RELYASTİVİSTİK KVANT ZƏRRƏCİYİ ZAMANDAN ASILI QEYRİ-LOKAL BİRCİNS SAHƏDƏ

Ş.M. NAĞIYEV, K.Ş. CƏFƏROVA
AMEA, H.M.Abdullayev adına Fizika İnstitutu,
AZ-1143, Bakı, H. Cavid prospekti 131

Relyativistik konfiqurasiya *x*- fəzasında zamandan asılı qeyri-lokal bircins $V(x,x';t)=F(x)x'/\left[\lambdabar ch\left(\pi\left(x-x'\right)/\lambdabar\right)\right]$ potensial sahədə kvant zərrəciyinin hərəkətinə baxılmış, sistemin evolyusiya operatorunun və dalğa funksiyalarının aşkar şəkilləri tapılmlş, propaqatorları və Viqner funksiyaları hesablanmışdır.

Açar sözlər: relyativistik kvant zərrəciyi, qeyri-lokal bircins sahə, qeyri-lokal tənlik, evolyusiya operatoru.
PACS: 03.65.Pm; 02.03.Gp; 03.65.Vf.

1. Biz burada relyativistik sonlu-fərq kvant mexanikası çərçivəsində [1, 2] dəqiq həll olunan bir məsələyə - relyativistik kvant zərrəciyinin zamandan asılı qeyri-lokal bircins sahədə hərəkətinə baxacağıq. Sahə zamandan asılı olmayan halda bu məsələ [3] işində araşdırılmışdır.

Birölçülü zamandan asılı qarşılıqlı təsir potensialı $V(x,x';t)$ qeyri–lokal olduqda, relyativistik konfiqurasiya *x*- fəzasında $\psi(x,t)$ dalğa funksiyası qeyri-srasionar hərəkət tənliyini ödəyir:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=H_0(x)\psi(x,t)+\int_{-\infty}^{\infty}V(x,x';t)\psi(x';t)dx' \tag{1}$$

Burada H_0 sərbəst Hamilton operatorudur:

$$H_0(x)=mc^2ch(i\lambdabar\partial_x)\,. \tag{2}$$

Onun məxsusi funksiyaları $\xi(p,x)$ relyativistik müstəvi dalğalarıdır

$$\xi(p,x)=\left(\frac{p_0-p}{mc}\right)\equiv e^{ix\chi_p/\lambdabar}\,. \tag{3}$$

(3) müstəvi dalğaları $p_0^2-p^2=m^2c^2$ $(p_0>0)$ kütlə hiperbolasında (Lobaşevski *p*- fəzasında) tam sistem əmələ gətirir:

$$\frac{1}{2\pi\lambdabar}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(p,x)\xi(p',x)dx=\delta\left(\chi_p-\chi'_p\right)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi\lambdabar}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(p,x)\xi(p',x')d\chi_p=\delta(x-x')\,. \tag{4}$$

Hiperpolyar koordinatlarda enerji və impuls $E=cp_0=mc^2ch\chi_p$ və $p=mcch\chi_p$ şəklindədir.

2. Biz zamandan asılı qeyri-lokal bircins qarşılıqlı təsir potensialını belə seçəcəyik:

$$V(x,x';t)=\frac{F(t)x'}{\lambdabar ch\left[\pi(x-x')/\lambdabar\right]} \tag{5}$$

burada $\lambdabar=\hbar/mc$ - Kompton dalğa uzunluğu , $F(t)$ –zərrəciyə təsir edən və zamandan asılı olan qüvvədir.

Qeyd edək ki, qeyri-relyativistik limitdə

$$\lim_{c\to\infty}\left[H_0(x)-mc^2\right]=-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$$

və

$$\lim_{c\to\infty}V(x,x';t)=F(t)x\delta(x-x') \tag{6}$$

olduğundan, (1) tənliyilə üst-üstə düşür:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_N(x,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2-F(t)x\right]\psi(x,t)\,. \tag{7}$$

(6)-dan görünür ki, $c\to\infty$ limitində qeyri-lokallıq itir, yəni relyativistik xarakter daşıyır. (5) potensial enerji halında (1) tənliyi impuls p -fəzasında sadə şəklə malikdir:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(k_p,t)}{\partial t}=\left[-\frac{k_p^2}{2m}+mc^2-i\hbar F(t)\frac{d}{dk_p}\Phi(k_p,t)\right], \tag{8}$$

