot K \cdot C^{-2} (H/M^2)$	паскаль	Па	$10 \text{ дин/см}^2$
Момент силы	$M = Fr$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-2}$	ньютон-метр	Н·м	$10^7 \text{ дин}\cdot\text{см}$
Импульс силы	$I = Ft$	$M \cdot K \cdot C^{-1}$	ньютон-секунда	Н·с	$10^5 \text{ дин}\cdot\text{с}$
Импульс (количество движения)	$p = mv$	$M \cdot K \cdot C^{-1}$	килограмм-метр в секунду	кг·м/с	$10^8 \text{ г}\cdot\text{см/с}$
Момент импульса (момент количества движения)	$L = mvr = pr$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-1}$	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м <sup>2</sup> /с	$10^7 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}$
Момент инерции	$I = mr^2$	$M^2 \cdot K$	килограмм-метр в квадрате	кг·м <sup>2</sup>	$10^7 \text{ г}\cdot\text{см}^2$
Работа; энергия потенциальная; энергия кинетическая	$A = Fs$ $U = mgh$ $K = mv^2/2$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-2} (H \cdot M)$	джоуль	Дж	$10^7 \text{ эрг}$
Мощность	$N = A/t$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-3} (\text{Дж/с})$	ватт	Вт	$10^7 \text{ эрг/с}$
Жесткость; поверхностное натяжение	$k = F/\Delta l$ $\sigma = F/l$	$K \cdot C^{-2}$	ньютон на метр	Н/м	$10^3 \text{ дин/с}$
Вязкость (динамическая)	$\mu = F\Delta l/Sv$	$M^{-1} \cdot K \cdot C^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	10 П
<b>Акустические величины</b>					
Звуковое давление	$p = F/S$	$M^{-1} \cdot K \cdot C^{-2} (H/M^2)$	паскаль	Па	$10 \text{ дин/см}^2$
Звуковая энергия	$W$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-2}$	джоуль	Дж	$10^7 \text{ эрг}$
Звуковая мощность (поток звуковой энергии)	$P = W/t$	$M^2 \cdot K \cdot C^{-3} (\text{Дж/с})$	ватт	Вт	$10^7 \text{ эрг/с}$
Интенсивность звука (плотность потока звуковой энергии)	$I = P/S$	$K \cdot C^{-8}$	ватт на квадратный метр	Вт/м <sup>2</sup>	$10^8 \text{ эрг/(с}\cdot\text{см}^2)$

Тепловые величины

Количество теплоты; внутренняя энергия	$Q = A$ $U$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-2}$	Джоуль	Дж	$10^7$ эрг
Удельная энергия сгорания;	$q = Q/m$	$M^2 \cdot C^{-2}$	джоуль на килограмм	Дж/кг	$10^4$ эрг/г
парообразования;	$r = Q/m$				
плавления	$\lambda = Q/m$				
Теплоемкость	$C = Q/\Delta T$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-2} \cdot K^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	$10^7$ эрг/К
Удельная теплоемкость	$c = C/m$	$M^2 \cdot C^{-2} \cdot K^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	$10^4$ эрг/(г·К)
Тепловой поток	$\Phi = Q/t$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-3}$	ватт	Вт	$10^7$ эрг/с
Плотность теплового потока	$I = \Phi/S$	$KГ \cdot C^{-3}$	ватт на квадратный метр	Вт/м <sup>2</sup>	$10^9$ эрг/(с·см <sup>2</sup> )
Теплопроводность	$\lambda = l/t$	$M \cdot KГ \cdot C^{-8} \cdot K^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)	$10^9$ эрг/(с·см·К)
Коэффициент диффузии	$D$	$M^2 \cdot C^{-1}$	квадратный метр на секунду	м <sup>2</sup> /с	$10^4$ см <sup>2</sup> /с
Температурный коэффициент давления	$\beta = \Delta p/p_0 \Delta T$	$K^{-1}$	кельвин в минус первой степени	К <sup>-1</sup>	1
линейного расширения	$\alpha = \Delta l/l_0 \Delta T$				
объемного расширения	$\beta = \Delta V/V_0 \Delta T$				

