

HALQAVARI OSSİLYATOR POTENSİALI ÜÇÜN RELYATİVİSTİK SONLU FƏRQ TƏNLIYİNİN DƏQİQ HƏLLƏRİ

¹Ş.M. NAGIYEV, ²G.H. QULIYEVA, ^{1,2}V.A. TARVERDIYEVA

¹Elm və Təhsil Nazirliyinin Fizika İnstitutu,

H.Cavid prospekti, 131, AZ 1073, Bakı, Azərbaycan.

²Elm və Təhsil Nazirliyinin Sumqayıt Dövlət Universiteti,

Bakı küç.1, 43-cü məhəllə, AZ 5008, Sumqayıt, Azərbaycan.

shakir.m.nagiyev@gmail.com, gulnara.quliyeva@sdu.edu.az ,

vefa.tarverdiyeva@sdu.edu.az

Üçölçülü halqavari kvant ossilyator potensialı üçün relyativistik sonlu-fərq tənliyinin dəqiq həlləri tapılmışdır. Araşdırma relyativistik kvant mexanikasının sonlu-fərq versiyasına əsaslanır. Burada relyativistik konfigurasiya r -fəzası anlayışı əsas rol oynayır. Göstərilmişdir ki, radial dalğa funksiyaları və bucaq dalğa funksiyaları uyğun olaraq kəsilməz dual Hahn çoxhədliləri və Yakobi çoxhədlilərlə ifadə olunur. Sistemin diskret enerji spektri tapılmış və göstərilmişdir ki, radial dalğa funksiyaları və enerji spektri düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir.

Açar sözlər: Relyativistik sonlu-fərq hərəkət tənliyi; halqavari ossilyator potensialı; kəsilməz dual Hahn və Yakobi çoxhədliləri; qeyri-relyativistik limit.

DOI:10.70784/azip.2.2025244

1. Giriş

Kvant mexanikasında (relyativistik və qeyri-relyativistik) çox vaxt müəyyən potensial qüvvə sahəsində hərəkət edən zərrəciyin enerji səviyyələrinin və dalğa funksiyalarının tapılması ilə bağlı problemlər yaranır [1-3]. Qeyri-relyativistik kvant mexanikasının əsas hərəkət tənliyi Şredinger tənliyidir. O, molekulyar fizikada, atom və nüvə fizikasında, kvant kimyasında aşağı enerjilərdə baş verən fiziki hadisələri təsvir edir [1,2]. Yüksək enerjilərdə baş verən fiziki hadisələrin təsviri relyativistik dalğa tənliklərinə əsaslanmalıdır [2,3]. Qarşılıqlı təsir potensialı zərrəcik-antizərrəcik cütlerini yaratmaq üçün kifayət deyilsə, biz Kleyn-Qordon tənliyini spini sıfır olan zərrəcik üçün tətbiq edə bilirik və Dirak tənliyini spini 1/2 olan zərrəcik üçün tətbiq edə bilirik. Qeyd edək ki, Kleyn-Qordon tənliyi və Dirak tənliyi relyativistik kvant mexanikasında zərrəciklərin dinamikasının təsviri üçün ən çox istifadə olunan tənliklərdir. Onu da qeyd edək ki, bundan əlavə, məqalələrdə işlənmiş relyativistik kvant mexanikasının sonlu-fərq variantı da mövcuddur (bax [4-13] və oradakı istinadlar).

Müxtəlif mərkəzi və qeyri-mərkəzi (və ya halqavari) potensiallardan istifadə edilən bir çox məqalələrdə həm qeyri-relyativistik (məsələn, [14-25]), həm də relyativistik (məsələn, [26-32]) bağlı halların və səpilmə hallarının problemləri öyrənilir. Xüsusilə qeyd etmək lazımdır ki, qeyri-mərkəzi və ya halqavari potensiallar nəzəri fizikanın müxtəlif sahələrində, məsələn, nüvə və atom fizikasında, molekulyar fizikada, həmçinin kvant kimyasında geniş istifadə olunur. Belə potensiallardan kvant kimyasında benzol kimi üzvi halqəşəkilli molekulların xassələrini təsvir etmək üçün, nüvə fizikasında isə deformasiyaya uğramış nüvənin qarşılıqlı təsirini öyrənmək üçün istifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, Quesne nəşr olunmuş [15] işində yeni halqavari ossilyator potensialını təqdim edir. Quesne potensialı aşağıdakı kimi müəyyən edilir

