KLEYN-FOK-QORDON TƏNLİYİNİN HÜLTEN VƏ YUKAVA SİNİF POTENSİALLARIN XƏTTİ KOMBİNASİYASI ÜÇÜN ANALİTİK HƏLLİ

M.V. QOCAYEVA
Azərbaycan Respublikası Elm Və Təhsil Nazirliyi Fizika İnstitutu, Azərbaycan Respublikası Bakı şəhəri, H.Cavid pr.,131, AZ-1073
mefkureqocayeva@yahoo.com

Bu işdə Hülten potensialı və Yukava sinfi potensialı üçün modifikasiya olunmuş Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin bağlı hallar üçün həlli tapılmışdır. İstənilən orbital kvant ədədi üçün enerjinin məxsusi qiymətləri və müvafiq radial dalğa funksiyalarının analitik ifadələri alınmışdır. Alınan xüsusi funksiyalar hiperhəndəsi funksiyalar ilə ifadə edilir. Biz potensialın mərkəzdənqaçma hissəsinin çətinliklərini aradan qaldırmaq üçün unikal yaxınlaşma sxemini tətbiq edilmişdir. Potensial parametrlərdən asılı olaraq enerji səviyyələrinin və məxsusi funksiyaların ifadələri göstərilmişdir.

Açar sözlər: Kleyn-Fok-Qordon tənliyi, Hülten potensialı, Yukava potensialı, Nikiforov-Uvarov metodu.

1. Giriş

Kvant mexanikası uzun müddət inkişaf edərək fizikanın ayrıca bir sahəsinə çevrilmişdir. Fiziki potensiallar üçün dəqiq həll oluna bilən məsələləri həll etmək olduqca vacibdir[1–2].

Relyativistik və qeyri-relyativistik kvant mexanikası çərçivəsində nüvə və elementar zərrəciklər fizikası, həmçinin atom və molekul fizikası sahəsindəki tədqiqatlarda potensial modellər həmişə mühüm hətta təməl rol oynayır. Potensial modellərdə mikroobyektlərin fiziki xassələri müxtəlif dalğa tənliklərindən istifadə etməklə təsvir və şərh olunur, məsələn, Şredinger, Kleyn-Fok-Qordon, sonlu fərq tənlikləri və Dirak tənliyi kimi [1-2]. Bu zaman dəqiq və ya fenomenoloji olaraq təqdim edilmiş qarşılıqlı təsir potensiallarından istifadə edilir. Bu tip potensiallar çoxdur. Həm relyastivistik həm də qeyri-relyastivistik oblastlarda geniş istifadə olunan ən məşhur potensiallar Morse, Eskart, Manning-Rosen, Hülten, Vud-Sakson, Makarova, Yukava və s. potensiallarıdır [3-10].

Potensial modelin əhəmiyyəti, ilk növbədə, onun nəzərdən keçirilən fiziki sistemin müəyyən xassələrini nə dərəcədə yaxşı təsvir etməsi ilə müəyyən edilir. Modelin başqa bir cəhəti onun dəqiq həll oluna bilməsidir.

Şredinger, Kleyn-Fok-Qordon və Dirak tənliklərinin həlli kvant mexanikasında mühüm əhəmiyyət kəsb edir, çünki nəticədə əldə olunan dalğa funksiyası kvant sistemlərinin tam təsviri üçün vacib məlumatlar verir. Az sayda potensial var ki, hər hansı radial və orbital kvant ədədləri üçün KFQ tənliyi dəqiq həll oluna bilir [11-20]. Məlumdur ki, kvant sistemləri müxtəlif metodlarla araşdırılır, o cümlədən supersimmetriya, faktorizasiya metodu, laplas çevrilməsindən istifadə etməklə yaxınlaşma, trayektoriya üzrə inteqral və Nikiforov-Uvarov (NU) metodu. Sadalanan üsullar işlənib hazırlanmış və kvant dalğa tənliyinin həllinə yönəlmişdir [11-20].

Hülten, Mors, Manning-Rosen, Vud-Sakson, Eskart, Rosen-Mors da daxil olmaqla bir çox eksponensial tip potensiallar $l \neq 0$ halı üçün yaxınlaşma tətbiq edilərək tədqiq edilmiş, əlaqəli hallar üçün bəzi anailitik həllər əldə edilmişdir [11-20].