Величины, выражаемые через количество вещества

Молярная масса	$M = m/\nu$	$KГ \cdot MOЛЬ^{-1}$	килограмм на моль	кг/моль	$10^3$ г/моль
Молярный объем	$V_m = V/\nu$	$M^3 \cdot MOЛЬ^{-1}$	кубический метр на моль	м <sup>3</sup> /моль	$10^6$ см <sup>3</sup> /моль
Молярная внутренняя энергия	$U_m = U/\nu$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-2} \cdot MOЛЬ^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	$10^7$ эрг/моль
Молярная теплоемкость	$C_m = C/\nu$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-2} \cdot K^{-1} \cdot MOЛЬ^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль·К)	$10^7$ эрг/(моль·К)
Количество электричества;	$Q = It$	$C \cdot A$	кулон	Кл	$3 \cdot 10^9$ СГС
электрический заряд					
Поток электрического смещения (электрический поток)	$\Psi$				

Электрические и магнитные величины

Величина		Единица			
Наименование	Обозначение *)	Размерность **)	Наименование	Обозначение	Содержит ед. СГС
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = Q/S$	$M^{-2} \cdot C \cdot A$	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>	$3 \cdot 10^5$ СГС
Электрическое смещение	$D$				
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = Q/V$	$M^{-3} \cdot C \cdot A$	кулон на кубический метр	Кл/м <sup>3</sup>	$3 \cdot 10^8$ СГС
Плотность электрического тока	$j = I/S$	$M^{-2} \cdot A$	ампер на квадратный метр	А/м <sup>2</sup>	$3 \cdot 10^8$ СГС
Электрическое напряжение;	$U$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-3} \cdot A^{-1}$ (Вт/А)	вольт	В	$3,34 \cdot 10^{-9}$ СГС
электрический потенциал;	$V = A/Q$				
разность электрических потенциалов;	$U = V_1 - V_2$				
электродвижущая сила	$\mathcal{E}$				
Напряженность электрического поля	$E = U/l$	$M \cdot KГ \cdot C^{-3} \cdot A^{-1}$	вольт на метр	В/м	$3,34 \cdot 10^{-6}$ СГС
Электрическая емкость	$C = Q/U$	$M^{-2} \cdot KГ^{-1} \cdot C^4 \cdot A^2$ (Кл/В)	фарад	Ф	$8,99 \cdot 10^{11}$ СГС (см)
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\epsilon = D/E$	$M^{-3} \cdot KГ^{-1} \cdot C^4 \cdot A^2$	фарад на метр	Ф/м	$1,13 \cdot 10^{11}$ СГС
Электрическое сопротивление	$R = U/I$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-3} \cdot A^{-2}$ (В/А)	ом	Ом	$1,11 \cdot 10^{-12}$ СГС
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = RS/l$	$M^3 \cdot KГ \cdot C^{-3} \cdot A^{-2}$	ом-метр	Ом·м	$1,11 \cdot 10^{-10}$ СГС
Электрическая проводимость	$G = 1/R$	$M^{-2} \cdot KГ^{-1} \cdot C^3 \cdot A^2$ (А/В)	сименс	См	$8,99 \cdot 10^{11}$ СГС
Удельная электрическая проводимость	$g = 1/\rho$	$M^{-3} \cdot KГ^{-1} \cdot C^3 \cdot A^2$	сименс на метр	См/м	$8,99 \cdot 10^9$ СГС
Магнитный поток	$\Phi$	$M^2 \cdot KГ \cdot C^{-2} \cdot A^{-1}$ (В·с)	вебер	Вб	$10^8$ Макс

Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$B = \Phi/S$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1} (\text{Вб}/\text{м}^2)$	тесла	Тл	$10^3 \text{ Гс}$
Напряженность магнитного поля	$H = I/nl$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$	ампер на метр	А/м	$1,26 \cdot 10^{-3} \text{ Э}$
Индуктивность	$L = \Phi/I$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} (\text{Вб}/\text{А})$	генри	Гн	$10^9 \text{ СГС}$
Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu = B/H$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$	генри на метр	Гн/м	$7,96 \cdot 10^9 \text{ СГС}$
Электромагнитная энергия	$W$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	джоуль	Дж	$10^7 \text{ эрг}$
Активная мощность	$P$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$	ватт	Вт	$10^7 \text{ эрг/с}$
Длинные и световые величины оптического излучения					
Лучистая энергия (энергия излучения)	$W$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	джоуль	Дж	$10^7 \text{ эрг}$
Лучистый поток (мощность излучения)	$P = W/t$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$	ватт	Вт	$10^7 \text{ эрг/с}$
Плотность лучистого потока (интенсивность излучения)	$I = W/St$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$	ватт на квадратный метр	Вт/м <sup>2</sup>	$10^3 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$
Энергетическая сила света	$J_e = P/\omega$	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1}$	ватт на стераднан	Вт/ср	$10^7 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{ср})$
Энергетическая освещенность	$E_e = P/S$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$	ватт на квадратный метр	Вт/м <sup>2</sup>	$10^8 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$
Энергетическая яркость	$B_e = J_e/S$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1}$	ватт на стерадиан-квадратный метр	Вт/(ср·м <sup>2</sup> )	$10^3 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{см}^2)$
Световая энергия	$Q = \Phi t$	$\text{с} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$	люмен-секунда	лм·с	1
Световой поток	$\Phi = J\omega$	$\text{кд} \cdot \text{ср}$	люмен	лм	1
Освещенность	$E = \Phi/S$	$\text{м}^2 \cdot \text{кд} \cdot \text{ср} (\text{лм}/\text{м}^2)$	люкс	лк	$10^{-9} \text{ фот}$
Яркость	$B = J/S$	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд}$	кандела на квадратный метр	кд/м <sup>2</sup>	$10^{-4} \text{ сб}$