Bu tənlikdəki k_p dəyişəni impulsla aşağıdakı kimi ifadə olunur

$$k_p=\sqrt{2mc(p_0-mc)}=2mcsh\frac{\chi_p}{2}{}_2\,,\quad p=k_p\sqrt{1+\frac{k_p^2}{4m^2c^2}}$$

və qeyri-relyativistik limitdə $\lim_{c\to\infty}k_p=p$ alırıq. Qeyd edək ki, $F(t)=F_0=const$ olduqda (8) tənliyinin həlli

$$\Phi_E^{(0)}(k_p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F_0}}e^{\frac{i}{\hbar F_0}\left(ek_p-\frac{k_p^3}{6m}\right)} \tag{9}$$

şəklindədir, burada $e=E-mc^2$. (8) tənliyinin formal həllini yazaq

$$\Phi(k_p,t)=U(k_p,t)\Phi(k_p,0) \tag{10}$$

Burada $U(k_p,t)$ p – təsvirində evolyusiya operatorudur

$$U(k_p,t)=Te^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left[\frac{k_p^2}{2m}+mc^2-i\hbar F(t')\frac{d}{dk_p}\right]dt'}\,, \tag{11}$$

T isə zamana görə nizamlama operatoru, yəni xronoloji operatordur. (8)-dəki Hamilton operatorunun zamanın müxtəlif anlarına uyğun qiymətləri bir-biriylə kommutasiya etmir, yəni $t\neq t'$ olduqda

$$\left[H(k_p,t),H(k_p,t')\right]=\frac{i\hbar k_p}{m}\left[F(t')-F(t)\right]\neq 0$$

olur, $\Phi(k_p,0)$ isə başlanğıc dalğa funksiyasıdır. Onu $\Phi(k_p,0)=\Phi_E^{(0)}(k_p)$ kimi seçə bilərik. [4,5] işlərində göstərilmişdir ki, (11) –də T –hasilinin açılışı belədir:

$$U(k_p,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left[\frac{1}{2m}\left(k_p-\delta(t)+\delta(t')\right)^2+mc^2\right]dt'}\, e^{-\delta(t)\frac{d}{dk_p}} \tag{12a}$$

və ya inteqralı hesabladıqdan sonra

$$U(k_p,t)=\exp\left[-\frac{imc^2}{\hbar}t-\frac{i}{\hbar}S(k_p,t)\right]e^{-\delta(t)\frac{d}{dk_p}} \quad . \tag{12b}$$

Burada

$$S=\frac{1}{2m}\left[\left(k_p-\delta(t)\right)^2t+2\left(k_p-\delta(t)\right)\delta_1(t)+\delta_2(t)\right] \ ,$$

$\delta(t)=\int_0^t F(t')dt'$ -qüvvə impulsu, $\delta_1(t)=\int_0^t\delta(t')dt'$ və $\delta_2(t)=\int_0^t\delta^2(t')dt'$.

Evolyusiya operatorunun təsirini (10)-da hesablasaq, impuls təsvirində dalğa funksiyasının aşkar şəklini təyin etmiş olarıq:

$$\begin{aligned}\Phi(k_p,t)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F_0}}exp\left\{-\frac{1}{2m\hbar}\left(k_p-\delta(t)\right)^2t+2\left(k_p-\delta(t)\right)\delta_1(t)+\delta_2(t)\right\}\cdot\\ &\cdot exp\left\{\frac{i}{\hbar F_0}\left[e(k_p-\delta(t)-\frac{(k_p-\delta(t))^3}{6m}\right]\right\} .\end{aligned} \tag{13}$$

$\{\Phi(k_p,t)\}$ dalğa funksiyaları sistemi ortoqonallıq və tamlıq şərtlərini ödəyir, yəni

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E^*\left(k_p,t\right)\Phi_{E'}(k_p,t)dk_P=\delta(E-E') \quad , \tag{14a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E^*\left(k_p,t\right)\Phi_E(k'_p\ ,t)dE=\frac{1}{mc}\delta\left(k_p-k'_p\right) . \tag{14b}$$

Qeyd edək ki, (13) dalğa funksiyası düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir, yəni

$$\begin{aligned}&\lim_{c\to\infty}\Phi_E(k_p,t)=\Phi_{NE_N}(p,t)=\\ &=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar F_0}}\exp\left\{\frac{i}{2m\hbar}\left[(p-\delta(t))^2t+2(p-\delta(t))\delta_1(t)+\delta_2(t)\right]\right\}\cdot\\ &\exp\left\{\frac{i}{2\hbar F_0}\left[E_N(p-\delta(t))-\frac{\left(p-\delta(t)\right)^3}{6m}\right]\right\},\end{aligned} \tag{15}$$

burada *p*- zərrəciyin qeyri-relyativistik impulsudur.