Bu işdə Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Hülten potensialı və Yukava sinif potensialının xətti kombinasiyası üçün orbital kvant ədədinin ixtiyari sıfırdan fərqli ($l \neq 0$) qiymətləri üçün Nikiforov-Uvarov metodunun köməyilə analitik həll edilmişdir.

2. Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin əlaqəli hallarda Hülten və Yukava tip potensialların cəmi üçün analitik həlli

$S(r)$ skalyar və $V(r)$ vektorial potensialları üçün sferik koordinat sistemində KFQ tənliyi ($\hbar = c = 1$) atom ədədləri üçün belə təyin olunur:

$$\left[-\nabla^2 + (M + S(r))^2\right]\psi(r,\theta,\varphi) = [E - V(r)]^2\,\psi(r,\theta,\varphi), \tag{1}$$

burada $M-$ skalyar hissəciyin sükunət kütləsidir, $E-$ hissəciyin relyastivistik enerjisidir. (1) tənliyindəki $\psi(r,\theta,\phi)$ dalğa funksiyası sferik koordinat sistemində aşağıdakı formada təqdim olunur:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{2}$$

burada $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ sferik harmonik funksiyadır.

(2) funksiyasını (1) tənliyində əvəzləməklə, radial KFQ tənliyini növbəti formada yazmaq olar:

$$\chi''(r) + \left[E^2 - M^2 - 2\big(MS(r) + EV(r)\big) + \big(V^2(r) - S^2(r)\big) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\chi(s) = 0. \tag{3}$$

131, H.Javid ave, AZ-1073, Baku
Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

Bizim bu işdə əsas məqsədimiz Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə edərək əlaqəli hallarda Hülten və Yukava tip potensialların xətti kombinasiyası üçün (1) tənliyinin analitik həllərini tapmaqdan ibarətdir.

Hülten potensialından atom və molekulyar fizika, kondensə olunmuş maddə və elementar hissəciklər fizikası, nüvə fizikası kimi müxtəlif tədqiqat sahələrində istifadə olunur. Bu potensial altındakı bir hissəcik üçün kvant effektləri əhəmiyyətli hal ala bilir, xüsusilə güclü əlaqə ilə.

Hülten potensialı aşağıdakı kimi təyin olunur: [6,7]:

$$V(r) = -\frac{Ze^2\delta e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}. \tag{4}$$

Burada δ - ekranlaşma parametri, Z - isə atomun Mendeleyev cədvəlindəki sıra nömrəsidir.

Hülten potensialı fizikada əhəmiyyətli qısa məsafəli potensiallardan biridir. Bu potensialdan nüvə fizikasında, elementar zərrəciklər fizikasında, atom fizikasında və bərk cisimlər fizikasında istifadə edilmişdir. Bu potensialın ümumi dalğa funksiyaları atom fizikası və bərk cisimlər fizikasının məsələlərində istifadə olunur. Bu potensial altındakı bir hissəcik üçün kvant effektləri əhəmiyyətli hal ala bilir, xüsusilə güclü əlaqə ilə. Hülten potensialı Eskart potensialının xüsusi halıdır [4]. Qeyd etmək lazımdır ki, Hülten potensialı üçün KFQ radial tənliyini yalnız bucaq momentinin $l = 0$ halında analitik yolla həll etmək olar. Hülten potensialı r radial kordinatın kiçik qiymətləri üçün özünü Kulon potensialı kimi, böyük qiymətləri üçün isə eksponensial olaraq azalır, ona görə də onun bağlı hal üçün təsiri Kulon potensialından azdır.

İkinci potensialımız Yukava tərəfindən təklif edilən [10], nuklonların güclü qarşılıqlı təsirini çox yaxşı təsvir edən effektiv qeyri-relyativistik Yukava potensialıdır. Yukava potensialı eksponensial amil səbəbi ilə $1/r$ – dən daha tez azalır.

Yukava sinif potensal aşağıdakı kimi təqdim edilə bilər:

$$V(r) = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{r} - \frac{V_0^{'} e^{-2\delta r}}{r^2} \tag{5}$$

burada $V_0, V_0^{'}$ - potensialın dərinliyini müəyyən edir.