$$V_Q(r, \vartheta) = \gamma^2 \left(r^2 + \frac{q\eta^4}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right), \quad \gamma = \frac{\sigma}{\eta\sqrt{2}}, \quad (1.1)$$

burada η, σ, q üçölçülü adsız müsbət parametrlərdir. Halqavari Kulon potensialı ilə relyativistik sonlu-fərq dalğa tənliyinin dəqiq həlli [30]-da tapılmışdır.

Bu işin məqsədi dəqiq həll oluna bilən qeyri-relyativistik Quesne halqavari ossilyator potensialını (1.1) relyativistik sonlu-fərq kvant mexanikası halına ümumiləşdirməkdir.

2. Sonlu fərq relyativistik kvant mexanikası

Relyativistik kvant mexanikasının sonlu-fərq versiyasında əsas konsepsiya üçölçülü relyativistik konfigurasiya \mathbf{r} -fəzası anlayışıdır. Uyğun kanonik qoşma impuls \mathbf{p} -fəzası, kütlə hiperboloidinin

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2, \quad p_0 > 0 \quad (2.1)$$

yuxarı təbəqəsində həyata keçirilən üçölçülü Lobaçevski fəzasıdır. Həm \mathbf{r} , həm də \mathbf{p} fəzaları bir-biri ilə relyativistik Furye çevrilməsi ilə əlaqədardır

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \psi(\mathbf{p}) d\Omega_{\mathbf{p}}, \quad (2.2)$$

burada $d\Omega_{\mathbf{p}} = mc \frac{d\mathbf{p}}{p_0}$ Lobaçevski impuls fəzasında relyativistik üçölçülü həcm elementi və $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ funksiyası relyativistik müstəvi dalğalardır.

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left(\frac{p_0 - \mathbf{p}\mathbf{n}}{mc} \right)^{-1 - ir/\lambda}. \quad (2.3)$$

Burada $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $0 \leq r < \infty$, $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ radius vektor üzrə yönəlmiş vahid vektor, $\lambda = \hbar/(mc)$ isə zərrəciyin Kompton dalğa uzunluğudur. Relyativistik müstəvi dalğalar (2.3) sonlu-fərq sərbəst Şredinger tənliyinə tabedir

$$(H_0 - E_p)\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0. \quad E_p = cp_0, \quad (2.4)$$

burada sonlu-fərq operatoru

$$H_0 = m_0 c^2 \left[\cosh(i\lambda \partial_r) + i \frac{\lambda}{r} \sinh(i\lambda \partial_r) + \frac{\mathbf{L}^2}{2(m_0 c r)^2} e^{i\lambda \partial_r} \right]. \quad (2.5)$$

sərbəst Hamiltonian və $\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\vartheta, \varphi}$ bucaq momenti operatorunun kvadratıdır.

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_{\vartheta} (\sin \vartheta \partial_{\vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi}^2 \right]. \quad (2.6)$$

(2.4) tənliyindən Relyativistik konfigurasiya \mathbf{r} -fəzasında iki skalyar zərrəciyin qarşılıqlı təsir potensialı $V(\mathbf{r})$ olan sahədə nisbi hərəkətinin dalğa funksiyası üçün tənliyi (2.4) tənliyindən əldə etmək olar. Bu tənlik aşağıdakı şəkllə malikdir

$$[H_0 + V(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

Qeyri-relyativistik limitdə

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \quad (2.8)$$

alırıq.