3. İndi relyativistik konfiqurasiya *x*- fəzasında zərrəciyin dalğa funksiyasını tapaq. Bunun üçün relyativistik Furye çevrilməsindən istifadə edək:

$$\psi_E(x,t)=\frac{mc}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(p,x)\Phi_E(k_p,t)dk_p \ . \tag{16}$$

Buradan

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{F_0}}J,\ J=\int e^{iQ}e^{ix\chi/\lambda}d\chi \quad . \tag{17}$$

Burada Q –nin ifadəsi belədir:

$$Q=a_3k_p^3+a_2k_p^2+a_1k_p+a_0\ ,$$

$$a_3=-\frac{1}{6m\hbar F_0}\ ,a_2=-\frac{1}{2m\hbar}\left(\frac{\delta}{F_0}-t\right),$$

$$a_1=\frac{\delta t-\delta_1}{m\hbar}+\frac{1}{\hbar F_0}\left(e-\frac{\delta^2}{2m}\right),\ \frac{1}{2m\hbar}\left(2\delta\delta_1-t\delta^2-\delta_2\right).$$

Q-nün ifadəsində

$$k_p=2mcch\frac{\chi_p}{2},\ k_p^2=2m^2c^2(ch\chi_p-1),\ k_p^3=2m^3c^3(sh\frac{3\chi_p}{2}-3sh\frac{\chi_p}{2})$$

olduğunu nəzərə alaq. Onda,

$$Q=-zsh\frac{3\chi_p}{2}+\gamma_2ch\chi_p+\gamma_1sh\frac{\chi_p}{2}+\gamma_0\ , \tag{19}$$

$$z=\frac{mc^2}{3\lambda F_0}\ ,\gamma_2=2m^2c^2a_2\ ,\gamma_1=2mca_1-6m^3c^3a_3\ ,\gamma_0=a_0-2m^2c^2a_2\ ,$$

$$\gamma_2(0)=0\,,\gamma_1(0)=\frac{2E-mc^2}{\lambda F_0}\equiv a\,,\gamma_0(0)=0\,.$$

J inteqralını aşağıdakı kimi göstərək:

$$J=e^{-i\gamma_3sh\left(\frac{3i\lambda}{2}\partial_x\right)+i\gamma_2ch\left(i\lambda\partial_x\right)+i\gamma_0}J_1 \tag{20a}$$

$$J=e^{-i\gamma_3sh\left(\frac{3i\lambda}{2}\partial_x\right)-i\gamma_2ch\left(\frac{i\lambda}{2}\partial_x\right)+i\gamma_0}J_2 \tag{20b}$$

Burada J_1 və J_2 inteqralları

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\gamma_1sh\frac{\chi_p}{2}+ix\chi_p/\lambda}d\chi_p=4e^{-\frac{\pi x}{\lambda}}K_{2i\pi}\left(\gamma_1\right) \tag{21a}$$

və

$$J_2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\gamma_2ch\chi_p+ix\chi_p/\lambda}d\chi_p=i\pi e^{-\frac{\pi x}{2\lambda}}H_{2i\pi/\lambda}\left(\gamma_2\right) \tag{21b}$$

ifadələriylə təyin olunur, $K_\nu(z)$ Makdonald funksiyası, $H_\nu^{(1)}(z)$ isə bircins Hankel funksiyasıdır.

4. İndi baxılan məsələdə zərrəciyin propaqatorunu hesablayaq. Propaqator impuls təsvirində

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{k_{p2}^2}{2m}-mc^2+i\hbar F(t)\partial_{k_{p2}}\right]K(p_2,p_1;t)=i\hbar\delta(t)\delta\left(k_{p2}-k_{p1}\right) \tag{22}$$

tənliyini və t<0 olduqda

$$K(p_2,p_1;t)=0 \tag{23}$$

sərhəd şərtini ödəyir. Propaqatoru evolyusiya operatorunun matrisa elementi kimi də göstərmək olar:

$$K(p_2,p_1;t)=<p_2\left|\widehat{U}(t)\right|p_1>=\widehat{U}\left(k_{p2},t\right)\delta(k_{p2}-k_{p1}) \tag{24}$$