Hülten və Yukava sinif potensialları ümumiləşdirmək üçün Yukava potensialının aşağıdakı formada unikal yaxınlaşmasını tətbiq edirik[22-24]:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{2\delta e^{-\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}. \tag{7}$$

Beləliklə Hülten və Yukava sinif potensialın cəmi aşağıdakı kimi təqdim oluna bilər:

$$V(r) = -\frac{2Ze^2\delta e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} - \frac{2\delta V_0 e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} - \frac{4\delta^2 V_0^{'} e^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} = -\frac{(A+B)e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} - \frac{Ce^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}, \tag{8}$$

burada

$$A = 2Ze^2\delta,\ B = 2\delta V_0,\ C = 4\delta^2 V_0^{'}. \tag{9}$$

Bu iki potensialın xətti kombinasiyası potensial sahədəki hissəcik üçün deformasiya olunmuş nüvə cütü və spin-orbital qarşılıqlı əlaqəsini öyrənmək üçün istifadə oluna bilər.

Bu potensialın digər əhəmiyyətli xüsusiyyəti onun hadronik sistem daxilindəki dalğaları təsvir edərkən istifadə olunmasıdır. Bundan başqa bu potensial digər fiziki hadisələr üçün də əlverişli model rolunu oynaya bilər. Potensialın xətti kombinasiyası üçün KFQ tənliyinin tədqiqindən dalğa funksiyaları və əlaqəli, diskret, eləcə də psevdoskalyar mezon sistemləri üçün enerjinin fiziki xassələri haqda daha dərin və dəqiq qiymətləndirmə əldə etmək mümkündür. Bu istiqamətdə araşdırmalara əsaslanaraq biz bu məqalədə Hülten və Yukava sinif potensialların xətti kombinasiyası üçün radial KFQ tənliyinin həllini təqdim edirik.

(8) potensialını (3) tənliyində əvəzləməklə radial KFQ tənliyi üçün alırıq:

$$\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - \frac{4\delta^2 l(l+1)e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} + 2(M+E)\frac{(A+B)e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} + 2(M+E)\frac{Ce^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}\right]\chi(r) = 0 \tag{10}$$

(10) tənliyindən aydın olur ki, $r \to 0$ yaxınlaşdıqda mərkəzəqaçma potensialının özünəməxsusluğu var. Bu tənlik $l = 0$ olduqda dəqiq həll olunur.

Hülten potensialının mərkəzəqaçma hissəsi və Yukava sinif potensialının cəmi üçün $l \neq 0$ olduqda analitik həll almaq üçün (7) ifadəsini (10)-də yerinə yazırıq. Nəticədə alırıq:

$$\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - \frac{4\delta^2 l(l+1)e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} + 2(M+E)\frac{(A+B)e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} + 2(M+E)\frac{Ce^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}\right]\chi(r) = 0 \tag{11}$$

(11) tənliyini Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə edərək həll etmək üçün onu aşağıdakı kimi hiperhəndəsi tip tənliyə gətirmək lazımdır [21]:

$$\chi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\chi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\chi(s)=0\,. \tag{12}$$

(11) tənliyini (12) şəklində hiperhəndəsi tip tənliyə gətirmək üçün $s=e^{-2\delta r}$ formasında yeni dəyişən daxil etməliyik

$$\frac{d}{dr}=\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}=-2\delta e^{-2\delta r}\frac{d}{ds}=-2\delta s\frac{d}{ds}\,,$$

$$\frac{d^2}{dr^2}=\left(\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}\right)=-2\delta s\frac{d}{ds}(-2\delta s\frac{d}{ds})=4\delta^2 s\left(\frac{d}{ds}+s\frac{d^2}{ds^2}\right)=4\delta^2 s\frac{d}{ds}+4\delta^2 s^2\frac{d^2}{ds^2}. \tag{13}$$

(13) -dəki yeni dəyişənləri (11) tənliyində nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$\frac{d^2\chi(s)}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{d\chi(s)}{ds}+\frac{1}{4\delta^2 s^2}\left[E^2-M^2-\frac{4\delta^2 l(l+1)s}{(1-s)^2}+2(M+E)\frac{(A+B)s}{1-s}+\frac{2(M+E)Cs^2}{(1-s)^2}\right]\chi(s)=0 \tag{14}$$