3. Sonlu-fərqli relyativistik halqavari ossilyator modeli

İndi biz potensialı

$$V(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{2} m_0 \omega^2 (r + i\lambda)^2 + \frac{f(\vartheta)}{r^2} \right] e^{i\lambda \partial_r} \quad (3.1)$$

olan sonlu-fərq relyativistik halqavari ossilyator modelini nəzərdən keçirək,

$$\left[m_0 c^2 \cosh(i\lambda \partial_r) + \frac{\mathbf{L}^2}{2m_0 r^{(2)}} e^{i\lambda \partial_r} + \left(\frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^{(2)} + \frac{f(\vartheta)}{r^{(2)}} \right) e^{i\lambda \partial_r} - E \right] R(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.5)$$

burada $r^{(2)} = r(r + i\lambda)$ ümumiləşmiş qüvvətdir. Bu tənlik dəyişənlərin ayrılmasına imkan verir. (3.5) tənliyinin Hamiltonianı $\hat{L}_z = -i\hbar \partial_{\varphi}$ operatoru ilə kommutasiya etdiyi üçün dalğa funksiyasını aşağıdakı formada axtara bilərik

$$R(\mathbf{r}) = R(r) F(\vartheta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad (3.6)$$

burada $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ maqnit kvant ədədir. (3.6) əvəzləməsinin (3.5)-də yerinə yazılması sonlu-fərq və ikitər-tibli diferensial tənliklər toplusuna gətirib çıxarır

$$\left[\cosh(i\partial_{\rho}) + \left(\frac{1}{2} \omega_0^2 \rho^{(2)} + \frac{\Lambda}{2\rho^{(2)}} \right) e^{i\partial_{\rho}} - \varepsilon \right] R(\rho) = 0, \quad (3.7)$$

$$\left[\partial_{\vartheta}^2 + \operatorname{ctg} \vartheta \partial_{\vartheta} - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{2m_0}{\hbar^2} f(\vartheta) + \Lambda \right] F(\vartheta) = 0, \quad (3.8)$$

burada $\rho = r/\lambda$ ölçüsüz dəyişəndir, Λ ayrılma sabitidir və $\rho^{(2)} = \rho(\rho + i)$. Λ parametrinin qiyməti (3.8) bucaq tənliyindən müəyyən ediləcək. Bundan əlavə, biz aşağıdakı işarələri daxil etdik: $\omega_0 = \hbar\omega/m_0 c^2$, $\varepsilon = E/m_0 c^2$. Aydındır ki, $f(\vartheta) = 0$, olduqda, $\Lambda = l(l + 1)$ olur.

4. Bucaq tənliyinin həlli

Bucaqdan asılı (3.8) tənliyinin [30] həllərini tədqiq edirik, burada $f(\vartheta)$ (3.2)-də verilmişdir. Yeni $x = \cos \vartheta$ dəyişəni daxil etməklə $F(\vartheta) \equiv F(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı tənliyi əldə edirik:

burada $f(\vartheta)$ funksiyası potensialın halqavari təbiətini təyin edir və aşağıdakı şəkllə malikdir [15]

$$f(\vartheta) = \frac{\alpha \cos^2 \vartheta + \beta \cos \vartheta + \gamma}{\sin^2 \vartheta}. \quad (3.2)$$

Burada α, β və γ müsbət parametrlərdir. (3.1) potensialı düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir

$$\lim_{c \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2 + \frac{f(\vartheta)}{r^2}. \quad (3.3)$$

(3.1) operatoru aşağıdakı skalyar hasilə görə ermitdir

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^*(\mathbf{r}) \psi_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.4)$$

yəni $(V \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, V \psi_2)$. Burada $\psi_1(\mathbf{r})$ və $\psi_2(\mathbf{r})$ funksiyaları bütün törəmələri ilə birlikdə $r = 0$ və $r = \infty$ nöqtələrində sıfıra çevirilir.