(21)-də (12b) –ni yerinə yazaq. Onda (24)-ün aşkar şəklini tapmaq üçün

$$K\left(p_2,t_2;p_1,t_1\right)=\theta\left(t_2-t_1\right)\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E\left(k_{p2},t_2\right)\Phi_E^*\left(k_{p1},t_1\right)e^{-\frac{iE}{\hbar}\left(t_2-t_1\right)}dE \tag{25}$$

münasibətindən istifadə etmək əlverişlidir. Nəticədə alırıq ki,

$$K\left(p_2,t_2;p_1,t_1\right)=\theta(t)\delta\left(k_{p2}-k_{p1}-F_0t\right)e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t+\frac{i}{\hbar}\Delta},$$

$$\Delta=\frac{k_{p1}^3-k_{p2}^3}{6mF_0}+\frac{t}{2m}\left[\left(F_0t-\delta(t)\right)\left(k_{p1}+k_{p2}\right)+2F_0\left(\delta_1(t)-t\delta(t)\right)\right],\ t=t_2-t_1 \tag{26}$$

Qeyri-lokal sahə zamandan asılı olmadıqda, yəni $F(t)=F_0=const$ olduqda (26) propaqatoru [3] işində alınmış ifadə ilə üst-üstə düşür:

$$\Delta_0=\frac{k_{p1}^3-k_{p2}^3}{6mF_0}=\hbar z\left(sh\frac{3\chi_1}{2}-sh\frac{3\chi_2}{2}\right)+\frac{1}{2}mc^2t, \tag{27}$$

$$z=mc^2/\lambda\!\!\!^{-}F_0.$$

İndi (26)-nın sərbəst zərrəcik $(F\to 0)$ və qeyri-relyativistik $(c\to\infty)$ limitlərini hesablayaq:

a) $$\lim_{F\to 0}K(p_2,t_2;p_1,t_1)=\theta(t)\delta\left(k_{p2}-k_{p1}\right)e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t+\frac{ik_{p1}^2}{2m\hbar}}, \tag{28}$$

b) $$\lim_{c\to\infty}e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}K(p_2,t_2;p_1,t_1)=\theta(t)\delta\left(p_2-p_1-F_0t\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta_N}, \tag{29}$$

$$\Delta_N=\frac{p_1^3-p_2^3}{6mF_0}+\frac{t}{2m}\left[\left(F_0t-\delta(t)\right)\left(p_1+p_2\right)+2F_0\left(\delta_1(t)-t\delta(t)\right)+\delta^2(t)\right].$$

5. Məsələnin tamlığı üçün baxılan relyativistik zərrəciyin Viqner funksiyasını da hesablayaq. Bunun üçün p – fəzasındakı

$$W(p,x,t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_E^*\left(\chi-\frac{\chi'}{2}\right)\Phi_E\left(\chi+\frac{\chi'}{2}\right)e^{ix\chi'/\lambda\!\!\!^{-}}d\chi' \tag{30}$$

təsvirindən istifadə edək. Burada dalğa funksiyasının (13) ifadəsini nəzərə alaq. Müəyyən çevrilmələrdən sonra (30) –u belə yaza bilərik:

$$W(p,x,t)=\frac{mc}{(2\pi\hbar)^2 F_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi+ix\chi'/\lambda}d\chi' \ . \tag{31}$$

(31)-də inteqralaltı ifadənin fazası üçün

$$\begin{aligned}
&\varphi=-2zsh\frac{3\chi'}{2}+a_1 sh\frac{\chi'}{2}+a_2\frac{\chi'}{4},\\
&a_1=\frac{2mc^2}{t}\left(\frac{\delta}{F_0}-t\right)sh\chi,\\
&a_2=\left(2z-\frac{F_0ct^2}{\hbar}\right)ch\frac{\chi}{2}.
\end{aligned} \tag{32}$$

(31) inteqralını hesablamaq üçün onu aşağıdakı şəklə çevirək:

$$W(p,x,t)=\frac{mc}{(2\pi\hbar)^2 F_0}\hat{B}J_0\,,\quad J_0=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_2 sh\frac{\chi'}{4}+ix\chi'/\lambda}d\chi', \tag{33}$$