(14) diferensial tənliyini daha yığcam şəklə salmaq üçün aşağıdakı kimi əvəzləmələr daxil etməliyik:

$$-\varepsilon^2=\frac{E^2-M^2}{4\delta^2},\quad \alpha^2=\frac{(M+E)(A+B)}{2\delta^2},\quad \beta^2=\frac{(M+E)C}{2\delta^2}\,. \tag{15}$$

(15) də verilmiş ifadələri (14) də nəzərə alaraq alırıq:

$$\chi''(s)+\frac{1-s}{(1-s)s}\chi'(s)+\frac{1}{(1-s)^2s^2}\left[-\varepsilon^2(1-s)^2-l(l+1)s+\alpha^2 s(1-s)+\beta^2 s^2\right]\chi(s)=0 \tag{16}$$

Biz indi (16) tənliyini həll etmək üçün Nikiforov-Uvarov metodunu uğurla tətbiq edə bilərik.
(16) tənliyi ilə (12) tənliyini müqayisə etməklə $\tilde{\tau}(s)$, $\sigma(s)$ və $\tilde{\sigma}(s)$ üçün alarıq:

$$\sigma(s)=(1-s)s\,,\ \tilde{\tau}(s)=1-s\,,\quad \tilde{\sigma}(s)=-\varepsilon^2(1-s)^2-l(l+1)s+\alpha^2 s(1-s)+\beta^2 s^2\,. \tag{17}$$

$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)}$ - formulasından və (17) ifadəsindən istifadə edərək $\pi(s)$ funksiyası üçün alarıq:

$$\begin{aligned}\pi(s)&=\frac{\sigma(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2})^2-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)}=\\
&=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}+\varepsilon^2(1-s)^2+l(l+1)s-\alpha^2 s(1-s)-\beta^2 s+ks-ks^2}=\\
&=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}+\varepsilon^2 s^2-2\varepsilon^2 s+\varepsilon^2+\alpha^2 s^2-\alpha^2 s-\beta^2 s^2+ks-ks^2+l(l+1)s}=\\
&=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+\varepsilon^2+\alpha^2-\beta^2-k)s^2-(2\varepsilon^2+\alpha^2-l(l+1)-k)s+\varepsilon^2}=\\
&=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{(a-k)s^2-(b-k)s+c}\,,\end{aligned} \tag{18}$$

burada

$$a=\frac{1}{4}+\varepsilon^2+\alpha^2-\beta^2,\quad b=2\varepsilon^2+\alpha^2-l(l+1),\quad c=\varepsilon^2 \tag{19}$$

k parametrini (18) ifadəsindən aşağıdakı kimi tapmaq olar. (18) tənliyində kökaltı ifadənin diskriminantını sıfıra bərabər edərək tapırıq:

$$(a-k)s^2-(b-k)s+c=0\,, \tag{20}$$

$$D=(b-k)^2-4(a-k)c=k^2+(4c-2b)k+(b^2-4ac)\,,$$

$$k^2+(4c-2b)k+(b^2-4ac)=0\,, \tag{21}$$

$$k_{1,2}=(b-2c)\pm 2\sqrt{c^2+c(a-b)}\;.$$

(21) ifadəsini в (18)- da yazmaqla $\pi(s)$ funksiyası üçün alırıq:

$$\pi(s)=-\frac{s}{2}\pm\begin{cases}(\sqrt{c}-\sqrt{c+a-b})s-\sqrt{c}\,, \text{ для } \mathrm{k}=(\mathrm{b}-2\mathrm{c})+2\sqrt{\mathrm{c}^2+c(a-b)}\\ (\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})s-\sqrt{c}\,, \text{ для } \mathrm{k}=(\mathrm{b}-2\mathrm{c})-2\sqrt{\mathrm{c}^2+c(a-b)}\end{cases} \tag{22}$$

(21) ifadəsindən göründüyü kimi $\pi(s)$ çoxhədlisinin dörd mümkün qiyməti var, ancaq biz $\pi(s)$ funksiyasının elə qiymətlərini seçirik ki, $\tau(s)$ funksiyasının törəməsi mənfi olsun. Digər qiymətlərin fiziki mənası yoxdur.