Biz potensialı (3.1) və (3.2) olan (2.7) tənliyinin həllini tapmaq istəyirik. Bunun üçün $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} R(\mathbf{r})$ təyin edərək $R(\mathbf{r})$ dalğa funksiyası üçün aşağıdakı tənliyi əldə edirik:

$$\left[\partial_x^2 - \frac{2x}{1-x^2}\partial_x + \frac{c_0 - c_1x - c_2x^2}{(1-x^2)^2}\right]F(x) = 0, \quad (4.1)$$

harada

$$c_0 = \Lambda - m^2 - \frac{2m_0}{\hbar^2}\gamma, \quad c_1 = \frac{2m_0}{\hbar^2}\beta, \quad c_2 = \Lambda + \frac{2m_0}{\hbar^2}\alpha. \quad (4.2)$$

(4.1) tənliyinin həllini [29] formasında axtarıq

$$F(x) = \varphi(x)y(x), \quad \varphi(x) = (1-x)^A(1+x)^B, \quad (4.3)$$

burada $\varphi(x)$ funksiyası $F(x)$ bucaq dalğa funksiyasının çəki hissəsi, $y(x)$ isə onun çoxhədli hissəsidir. $F(x)$ -in $x = \pm 1$ nöqtələrində sonluluq şərtindən belə çıxır ki, A və B parametrləri $A \geq 0$, $B \geq 0$ bərabərsizliklərini ödəməlidir. Onda $y(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı tənliyi alırıq

$$y''(x) - \frac{2\delta + 2(s+1)x}{1-x^2}y'(x) + \frac{\gamma_2x^2 + \gamma_1x + \gamma_0}{(1-x^2)^2}y(x) = 0. \quad (4.4)$$

Burada $\delta = A - B$, $s = A + B$ və həmçinin aşağıdakı işarələmədən istifadə edirik

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -c_2 + s + s^2, \\ \gamma_1 &= -c_1 + 2\delta s, \\ \gamma_0 &= c_0 - s + \delta^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

İndi A və B parametrlərini elə seçək ki, $\gamma_2x^2 + \gamma_1x + \gamma_0 = \lambda(1-x^2)$ münasibəti ödənilsin, yəni $\gamma_2 = -\lambda$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_0 = \lambda$ olsun, burada $\lambda = \text{const}$. Bu bərabərliklərdən A , B və λ parametrlərini tapırıq:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{c_2 + c_1 - c_0} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2}(\alpha + \beta + \gamma)}, \quad (4.6)$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{c_2 - c_1 - c_0} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2}(\alpha - \beta + \gamma)}, \quad (4.7)$$

$$\lambda = c_2 - A - B - (A + B)^2. \quad (4.8)$$

(4.6) və (4.7) bərabərliklərindən çıxır ki, $\alpha + \gamma \geq |\beta|$. İndi, (4.4) tənliyi aşağıdakı formanı alır

$$(1-x^2)y''(x) - 2[(A-B) + (A+B+1)x]y'(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (4.9)$$

Onun $\bar{y}(x) = P_k^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ [33] Yakobi çoxhədlisinin

$$(1-x^2)\bar{y}''(x) + [\bar{\beta} - \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + 2)x]\bar{y}'(x) + k(k + \bar{\alpha} + \bar{\beta} + 1)\bar{y}(x) = 0,$$

tənliyi ilə müqayisəsindən alırıq
və

$$\bar{\alpha} = 2A \quad \bar{\beta} = 2B \quad (4.10)$$

$$\lambda \equiv \lambda_k = k(k + 2A + 2B + 1). \quad (4.11)$$

Beləliklə, belə nəticəyə gəlirik ki, (4.9) tənliyinin $y(x) \equiv y_k(\cos\vartheta)$ həlli Yakobi çoxhədliləri vasitəsilə ifadə edilir, yəni

$$y_k(\cos\vartheta) = P_k^{(2A, 2B)}(\cos\vartheta). \quad (4.12)$$

İndi tam bucaq dalğa funksiyasının ϑ bucağı ilə ifadəsini yazma bilirik

$$F_{km}(\cos\vartheta) = C_{km}(1 - \cos\vartheta)^A(1 + \cos\vartheta)^B P_k^{(2A, 2B)}(\cos\vartheta). \quad (4.13)$$