Burada $\hat{B}$ sonlu-fərq operatorudur

$$\hat{B}=e^{2izsh\left(\frac{3i\lambda}{2}\partial_x\right)-ia_2\left(\frac{i\lambda}{2}\partial_x\right)/\lambda} . \tag{34}$$

Indi $K_p(a)$ Makdonald funksiyasının

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_2 shx-px}dx=2e^{-\frac{i\pi p}{2}}K_p(a),\quad |R_{ep}|<1$$

inteqral təsvirindən [6] istifadə etsək,

$$J_0=8e^{-2\pi x/\lambda}K_{4ix/\lambda}(a_2) \tag{35}$$

alarıq. Onda Viqner funksiyası

$$W(p,x,t)=\frac{mc}{\pi^2\hbar^2 F_0}\hat{B}e^{-2\pi x/\lambda}K_{4ix/\lambda}(a_2) \tag{36}$$

şəklinə malik olacaqdır. Qeyd edək ki, $\hat{B}$ operatorunun təsiri ona gətirib çıxarır ki, $W(p,x,t)$ funksiyasının ifadəsi sonsuz cəm şəklində yazılır.

6. Biz burada relyativistik kvant zərrəciyinin zamandan asılılı lokal bircins sahədə hərəkətinə baxdıq. Aşkar olaraq dalğa funksiyalarını, propaqatoru və Viqner funksiyasını tapdıq. Alınmış ifadələr düzgün $c\to\infty$ limitinə, $F\to 0$ sərbəst zərrəcik limitinə malikdir və $F(t)=F_0=const$ olduqda (sahə stasionar olduqda) isə [3] işinin nəticələrilə üst-üstə düşür. Hesab edirik ki, alınmış nəticələr kvant mexanikası və elementar zərrəciklər fizikası məsələlərinin həllində tətbiq oluna bilər.

Məqalədə alınmış nəticələr BDU-nun 95 illiyinə həsr olunmuş "Fizikanın Müasir Problemləri" VIII Respublika konfransında məruzə edilmişdir, 24-25 dekabr, Bakı-2014.

Bu iş Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Elmin İnkişaf Fondunun maliyyə dəstəyi ilə yerinə yetirilmişdir – Qrant №EİF-2012-2(6)-39/08/1.

---

[1] *В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков.* Трехмерная формулировка релятивистской задачи двух тел, ЭЧАЯ , т.2, 1972, 635.

[2] *Н.М. Атакишиев, Р.М. Мир-Касимов, Ш.М. Нагиев.* Квазипотенциальные модели гармонического осциллятора, ТМФ, 44, 1980, 47.

[3] *Ş.M. Nağıyev, S.İ. Quliyeva*. Relyativistik kvant zərrəciyi qeyri-lokal bircins sahədə. , Azerb. J. Physics (Fizika), vol. XX, №1, sec. Az., 2014, 22-26,

[4] *Sh.M. Nagiyev, K.Sh. Jafarova*. Relativistic quantum particle in a time –dependent homogeneous field, Phys. Lett A 347, 2013, 747.

[5] *Ш.М. Нагиев.* Движение в переменным квази-однородном поле и операторные тождества, Azerb. J. Physics (Fizika), vol. XIX, №2, 2013, 129-135,

[6] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.Н. Маричев.* Интегралы и ряды, т.2,М., 1983,

Sh.M. Nagiyev, K.Sh. Jafarova

RELATİVİSTİC QUATİUM PARTİCLE İN A TİME-DEPENDENT NON-LOCAL HOMOGENEOUS FİELD

A motion of the quantum particle in a time-dependent non-local homogenous potensial field $V(x,x';t)=F(x)x'/\left[\lambda ch\left(\pi\left(x-x'\right)/\lambda\right)\right]$ in the relativistic confiqurational x –space is considered, the explicit form of the evolution operator and wave funcions are found, a propagator and Wigner function of the sistem are calculated.

Ш.М. Нагиев, К.Ш. Джафарова

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА В ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ НЕЛОКАЛЬНОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Рассмотрено движение квантовой частицы в зависящем от времени нелокальном однородном поле $V(x,x';t)=F(x)x'/\left[\lambda ch\left(\pi\left(x-x'\right)/\lambda\right)\right]$ в релятивистском конфигурационном x –пространстве. Найдены явный вид оператора эволюции и волновых функций, вычислены пропагатор и функция Вигнера системы.

Qəbul olunma tarixi: 03.04.2015