Beləliklə, $\pi(s)$ və $\tau(s)$ funksiyaları müvafiq olaraq aşağıdakı kimi olur:

$$\pi(s)=\sqrt{c}-s\left[\frac{1}{2}+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right], \tag{23}$$

$$\pi'(s)=-\frac{1}{2}-\left[\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right], \tag{24}$$

$$k=(b-2c)-2\sqrt{c^2+c(a-b)}\;, \tag{25}$$

$$\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s)=(1-s)+2\pi(s)=1-\left[2+2\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right]s+2\sqrt{c}\;,$$

$$\tau'(s)=-\left[2+2(\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})\right]. \tag{26}$$

Enerjinin məxsusi qiymətləri adətən aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$\lambda=k+\pi'(s)\,, \tag{27}$$

və

$$\lambda_n=-n\tau'(s)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s)\;. \tag{28}$$

Əgər (25) və (26) ifadələrini (28)-da yerinə yazsaq, λ üçün alarıq:

$$\lambda=(b-2c)-2\sqrt{c^2+c(a+b)}-\frac{1}{2}-(\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})\,, \tag{29}$$

Digər tərəfdən λ_n bu şəkildə təyin olunur:

$$\lambda_n=-n\tau'(s)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(\mathrm{s})=n(2+2\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})+n(n-1) \tag{30}$$

(29) və (30) ifadələrinin sol tərəfləri bərabərdir, buna görə də onların sağ tərəflərini bərabərləşdirərək aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$(b-2c)-2\sqrt{c^2+c(a-b)}-\frac{1}{2}-(\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})=n(n-1)+2n(1+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b})\,. \tag{31}$$

Enerjinin məxsusi qiymətlərini tapmaq üçün (31) tənliyini $\sqrt{c}$ -yə görə həll edərək, aşağıdakı kimi analitik ifadə alırıq:

$$\sqrt{c}=\frac{b-2c-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{c+a-b}}{1+2n+2\sqrt{c+a-b}}, \qquad (32)$$

burada

$$b-2c=\alpha^2-l(l+1)$$
$$\sqrt{c+a-b}=\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2} \qquad (33)$$

(33) ifadəsini (32)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$\sqrt{c}=\frac{\alpha^2-l(l+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}{1+2n+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}. \qquad (34)$$

(15) ifadəsini (34)-də nəzərə alsaq, enerji spektri üçün aşağıdakı kimi analitik ifadə alarıq:

$$E^2-M^2=-4\cdot\left[\frac{\alpha^2-l(l+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}{1+2n+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}\cdot\delta\right]^2=$$
$$=-\left[\frac{\alpha^2-l(l+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}{\frac{1}{2}+n+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}\cdot\delta\right]^2 \qquad (35)$$

Hülten üstəgəl Yukava sinif potensial sahədə hərəkət edən zərrəciyin radial funksiyasını tapmaq üçün $\chi(s)$ radial funksiyasını aşağıdakı kimi faktorizasiyaya ayıraq:

$$\chi(s)=\phi(s)y(s). \qquad (36)$$

NU metodundan istifadə etməklə $\phi(s)$ funksiyası aşağıdakı şərtdən tapılır:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}. \qquad (37)$$

İndi (37) tənliyini həll edərək $\phi(s)$ funksiyası üçün tapırıq:

$$\ln\phi(s)=\ln\left[s^{\varepsilon}(1-s)^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}\right)}\right]$$
$$\phi(s)=s^{\varepsilon}\cdot(1-s)^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}\right)} \qquad (38)$$

$y_n(s)$ funksiyası aşağıdakı Rodriqes formulundan tapılır:

$$y_n(s)=\frac{C_n}{\rho(s)}\cdot\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)]. \qquad (39)$$

Burada C_n – normallaşma sabitidir, $\rho(s)$ -çəki funksiyasıdır və aşağıdakı kimi Pearson tənliyinin həllindən tapılır:

$$\frac{d}{ds}(\sigma(s)\cdot\rho(s)) = \tau(s)\cdot\rho(s)\,. \tag{40}$$

(40) tənliyini $\rho(s)$ -ə görə həll edərək alırıq:

$$\rho(s) = s^{2\varepsilon}(1-s)^{2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}\,. \tag{41}$$