Normallama sabiti C_{km} ortonormalıq şərtindən tapılır

$$\int_0^\pi F_{km}(\cos\vartheta) F_{k'm}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \delta_{kk'} \quad (4.14)$$

və aşağıdakı ifadəyə bərabərdir

$$C_{km} = 2^{-A-B} \sqrt{\frac{(k+A+B+1/2)k!\Gamma(k+2A+2B+1)}{\Gamma(k+2A+1)\Gamma(k+2B+1)}}. \quad (4.15)$$

İndi vurğulayaq ki, λ kəmiyyəti üçün iki (4.8) və (4.11) düsturlarından biz ayırma parametri $\Lambda \equiv \Lambda_k$ üçün aşağıdakı kvantlanmış ifadəni

$$\Lambda_k = k(k + 2A + 2B + 1) + A + B + (A + B)^2 - \frac{2m_0}{\hbar^2} \alpha \quad (4.16a)$$

və yaxud

$$\Lambda_k = k(k + \sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha + \beta + \gamma)/\hbar^2} + \sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha - \beta + \gamma)/\hbar^2} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha + \beta + \gamma)/\hbar^2} + \sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha - \beta + \gamma)/\hbar^2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha + \beta + \gamma)/\hbar^2} + \sqrt{m^2 + 2m_0(\alpha - \beta + \gamma)/\hbar^2})^2 - \frac{2m_0}{\hbar^2} \alpha. \quad (4.16b)$$

tapırıq. Asanlıqla görmək olar ki, $f(\vartheta) = 0$ olduqda $\Lambda_k \equiv \Lambda_l = l(l + 1)$ olur, burada $l = k + m$ -dir.

5. Radial tənliyin həlli

İndi (3.7) tənliyinin həllərini alaq. (3.7) tənliyini həll etmək üçün biz [11] kimi $R(\rho)$ -i belə seçirik

$$R(\rho) = (-\rho)^{(\mu_k)} M_{\nu_k}(\rho) \Omega(\rho). \quad (5.1)$$

Burada

$$\rho^{(\mu_k)} = i^{\mu_k} \frac{\Gamma(\mu_k - i\rho)}{\Gamma(-i\rho)}, \quad M_{\nu_k}(\rho) = \omega_0^{i\rho} \Gamma(\nu_k + i\rho) \quad (5.2)$$

vuruqları $R(\rho)$ -nin müvafiq olaraq $\rho = 0$ və $\rho = \infty$ nöqtələrindəki asimptotik davranışını təyin edir və

$$\mu_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\omega_0^2} (1 - \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \Lambda_k})},$$

$$\nu_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\omega_0^2} (1 + \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \Lambda_k})} \quad (5.3)$$

real parametrlərdir. Bundan belə çıxır ki,

$$\Lambda_k \leq \left(\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega} \right)^2 \quad (5.4)$$

Bu şərt k “orbital” kvant ədədinin qiymətlərinə yuxarıdan məhdudiyət qoyur.

$\Omega(\rho)$ funksiyası aşağıdakı sonlu-fərq tənliyini ödəyir:

$$[(\mu_k + i\rho)(\nu_k + i\rho)e^{-i\partial\rho} - (\mu_k - i\rho)(\nu_k - i\rho)e^{i\partial\rho}] \Omega(\rho) = 2 \frac{\varepsilon}{\omega_0} i\rho \Omega(\rho). \quad (5.5)$$

Bu tənliyi $y(x) = S_n(x^2; a, b, c)$ kəsilməz dual Hahn çoxhədlilərinin $c = 1/2$ olduqda [31]

$$[(a + ix)(b + ix)e^{-i\partial x} - (a - ix)(b - ix)e^{i\partial x}] y(x) = (2a + 2b + 4n)ixy(x). \quad (5.6)$$

tənliyi ilə müqayisə edək. Müqayisədən alırıq ki, $a = \mu_k$, $b = \nu_k$, $\varepsilon = \omega_0(2n + \mu_k + \nu_k)$, burada $n = 0, 1, 2, \dots$ radial kvant ədədidir. Nəticədə alırıq

$$E_{nk} = \hbar\omega(2n + \mu_k + \nu_k). \quad (5.7)$$

Bu, baxdığımız üçölçülü sonlu-fərq relyativistik halqavari ossilyator modelinin enerji səviyyələri üçün kvantlanma qaydasını verir. Beləliklə, (5.5) sonlu-fərq tənliyinin çoxhədlili həlli davamlı ikili Hahn polinomları vasitəsilə ifadə edilir:

$$\Omega(\rho) \equiv \Omega_{nk}(\rho) = S_n(\rho^2; \mu_k, \nu_k, \frac{1}{2}). \quad (5.8)$$