\*) Для производных единиц приведены определяющие формулы.

\*\*) Выражение через основные и другие производные единицы СИ.

## II. Приставки СИ для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка СИ		Множитель	Приставка СИ	
	наименование	обозначение		наименование	обозначение
	<i>Кратная</i>			<i>Дольная</i>	
$10^{18}$	экса	Э	$10^{-1}$	деци	д
$10^{15}$	пета	П	$10^{-2}$	санти	с
$10^{12}$	тера	Т	$10^{-3}$	милли	м
$10^9$	гига	Г	$10^{-6}$	микро	мк
$10^6$	мега	М	$10^{-9}$	нано	н
$10^3$	кило	к	$10^{-12}$	пико	п
$10^2$	гекто	г	$10^{-15}$	фемто	ф
$10^1$	дека	да	$10^{-18}$	атто	а

## III. Основные формулы электромагнетизма в СИ и СГС

Наименование	СИ	СГС
Закон Кулона (сила взаимодействия между зарядами)	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Сила, действующая на заряд в электрическом поле	$F = qE$	
Связь между напряженностью электрического поля и смещением	$D = \epsilon_0 \epsilon E$	$D = \epsilon E$
Напряженность электрического поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
Поток напряженности электрического поля через поверхность	$N = \sum E_n \Delta S$	
Работа перемещения заряда в электрическом поле	$A = qU$	
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{q}{r}$

Наименование	СИ	СГС
Электрическая емкость		$C = q/U$
Емкость плоского конденсатора с диэлектриком	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Плотность энергии электрического поля	$w_э = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$	$w_э = \frac{E^2}{8\pi}$
Закон Ома		$I = U/R$
Мощность электрического тока		$P = IU$
Закон Джоуля—Ленца		$Q = I^2 R t$
Магнитный поток		$\Phi = BS$
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме	$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 l}{r}$	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2 l}{r}$
Закон Био—Савара—Лапласа	$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}$	$\Delta B = \frac{1}{c} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}$
Индукция магнитного поля прямого тока	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$	$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}$
Индукция магнитного поля в соленоиде	$B = \mu_0 I n$	$B = \frac{4\pi}{c} I n$
Поток магнитной индукции		$\Phi = \sum B_n \Delta S$
Закон Ампера	$F = IB \Delta l \sin \alpha$	$F = \frac{1}{c} IB \Delta l \sin \alpha$
Сила Лоренца	$F = qvB \sin \alpha$	$F = \frac{1}{c} qvB \sin \alpha$
Закон электромагнитной индукции	$\mathcal{E}_E = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	$\mathcal{E}_E = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}$
Связь переменного электрического поля с магнитным	$\mathcal{E}_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\mathcal{E}_B = \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt}$
Индуктивность		$L = \frac{U}{dI/dt}$
Плотность энергии магнитного поля	$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$	$w_m = \frac{B^2}{8\pi}$
Формула Томсона		$T = 2\pi \sqrt{LC}$
Реактивное сопротивление		$R_{LC} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

*Воробьев Иван Игнатьевич,  
Зубков Павел Иванович,  
Кутузова Галина Александровна,  
Савченко Оливер Яковлевич,  
Трубачев Анатолий Михайлович,  
Харитонов Владимир Григорьевич*

## **ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ**

Под редакцией *О. Я. Савченко*