(39)-də $\rho(s)$ çəki funksiyasını əvəzləməkləy$y_n(s)$ funksiyası üçün tapırıq:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{s^{2\varepsilon}(1-s)^{2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}}\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n+2\varepsilon}(1-s)^{n+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}\right] \tag{42}$$

Bunu nəzərə alaraq,

$$\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n+2\varepsilon}(1-s)^{n+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}\right] = s^{2\varepsilon}(1-s)^{2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}}P_n^{(2\varepsilon,2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2})}(1-2s)\,, \tag{43}$$

$y_n(s)$ funksiyaları üçün alırıq:

$$y_n(s) = C_n P_n^{\left(2\varepsilon,2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}\right)}(1-2s) \tag{44}$$

İndi (38) və (44) ifadələrini в (36)-də əvəzləməklə, $\chi(s)$ radial dalğa funksiyası üçün alarıq:

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{\mathrm{K}}P_n^{(2\varepsilon,2\mathrm{K}-1)}(1-2s) \tag{45}$$

Burada $K = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)-\beta^2}$.

Yakobi polinomlarının xassələrindən və hiperhəndəsi funksiyanın köməyi ilə $\chi(s)$ radial dalğa funksiyasını ifadə edirik [25]. Bunu aşağıdakı kimi edirik:

$$P_n^{(p,q)}(2s) = \frac{(-1)^n}{n!2^n(1-s)^p(1+s)^q}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1-s)^{p+n}(1+s)^{q+n}\right], \tag{46}$$

və

$$P_n^{(p,q)}(1-2s) = \frac{\Gamma(n+p+1)}{n!\Gamma(p+1)}{}_2F_1(-n,p+q+n+1,p+1;s)\,.$$

$$P_n^{(p,q)}(s) = \frac{\Gamma(n+p+1)}{n!\Gamma(p+1)}{}_2F_1(-n,p+q+n+1,p+1;\frac{1}{2}(1-s)) \tag{47}$$

Bu halda $p = 2\varepsilon, q = 2K-1$,
Onda$\chi(s)$ funksiyası üçün kompakt ifadə bu formada olur:

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{\mathrm{K}}\frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)}{}_2F_1(-n,2\varepsilon+2\mathrm{K}+n,1+2\varepsilon;s) \tag{48}$$

Burada C_n- normallaşma şərtindən tapılan normallaşma sabitidir:

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |\chi(r)|^2 dr = 2\delta\int_0^1 \frac{1}{s}|\chi(s)|^2 ds = 1 \tag{49}$$

İnteqral formullarından istifadə edərək alırıq:

$$\int_0^1 (1-s)^{2(\delta+1)} s^{2\lambda-1} \left\{ {}_2F_1(-n, 2(\delta+\lambda+1)+n, 2\lambda+1; s) \right\}^2 ds = \\ = \frac{(n+\delta+1)n!\Gamma(n+2\delta+2)\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\lambda+1)}{(n+\delta+\lambda+1)\Gamma(n+2\lambda+1)\Gamma(2(\delta+\lambda+1)+n)} \tag{50}$$

Bu hal üçün:

$$\lambda = \varepsilon,\ \delta = \mathrm{K} - 1$$

onda

$$\int_0^1 s^{2\varepsilon-1}(1-s)^{2\mathrm{K}} \left[{}_2F_1(-n, 2\varepsilon+2\mathrm{K}+n, 1+2\varepsilon;\ s) \right]^2 ds = \\ = \frac{(n+\mathrm{K})n!\Gamma(n+2\mathrm{K})\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)}{(n+\varepsilon+\mathrm{K})\Gamma(n+2\varepsilon+1)\Gamma(2\varepsilon+2\mathrm{K}+n)} \tag{51}$$

$$C_n^2 \left(\frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)} \right)^2 \frac{1}{2\delta} \frac{(n+\mathrm{K})n!\Gamma(n+2\mathrm{K})\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)}{(n+\varepsilon+\mathrm{K})\Gamma(n+2\varepsilon+1)\Gamma(2\varepsilon+2\mathrm{K}+n)} = 1 \tag{52}$$

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta n!(n+\mathrm{K}+\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+2\mathrm{K}+n)\Gamma(2\varepsilon+1)}{(n+\mathrm{K})\Gamma(n+2\mathrm{K})\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(n+2\varepsilon+1)}} \tag{53}$$