Qeyd edək ki, kəsilməz dual Hahn çoxhədlilərlə [32] əlaqəsini müəyyən edir

$$S_n(x^2; a, b, c) = (a+b)_n(a+c)_n = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n & a+ix & a-ix \\ a+b & a+c \end{matrix} \middle| 1\right). \quad (5.9)$$

Kəsilməz dual Hahn çoxhədliləri aşağıdakı ortoqonallıq şərtini ödəyir [31]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 S_n(x^2; a, b, c) S_m(x^2; a, b, c) dx = \\ = \Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+b+c)n! \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

İndi (5.7) enerji səviyyələrinə uyğun (5.1) $R(\rho)$ radial dalğa funksiyaları üçün ifadə yazıla bilər

$$R_{nk}(\rho) = c_{nk}(-\rho)^{(\mu_k)} M_{\nu_k}(\rho) S_n(\rho^2; \mu_k, \nu_k, \frac{1}{2}). \quad (5.11)$$

(5.11) funksiyası üçün ortoqonallıq şərti (5.10) şərtindən asanlıqla alınır

$$\int_0^\infty R_{nk}^*(\rho) R_{mk}(\rho) d\rho = \delta_{nm}. \quad (5.12)$$

Buradan normallama sabiti üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$c_{nk} = 2^{1/2} [n! \Gamma(n + \mu_k + \nu_k) \Gamma(n + \mu_k + 1/2) \Gamma(n + \nu_k + 1/2)]^{-1/2}. \quad (5.13)$$

Beləliklə, tam dalğa funksiyası forması:

$$\begin{aligned} \psi_{nkm}(\mathbf{r}) = c_{nk} C_{km} \frac{1}{r} \left(-\frac{r}{\lambda}\right)^{(\mu_k)} M_{\nu_k}(\rho) S_n\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2; \mu_k, \nu_k, \frac{1}{2}\right) \times \\ \times (1 - \cos\vartheta)^A (1 + \cos\vartheta)^B P_k^{(2A, 2B)}(\cos\vartheta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

6. Qeyri-relyativistik limit hali

Asanlıqla göstərmək olar ki, enerji spektri üçün (5.7) düsturu və relyativistik halqəşəkilli ossilyatorun radial dalğa funksiyası üçün (5.11) düsturu düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir, yəni qeyri-relyativistik

limitdə $c \rightarrow \infty$ qeyri-relyativistik halqəşəkilli ossilyatorun uyğun düsturlarına keçir. Bunun üçün aşağıdakı limit və asimptotik münasibətləri nəzərə almaq kifayətdir [11]:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mu_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\Lambda_k} \equiv a, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} (\nu_k - \frac{1}{\omega_0}) = \frac{1}{2}, \quad (6.1)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lambda^{\mu_k} (-\rho)^{(\mu_k)} = (-r)^a, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} M_{\nu_k}(\rho) \cong \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{\omega_0} \ln \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{2} \lambda_0^2 r^2\right), \quad (6.2)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\omega_0^n}{n!} S_n\left(\rho^2; \mu_k, \nu_k, \frac{1}{2}\right) = L_n^{a-1/2}(\lambda_0^2 r^2). \quad (6.3)$$

Burada $\lambda_0 = \sqrt{m_0 \omega / \hbar}$ və $L_n^a(z)$ ümumiləmiş Lager çoxhədliləridir [32].

7. Nəticə

Sonlu-fərq relyativistik kvant mexanikasının fiziki problemlərin böyük bir sinfinə tətbiqi qeyri-

relyativistik kvant mexanikasının dəqiq həll oluna bilən problemlərinin relyativistik ümumiləşməsinə tələb edir. Bu işdə halqavari ossilyator potensialı üçün relyativistik sonlu-fərq dalğa tənliyinin dəqiq həllərini tapdıq. Bu tənliyin radial hissəsini və bucaq hissəsini funksional üsulla həll etdik. Göstərdik ki, radial dalğa funksiyası kəsilməz dual Hahn çoxhədliləri ilə, bucaq

dalğa funksiyası isə Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunur. Biz həmçinin göstərdik ki, baxılan modelin

radial dalğa funksiyaları və enerji spektrləri düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir.

- [1] *L.D. Landau and E.M. Lifshitz*, Quantum Mechanics, 3rd edn. (Pergamon Press, New York, 1979).
- [2] *Flügge*, Practical Quantum Mechanics, (Springer, Berlin, 1974).
- [3] *W. Greiner*. Relativistic Quantum Mechanics, 3rd edn. (Springer, Berlin, 2000).
- [4] *V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov, N.B.Skachkov*. Quasi-potential approach and the expansion in relativistic spherical functions, *Nuovo Cimento A55*, 1968, 233-257.
- [5] *M. Freeman, M.D. Mateev, R.M. Mir-Kasimov*. On a relativistic quasipotential equation with local interaction, *Nucl. Phys. B* 12, 1969, 197–215.
- [6] *E.D. Kagramanov, R.M. Mir-Kasimov, Sh.M.Nagiyeu*. The covariant linear oscillator and generalized realization of the dynamical $SU(1, 1)$ symmetry algebra, *J. Math. Phys.*, 31:7, 1990, 1733–1738.
- [7] *Sh. M. Nagiyeu*. On a hidden symmetry of a relativistic Coulomb problem in the quasipotential approach, *J. Phys. A: Math. Gen.* 21, 1988, 2559-2564.
- [8] *R. A. Frick*. Eur. A relativistic superalgebra in a generalized Schrödinger picture, *Phys. J. C* 28, 2003, 431-435.
- [9] *Sh. M. Nagiyeu*. Theor. Math. Phys., Dynamical symmetry group of the relativistic Coulomb problem in the quasipotential approach, 80, 1989, 40-46.
- [10] *N.M. Atakishiyev, R.M. Mir-Kasimov, Sh.M. Nagiyeu*. A Relativistic Model of the Isotropic Oscillator, *Ann. der Phys.*, 42:1, 1985, 25–30.
- [11] *Sh. M. Nagiyeu, E. I. Jafarov, R. M. Imanov*. The relativistic linear singular oscillator, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36, 7813, 2003.
- [12] *S.M. Nagiyeu, E.I. Jafarov, R.M. Imanov, L. Homorodean*. A relativistic model of the isotropic three-dimensional singular oscillator, *Physics Letters A* 334, 2005, 260–266.
- [13] *Yu. A. Grishechkin, V. N. Kapshai*. Solution of the Logunov-Tavkhelidze equation for the three-dimensional oscillator potential in the relativistic configuration representation, *Russ. Phys. J.* 61, 1645, 2019.
- [14] *H. Hartmann*. Die Bewegung eines Körpers in einem ringförmigen potential feld. *Teor. Chim. Acta* 24(2–3), 201–206, 1972.
- [15] *C.J. Quesne*. A new ring-shaped potential and its dynamical invariance algebra. *Phys. A: Math. Gen.* 21, 1988, 3093–3103.
- [16] *A. Hautot*. Exact motion in noncentral electric fields, *J. Math. Phys.* 14, 1973, 1320–1327.
- [17] *A. Khare, R.K. Bhaduri*. Exactly solvable noncentral potentials in two and three dimensions. *Am. J. Phys.* 62, 1008–1014, 1994.
- [18] *B. Gönül, I. Zorba*. Supersymmetric solutions of noncentral potentials. *Phys. Lett A* 269, 83–88 (2000).
- [19] *C.Y. Chen, C.L. Liu, S.S. Dong*. The normalized wavefunctions of the Hartmann potential and explicit expressions for their radial average values. *Phys. Lett. A* 305, 341–348, 2002.