[1] *V.G. Bagrov and D.M. Gitman*. Exact solutions of relativistic wave equations, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, Publishers, 1990.
[2] *W. Greiner*. Relativistics Quantum Mechanics, 3ed. edition Berlin, Springer, 2000.
[3] *P.M. Morse*. Phys. Rev. 34:1, 1929, 57.
[4] *C. Eckart*. Phys. Rev. 35, 1930, 1303.
[5] *M.F. Manning, N. Rosen*. Phys. Rev. 44:11, 1933, 951.
[6] *L. Hulthén*. Ark. Mat. Astron. Fys. 28A, 5, 1942.
[7] *L. Hulthén*. Ark. Mat. Astron. Fys. 29B, 1, 1942.
[8] *D.S. Saxon and R.D. Woods.* Phys. Rev. 95, 1954, 577.
[9] *A.A. Makarov, Ya.A. Smorodinsky, Kh.Valiev, P. Winternitz and Nuovo Cimento*. A.52, 1967, 1061.
[10] *H. Yukawa*. Proc. Phys. Math. Soc. Jap.17, 48, 1935.
[11] *В.Г. Багров, А.Г. Мешков, В.Н. Шаповалов, А.В. Шаповалов*. Известия вузов, Физика, № 11, 1973, с.66-72.
[12] *В.Г. Багров, А.Г. Мешков, В.Н. Шаповалов, А.В. Шаповалов*. Известия вузов, Физика, №12, 1973, с.45-52.
[13] *В.Г. Багров, А.Г. Мешков, В.Н. Шаповалов, А.В. Шаповалов*. Известия вузов, Физика, № 6, 1974, с.74-78.
[14] *В.Г. Багров, А.Г. Мешков, В.Н. Шаповалов, А.В. Шаповалов*. Известия вузов, Физика, № 3, 1975, с.152-154.
[15] *A.I. Ahmadov, S.M. Aslanova, M.Sh. Orujova, S.V. Badalov and S.H. Dong*. Phys. Lett. A 383, 3010, 2019.
[16] *A.I. Ahmadov, S.M. Aslanova, M.Sh. Orujova, S.V. Badalov*. Advances in High Energy Phys. Vol. 2021, Article ID, 8830063, 2021.
[17] *Sh.M. Nagiyev, A.I. Ahmadov*. Int. J. Mod. Phys. A34, № 17, 1950089, (2019.
[18] *A.I. Ahmadov, Naeem Maria, M.V. Qocayeva and V.A. Tarverdiyeva*. Int. J. Mod. Phys. A33, № 03, 1850021 (2018).
[19] *A.İ. Ahmadov, M. Demirci, S.M. Aslanova, M.F. Mustamin.* Physics Letters A, 384, 126372, 2020.
[20] *T.G. Aliyeva and G.G. Quliyeva.* Russian Physics Journal, Vol. 63, № 12, 2141, 2021.
[21] *A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov*. Special Functions of Mathematical Physics., Birkhäuser, Boston , Springer, 1988.
[22] W.C. Qiang, S.H. Dong. Phys. Lett. A 363, 169, 2007.
[23] *G.F. Wei, S.H. Dong.* Phys. Lett. A 373, 49, 2008.
[24] *W.C. Qiang, S.H. Dong*. Phys. Scr. 79, 045004, 2009.
[25] *M. Abramowitz, I.A. Stegun.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, Mathematical Tables (Dover, New York, 1964).

M.V. Gojayeva

ANALYTICAL SOLUTION OF THE KLEIN-FOCK-GORDON EQUATION FOR THE LINEAR COMBINATION OF THE HULTHÉN AND THE CLASS OF YUKAWA POTENTIALS

In this study, the bound state's solution of the modified Klein-Fock-Gordon equation is found for the new supposed combined Hultén potential and the Yukawa class potentials. The analytical expressions of the energy eigenvalue and the corresponding radial wave functions are obtained for any orbital quantum number. The obtained eigenfunctions are expressed in terms of hypergeometric functions. We applied the developed approximation scheme to overcome the potential's centrifugal part difficulties. It is shown that energy levels and eigenfunctions are sensitive depending on potential parameters.