- [20] *C. Berkdemir, J. Han*. Any l-state solutions of the Morse potential through the Pekeris approximation and Nikiforov–Uvorov method. *Chem. Phys. Lett.* 409, 203–207, 2005.
- [21] *C.Y. Fu, D.T. Qing*. Exact solutions of the Schrödinger equation for a new ring-shaped nonharmonic oscillator potential. *Int. J. Mod. Phys. A* 23, 1919–1927, 2008.
- [22] *S.H. Dong, G.H. Sun, M.L. Cassou*. Exact solutions and ladder operator for a new anharmonic oscillator. *Phys. Lett. A* 340, 94–103. 2005.
- [23] *C.Y. Chen, S.H. Dong*. Exactly complete solutions of the Coulomb potential plus a new ring-shaped potential. *Phys. Lett. A* 335, 374–382, 2005.
- [24] *G.Q.H. Fu, M.C. Zhang*. Exact solution for a noncentral electric dipole ring-shaped potential in the tridiagonal representation. *J. Math. Phys.* 52, 042108, 2011.
- [25] *C.J. Berkdemir*. A novel angle-dependent potential and its exact solution. *Math. Chem.* 46, 139–154, 2009.
- [26] *Q.W. Chao*. Bound states of the Klein-Gordon and Dirac equations for the potential $V(r) = Ar^{-2} - Br^{-1}$, *Chin.Phys.* 12 (10), 1054-1104, 2003.
- [27] *S.H. Dong, C.Y. Chen, M.L. Cassou*. Quantum properties of complete solutions for a new noncentral ring-shaped potential. *Int. J. Quan. Chem.* 105, 453–462, 2005.
- [28] *F. Yasuk, A. Durmus, I. Boztosun*. Exact analytical solution of the relativistic Klein–Gordon equation with noncentral equal scalar and vector potentials. *J. Math. Phys.* 47, 082302, 2006.
- [29] *Sh.M. Nagiyeu, A.I. Ahmadov, V.A.Tarverdiyeva*. Approximate solutions to the Klein–Fock–Gordon equation for the sum of coulomb and ring-shaped-like potentials. *Adv. High Energy Phys.* 2020, 1356384, 2020.
- [30] *Sh.M.Nagiyeu, A.I. Ahmadov*. Exact solution of the relativistic finite difference equation for the Coulomb plus Ring-Shaped potential, *Int. J. Mod. Phys. A* 34(17), 2019, 1950089.
- [31] *B. Tchana, et al.* Factorization method for exact solution of the noncentral modified Killingbeck potential plus a ring-shaped-like potential. *Mod. Phys. A* 34, 1950072, 2019.
- [32] *Shakir M. Nagiyeu, Shovqiyya A. Amirova, Hasan P. Veliyeu*. Comment on “a quantum

exactly solvable nonlinear oscillator with quasi-harmonic behavior” and “algebraic solutions of shape-invariant position-dependent effective mass systems” and others / -Bakı: Azərbaycan Fizika Jurnalı, 2021 volume XXVII, №4, section: En, page 53-64.

[33] *R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttow. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues (Springer-Verlag, Berlin, 2010.*

Sh.M. Nagiyev, G.G. Quliyeva, V.A. Tarverdiyeva

EXACT SOLUTION OF THE RELATIVISTIC FINITE-DIFFERENCE EQUATION FOR THE RING-SHAPED OSCILLATOR POTENTIAL

We solve exactly the relativistic finite-difference equation for the quantum three-dimensional ring-shaped oscillator potential. Our investigation is based on a finite-difference version of relativistic quantum mechanics. So-called relativistic configurational \mathbf{r} -space is a key concept here. We show that the radial wavefunctions and angular wavefunctions are expressed through the continuous dual Hahn polynomials and Jacobi polynomials, respectively. A discrete energy spectrum has been found. The radial wave functions and energy spectrum have the correct nonrelativistic limit.

Qəbul olunma tarixi: 26.05.2025